МАКСИМАЛЬНО ПРИВОДИМАЯ МОНОДРОМИЯ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Т.М. САДЫКОВ AND С. ТАНАБЭ

Аннотация. В настоящей работе изучается ветвление решений двумерных голономных систем дифференциальных уравнений, гипергеометрических в смысле Горна. Особое внимание уделяется инвариантному относительно действия монодромии подпространству решений с базисом из многочленов Пюизо. Основными объектами изучения являются (1) системы Горна, заданные симплициальными конфигурациями и (2) системы Горна, чьи многоугольники Оре-Сато являются либо зонотопами, либо суммами (в смысле Минковского) треугольников и отрезков, пропорциональных их сторонам. Доказано необходимое и достаточное условие максимальной приводимости представления монодромии двумерной гипергеометрической системы, то есть, возможности представления пространства ее голоморфных решений в виде прямой суммы одномерных инвариантных подпространств.

1. Введение

Вычисление групп монодромии дифференциальных уравнений или их систем – трудная задача аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Для вычисления группы монодромии необходимо владение информацией о голоморфных решениях системы уравнений во всей ее полноте, включая размерность пространства решений, базис в этом пространстве, особенности решений, топологию их дополнения и умение аналитически продолжить базис вдоль любого замкнутого пути в дополнении к особенностям.

Целью настоящей работы является вычисление групп монодромии некоторых гипергеометрических систем с двумя независимыми переменными и изучение их свойств. В ней используются и развиваются результаты, полученные в работах [6] и [7]. В то время как группа монодромии классического гипергеометрического уравнения Гаусса была найдена еще Шварцем, а группа монодромии обыкновенного обобщенного гипергеометрического дифференциального уравнения была подробно изучена в работе [10], вычисление группы монодромии произвольной гипергеометрической системы уравнений (несмотря на значительные усилия исследователей и успешное вычисление этой группы во многих частных случаях, см. [8], [9] и ссылки на литературу в этих работах) является трудной нерешенной задачей.

Первый автор был поддержан грантом Правительства Российской Федерации для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006), грантами РФФИ 13-01-12417-офи-м2 и 14-01-00544-а, а также грантом Японского общества продвижения науки в 2010 г. Второй автор был поддержан грантом Японского общества продвижения науки 20540086.

Постановка задач в настоящей главе восходит к работе [11], в которой авторы поставили проблему описания всех неконфлюэнтных систем Гельфанда-Капранова-Зелевинского (см. [2]), имеющих рациональные решения (отличные от тождественного нуля) для некоторого выбора вектора параметров. Другими словами, требуется найти критерий существования одномерного подпространства в пространстве всех голоморфных решений системы Гельфанда-Капранова-Зелевинского (ГКЗ) с тривиальным действием группы монодромии на нем.

В настоящей работе решается тесно связанная с этой проблемой задача описания всех голономных гипергеометрических систем Горна с двумя независимыми переменными (см. [12] и ссылки на литературу в этой работе), чьи пространства голоморфных решений распадаются в прямые суммы одномерных инвариантных подпространств (теорема 6.1). В дальнейшем мы будем называть такое представление монодромии *максимально приводимым.*

Связь между гипергеометрическими системами уравнений Гельфанда-Капранова-Зелевинского и Горна была в деталях изучена в § 5 работы [12]: для каждой системы ГКЗ существует каноническим образом определенная система Горна и естественная биекция между некоторым подпространством ее голоморфных решений и всем пространством решений системы ГКЗ. Решения системы Горна, не имеющие образа в пространстве решений системы ГКЗ, суть ее стойкие решения в классе многочленов Пюизо в смысле данного ниже определения 2.10. Здесь и всюду в дальнейшем под многочленом Пюизо мы будем понимать конечную линейную комбинацию мономов с, вообще говоря, комплексными показателями. В соответствии с теоремой 5.3 работы [12], стойкие полиномиальные решения порождают коядро отображения из пространства решений системы ГКЗ в пространство решений связанной с ней системы Горна.

Ответ на упомянутый выше вопрос, поставленный в [11], может быть сформулирован следующим образом. Размерность пространства нестойких многочленов Пюизо, удовлетворяющих заданной системе Горна, равна размерности пространства многочленов Пюизо, удовлетворяющих ассоциированной с ней системой Гельфанда-Капранова-Зелевинского. Для системы Горна с двумя независимыми переменными исчерпывающее описание пространства ее стойких полиномиальных решений дается предложением 2.12 и следствием 4.2.

Авторы благодарны рецензенту за внимательное прочтение рукописи и многочисленные предложения, позволившие существенно улучшить текст статьи. Публикация настоящей статьи в данном специальном выпуске служит второму автору (С.Т.) поводом для отдачи дани должной благодарности А.А. Болибруху за его постоянную поддержку в течение многих лет.

2. Обозначения, определения и предварительные сведения

Всюду на протяжении настоящего параграфа будут использоваться следующие обозначения:

$n =$ размерность комплексного пространства переменных с координатой x;

$m =$ число строк матрицы, определяющей систему уравнений Горна;

$\nu(a_1, b_1; a_2, b_2) \equiv \nu \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ = индекс пары векторов $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$, см. определение 2.6;

для $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $|m| = \sum_{i=1}^n m_i$ и $m! = m_1! \ldots m_n!$;

для $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $x^m = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$;

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ = множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ = множество неположительных целых чисел;

$\mathrm{Horn}(\varphi)$ = гипергеометрическая система Горна, определенная коэффициентом Оре-Сато φ, см. определение 2.3.

$\mathrm{Horn}(A, c)$ = гипергеометрическая система Горна, определенная коэффициентом Оре-Сато (2.2), где $t_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $U(s) \equiv 1$. См. конструкцию, следующую за определением 2.3;

$\Psi(\varphi)$ = подпространство многочленов Пюизо в пространстве голоморфных решений системы Горна, определяемой коэффициентом Оре-Сато φ, см. определение 2.3;

$\Psi_0(\varphi) \subset \Psi(\varphi)$ – подпространство стойких полиномиальных решений системы Горна, определенной коэффициентом Оре-Сато φ, см. определение 2.10;

$\mathcal{F}$ = множество всех решений системы Горна, имеющих полный носитель. Отметим, что это, вообще говоря, не линейное пространство, так как пересечение областей сходимости разных элементов множества $\mathcal{F}$ может быть пустым;

$\mathcal{F}_{x^{(0)}}$ = линейное пространство решений системы Горна, имеющих полный носитель, и аналитических в окрестности неособой точки $x^{(0)}$;

$\mathcal{A}(\varphi)$ = амеба особенности коэффициента Оре-Сато φ; ${}^c\mathcal{A}(\varphi)$ дополнение к амебе; см. определение 5.1;

$C^\vee$ = конус, двойственный для конуса C;

для коэффициента Оре-Сато φ и $\zeta \in \mathbb{R}^n$ положим

$$M(\varphi, \zeta) = \begin{cases} \text{связная компонента множества } {}^c\mathcal{A}(\varphi), \text{ содержащая } \zeta, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } \zeta \in {}^c\mathcal{A}(\varphi), \\ \mathbb{R}^n, \text{ если } \zeta \in \mathcal{A}(\varphi); \end{cases}$$

$\mathcal{P}(\varphi)$ = многоугольник коэффициента Оре-Сато φ, см. определение 2.5.

$S(\mathrm{Horn}(A, c))$ = пространство решений системы $\mathrm{Horn}(A, c)$, являющихся голоморфными вне особой гиперповерхности.

Определение 2.1. Формальный ряд Лорана

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \varphi(s)\, x^s \tag{2.1}$$

будет называться *гипергеометрическим,* если для всех $j = 1, \ldots, n$ отношение его соседних коэффициентов $\varphi(s + e_j)/\varphi(s)$ есть рациональная функция индексов суммирования $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Всюду на протяжении настоящей статьи мы будем обозначать эту функцию через $P_j(s)/Q_j(s + e_j)$. Здесь $\{e_j\}_{j=1}^n$ – стандартный базис решетки $\mathbb{Z}^n$. *Носителем* данного ряда мы будем называть подмножество $\mathbb{Z}^n$, для которого $\varphi(s) \neq 0$. Мы будем говорить, что такой ряд имеет *полный носитель,* если выпуклая оболочка его носителя содержит подходящий сдвиг открытого n-мерного конуса. Что касается области сходимости ряда Лорана см. теорему 7 из работы [15] и теорему 5.3 ниже.

Гипергеометрической функцией мы будем называть (вообще говоря, многозначную) аналитическую функцию, полученную путем аналитического продолжения гипергеометрического ряда с непустой областью сходимости вдоль всех возможных путей.

Теорема 2.2. (Оре, Сато [1], [19]) *Коэффициенты гипергеометрического ряда задаются формулой*

$$\varphi(s) = t^s\, U(s) \prod_{i=1}^{m} \Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i), \tag{2.2}$$

где $t^s = t_1^{s_1} \dots t_n^{s_n}$, $t_i, c_i \in \mathbb{C}$, $\mathbf{A}_i = (A_{i,1}, \dots A_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, m$, *и* $U(s)$ *есть произведение некоторой рациональной функции и периодической функции* $\phi(s)$, *такой, что* $\phi(s + e_j) = \phi(s)$ *для всех* $j = 1, \dots, n$.

В работе [19] (приложение (A.3)) дано точное описание рационального множителя $U(s)$.

Мы будем называть произвольную функцию вида (2.2) *коэффициентом Оре-Сато гипергеометрического ряда.* Заметим, что ввиду формулы $\sin(\pi z)\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi$ мы допускаем в качестве коэффициента Оре-Сато и следующую функцию,

$$\varphi(s) = t^s \prod_{i\in\mathbf{I}} \Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i) \prod_{j\notin\mathbf{I}} \frac{e^{\pi\sqrt{-1}(\langle \mathbf{A}_j, s\rangle + c_j)}}{\Gamma(1 - \langle \mathbf{A}_j, s\rangle - c_j)},$$

где $\mathbf{I} \subset \{1, \dots, m\}$.

По описанному выше набору данных $(t_i, c_i, \mathbf{A}_i, U(s))$, определяющему коэффициент гипергеометрического ряда, при помощи тождества Γ-функции непосредственно вычисляются рациональные функции $P_j(s)/Q_j(s+e_j)$. Решение обратной задачи восстановления коэффициента гипергеометрического ряда по набору рациональных функций требует решения системы разностных уравнений, которая имеет решение лишь при выполнении некоторых условий согласования на многочлены P_j, Q_j. Тщательный анализ этой системы разностных уравнений был выполнен в [5].

В настоящей работе коэффициент Оре-Сато (2.2) играет роль первичного объекта, порождающего все остальное: ряд, систему дифференциальных уравнений, алгебраическую гиперповерхность, содержащую особенности решений этой системы, амебу ее определяющего многочлена, и, в заключение (как наиболее сложный объект с самой богатой структурой), группу монодромии гипергеометрической системы дифференциальных уравнений. Мы будем также предполагать, что $m \geq n$, так как в противном случае соответствующий гипергеометрический ряд (2.1) является линейной комбинацией гипергеометрических рядов, зависящих от меньшего числа переменных (с точностью до произвольного множителя, зависящего от оставшихся переменных, что делает систему дифференциальных уравнений неголономной) и n может быть уменьшено настолько, что приведенное выше неравенство выполняется.

Определение 2.3. *Система Горна, ассоциированная с коэффициентом Оре-Сато.* (Формальный) ряд Лорана $\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\varphi(s)x^s$, чьи коэффициенты удовлетворяют соотношениям $\varphi(s+e_i)/\varphi(s) = P_j(s)/Q_j(s+e_j)$, является (формальным) решением следующей гипергеометрической системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$(x_jP_j(\theta) - Q_j(\theta))f(x) = 0, \;\; j = 1,\ldots,n. \tag{2.3}$$

Здесь $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$, $\theta_j = x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$. Мы будем называть эту систему *гипергеометрической системой Горна, ассоциированной с коэффициентом Оре-Сато* $\varphi(s)$ (см. [1]) и обозначать ее $\mathrm{Horn}(\varphi)$. Мы будем обозначать через $S(\mathrm{Horn}(\varphi))$ пространство голоморфных решений $\mathrm{Horn}(\varphi)$. В настоящей работе мы будем рассматривать лишь голономные системы Горна, если противное не оговорено явно, то есть, голономный ранг $\mathrm{rank}(\mathrm{Horn}(\varphi))$ будет всегда предполагаться конечным. Необходимое и достаточное условие голономности системы $\mathrm{Horn}(\varphi)$ установлено в [13], (теорема 6.3).

Мы будем часто иметь дело с важным частным случаем коэффициента Оре-Сато (2.2), в котором $t_i = 1$ для всех $i = 1,\ldots,n$ и $U(s)\equiv 1$. Система Горна, ассоциированная с таким коэффициентом Оре-Сато, будет обозначаться через $\mathrm{Horn}(A,c)$, где A – матрица со строками $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_m\in\mathbb{Z}^n$ и $c = (c_1,\ldots,c_m)\in\mathbb{C}^m$. В данном случае дифференциальные операторы $P_j(\theta)$ и $Q_j(\theta)$ позволяют в явном виде выписать систему (2.3):

$$P_j(s) = \prod_{i:A_{i,j}>0}\prod_{\ell_j^{(i)}=0}^{A_{i,j}-1}\left(\langle\mathbf{A}_i,s\rangle + c_i + \ell_j^{(i)}\right),$$

$$Q_j(s) = \prod_{i:A_{i,j}<0}\prod_{\ell_j^{(i)}=0}^{|A_{i,j}|-1}\left(\langle\mathbf{A}_i,s\rangle + c_i + \ell_j^{(i)}\right).$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $H_j(A,c) = x_jP_j(\theta) - Q_j(\theta)$, $j = 1,\ldots,n$.

Определение 2.4. Коэффициент Оре-Сато (2.2), соответствующий ему гипергеометрический ряд (2.1) и ассоциированная система гипергеометрических уравнений (2.3) называются *неконфлюэнтными,* если

$$\sum_{i=1}^{m}\mathbf{A}_i = 0. \tag{2.4}$$

Известно, что неконфлюэнтная голономная гипергеометрическая система уравнений является регулярной (см., например, теорему 6.3 в [13]), то есть, что каждое ее решение имеет не более чем полиномиальный рост при стремлении к произвольной особой точке внутри некоторого сектора.

Определение 2.5. *Многоугольник неконфлюэнтного коэффициента Оре-Сато, зависящего от двух переменных.* Используя при необходимости теорему умножения Гаусса для Γ-функции и $N\in\mathbb{N}$,

$$\Gamma(\langle\mathbf{A}_i,s\rangle + c_i) =$$

$$\frac{N^{\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i}}{(2\pi)^{(N-1)/2}\sqrt{N}}\,\Gamma\left(\frac{\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i}{N}\right)\Gamma\left(\frac{\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i + 1}{N}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i + N - 1}{N}\right),$$

мы можем без ограничения общности предполагать, что для любого $i = 1, \dots, m$ ненулевые координаты вектора $\mathbf{A}_i$ являются взаимно простыми.

Обозначим через l_i вектор, порождающий подрешетку $\{s \in \mathbb{Z}^2 : \langle \mathbf{A}_i, s\rangle = 0\}$ и пусть k_i – число элементов мультимножества матриц $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$, которые совпадают с $\mathbf{A}_i$. Согласно теореме Минковского, из условия неконфлюэнтности (2.4) следует, что существует однозначно определенный (с точностью до сдвига на целочисленный вектор) выпуклый многоугольник с целыми вершинами, чьи стороны есть сдвиги векторов $k_i l_i$. Заметим, что векторы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ являются внешними нормалями к сторонам этого многоугольника.

Число различных элементов мультимножества векторов $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$ равно числу сторон этого многоугольника, который мы будем называть *многоугольником коэффициента Оре-Сато (2.2)* и обозначать через $\mathcal{P}(\varphi)$.

Обратно, любой плоский выпуклый многоугольник с целыми вершинами определяет матрицу $m \times 2$, чьи строки в сумме дают нулевой вектор, а значит, в совокупности с вектором параметров, и неконфлюэнтную гипергеометрическую систему уравнений. Мы будем обозначать ее через $\mathrm{Horn}(A(\mathcal{P}), c)$. Эта связь иллюстрируется примером 4.5.

Определение 2.6. Для пары векторов (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ положим

$$\nu(a_1, b_1; a_2, b_2) = \begin{cases} \min(|a_1 b_2|, |b_1 a_2|), & \text{если } (a_1, b_1),\ (a_2, b_2) \text{ лежат в противополож-} \\ & \text{ных открытых квадрантах решетки } \mathbb{Z}^2, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы будем называть число $\nu(a_1, b_1; a_2, b_2)$ *индексом,* ассоциированным с парой целочисленных векторов (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Индекс строк матрицы M с двумя строками и двумя столбцами будет обозначаться $\nu(M)$.

Определение 2.7. *Начальным показателем* кратного гипергеометрического ряда

$$x^\alpha \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \varphi(s)\, x^s$$

мы будем называть вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$. Начальный показатель такого ряда определен с точностью до целочисленного вектора, однако, в силу предложения 3.11 и следствия 3.13 (которые будут доказаны в § 3), именно это необходимо для вычисления монодромии гипергеометрических систем.

Определение 2.8. Носитель S ряда, удовлетворяющего системе уравнений (2.3), называется *неприводимым,* если не существует другого ряда, удовлетворяющего (2.3), с носителем в собственном непустом подмножестве множества S.

Определение 2.9. Мы будем называть решение системы Горна с неприводимым носителем $f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha x^\alpha$ *чистым,* если для любых $\alpha, \beta \in \Lambda$ имеет место равенство $\alpha \equiv \beta \mod \mathbb{Z}^n$. Другими словами, ряд Пюизо (в частности, полином Пюизо) с центром в нуле и неприводимым носителем есть чистое решение системы Горна, если он является произведением монома и ряда Лорана. Семейство рядов $\{f_k(x)\}_{k=1}^r$ называется *чистым базисом* в пространстве решений системы Горна в окрестности неособой точки $x \in \mathbb{C}^n$, если каждый ряд f_k сходится в окрестности x, является чистым решением системы Горна, а все вместе они порождают линейное пространство, размерность которого равна ее голономному рангу.

Поскольку уравнения в системе Горна имеют полиномиальные коэффициенты, любое из ее решений, допускающих представление в виде ряда Пюизо с центром в нуле, может быть представлено в виде конечной линейной комбинации чистых решений данной системы, при условии, что она голономна (голономность необходима для конечности линейной комбинации). Более того, в окрестности неособой точки чистый базис локального пространства решений системы Горна определен однозначно, с точностью до перестановки его элементов и их нормировки. Всюду в дальнейшем мы будем пренебрегать этим несущественным отличием одного чистого базиса гипергеометрической системы уравнений от другого и говорить об однозначно определенном чистом базисе системы, указывая, если в этом есть необходимость, способ нормировки его элементов и выбора их порядка. Чистый базис системы Горна особенно удобен для вычисления ее группы монодромии, поскольку для любой петли в пределах области сходимости всех базисных рядов аналитическое продолжение чистого базиса вдоль данной петли задается диагональной матрицей.

Определение 2.10. Полиномиальное решение системы $\mathrm{Horn}(A,c)$ называется *стойким,* если его носитель остается конечным множеством при произвольных малых возмущениях вектора c.

Например, первое из решений гипергеометрической системы (3.5) является стойким мономом Пюизо, так как оно остается мономиальным для любых $(c_1,c_2,c_3) \in \mathbb{C}^3$. Второе решение системы уравнений (3.5) является полиномом (Пюизо) лишь при $-(c_1+c_2+c_3) \in \mathbb{N}$ и потому не относится к числу стойких полиномиальных решений данной системы. Это понятие иллюстрируется примерами 4.5, 6.8 и 6.9.

В дальнейшем мы будем обозначать линейное пространство всех (не обязательно стойких) многочленов Пюизо, удовлетворяющих системе Горна, определенной коэффициентом Оре-Сато $\varphi(s)$, через $\Psi(\varphi)$, а через $\Psi_0(\varphi)$ обозначать пространство всех стойких полиномиальных решений данной системы. Следующее утверждение непосредственно следует из определения 2.10.

Предложение 2.11. *Для коэффициента Оре-Сато φ, заданного формулой (2.2), с вектором параметров $c = (c_1,\ldots,c_m) \in \mathbb{C}^m$ общего положения каждое полиномиальное решение соответствующей гипергеометрической системы* $\mathrm{Horn}(\varphi)$ *является стойким. Другими словами, $\Psi(\varphi) = \Psi_0(\varphi)$ для почти всех $c \in \mathbb{C}^m$.*

Следующее предложение вытекает из анализа системы разностных уравнений для коэффициента гипергеометрического ряда (см. [12]).

Предложение 2.12. *Пусть $\varphi(s)$ – коэффициент Оре-Сато и $f(x)$ – полиномиальное решение системы уравнений* $\mathrm{Horn}(\varphi)$*. Если это полиномиальное решение является стойким, то существует мультииндекс $I = \{i_1,\ldots,i_n\} \subset \{1,\ldots,m\}$ с разными элементами, такой, что для любого $s \in \mathrm{supp} f$ и любого $\ell = 1,\ldots,n$ существует $j \in I$ и $k \in \{0,\ldots,|A_{j,\ell}|-1\}$, такие, что $\langle \mathbf{A}_j, s\rangle + c_j + k = 0$.*

Определение 2.13. Мы будем называть коэффициент Оре-Сато $\varphi(s) = \prod_{i=1}^{m} \Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i)$ (равно как и соответствующую гипергеометрическую систему $\mathrm{Horn}(\varphi(A,c))$) *резонансным,* если существует мультииндекс $I = (i_1, \ldots, i_k)$ с $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$, $1 \leq k \leq m$, такой, что для любого линейного соотношения $a_{i_1}\mathbf{A}_{i_1} + \ldots + a_{i_k}\mathbf{A}_{i_k} = 0$ с целыми взаимно простыми коэффициентами $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in \mathbb{Z}$ выполняется условие $a_{i_1}c_{i_1} + \ldots + a_{i_k}c_{i_k} \in \mathbb{Z}$. Гипергеометрическая система $\mathrm{Horn}(\varphi(A,c))$ называется *максимально резонансной,* если сформулированное выше условие резонансности имеет место для любого мультииндекса $I = (i_1, \ldots, i_k)$, элементам которого соответствуют линейно зависимые целочисленные векторы $\mathbf{A}_{i_1}, \ldots, \mathbf{A}_{i_k}$.

Понятие резонанса в гипергеометрической системе уравнений иллюстрируется следующим примером системы наименьшего возможного голономного ранга.

Пример 2.14. С целью упрощения обозначений здесь и всюду в дальнейшем мы будем определять систему линейных дифференциальных уравнений путем указания порождающих операторов этой системы. Гипергеометрическая система Горна

$$\begin{cases} x_1(\theta_1 + \theta_2 + c_3) - (\theta_1 + c_1), \\ x_2(\theta_1 + \theta_2 + c_3) - (\theta_2 + c_2) \end{cases} \tag{2.5}$$

является единственной (с точностью до мономиальной замены переменных, определенной унимодулярной матрицей) системой Горна с двумя независимыми переменными, чей голономный ранг равен 1 для всех значений ее параметров $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Единственное голоморфное решение данной системы имеет вид $x_1^{-c_1} x_2^{-c_2} (1 - x_1 - x_2)^{c_1+c_2-c_3}$. Эта система уравнений резонансна (и одновременно максимально резонансна, поскольку ее голономный ранг равен 1) в том и только том случае, когда $c_1 + c_2 - c_3 \in \mathbb{Z}$. Группа монодромии системы (2.5) зависит лишь от значений c_1, c_2, c_3 по модулю $\mathbb{Z}$ и является подгруппой в $\mathbb{C}$ с тремя порождающими $\{\exp(2\pi\sqrt{-1}\,c_1)$, $\exp(2\pi\sqrt{-1}\,c_2)$, $\exp(2\pi\sqrt{-1}\,c_3)\}$ в нерезонансном случае. При наличии резонанса эта группа порождается двумя элементами, а в случае тривиальной монодромии состоит из единицы.

Важность понятия резонансности будет раскрыта в следующих ниже теоремах и примерах. В общих словах, нерезонансность параметров гипергеометрической системы означает, что все ее решения являются либо рядами Пюизо с полными носителями (и центром в начале координат), либо стойкими многочленами Пюизо. Резонансные системы могут иметь в качестве решений нестойкие многочлены Пюизо, ряды Пюизо с неполными носителями, а также логарифмические решения, не допускающие представления в виде рядов Пюизо с центром в начале координат. Например, гипергеометрическая система (2.6) является максимально резонансной.

Определение 2.15. Решение $f(x)$ системы уравнений $\mathrm{Horn}(\varphi)$ в окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ будет называться *порождающим* для линейного подпространства $L \subset S(\mathrm{Horn}(\varphi), V(x^{(0)}))$ в пространстве всех голоморфных в достаточно малой односвязной окрестности $V \ni x^{(0)}$ решений системы $\mathrm{Horn}(\varphi)$, если каждый элемент L допускает представление в виде линейной комбинации ветвей функции $f(x)$ на множестве $V(x^{(0)})$. Функция будет называться *порождающим решением* гипергеометрической системы уравнений, если она порождает все пространство ее голоморфных решений в окрестности произвольной неособой точки. В параграфе 4 нами будут построены порождающие решения для двух важных семейств гипергеометрических систем уравнений (см. предложение 4.4 и предложение 4.7).

Пример 2.16. Максимально резонансная система Горна, заданная коэффициентом Оре-Сато $\varphi(s_1, s_2) = \Gamma(s_1)\Gamma(s_2)\Gamma(s_1+s_2)\Gamma(-s_1)^2\Gamma(-s_2)^2$, порождается дифференциальными операторами

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1\,\theta_1(\theta_1+\theta_2)-\theta_1^2, \\ x_2\,\theta_2(\theta_1+\theta_2)-\theta_2^2. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Ее голономный ранг равен 4, а пространство голоморфных решений в окрестности неособой точки общего положения порождается функциями 1, $\log x_1$, $\log x_2$, $\log x_1 \cdot \log x_2 + \mathrm{PolyLog}(2, x_1) + \mathrm{PolyLog}(2, x_2)$. Здесь $\mathrm{PolyLog}\,(2, z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^2$. Результант главных символов дифференциальных операторов (2.6) равен $x_1x_2(x_1-1)(x_2-1)(x_1+x_2-1)$. Используя свойства функции $\mathrm{PolyLog}(2, z)$ (см. [14]), мы заключаем, что группа монодромии системы уравнений (2.6) порождается четырьмя матрицами

$$M_{x_1=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\pi\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\pi\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{x_2=0} = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\pi\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{x_1=1} = \begin{pmatrix} 1 & -2\pi\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{x_2=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\pi\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что решение $\log x_1 \cdot \log x_2 + \mathrm{PolyLog}(2, x_1) + \mathrm{PolyLog}(2, x_2)$ является порождающим для $S(\mathrm{Horn}(\varphi))$.

Если представление монодромии всего пространства решений системы уравнений $S(\mathrm{Horn}(\varphi))$ является неприводимым, то в нем найдется порождающее решение этой системы. С другой стороны, представление монодромии может быть приводимым в то время как в пространстве $S(\mathrm{Horn}(\varphi))$ есть порождающее решение, как это показывает приведенный выше пример 2.16.

Основной результат настоящей работы (теорема 6.1) дает описание систем Горна с двумя переменными, чьи пространства решений допускают разложение в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств для почти всех значений их параметров. Всюду в дальнейшем мы будем использовать следующее определение.

Определение 2.17. Представление монодромии системы дифференциальных уравнений называется *максимально приводимым,* если пространство голоморфных решений этой системы есть прямая сумма одномерных инвариантных (относительно действия монодромии) подпространств.

3. Структура пространства голоморфных решений системы Горна

3.1. **Интегральные представления и вычисление многомерных вычетов.** Нашим основным инструментом для вычисления аналитического продолжения гипергеометрического ряда будет интеграл Меллина-Барнса. Следующая теорема дает интегральное представление для решений системы Горна.

Теорема 3.1. (См. [5]). *Пусть* $\psi(s)=\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\langle \mathbf{A}_j,s\rangle+c_j)$ *– неконфлюэнтный коэффициент Оре-Сато. Положим* $\varphi(s)=\psi(s)\phi(s)$, *где* $\phi(s)$ *– периодическая мероморфная функция с периодом 1 в каждом координатном направлении. Тогда интеграл Меллина-Барнса*

$$MB(\varphi,\mathcal{C}):=\int\limits_{\mathcal{C}}\varphi(s)\,x^s ds \tag{3.1}$$

дает решение системы уравнений $\mathrm{Horn}(A,c)$. *Здесь* $\mathcal{C}$ *– произвольный* n*-мерный контур, гомологичный своему единичному сдвигу в любом вещественном направлении в дополнении к множеству особенностей подынтегрального выражения в (3.1).*

Следующее предложение доказывается, подобно предыдущей теореме, при помощи вычисления многомерных вычетов в простых особенностях подынтегрального выражения. Оно позволяет преобразовать гипергеометрический ряд с несколькими переменными в кратный интеграл Меллина-Барнса.

Предложение 3.2. *Обозначим через* $\psi(k)/k!$ *неконфлюэнтный коэффициент Оре-Сато с параметрами общего положения, и через* $A\in GL(n,\mathbb{Z})$ *– целочисленную невырожденную квадратную матрицу со строками* $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_n$ *и пусть* $c\in\mathbb{C}^n$. *Для достаточно малого* $\varepsilon>0$ *и* $k\in\mathbb{N}^n$ *обозначим* $\tau(k)=\{s\in\mathbb{C}^n:|\langle\mathbf{A}_j,s\rangle+c_j+k_j|=\varepsilon,\quad j=1,\dots,n\}$ *и определим* $\mathcal{C}=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n}\tau(k)$. *Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{(-1)^{|k|}}{k!}\psi(k)\,x^{Ak+c}=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n|A|}\int\limits_{\mathcal{C}}\prod_{j=1}^{n}\Gamma((-A^{-1}(s-c))_j)\,\psi(A^{-1}(s-c))\,x^s ds.$$

Следующая теорема дает решение гипергеометрической системы $\mathrm{Horn}(A,c)$ в виде кратного интеграла Меллина-Барнса и позволяет преобразовать последний в гипергеометрический ряд Пюизо путем вычисления вычетов в заданном семействе особенностей подынтегрального выражения.

Теорема 3.3. (См. [5]). *Обозначим через* A *целочисленную* $m\times n$*-матрицу максимального ранга* n *со строками* $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_m$, *а через* $I=(i_1,\dots,i_n)\subset\{1,\dots,m\}$ *– мультииндекс, такой, что матрица* $\mathbf{A}_I$ *со строками* $\mathbf{A}_{i_1},\dots,\mathbf{A}_{i_n}$ *невырождена. Для достаточно малого* $\varepsilon>0$ *и* $k\in\mathbb{N}^n$ *положим* $\tau_I(k)=\{s\in\mathbb{C}^n:|\langle\mathbf{A}_{i_j},s\rangle+c_{i_j}+k_j|=\varepsilon,\quad j=1,\dots,n\}$ *и* $\mathcal{C}_I=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n}\tau_I(k)$. *Тогда для почти всех* $c\in\mathbb{C}^m$ *и* $c_I=(c_{i_1},\dots,c_{i_n})$ *следующий интеграл Меллина-Барнса дает решение системы уравнений* $\mathrm{Horn}(A,c)$ *и может быть представлен в виде гипергеометрического ряда*

Пюизо:

$$\begin{aligned}(3.2)\qquad &\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\mathcal{C}_I}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\langle \mathbf{A}_j, s\rangle + c_j)\, x^s ds \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{(-1)^{|k|}}{k!|\mathbf{A}_I|}\prod_{j\notin I}\Gamma(\langle \mathbf{A}_j, -\mathbf{A}_I^{-1}(k+c_I)\rangle + c_j)\, x^{-\mathbf{A}_I^{-1}(k+c_I)}.\end{aligned}$$

3.2. **Формулы голономного ранга.** Для формулировки основной теоремы 3.7 данного параграфа нам понадобится следующее определение.

Определение 3.4. Для $m \geq n$ обозначим через A целочисленную матрицу размера $m \times n$ ранга n со строками $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$, а через $c \in \mathbb{C}^m$ – вектор параметров. Пусть $I = (i_1, \dots, i_n)$ – мультииндекс, такой, что квадратная матрица $\mathbf{A}_I$ со строками $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ невырождена, а $c \in \mathbb{C}^m$ – вектор параметров. Обозначим через c_I вектор $(c_{i_1}, \dots, c_{i_n})$. Мы будем называть гипергеометрическую систему $\mathrm{Horn}(\mathbf{A}_I, c_I)$ *атомарной системой уравнений, ассоциированной с системой* $\mathrm{Horn}(A, c)$. Число атомарных систем, ассоциированных с гипергеометрической системой $\mathrm{Horn}(A, c)$, равно числу невырожденных $n \times n$ подматриц в матрице A.

Из теоремы 1.3 работы [17] следует, что, с точки зрения анализа носителей решений, система Горна с параметрами общего положения может быть сведена к набору всех ассоциированных с ней атомарных гипергеометрических систем. А именно, множество носителей решений такой системы совпадает с множеством носителей решений всех ассоциированных с ней атомарных систем. В дальнейшем это будет проиллюстрировано в примере 6.8 (см. также рис. 3). В частности, множество всех начальных показателей полиномиальных решений гипергеометрической системы есть объединение множеств начальных показателей полиномиальных решений всех ассоциированных с ней атомарных систем. Мы сформулируем следующее утверждение.

Предложение 3.5. *Для каждого решения атомарной системы, ассоциированной с неконфлюэнтной и голономной системой* $\mathrm{Horn}(A, c)$ *с вектором параметров* $c \in \mathbb{C}^m$ *в общем положении, имеется решение* $u(x) \in S(\mathrm{Horn}(A, c))$, *чей носитель совпадает с его носителем.*

Доказательство. Рассмотрим неконфлюэнтную и голономную систему $\mathrm{Horn}(A, c)$ с коэффициентом Оре-Сато

$$\varphi(s) = \phi(s)\prod_{i=1}^{m}\Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i),$$

при подходящей мероморфной периодической функции $\phi(s)$.

Каждое решение ассоциированной атомарной системы $\mathrm{Horn}(A_I, c_I), \mathbf{I} = (i_1, \dots, i_n) \subset \{1, \dots, m\}$, имеет следующее интегральное представление

$$v(x) = \int_{C_\mathbf{I}}\prod_{i\in\mathbf{I}}\Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i)\phi(s)x^s ds,$$

при подходящем контуре $C_\mathbf{I}$ и .

С помощью данного интегрального представления, получаем следующее решение системы $\mathrm{Horn}(A, c)$,

$$u(x) = \int_{C_{\mathbf{I}}} \prod_{i \in \mathbf{I}} \Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i) \prod_{j \notin \mathbf{I}} \Gamma(\langle \mathbf{A}_j, s\rangle + c_j)\phi(s) x^s ds.$$

В силу того, что вектор параметр $c \in \mathbb{C}^m$ находится в общем положении, можно предположить, что контур $C_{\mathbf{I}}$ содержит только $n-$ кратные полюса фактора $\prod_{i\in\mathbf{I}} \Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i)$, с которыми не совпадают полюса фактора $\prod_{j\notin\mathbf{I}} \Gamma(\langle \mathbf{A}_j, s\rangle + c_j)\phi(s)$. Это означает, что в малой окрестности полюса фактора $\prod_{i\in\mathbf{I}} \Gamma(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i)$ мероморфная функция $\prod_{j\notin\mathbf{I}} \Gamma(\langle \mathbf{A}_j, s\rangle + c_j)\phi(s)$ голоморфна. Отсюда немедленно вытекает, что носитель $u(x)$ совпадает с носителем $v(x)$. □

Замечание 3.6. Если отсутствует условие об общности положения вектора параметров $c \in \mathbb{C}^m$, то носитель решения $u(x) \in S(\mathrm{Horn}(A, c))$ может быть строгим подмножеством носителя любого решения атомарной системы $v(x) \in S(\mathrm{Horn}(A_I, c_I))$.

Рассмотрим следующий пример. $A = ((-1, 2), (2, -1), (-1, -1))$, $c = (0, 0, -2)$. С решением системы $\mathrm{Horn}(A, c)$

$$w(x) = \sum_{m,n \geq 0} Res_{-s_1+2s_2=-m, 2s_1-s_2=-n} \Gamma(-s_1 + 2s_2)\Gamma(-s_1 - s_2 - 2)\Gamma(2s_1 - s_2) x^s$$

ассоциируется решение атомарной системы

$$v(x) = \sum_{m,n \geq 0} Res_{-s_1+2s_2=-m, 2s_1-s_2=-n} \Gamma(-s_1 + 2s_2)\Gamma(2s_1 - s_2) x^s.$$

Поскольку пространство решений $S(\mathrm{Horn}(A, c))$ остается инвариантным под действием монодромии, функция

$$u(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} (w(x_1 e^{2\pi\sqrt{-1}}, x_2) - w(x_1, x_2))$$

является решением системы $\mathrm{Horn}(A, c)$. Прямое вычисление показывает

$$u(x) = \frac{\left(x_1^{2/3} x_2^{2/3} + \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)^2}{3 x_1^{4/3} x_2^{4/3}},$$

т.е. носитель $u(x)$ совпадает с множеством, состоящих из 6 точек $\{s \in \mathbb{C}^2 : s_1 - 2s_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, -2s_1 + s_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, -2 \leq s_1 + s_2 \leq 0\}$. Стоит отметить, что в этих 6 точках у мероморфной функции $\Gamma(-s_1+2s_2)\Gamma(-s_1-s_2-2)\Gamma(2s_1-s_2)x^s$ имеются трехкратные полюсы, а остальные ее полюсы все двукратные.

Следующая теорема содержит основные утверждения о свойствах пространства голоморфных решений системы Горна, которые нам потребуются в дальнейшем.

Теорема 3.7. *Пусть гипергеометрическая система* $\mathrm{Horn}(A, c)$ *неконфлюэнтна и голономна. Тогда для почти всех значений вектора параметров* $c \in \mathbb{C}^m$ *имеют место следующие утверждения.*

(1) *Пространство голоморфных решений системы* $\mathrm{Horn}(A,c)$ *в окрестности неособой точки* $x^{(0)}$ *допускает следующее разложение:*

$$S(\mathrm{Horn}(A,c)) = \Psi \oplus \mathcal{F}_{x^{(0)}}.$$

Здесь Ψ *– подпространство стойких полиномов Пюизо, удовлетворяющих данной системе, а* $\mathcal{F}_{x^{(0)}}$ *– подпространство ее решений, представимых в виде рядов Пюизо с полными носителями, сходящимися в* $x^{(0)}$.

(2) *Размерность пространства* $\mathcal{F}_{x^{(0)}}$ *рядов Пюизо (с центром в начале координат), удовлетворяющих* $\mathrm{Horn}(A,c)$ *и сходящихся в точке* $x^{(0)} \in {}^{c}\mathcal{A}(\varphi(A,c))$, *равно*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_{x^{(0)}} = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_n)\subset\{1,\ldots,m\}} |\det \mathbf{A}_I|,$$

где I *пробегает все мультииндексы, удовлетворяющие* $M(\varphi(A,c), \mathrm{Log}\, x^{(0)}) \subset \mathrm{Log}\, x^{(1)} - (\mathbf{A}_I^{-1}\mathbb{R}_+^n)^\vee$ *для некоторой точки* $x^{(1)} \in \mathbb{C}^n$.

(3) *Размерность пространства* Ψ_0 *стойких полиномиальных решений двумерной системы* $\mathrm{Horn}(A,c)$ *равна* $\dim_{\mathbb{C}} \Psi_0 = \sum\limits_{\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \text{ лин. независ.}} \nu(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j)$.

Доказательство. (1) Любое решение системы Горна с параметрами общего положения, представленное в виде ряда Пюизо с центром в начале координат, есть либо ряд с полным носителем, либо стойкий многочлен Пюизо, так как согласно предложению 2.11, все полиномиальные решения такой системы являются стойкими. Действительно, если многочлен является решением системы Горна, то вектор его начальных показателей удовлетворяет некоторой системе линейных алгебраических уравнений, число уравнений в которой не меньше размерности пространства переменных. Предположение об общности вектора параметров означает, что и правые части этих уравнений являются достаточно общими. Такая система может быть разрешима лишь в случае, когда ее матрица является квадратной и невырожденной. Решения всех таких систем, ассоциированных с исходной системой Горна, и дают ее стойкие полиномиальные решения. Это означает, в частности, что для коэффициента Оре-Сато с параметрами общего положения имеет место равенство $\Psi(\varphi) = \Psi_0(\varphi)$. Поскольку никакая конечная линейная комбинация многочленов из $\Psi(\varphi)$ не может быть равна ряду Пюизо с полным носителем, сумма является прямой.

(2) Данное утверждение следует из предыдущего утверждения теоремы в совокупности с двусторонней леммой Абеля (см. лемму 11 в [15]). Данная лемма устанавливает геометрическую двойственность между областью сходимости неконфлюэнтного гипергеометрического ряда и его носителем. Из первого утверждения теоремы следует, что все неполиномиальные решения системы Горна имеют полный носитель и, следовательно, достаточно найти все такие ряды для каждой из атомарных гипергеометрических систем, ассоциированных с $\mathrm{Horn}(A,c)$.

(3) Данное утверждение доказано в теореме 6.6 в работе [12]. □

Следующий результат (см. [12]) позволяет вычислить голономный ранг двумерной неконфлюэнтной системы Горна с параметрами общего положения.

Теорема 3.8. ([12]) *Пусть* A *– целочисленная матрица размера* $m \times 2$ *и максимального ранга, такая, что ее строки* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ *удовлетворяют соотношению*

$\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_m = 0$. *Для почти всех* $c \in \mathbb{C}^m$ *идеал* $\mathrm{Horn}(A, c)$ *голономен. Более того,*

$$\mathrm{rank}(\mathrm{Horn}(A,c)) = \left(\sum_{i:A_{i,1}>0} A_{i,1}\right) \cdot \left(\sum_{i:A_{i,2}>0} A_{i,2}\right) \quad - \sum_{\mathbf{A}_i,\,\mathbf{A}_j \text{ лин. завис.}} \nu(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j),$$

где суммирование выполняется по всем линейно зависимым парам строк $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{A}_j$ *матрицы* A, *лежащих в противоположных открытых квадрантах решетки* $\mathbb{Z}^2$.

Замечание 3.9. Условие неконфлюэнтности на матрицу A необходимо для того, чтобы утверждение теоремы 3.8 имело место. Например, конфлюэнтная система уравнений, заданная операторами $x_1(\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2-a)-\theta_1$ и $x_2(\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2-a)-\theta_2$ голономна, а ее голономный ранг равен 2. Действительно, если функция $f(x)$ лежит в ядре каждого из этих операторов, то $f'_{x_1} = f'_{x_2}$, а значит, $f = g(x_1+x_2)$ для некоторой функции одного переменного g. Более того, $g(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $t^2g''(t)+((1-a)t-1)g'(t) = 0$. Его фундаментальная система решений есть $1, \Gamma(-a, 1/t)$, где $\Gamma(p,q)$ – неполная гамма-функция. Таким образом, базис в пространстве голоморфных решений приведенной выше системы Горна образуют функции 1, $\Gamma\left(-a, \frac{1}{x_1+x_2}\right)$. Заметим, что $\Gamma(1, 1/(x_1+x_2)) = e^{-1/(x_1+x_2)}$. Настоящий пример показывает, что голономный ранг конфлюэнтной системы может быть меньше произведения порядков дифференциальных операторов даже в случае отсутствия параллельных строк $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j$ или отсутствия стойких полиномиальных решений, см. определение 2.10).

Замечание 3.10. Теорема 3.8 является существенно двумерной, однако допускает обобщение на случай произвольной размерности пространства переменных. Теоремы 6.10 и 7.13 в работе [13] дают явную комбинаторную формулу для голономного ранга неконфлюэнтной гипергеометрической системы $\mathrm{Horn}(A,c)$. Выберем подматрицу размера $(m-n)\times m$ матрицы B, чьи столбцы порождают решетку $\mathbb{Z}^{m-n}$ и удовлетворяет соотношению $B\cdot A = 0 \in \mathbb{Z}^{m-n}\times\mathbb{Z}^n$. Обозначим через $g = |\ker(B)/\mathbb{Z}A|$ индекс целочисленной решетки, порожденной столбцами матрицы A в ее насыщении, тогда для вектора общего положения $c \in \mathbb{C}^m$ имеет место формула

$$\mathrm{rank}(\mathrm{Horn}(A,c)) = g\cdot \mathrm{vol}(B) + \mathrm{rank}(\Psi_0(\varphi)),$$

где $\mathrm{vol}(B)$ обозначает нормированный объем выпуклой оболочки столбцов матрицы B. Данная формула позволяет вычислить размерности слагаемых в теореме 3.7 (1) о разложении пространства голоморфных решений гипергеометрической системы.

Ниже в примере 3.14 мы увидим, что $\mathrm{rank}(\Psi_0) = 1$, так как Ψ_0 порождается функцией f_1 и $\mathrm{rank}(\mathrm{Horn}(A,(c_1,c_2,c_3))) = 2$. Более того, при $-(c_1+c_2+c_3) \notin \mathbb{N}$, размерность пространства решений с полными носителями равна 1, в то время как при $-(c_1+c_2+c_3) \in \mathbb{N}$ голономный ранг факторпространства Ψ/Ψ_0 равен 1.

3.3. **Действие представления монодромии на инвариантном подпространстве многочленов Пюизо.** Напомним, что многочленом Пюизо мы называем конечную линейную комбинацию мономов с, вообще говоря, произвольными комплексными показателями. Такой многочлен может иметь особенности лишь на объединении координатных гиперплоскостей $\{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \dots x_n = 0\}$. Множество всех полиномов Пюизо, удовлетворяющих системе Горна, образует линейное подпространство Ψ в пространстве всех ее голоморфных решений. Это пространство инвариантно относительно действия представления монодромии.

Обозначим через $\{p_k(x)\}_{k=1}^{p}$ чистый базис линейного пространства Ψ (см. определение 2.9). Другими словами, пусть $p_k(x) = x^{v_k}\tilde{p}_k(x)$, где $v_k \in \mathbb{C}^n$ и $\tilde{p}_k(x)$ – многочлен Лорана (то есть, многочлен с целочисленными векторами показателей). Поскольку многочлен Лорана является однозначной функцией, ветвление данного базиса совпадает с ветвлением набора мономов $x^{v_1}, \dots, x^{v_p}$, где $v_k \in \mathbb{C}^n$. Таким образом, множество особенностей такой системы функций есть $\{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \dots x_n = 0\}$, порождающие фундаментальной группы его дополнения с базовой точкой $(1, \dots, 1)$ имеют вид $\gamma_j = (1, \dots, 1, e^{2\pi\sqrt{-1}\,t}, 1, \dots, 1)$, $t \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, n$. Соответствующие матрицы монодромии имеют вид $M_j = \operatorname{diag}(e^{2\pi\sqrt{-1}\,v_j})$.

3.4. **Сплетающие операторы для системы уравнений Горна.** Целью настоящего параграфа является вычисление сплетающих операторов для представления монодромии систем Горна, чьи параметры отличаются на целочисленные векторы. Это позволит нам сделать вывод об эквивалентности таких представлений монодромии при некоторых дополнительных предположениях. Сплетающие операторы для представлений монодромии обыкновенных гипергеометрических дифференциальных уравнений были выписаны в [10].

Напомним, что через $S(\operatorname{Horn}(A, c))$ мы обозначаем линейное пространство (локальных) голоморфных решений гипергеометрической системы $\operatorname{Horn}(A, c)$. Класс гипергеометрических функций замкнут относительно умножения на произвольные мономы Пюизо. А именно, оператор $x^\lambda \bullet$ умножения ростка голоморфной функции на моном $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ является изоморфизмом следующих векторных пространств:

$$x^\lambda \bullet : S(\operatorname{Horn}(A, A\lambda + c)) \to S(\operatorname{Horn}(A, c)).$$

Поскольку умножение на моном Лорана не влияет на характер ветвления функции, при $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ гипергеометрические системы уравнений $\operatorname{Horn}(A, c))$ и $\operatorname{Horn}(A, A\lambda + c)$ имеют изоморфные группы монодромии.

Предложение 3.11. *Обозначим через $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m \in \mathbb{Z}^n$ строки целочисленной матрицы A максимального ранга n и пусть $c \in \mathbb{C}^m$. Дифференциальный оператор*

$$\langle \mathbf{A}_j, \theta \rangle + c_j - 1 : S(\operatorname{Horn}(A, c - e_j)) \to S(\operatorname{Horn}(A, c)) \tag{3.3}$$

является сплетающим оператором для представлений монодромии соответствующих гипергеометрических систем.

Доказательство. Обозначим через $H_i(A, c)$ дифференциальный оператор, определяющий i-е уравнение в гипергеометрической системе $\operatorname{Horn}(A, c)$, заданной (2.3).

Утверждение предложения немедленно следует из следующих соотношений: при $A_{i,j} \leq 0$

$$((\langle \mathbf{A}_j, \theta - e_i\rangle + c_j - 1)H_i(A, c - e_j) = H_i(A, c)(\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + c_j - 1),$$

а при $A_{i,j} > 0$

$$(\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + c_j - 1)H_i(A, c - e_j) = H_i(A, c)(\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + c_j - 1).$$

□

Построенные выше сплетающие операторы позволяют установить следующий аналог предложения 2.7 в работе [10].

Предложение 3.12. *Предположим, что* $S(\mathrm{Horn}(A, c + \ell)) \supset \Psi_0 \neq \{0\}$ *для* $\ell \in \mathbb{Z}^n$. *Допустим, что каждый столбец матрицы* A *с строками* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ *содержит по крайней мере один положительный и один отрицательный элементы (см. соглашение 1.4 в работе* [13]*). Тогда в пространстве голоморфных решений системы Горна* $S(\mathrm{Horn}(A, c))$ *существует нетривиальное инвариантное (относительно действия монодромии) подпространство коразмерности большей, чем 1. В частности, при этих условиях представление монодромии системы уравнений* $\mathrm{Horn}(A, c)$ *является приводимым.*

Доказательство. Обозначим через J множество индексов $J \subset \{1, \ldots, m\}$, таких, что $\ker(\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + c_j + \ell_j) \cap \Psi_0 \ni x^\alpha \neq 0$ для $j \in J$.

Отметим, что линейное подпространство Ψ_0 стойких полиномиальных решений гипергеометрической системы всегда содержит по крайней мере один моном, за исключением тривиального случая когда $\Psi_0 = \{0\}$. В этом можно убедиться следующим образом. У каждого стойкого полиномиального решения $\sum_{j=1}^{p} c_{\alpha_j} x^{\alpha_j}$ показатель α_j удовлетворяет соотношению $-(\mathbf{A_I} \cdot \alpha_j + c_I) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, где используются те же обозначения $\mathbf{A_I}$, c_I, что и в теореме 3.2. Поскольку $-(\mathbf{A_I} \cdot (\alpha_1 \pm e_k) + c_I) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для "начального показателя "$\alpha_1 = \alpha_2 \pm e_k$ и для некоего $k \in \{1, \ldots, n\}$, то получим уравнение $-(\mathbf{A_I} \cdot e_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, что противоречит нашему предположению о наличии положительного, так же как и отрицательного элемента в каждом столбце матрицы A.

Поэтому оператор

$$(\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + c_j + \ell_j) : S(\mathrm{Horn}(A, c + \ell)) \to S(\mathrm{Horn}(A, c + \ell + e_j))$$

имеет нетривиальное ядро. Предположим, что $\ell_j < 0$ и выберем максимальный k_j, $\ell_j \leq k_j \leq -1$, такой, что оператор

$$\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + c_j + k_j : S(\mathrm{Horn}(A, c + \ell + (k_j - \ell_j)e_j)) \to S(\mathrm{Horn}(A, c + \ell + (k_j - \ell_j + 1)e_j))$$

имеет нетривиальное ядро. Отсюда следует, что линейное пространство

$$\prod_{k=1}^{-k_j}(\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + c_j - k)S\left(\mathrm{Horn}(A, c + \ell + (k_j - \ell_j)e_j)\right)$$

является инвариантным (относительно действия монодромии) подпространством в $S(\mathrm{Horn}(A, c + \ell - \ell_j e_j))$. Таким образом, $S(\mathrm{Horn}(A, c + \ell - \sum\limits_{j \in J, \ell_j < 0} \ell_j e_j))$ содержит инвариантное подпространство коразмерности большей, чем 1. Рассмотрим теперь линейное пространство

$$\prod_{i\notin J,\ell_i<0}\prod_{\lambda_i=0}^{-\ell_i-1}(\langle \mathbf{A}_i,\theta\rangle + c_i+\ell_i+\lambda_i) S\left(\mathrm{Horn}\left(A, c+\ell-\sum_{j\in J,\ell_j<0}\ell_j e_j\right)\right).$$

Оно содержит нетривиальное инвариантное относительно действия монодромии подпространство

$$S\left(\mathrm{Horn}\left(A, c+\ell-\sum_{\ell_j<0}\ell_j e_j\right)\right).$$

Следовательно, предложение достаточно доказать в случае, когда $\ell \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Непосредственная проверка показывает, что линейное пространство

$$\prod_{j=1}^{n}\prod_{\lambda_j=0}^{\ell_j-1}(\langle \mathbf{A}_j,\theta\rangle + c_j+\lambda_j)^{-1}(S(\mathrm{Horn}(A,c+\ell))/\Psi_0)$$

инвариантно в пространстве всех голоморфных решений системы уравнений $\mathrm{Horn}(A,c)$. Отметим, что ни один из операторов $\langle \mathbf{A}_j,\theta\rangle + c_j+\lambda_j$ при $j=1,\dots,n$ и $\lambda_j = 0,\dots,\ell_j-1$ не присутствует в качестве множителя в дифференциальных операторах $P_j(\theta), Q_j(\theta),\ \ i=1,\dots,n$, определяющих систему уравнений $\mathrm{Horn}(A,c+\ell)$. □

Следствие 3.13. *В случае двух независимых переменных, предположим, что*

$$\sum_{\mathbf{A}_j,\mathbf{A}_k \text{ лин. независ.}} \nu(\mathbf{A}_j,\mathbf{A}_k)=0,$$

где суммирование выполняется по всем парам линейно независимых строк матрицы, определяющей систему Горна. Тогда для почти всех $c\in\mathbb{C}^m$ представления монодромии гипергеометрических систем уравнений $\mathrm{Horn}(A,c)$ *и* $\mathrm{Horn}(A,c-e_j)$ *эквивалентны для всех $j=1,\dots,m$.*

Доказательство. Предположение об индексах пар строк определяющей матрицы означает, что соответствующая система Горна не имеет стойких полиномиальных решений ввиду теоремы 3.7 (3). Поэтому для почти всех значений вектора параметров все ее решения имеют полные носители (то есть, выпуклая оболочка носителя каждого из ее решений имеет размерность 2). Сумма такого ряда не может лежать в ядре дифференциального оператора вида (3.3) и, следовательно, построенные выше сплетающие операторы имеют тривиальные ядра. Это и означает эквивалентность представлений монодромии. □

Пример 3.14. Гипергеометрическая система, заданная матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

и произвольным вектором параметров $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3$, порождается дифференциальными операторами

$$
(3.5) \qquad \begin{cases} x_1(\theta_1 + 2\theta_2 + c_1) + (\theta_1 + \theta_2 - c_2), \\ x_2(\theta_1 + 2\theta_2 + c_1)(\theta_1 + 2\theta_2 + c_1 + 1) - (\theta_1 + \theta_2 - c_2)(\theta_2 - c_3). \end{cases}
$$

Данная система уравнений голономна для всех (c_1, c_2, c_3) а ее голономный ранг равен 2. *Универсальный базис* пространства голоморфных решений (3.5), состоящий из функций, линейно независимых для всех $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3$, может быть выбран следующим образом: $f_1(x; c) = x_1^{c_1+2c_2} x_2^{-c_1-c_2}$ и $f_2(x; c) = x_1^{c_1+2c_2}(x_2^{-c_1-c_2} - x_2^{c_3}(x_1 + x_1^2 + x_2)^{-c_1-c_2-c_3})/(c_1+c_2+c_3)$. При $c_1+c_2+c_3 = 0$ данный базис вырождается в пару функций $x_1^{c_1+2c_2} x_2^{-c_1-c_2}$, $x_1^{c_1+2c_2} x_2^{-c_1-c_2} \log \frac{x_1+x_1^2+x_2}{x_2}$. Отметим, что система (3.5) резонансна в том и только том случае, когда $c_1 + c_2 + c_3 \in \mathbb{Z}$. Понятие максимального резонанса в данном примере ничем не отличается от обычного резонанса, так как имеется лишь одномерное пространство линейных соотношений между строками матрицы (3.4). Обозначим через $Sol(c)$ линейное пространство локальных голоморфных решений системы уравнений (3.5) в окрестности неособой точки. Сплетающие операторы для данной системы Горна имеют следующий вид:

$$
\begin{array}{rcll}
I_1 & = & \theta_1 + 2\theta_2 + c_1 - 1 & : Sol(c_1 - 1, c_2, c_3) \to Sol(c), \\
I_2 & = & -\theta_1 - \theta_2 + c_2 - 1 & : Sol(c_1, c_2 - 1, c_3) \to Sol(c), \\
I_3 & = & -\theta_2 + c_3 - 1 & : Sol(c_1, c_2, c_3 - 1) \to Sol(c).
\end{array}
$$

Заметим, что

$$
\begin{array}{rcl}
I_1(f_1(x; c)) & = & I_2(f_1(x; c)) = -f_1(x; c), \\
I_3(f_1(x; c_1, c_2, c_3 - 1)) & = & (c_1 + c_2 + c_3 - 1) f_1(x; c), \\
I_1(f_2(x; c_1 - 1, c_2, c_3)) & = & I_2(f_2(x; c_1, c_2 - 1, c_3)) = \\
 & & (c_1 + c_2 + c_3) f_2(x; c) - f_1(x; c), \\
I_3(f_2(x; c_1, c_2, c_3 - 1)) & = & (c_1 + c_2 + c_3) f_2(x; c).
\end{array}
$$

Данный пример показывает, что построенные выше сплетающие операторы могут иметь нетривиальные ядра, несмотря на то, что группа монодромии системы уравнений (3.5) зависит лишь от значений ее параметров c_1, c_2, c_3 по модулю целочисленной решетки $\mathbb{Z}$.

4. Явное вычисление монодромии для симплициальных и параллелепипедных гипергеометрических систем

4.1. **Атомарные гипергеометрические системы.** В настоящем параграфе мы изучаем представления монодромии нескольких важных классов гипергеометрических систем уравнений. В дальнейшем результаты данного параграфа позволят дать описание двух семейств плоских многоугольников, определяющих системы Горна с максимально приводимыми представлениями монодромии (см. § 6).

Напомним, что, в соответствии с определением 3.4, атомарная гипергеометрическая система уравнений есть конфлюэнтная система Горна, заданная квадратной невырожденной матрицей. При помощи изоморфизма в лемме 5.1 и следствии 5.2 работы [12] атомарная система может быть преобразована в систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В соответствии с фундаментальным принципом Мальгранжа-Эренпрайса-Паламодова [4], базис в пространстве голоморфных решений атомарной системы состоит из произведений многочленов Пюизо и экспоненциальных функций, аргументами которых также являются многочлены Пюизо. Отметим, что любая атомарная гипергеометрическая система по определению является конфлюэнтной, так как условие неконфлюэнтности (2.4) есть линейное соотношение между строками определяющей матрицы. Из определения следует также, что любая атомарная система нерезонансна. Любое решение атомарной системы есть либо стойкий многочлен Пюизо, либо ряд с полным носителем.

В случае двух переменных можно дать точный ответ на вопрос о числе решений атомарной гипергеометрической системы в классе многочленов Пюизо и их начальных показателях (см.определение 2.7).

Теорема 4.1. (1) *Для любой целочисленной невырожденной матрицы размера* 2×2 $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *т.ч. н.о.д.* $(\det(M), a_1, b_1, a_2, b_2) = 1$ *и любого* $\tilde{c} \in \mathbb{C}^2$ *голономный ранг ассоциированной атомарной системы равен* $\mathrm{rank}(\mathrm{Horn}(M,\tilde{c})) = |\det(M)| + \nu(M)$. *Более того, система* $\mathrm{Horn}(M,\tilde{c})$ *имеет* $|\det(M)|$ *решений в виде рядов с полными носителями, в то время как остальные* $\nu(M)$ *ее решений являются стойкими многочленами Пюизо.*

(2) *При* $\nu(M) > 0$ *начальные показатели многочленов Пюизо, удовлетворяющих системе уравнений* $\mathrm{Horn}(M,\tilde{c})$, *имеют вид* $-M^{-1}(\mathcal{R}_M + \tilde{c})$, *где*

$$\mathcal{R}_M = \begin{cases} \{(u,v) \in \mathbb{N}^2 : u < |b_1|,\, v < |a_2|\}, & \text{если } |a_1 b_2| > |b_1 a_2|, \\ \{(u,v) \in \mathbb{N}^2 : u < |a_1|,\, v < |b_2|\}, & \text{если } |a_1 b_2| < |b_1 a_2|. \end{cases}$$

Доказательство. (1) Согласно предложению 4 из работы [7] у системы $\mathrm{Horn}(M,\tilde{c})$ имеется решение следующего вида для некоторого подходящего цикла $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &\frac{|\det(M)|}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathcal{C}} \Gamma(a_1 s_1 + b_1 s_2 + \tilde{c}_1)\Gamma(a_2 s_1 + b_2 s_2 + \tilde{c}_2)\, x_1^{s_1} x_2^{s_2}\, ds_1 ds_2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}} \frac{(-1)^{|k|}}{k!} x^{-M^{-1}(k+\tilde{c})} = x^{-M^{-1}\tilde{c}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{2} \left(-x^{-M^{-1}e_j}\right)^{k_j} \\ &= x^{-M^{-1}\tilde{c}} \exp\left(-\sum_{j=1}^{2} x^{-M^{-1}e_j}\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Размерность линейной оболочки аналитических продолжений 4.1, т.е. решений в виде рядов с полными носителями, равняется $|\det(M)|$, так как н.о.д. $(\det(M)$, a_1, b_1, a_2, $b_2) = 1$.

Согласно лемме 6.5 из работы [12] размерность пространства стойких Пюизо полиномиальных решений равна $\nu(M)$.

Итак, мы получим соотношение $\mathrm{rank}(\mathrm{Horn}(M,\tilde{c})) = |\det(M)| + \nu(M)$.

(2) Утверждение следует из конструкции стойких Пюизо полиномиальных решений в лемме 6.5 из работы [12]. □

Носитель стойкого полиномиального решения двумерной системы Горна может быть описан следующим образом. Согласно теореме 3.7, (3) и теореме 4.1 лишь те подматрицы $\mathbf{A}_I = (\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j)$, для которых $\nu(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j) > 0$ дают вклад в множество стойких полиномиальных решений системы $\mathrm{Horn}(A, \tilde{c})$. Выполняя, при необходимости, замену переменных $x_1 \to \frac{1}{x_1}$ мы можем без ограничения общности предполагать, что $\mathbf{A}_i = (a_1, b_1) \in \mathbb{N}^2$ и $\mathbf{A}_j = (a_2, b_2) \in -\mathbb{N}^2$. Меняя, при необходимости, местами переменные x_1 и x_2, мы можем также без ограничения общности считать, что $|a_1 b_2| > |a_2 b_1|$. В этом случае $\mathcal{R}_{\mathbf{A}_I} = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 : u < b_1,\, v < |a_2|\}$.

Следствие 4.2. *Выполняя, при необходимости, описанные выше преобразования переменных, определим множество*

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}_I} = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le u < \min(a_1, b_1),\, 0 \le v < \min(|a_2|, |b_2|)\},$$

лежащее в $\mathcal{R}_{\mathbf{A}_I}$.

(1) Носитель стойкого мономиального решения атомарной системы $\mathrm{Horn}(\mathbf{A}_I, \tilde{c}_I)$ *имеет вид* $\alpha \in -{\mathbf{A}_I}^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}_I} + \tilde{c}_I)$.

(2) С каждым $\alpha_0 \in -{\mathbf{A}_I}^{-1}\Big((\mathcal{R}_{\mathbf{A}_I} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}_I}) + \tilde{c}_I\Big)$ *свяжем набор мультииндексов* $S_{\alpha_0} := \bigcup_{k=0}^{K} \{\alpha_k\}$, *который будет определен ниже при доказательстве. Носитель стойкого полиномиального решения системы уравнений* $\mathrm{Horn}(\mathbf{A}_I, \tilde{c}_I)$ *есть объединение* S_{α_0} *и носителей стойких мономиальных решений.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что после выполнения описанного выше преобразования переменных условие $\alpha \in -{\mathbf{A}_I}^{-1}(\mathcal{R}_{\mathbf{A}_I} + \tilde{c})$ означает, что $P_2(\alpha) = 0$ и $Q_1(\alpha) = 0$. Множество точек решетки, удовлетворяющих этим соотношениям, имеет мощность $|a_2 b_1|$.

(1) Если $\alpha \in -{\mathbf{A}_I}^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}_I} + \tilde{c}_I)$, то $\alpha \in \ker(\langle \mathbf{A}_i, \theta\rangle + \tilde{c}_i + u_i) \cap \ker(\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + \tilde{c}_j + v_j)$ при $(u_i, v_j) \in \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}_I}$, а значит, оператор $\langle \mathbf{A}_i, \theta\rangle + \tilde{c}_i + u_i$, $u_i < \min(a_1, b_1)$ является множителем как в $P_1(\theta)$ так и в $P_2(\theta)$. Рассуждая аналогичным образом, мы заключаем, что оператор $\langle \mathbf{A}_j, \theta\rangle + \tilde{c}_j + v_j$, $v_j < \min(|a_2|, |b_2|)$ является множителем в операторах $Q_1(\theta)$ и $Q_2(\theta)$.

Положим $i = 1$, если $(\mathcal{R}_{\mathbf{A}_I} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}_I}) \cap \mathbb{N} \times \{0\} \neq \emptyset$ и обозначим, как обычно, $e_1 = (1, 0)$. Аналогично, положим $i = 2$, если $(\mathcal{R}_{\mathbf{A}_I} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}_I}) \cap \{0\} \times \mathbb{N} \neq \emptyset$ и положим в этом случае $e_2 = (0, 1)$.

(2) Если $|b_2| < |a_2|$, то мы находимся в ситуации $i = 2$. В этом случае существует α_0 такое, что $P_2(\alpha_0) = Q_1(\alpha_0) = 0$, но $Q_2(\alpha_0) \neq 0$. При этом имеют место равенства

$$H_2(\mathbf{A}_I, \tilde{c}_I) x^{\alpha_0} = (x_2 P_2(\theta) - Q_2(\theta)) x^{\alpha_0} = -Q_2(\alpha_0) x^{\alpha_0},$$

$$H_2(\mathbf{A}_I, \tilde{c}_I) x^{\alpha_0 - e_2} = P_2(\alpha_0 - e_2) x^{\alpha_0} - Q_2(\alpha_0 - e_2) x^{\alpha_0 - e_2}.$$

Далее мы рассмотрим последовательность точек целочисленной решетки α_0, $\alpha_1 = \alpha_0 - e_2$, …, таких, что $\alpha_k - \alpha_{k+1} = -e_1$ или e_2. Точки α_k находятся внутри конуса $C(i, j) := \{s : \langle \mathbf{A}_j, s\rangle + \tilde{c}_j \le 0\} \cap \{s : \langle \mathbf{A}_i, s\rangle + \tilde{c}_i \le 0\}$. Поскольку на каком-то этапе эта последовательность оборвется, то объединение всех точек $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ определит конечное множество в $C(i,j)$. Отсюда следует, что для некоторого конечного множества целочисленных точек S_{α_0} линейная комбинация многочленов $H_2(\mathbf{A}_I, \tilde{c}_I)x^{\alpha_k}$ (соответственно и $H_1(\mathbf{A}_I, \tilde{c}_I)x^{\alpha_k}$), $k = 1, \ldots, K$, тождественно равна нулю. Отсылаем читателя к лемме 6.5 и рисунку 2 работы [12], где наглядно показан процесс, эквивалентный построению S_{α_0}.

Если $|a_2| \leq |b_2|$ и $a_1 \geq b_1$, тогда $\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{A}_I} = \mathcal{R}_{\mathbf{A}_I}$. Таким образом, мы имеем только мономиальные стойкие решения.

Если $|a_2| \leq |b_2|$ и $a_1 < b_1$, то мы находимся в ситуации $i = 1$. По аналогии со случаем $i = 2$, мы получим полиномиальное решение, носителем которого является конечное множество целочисленных точек $S_{\alpha_0} = \cup_{k\geq 0}\{\alpha_k\}$, $\alpha_1 = \alpha_0 - e_1, \ldots$ таких, что $\alpha_k - \alpha_{k+1} = -e_2$ или e_1.

$\square$

Пример 4.3. Атомарная гипергеометрическая система, заданная матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

и нулевым вектором параметров, порождается следующими операторами:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(3\theta_1 + 2\theta_2)(3\theta_1 + 2\theta_2 + 1)(3\theta_1 + 2\theta_2 + 2) - \\ \qquad\qquad\qquad (-4\theta_1 - 3\theta_2)(-4\theta_1 - 3\theta_2 + 1)(-4\theta_1 - 3\theta_2 + 2)(-4\theta_1 - 3\theta_2 + 3), \\ x_2(3\theta_1 + 2\theta_2)(3\theta_1 + 2\theta_2 + 1) - (-4\theta_1 - 3\theta_2)(-4\theta_1 - 3\theta_2 + 1)(-4\theta_1 - 3\theta_2 + 2). \end{array} \right. \tag{4.2}$$

По теореме 4.1 (1) размерность пространства стойких полиномиальных решений данной системы равна 8.

Стойкие мономы Пюизо, удовлетворяющие данной системе, имеют вид 1, $x_1^{-2}x_2^3$, $x_1^{-4}x_2^6$, $x_1^{-3}x_2^4$, $x_1^{-5}x_2^7$, $x_1^{-7}x_2^{10}$.

Следующие полиномы являются существенно полиномиальными стойкими решениями: $x_1^{-6}x_2^8 - \frac{1}{3}x_1^{-6}x_2^9$, $x_1^{-9}x_2^{13} - 4x_1^{-9}x_2^{12} + x_1^{-8}x_2^{13} + 12x_1^{-8}x_2^{11}$.

Отметим, что любой многочлен Пюизо, удовлетворяющий атомарной гипергеометрической системе, обязательно является ее стойким полиномиальным решением. Для произвольной гипергеометрической системы это, вообще говоря, не так.

4.2. **Симплициальные гипергеометрические конфигурации.** Важным частным случаем общей неконфлюэнтной гипергеометрической системы уравнений является система, заданная матрицей, чьи строки определяют вершины n-мерного целочисленного симплекса. Более точно, пусть $M \in GL(n, \mathbb{Z})$ – целочисленная невырожденная квадратная матрица, $\alpha \in \mathbb{C}^n$. Обозначим $\tilde{\alpha} = (\alpha, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Пусть $M_1, \ldots, M_n$ – строки матрицы M и положим $M_{n+1} = -M_1 - \ldots - M_n$. Обозначим через $\tilde{M}$ матрицу размера $(n+1) \times n$ со строками $M_1, \ldots, M_{n+1}$. Неконфлюэнтная гипергеометрическая система $\mathrm{Horn}(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$, определенная этим набором данных, будет называться *симплициальной.*

Предложение 4.4. *(См. [6].) Для почти всех $\tilde{\alpha}$ голономная симплициальная система уравнений $\mathrm{Horn}(\tilde{M},\tilde{\alpha})$ имеет следующее решение:*

$$x^{-M^{-1}\alpha}\left(1+\sum_{j=1}^{n}x^{-M^{-1}e_j}\right)^{-|\tilde{\alpha}|}, \tag{4.3}$$

где $e_j=(0,\dots,1,\dots,0)$ (1 на j-м месте). Любое решение системы $\mathrm{Horn}(\tilde{M},\tilde{\alpha})$ либо лежит в линейном пространстве, порожденном ветвями решения (4.3), либо является стойким многочленом Пюизо. При $-|\tilde{\alpha}|\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\setminus\{0\}$ представление монодромии $\mathrm{Horn}(\tilde{M},\tilde{\alpha})$ является максимально приводимым.

Пример 4.5. Система уравнений Горна

$$\begin{cases} x_1(\theta_1+\theta_2-3)(\theta_1-2\theta_2-1)-(-2\theta_1+\theta_2)(-2\theta_1+\theta_2-1),\\ x_2(\theta_1+\theta_2-3)(-2\theta_1+\theta_2-1)-(\theta_1-2\theta_2)(\theta_1-2\theta_2-1)\end{cases} \tag{4.4}$$

голономна и имеет голономный ранг 4. Чистый базис в пространстве ее голоморфных решений задается многочленами Пюизо $1/(x_1x_2),\ 4+2x_1+2x_2+6x_1x_2+x_1^2x_2+x_1x_2^2$,

$$x_1^{-2/3}x_2^{-1/3}(5+10x_1+30x_1x_2+20x_1^2x_2+x_1^3x_2+5x_1x_2^2+10x_1^2x_2^2),$$
$$x_1^{-1/3}x_2^{-2/3}(5+10x_2+30x_1x_2+20x_1x_2^2+x_1x_2^3+5x_1^2x_2+10x^2x_2^2).$$

Рассмотрим интеграл Меллина-Барнса с весом, равным коэффициенту Оре-Сато

$$\varphi(s)=\frac{\Gamma(-c+s_1-2s_2-1)\Gamma(-2s_1+s_2-1)e^{\sqrt{-1}\,\pi(s_1+s_2)}}{\Gamma(-s_1-s_2+4)},$$

определяющему систему (4.4) и параметром общего положения $c\in\mathbb{R}$, вычисленный по контуру $\mathcal{C}$, удовлетворяющему условиям инвариантности относительно сдвига. Вычисляя вычеты, мы получаем ряд Пюизо с полным носителем, удовлетворяющий возмущению системы Горна (4.4) путем замены оператора $\theta_1-2\theta_2$ на $\theta_1-2\theta_2-c$:

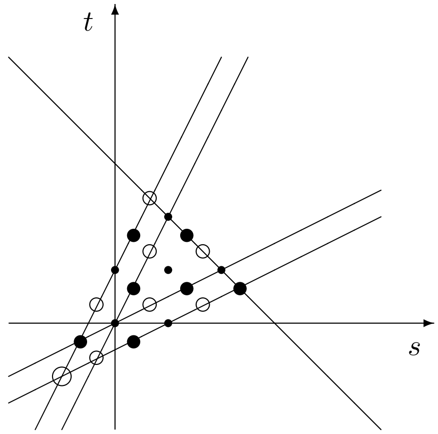
$$f_c=x_1^{-\frac{c}{3}-1}x_2^{-\frac{2c}{3}-1}\left(x_1^{2/3}x_2^{1/3}+x_1^{1/3}x_2^{2/3}+1\right)^{5-c}.$$

Отметим, что при $c=0$ данный ряд превращается в многочлен Пюизо

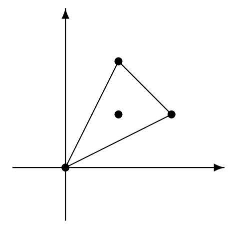
$$f_0=\frac{\left(x_1^{2/3}x_2^{1/3}+x_1^{1/3}x_2^{2/3}+1\right)^5}{x_1x_2}.$$

Причина появления полиномиального решения с неполными носителями при $c=0$ кроется в том обстоятельстве, что в коэффициенте Оре-Сато $\varphi(s)$ полюсы множителя $\Gamma(-c+s_1-2s_2-1)$ не компенсированы полюсами множителя $\Gamma(-s_1-s_2+4)$ в знаменателе для почти всех значений c. Однако при $c=0$ происходит сокращение полюсов в полупространстве (см. определение 6.2) и ненулевые вычеты имеются лишь в полосе $\{s:-2\leq s_1+s_2\leq 3\}$.

Линейные комбинации ветвей функции f_0 дают три последних многочлена Пюизо, удовлетворяющих системе уравнений (4.4). Единственным стойким полиномиальным решением данной системы является моном Лорана $1/(x_1x_2)\in\ker\,(\theta_1-2\theta_2-1)\cap\ker\,(-2\theta_1+\theta_2-1)$. Он порождает одномерное инвариантное подпространство в пространстве голоморфных решений (4.4).



a): Носители решений системы уравнений (4.4)



b): Многоугольник коэффициента Оре-Сато, определяющего систему уравнений (4.4)

Рис. 1

Пример 4.6. Рассмотрим двумерную ($n = 2$) симплициальную гипергеометрическую систему уравнений, определенную матрицей

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

и вектором параметров $\tilde{\alpha} = (0, 0, c)$ в смысле данного выше определения. Данный выбор параметров не влияет на общность данной системы, поскольку изменение двух координат вектора $\tilde{\alpha}$ эквивалентно сдвигу пространства показателей решений системы уравнений. Данная система порождается дифференциальными операторами

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(2\theta_1 + 2\theta_2 + c)(2\theta_1 + 2\theta_2 + c + 1) - 2\theta_1(2\theta_1 - 1), \\ x_2(2\theta_1 + 2\theta_2 + c)(2\theta_1 + 2\theta_2 + c + 1) - 2\theta_2(2\theta_2 - 1). \end{array} \right. \tag{4.5}$$

По теореме 3.8 голономный ранг системы (4.5) равен 4 при $c \in \mathbb{C}$ в общем положении. Более того теорема 6.10 в работе [13] показывает, это верно при любом $c \in \mathbb{C}$, так как $\mathcal{Z}_{\mathrm{Andean}}(I) = \emptyset$ для данной системы. Согласно предложению 4.4, порождающее решение системы уравнений (4.5) имеет вид $(1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{-c}$. Из теоремы 3.7 следует, что (4.5) не имеет стойких полиномиальных решений и потому для почти всех $c \in \mathbb{C}$ базис в пространстве голоморфных решений системы (4.5) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1(c) & = & (1 + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^{-c}, \\ f_2(c) & = & (1 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^{-c}, \\ f_3(c) & = & (1 - \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^{-c}, \\ f_4(c) & = & (1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^{-c}. \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Однако этот базис вырождается для двух значений c, а именно, для $c = 0$ (в этом случае все элементы базиса (4.6) равны 1) и для $c = -1$ (в этом случае $f_1(-1) + f_4(-1) - f_2(-1) - f_3(-1) = 0$). Построим базисы в пространстве решений системы уравнений (4.5) для каждого из этих резонансных значений параметра c.

Если $c=-1$, то в качестве элементов соответствующего резонансного базиса можно выбрать функции $f_1(-1), f_2(-1), f_3(-1)$ вместе с функцией

$$\tilde{\tilde{f}}_4 = \left(f_1\log f_1 - f_2\log f_2 - f_3\log f_3 + f_4\log f_4\right)\Big|_{c=-1}.$$

Если $c=0$, то в качестве элементов соответствующего резонансного базиса в пространстве решений (4.5) можно выбрать $f_1(0)$ вкупе с тремя дополнительными решениями:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_2 &= \log(1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}) - \log(1+\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}),\\
\tilde{f}_3 &= \log(1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}) - \log(1-\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}),\\
\tilde{f}_4 &= \log(1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}) - \log(1-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}).
\end{aligned}$$

Оказывается возможным построить единый универсальный базис в пространстве голоморфных решений системы (4.5), чьи элементы остаются линейно независимыми при переходе к пределам при $c\to 0$ или $c\to -1$. Этот базис имеет следующий вид:

$$\begin{array}{rcl}
\hat{f}_1(c) &=& \left(1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^{-c},\\
\hat{f}_2(c) &=& \left((1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{-c} - (1+\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^{-c}\right)/c,\\
\hat{f}_3(c) &=& \left((1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{-c} - (1-\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{-c}\right)/c,\\
\hat{f}_4(c) &=& \left((1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{-c} - (1+\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^{-c}-\right.\\
&& \qquad \left.(1-\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{-c} + (1-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^{-c}\right)/(c+c^2).
\end{array} \tag{4.7}$$

Нетрудно проверить, что функции $\hat{f}_1(c),\ldots,\hat{f}_4(c)$ линейно независимы для всех $c\in\mathbb{C}$.

Имея базис (4.7), легко вычислить представление монодромии для системы уравнений (4.5). Группа монодромии порождается тремя матрицами, соответствующими петлям вокруг координатных осей $\{x_1=0\}$, $\{x_2=0\}$ и существенной особенности $\{\mathcal{S}(x):=1-2x_1+x_1^2-2x_2-2x_1x_2+x_2^2=0\}$. Эти матрицы имеют следующий вид:

$$M_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1-c\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad M_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1-c\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad M_{\mathcal{S}} = \operatorname{diag}(e^{-2\pi\sqrt{-1}\,c}).$$

4.3. **Гипергеометрические системы, заданные параллелепипедами.** Пусть теперь $M\in GL(n,\mathbb{Z})$ – целочисленная невырожденная квадратная матрица, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n$ – два вектора параметров. Обозначим через $\tilde{M}$ матрицу размера $2n\times n$, полученную объединением строк матриц M и $-M$. Строки этой матрицы соответствуют вершинам параллелепипеда с ненулевым n-мерным объемом. Обозначим через $\tilde{\alpha}$ вектор с координатами $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n)$. Подобно рассмотренному выше симплициальному случаю, оказывается возможным найти порождающее решение соответствующей гипергеометрической системы (4.5) при помощи вычисления многомерных вычетов.

Предложение 4.7. *(См. [7].) Для почти всех $\tilde{\alpha} \in \mathbb{C}^n$ голономная гипергеометрическая система уравнений* $\mathrm{Horn}(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ *имеет следующее решение:*

$$x^{-M^{-1}\alpha} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + x^{-M^{-1}e_j}\right)^{-\alpha_j - \beta_j}, \tag{4.8}$$

где $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 на j-м месте). Любое решение системы $\mathrm{Horn}(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ *либо лежит в линейном пространстве, порожденном ветвями решения (4.8), либо является стойким многочленом Пюизо. Если $-\alpha_j - \beta_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \backslash \{0\}$ для всех $j = 1, \ldots, n$, то представление монодромии* $\mathrm{Horn}(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$ *является максимально приводимым.*

5. Базисы в пространстве решений гипергеометрических систем Горна

Обозначим через q число вершин многогранника Ньютона многочлена, определяющего особую гиперповерхность изучаемой двумерной гипергеометрической системы. В настоящем параграфе мы построим семейство из q базисов в пространстве рядов с полными носителями, удовлетворяющих данной системе уравнений. Этот результат будет использован в параграфе 6 для доказательства основного результата настоящей работы.

Определение 5.1. *амебой* $\mathcal{A}_f$ многочлена Лорана $f(x)$ (и алгебраической гиперповерхности $f(x) = 0$) называется образ множества $f^{-1}(0)$ относительно отображения $\mathrm{Log} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\log|x_1|, \ldots, \log|x_n|)$.

Обозначим через $\mathcal{A}(\varphi)$ амебу особой гиперповерхности гипергеометрической системы $\mathrm{Horn}(\varphi)$.

Определение 5.2. Для выпуклого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ его *конус рецессии* C_B определяется следующим образом: $C_B = \{s \in \mathbb{R}^n : u + \lambda s \in B, \forall u \in B, \lambda \geq 0\}$ (см. §4 в [15]). Другими словами, конус рецессии выпуклого множества – это максимальный элемент в семействе конусов, чьи сдвиги содержатся в данном множестве.

Следующая теорема (ср. с результатами работы [2] для системы Гельфанда-Капранова-Зелевинского) позволяет сопоставить каждой вершине многогранника Ньютона многочлена, определяющего эту особую гиперповерхность, базис в пространстве голоморфных решений соответствующей двумерной системы Горна. Этот базис состоит из гипергеометрических рядов, сходящихся в прообразе связной компоненты дополнения к амебе, соответствующей данной вершине.

Теорема 5.3. (1) *Для любого двумерного неконфлюэнтного коэффициента Оре-Сато φ с параметрами общего положения и любой связной компоненты M множества ${}^c\mathcal{A}(\varphi)$ существует базис из чистых рядов Пюизо $f_{M,i}$, $i = 1, \ldots, \mathrm{rank}(\mathrm{Horn}(\varphi))$ в пространстве решений системы уравнений* $\mathrm{Horn}(\varphi)$, *таких, что конус рецессии носителя $f_{M,i}$ содержится в $-C_M^{\vee}$.*

(2) *Область сходимости ряда $f_{M,i}$ содержит* $\mathrm{Log}^{-1}(M)$ *для любого $i = 1, \ldots,$* $\mathrm{rank}(\mathrm{Horn}(\varphi))$.

Доказательство. Коэффициент Оре-Сато $\varphi(s)$, определяющий систему Горна, может быть записан в виде

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^{m} \Gamma(a_i s_1 + b_i s_2 + c_i),$$

где $(a_i, b_i) \in \mathbb{Z}^2$, $\sum_{i=1}^{m}(a_i, b_i) = (0,0)$ и $(c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{C}^m$ – вектор параметров, находящийся в общем положении. Согласно определению 2.5, векторы $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{m}$ являются внешними нормалями к сторонам многоугольника $\mathcal{P}(\varphi)$ коэффициента Оре-Сато φ (заметим, что некоторые из этих векторов могут совпадать). См. также теорему 2 в работе [18]. Из данного утверждения также следует, что число различных векторов в этом множестве равно q. Обозначим все различные элементы множества внешних нормалей к сторонам многоугольника $\mathcal{P}(\varphi)$ через $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$, $\ldots$, $(\bar{a}_q, \bar{b}_q)$. Мы будем также без ограничения общности считать, что эти нормали упорядочены по возрастанию главной ветви аргумента комплексного числа $\bar{a}_k + \bar{b}_k\sqrt{-1}$ (то есть, против часовой стрелки) от $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ до $(\bar{a}_q, \bar{b}_q)$. Обозначим через v_i вершину многоугольника $\mathcal{P}(\varphi)$, принадлежащую сторонам, ортогональным векторам $(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ и $(\bar{a}_{i+1}, \bar{b}_{i+1})$ (при этом через v_q мы обозначаем вершину, принадлежащую первой и последней сторонам многоугольника).

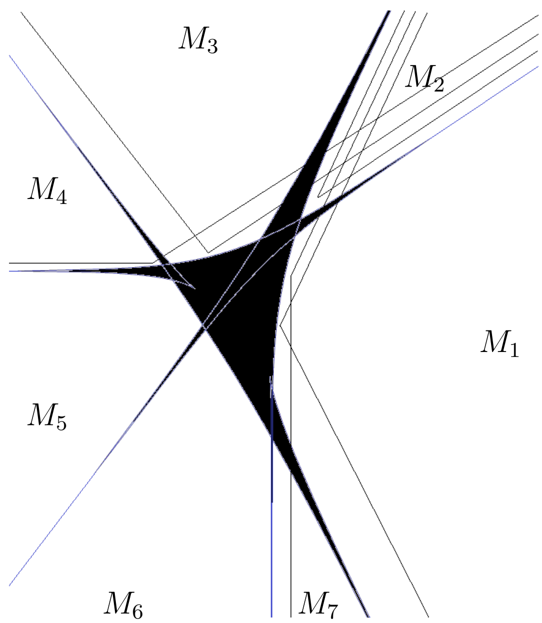


Рис. 2. амеба особенности системы уравнений Горна и конусы рецессии носителей ее решений

Согласно теореме 7 из [15], вершины $v_1, \ldots, v_q$ многоугольника $\mathcal{P}(\varphi)$ взаимно-однозначно соответствуют связным компонентам дополнения к амебе особенности данного коэффициента Оре-Сато $\mathcal{A}(\varphi)$. Обозначим эти связные компоненты через $M_1, \ldots, M_q$.

На рис. 2 показан частный случай амебы особенности системы Горна, определенной коэффициентом Оре-Сато $\Gamma(s_1+2s_2)\Gamma(s_1-2s_2)\Gamma(-s_1+3s_2)\Gamma(-s_1-3s_2)\Gamma(s_1)\Gamma(-s_1-$

$s_2)\Gamma(s_2)$. В данном случае $q = 7$. Непрерывная кривая, ограничивающая амебу и местами проникающая в нее – это так называемый контур амебы (то есть, множество критических значений логарифмического отображения Гаусса на определяющей амебу гиперповерхности, см. [16]). Изображение амебы и ее контура было построено при помощи параметризации Горна-Капранова (см. [20]) с использованием системы компьютерной алгебры Mathematica 9.0. На рис. 2 показаны также конусы рецессии выпуклых оболочек тех объединений связных компонент дополнения к амебе, которые являются строго выпуклыми, и чьи сдвиги содержат M_2. Конусы, двойственные к этим конусам рецессии, есть выпуклые оболочки носителей тех рядов, удовлетворяющих системе Горна, чьи области сходимости содержат $\mathrm{Log}^{-1}M_2$. Для доказательства теоремы нам необходимо показать, что число таких рядов не зависит от выбора связной компоненты дополнения к амебе.

Докажем, что для любого $i = 1, \ldots, q$ число рядов Пюизо с полными носителями, удовлетворяющих системе уравнений $\mathrm{Horn}(\varphi)$ и сходящихся на множестве, содержащем $\mathrm{Log}^{-1}(M_i)$, одинаково (то есть, не зависит от i). Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться в том, что число таких рядов, сходящихся на множестве $\mathrm{Log}^{-1}(M_1)$, совпадает с числом рядов, сходящихся на $\mathrm{Log}^{-1}(M_2)$. Отсюда будет следовать, что для любых двух смежных связных компонент дополнения к амебе $\mathcal{A}(\varphi)$ число рядов, сходящихся на прообразах этих компонент (относительно отображения Log), одинаково. Тем самым утверждение будет установлено и для произвольной пары таких связных компонент.

Определим однозначную ветвь arg аргумента комплексного числа Arg при помощи равенств $\arg(-a - b\sqrt{-1}) = 0$, и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^-} \arg e^{\sqrt{-1}\,\varepsilon}(- - b\sqrt{-1}) = 2\pi$. Зададим частичный порядок $\prec$ на решетке $\mathbb{Z}^2$, положив $(a, b) \prec (c, d)$, если $\arg(a+b\sqrt{-1}) < \arg(c+d\sqrt{-1})$. Мы будем говорить, что $(a, b) \preccurlyeq (c, d)$, если $\arg(a + b\sqrt{-1}) \leq \arg(c + d\sqrt{-1})$.

Из леммы 11 работы [15] и теоремы 3.7 (2) следует, что число рядов Пюизо с полным носителем, удовлетворяющих гипергеометрической системе $\mathrm{Horn}(\varphi)$ и сходящихся в области $\mathrm{Log}^{-1}(M_i)$, равно

$$S_i = \sum_{\substack{k\,:\, -(\bar a_{i+1}, \bar b_{i+1}) \prec (\bar a_j, \bar b_j) \preccurlyeq (\bar a_i, \bar b_i),\\ \ell\,:\, (\bar a_{i+1}, \bar b_{i+1}) \preccurlyeq (\bar a_\ell, \bar b_\ell) \prec -(\bar a_j, \bar b_j)}} k_j k_\ell \begin{vmatrix} \bar a_\ell & \bar b_\ell \\ \bar a_j & \bar b_j \end{vmatrix},$$

где k_j – число элементов мультимножества векторов $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)\}$, которые совпадают с $(\bar a_j, \bar b_j)$. Отметим, что, в соответствии с нашим выбором индексов суммирования, все определители, входящие в предыдущую формулу, положительны. Для доказательства требуемого равенства $S_1 = S_2$ мы воспользуемся тем обстоятельством, что эти два выражения имеют большое количество одинаковых слагаемых. Действительно, сумма величин, входящих в формулу для S_1, и при этом не входящих в формулу для S_2, равна

(5.1)

$$\sum_{j\,:\,-(\bar a_2, \bar b_2) \prec (\bar a_j, \bar b_j) \preccurlyeq (\bar a_1, \bar b_1)} k_2 k_j \begin{vmatrix} \bar a_2 & \bar b_2 \\ \bar a_j & \bar b_j \end{vmatrix} = \det\left(k_2(\bar a_2, \bar b_2), \sum_{j\,:\,-(\bar a_2, \bar b_2) \prec (\bar a_j, \bar b_j) \preccurlyeq (\bar a_1, \bar b_1)} k_j (\bar a_j, \bar b_j) \right).$$

Аналогично, сумма слагаемых, входящих в выражение для S_2, но не присутствующих в S_1, равна
(5.2)
$$\sum_{\ell\,:\,(\bar a_3,\bar b_3)\preccurlyeq(\bar a_\ell,\bar b_\ell)\prec-(\bar a_2,\bar b_2)} k_2 k_\ell \begin{vmatrix} \bar a_\ell & \bar b_\ell \\ \bar a_2 & \bar b_2 \end{vmatrix} = \det\left(\sum_{\ell\,:\,(\bar a_3,\bar b_3)\preccurlyeq(\bar a_\ell,\bar b_\ell)\prec-(\bar a_2,\bar b_2)} k_\ell(\bar a_\ell,\bar b_\ell), k_2(\bar a_2,\bar b_2)\right).$$
Из условия неконфлюэнтности $\sum_{i=1}^{q} k_i(\bar a_i,\bar b_i) = \sum_{j=1}^{m}(a_j,b_j) = (0,0)$ следует, что определитель в правой части (5.1) равен определителю в правой части (5.2). Это означает, что с каждой связной компонентой дополнения к амебе особенности системы Горна связано одинаковое количество рядов Пюизо, сходящихся на ее прообразе относительно отображения Log (и, возможно, на некотором большем множестве).

Вспомним, что любое решение гипергеометрической системы Горна с параметрами общего положения может быть разложено в ряд Пюизо с центром в начале координат. (Данный ряд может, в частности, иметь конечный носитель, то есть, быть многочленом Пюизо.) Поскольку решение системы Горна в виде многочлена Пюизо определено (как многозначная аналитическая функция) всюду, за исключением, возможно, координатных гиперплоскостей, многочлены Пюизо определяют решения в каждой из связных компонент дополнения к амебе особенности данной системы. Таким образом, для каждой связной компоненты M существует базис пространства голоморфных решений системы Горна, состоящий из рядов Пюизо, сходящихся (по меньшей мере) в области $\mathrm{Log}^{-1}(M)$.

Отметим, что данное утверждение может быть также обосновано с помощью подхода и результатов работы [3].

Остается проверить, что в качестве базисных элементов можно взять чистые ряды Пюизо. Для этого покажем, что подходящие линейные комбинации ветвей решения
$$P(x) = \sum_{k=1}^{\mu} x_1^{\frac{v_{1k}}{N_1}} x_2^{\frac{v_{2k}}{N_2}} p_k(x_1,x_2)$$
где $p_k(x)$, $k=1,\ldots,\mu$, являются степенными рядами, сходящимися в области $\mathrm{Log}^{-1}(M_i)$ для фиксированных i, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $v_{1,k}, v_{2,k} \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $\mu \le N_1 \cdot N_2$. Аналитическое продолжение вдоль пути, обходящего ℓ_1 раз ось $x_1 = 0$ и ℓ_2 раз – ось $x_2 = 0$ (в положительном направлении) дает выражение
$$\left(M_{x_1=0}^{\ell_1} M_{x_2=0}^{\ell_2}\right)_* P(x) = \sum_{k=1}^{\mu} e^{\left(\frac{\ell_1 v_{1k}}{N_1} + \frac{\ell_2 v_{2k}}{N_2}\right)2\pi\sqrt{-1}} x_1^{\frac{v_{1k}}{N_1}} x_2^{\frac{v_{2k}}{N_2}} p_k(x_1,x_2).$$
Чтобы представить $x_1^{\frac{v_{1k}}{N_1}} x_2^{\frac{v_{2k}}{N_2}} p_k(x_1,x_2)$ в виде линейной комбинации выражений вида $\left(M_{x_1=0}^{\ell_1} M_{x_2=0}^{\ell_2}\right)_* P(x)$, $0 \le \ell_1 \le N_1 - 1$, $0 \le \ell_2 \le N_2 - 1$, достаточно рассмотреть матрицу, обратную к матрице Вандермонда размера μ. Теорема доказана. □

6. Максимально приводимая монодромия

В настоящем параграфе мы продолжим исследование двумерных гипергеометрических систем. Обозначим через A целочисленную матрицу размера $m\times 2$, чьи строки в сумме дают нулевой вектор. Такая матрица в совокупности в комплексным вектором параметров определяет неконфлюэнтную гипергеометрическую систему уравнений с двумя переменными. Оказывается удобным связать с матрицей A выпуклый многоугольник $\mathcal{P}$ с целыми вершинами, такой, что строки матрицы A являются внешними нормалями к его сторонам. Мы будем без ограничения общности предполагать, что относительная длина каждой из сторон многоугольника $\mathcal{P}$ в целочисленной решетке равна числу повторений соответствующей нормали в качестве строки матрицы A.(Отметим, что внешние нормали к сторонам многоугольника с такой нормировкой в сумме дают нулевой вектор.) Такой многоугольник $\mathcal{P}$ определен матрицей A однозначно с точностью до сдвига на целочисленный вектор. Обратно, любой плоский выпуклый многоугольник с целыми вершинами определяет матрицу, чьи строки в сумме дают нулевой вектор, а значит, в совокупности с комплексным вектором параметров, и гипергеометрическую систему уравнений. Мы будем обозначать ее через $\mathrm{Horn}(A(\mathcal{P}), c)$. Эта связь иллюстрируется примером 4.5.

Из результатов § 4 следует, что любая система Горна, заданная симплексом или параллелепипедом, имеет базис, состоящий из многочленов Пюизо для подходящего выбора комплексного вектора параметров. В частности, представление монодромии такой системы Горна (для этого весьма специального выбора ее параметров) является максимально приводимым.

В работе [11] авторы поставили задачу описания всех гипергеометрических систем Гельфанда-Капранова-Зелевинского, чье пространство голоморфных решений содержит одномерное пространство с тривиальным действием представления монодромии на нем (что эквивалентно существованию рационального решения системы). В настоящем параграфе решается тесно связанная с этой задачей проблема описания всех гипергеометрических систем Горна с максимально приводимым представлением монодромии. За исключением систем с тривиальным представлением монодромии, такие системы имеют наиболее просто устроенные группы монодромии, так как в чистом базисе пространства голоморфных решений они порождаются диагональными матрицами.

Напомним, что *зонотопом* называется сумма Минковского отрезков. Основным результатом настоящей главы является следующая теорема.

Теорема 6.1. *Для того чтобы двумерная неконфлюэнтная гипергеометрическая система* $\mathrm{Horn}(A(\mathcal{P}), c)$ *имела для некоторого* $c \in \mathbb{C}^m$ *максимально приводимую монодромию, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{P}$ *был либо 1) зонотопом, либо 2) суммой Минковского некоторого треугольника* $\triangle$ *и любого числа отрезков, каждый из которых параллелен одной из сторон* $\triangle$.

Например, зонотоп на рис. 6 соответствует матрице (6.9), строки которой ортогональны его сторонам.

Из теоремы 6.1 следует, что любой треугольник определяет систему Горна с максимально приводимой монодромией для подходящего выбора ее параметров. Монодромия гипергеометрической системы, заданной четырехугольником, может быть максимально приводимой в том и только том случае, когда он является трапецией.

Мы разделим доказательство теоремы 6.1 на три этапа.

Вначале будет дано подробное описание основного технического приема «сокращения полюсов в полупространстве» (определение 6.2, лемма 6.3). Затем мы установим достаточность и необходимость любого из условий 1),2) (предложение 6.5, предложение 6.6). В заключение мы установим, что максимальная приводимость монодромии для двумерной гипергеометрической системы эквивалентна существованию базиса из многочленов Пюизо в пространстве ее решений для подходящего выбора ее параметров (следствие 6.7) с учетом предложения 6.6.

Для доказательства достаточности и необходимости условия основной теоремы нам понадобится следующее вспомогательное техническое определение.

Определение 6.2. Будем говорить, что в коэффициенте Оре-Сато $\varphi(s) = \frac{\prod_{j=1}^{a}\Gamma(\alpha_j)}{\prod_{i=1}^{b}\Gamma(\beta_i)}$ происходит *сокращение полюсов в полупространстве,* если полюсы $\varphi(s)$ лежат в множестве $\{s : \alpha_j(s) = \sigma, \sigma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}, \gamma_j \leq \sigma \leq 0\}$ для некоторых $\gamma_j < 0, j \in [1, a]$.

Лемма 6.3. *Сокращение полюсов в полупространстве для коэффициента Оре-Сато* $\varphi(s) = \frac{\prod_{j=1}^{a}\Gamma(\alpha_j)}{\prod_{i=1}^{b}\Gamma(\beta_i)}$ *необходимо для того, чтобы интеграл Меллина-Барнса* $MB(\varphi, \mathcal{C})$ *представлял полиномиальное решение системы Горна, определяемым этим коэффициентом, для любого контура* $\mathcal{C}$*, удовлетворяющего условиям теоремы 3.3.*

Пример 6.4. Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = \frac{\Gamma(s_1 + s_2 - 3)\Gamma(-s_2)}{\Gamma(s_1 + 1)\Gamma(s_2 + 2)\Gamma(-s_2 + 2)}.$$

Ее полюсы лежат на прямых $\{s : -s_2 = \sigma, \sigma = -1, 0, s_1 \neq -1, -2 \ldots\}$. В данном случае $MB(\varphi, \mathcal{C}) = \mathrm{const} \cdot (x_1+1)^2(2x_1 - 3x_2 + 2)$, где контур $\mathcal{C}$ расположен в окрестностях точек целочисленной решетки, удовлетворяющих неравенствам $\{s : s_1 + s_2 \leq 3, 0 \leq s_1, 0 \leq s_2\}$.

Теперь при помощи определения 6.2 и леммы 6.3) приступим к доказательству достаточности выполнения одного из условий 1), 2).

Предложение 6.5. *Для многоугольника* $\mathcal{P}$*, относящегося к типам 1) или 2), система уравнений* $\mathrm{Horn}(A(\mathcal{P}), c)$ *имеет базис из многочленов Пюизо в пространстве своих голоморфных решений для некоторого* $c \in \mathbb{C}^n$ *и, следовательно, максимально приводимое представление монодромии.*

Доказательство. Обозначим через A матрицу размера $m \times 2$, чьи строки являются внешними нормалями к сторонам зонотопа т.е. многоугольника коэффициента Оре-Сато из определения 2.5. Заметим, что в матрице A одинаковый столбец повторяется столько раз, сколько целочисленная длина соответствующей стороны зонотопа. Мы покажем, что существует $c \in \mathbb{C}^m$, такой, что пространство голоморфных решений гипергеометрической системы $\mathrm{Horn}(A, c)$ в окрестности точки общего положения имеет базис, состоящий из функций вида $x^{\alpha}p(x)$, где $\alpha \in \mathbb{C}^n$, и $p(x)$ – многочлен (то есть, многочлен с целыми положительными степенями переменных во входящих в него мономах). Поскольку аналитическое продолжение такой функции вдоль любого пути пропорционально самой этой функции, отсюда будет следовать максимальная приводимость представления монодромии системы уравнений $\mathrm{Horn}(A, c)$.

Поскольку строки матрицы A ортогональны сторонам зонотопа, мы можем без ограничения общности предположить (меняя, при необходимости, местами некоторые из ее строк), что матрица A состоит из блоков вида $B_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -a_i & -b_i \end{pmatrix}$. Обозначим через k_i число повторений блока B_i в матрице A и через l – число разных блоков. Без ограничения общности можно считать, что a_i и b_i взаимно просты. Мы можем также без ограничения общности предполагать, что все элементы матрицы A отличны от нуля (случай, когда некоторые из них равны нулю, является более простым и может быть рассмотрен при помощи рассуждения, аналогичного следующему ниже).

По теореме 3.8 голономный ранг системы $\mathrm{Horn}(A,c)$ равен

$$r(A) = \left(\sum_{i=1}^{l} k_i|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{l} k_j|b_j|\right) - \sum_{i=1}^{l} k_i^2|a_ib_i| = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{l} k_ik_j|a_ib_j|.$$

Индукция по l показывает, что при подходящих значениях вектора параметров c линейное пространство решений системы $\mathrm{Horn}(A,c)$ порождается многочленами Пюизо. Действительно, при $l=2$ имеем параллелограмм, который по предложению 4.7 (при $-\alpha_j-\beta_j\in\mathbb{N}$ в (4.8)) задает систему Горна с базисом из многочленов Пюизо в пространстве ее голоморфных решений. Пусть матрица B_{l+1} задана в виде $B_{l+1} = \begin{pmatrix} a_{l+1} & b_{l+1} \\ -a_{l+1} & -b_{l+1} \end{pmatrix}$, обозначим через A' матрицу, полученную добавлением k_{l+1} копий блока B_{l+1} к матрице A и через $r(A')$ – голономный ранг ассоциированной системы Горна. Как и ранее, мы можем без ограничения общности предполагать, что a_{l+1}, $b_{l+1}\neq 0$. Мы можем также без ограничения общности предполагать, что вектор (a_{l+1},b_{l+1}) не пропорционален вектору (a_i,b_i) ни для какого $i=1,\dots,l$. Действительно, если бы такая пропорциональность имела место, то добавление блока B_{l+1} означало бы увеличение на единицу числа k_i появлений блока B_i в матрице A.

Заметим, что добавление блока B_{l+1} к матрице A соответствует добавлению отрезка $(-b_{l+1},a_{l+1})$ в смысле Минковского к многоугольнику, определенному матрицей A. Для получения многоугольника с существенно новой комбинаторной структурой добавляемый отрезок не должен быть параллелен ни одной из сторон многоугольника. В этом случае амеба множества особенностей соответствующей гипергеометрической системы «выпускает два щупальца» в противоположных направлениях. По теореме 5.3 число рядов Пюизо, удовлетворяющих системе Горна, заданной матрицей A', одинаково для любой из связных компонент дополнения к амебе ее особенности. Мы покажем, что подходящий (и, разумеется, весьма специальный) выбор параметров системы превращает эти ряды Пюизо в многочлены Пюизо.

При сделанных выше предположениях голономный ранг $r(A')$ гипергеометрической системы уравнений, заданной матрицей A' и вектором параметров общего положения, равен

$$r(A') = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{l+1} k_ik_j|a_ib_j| = r(A) + \sum_{i=1}^{l} k_ik_{l+1}|a_ib_{l+1}| + \sum_{j=1}^{l} k_{l+1}k_j|a_{l+1}b_j| =$$

$$r(A)+\sum_{i=1}^{l}\big((k_i|a_i|+k_{l+1}|a_{l+1}|)(k_i|b_i|+k_{l+1}|b_{l+1}|)-k_i^2|a_ib_i|-k_{l+1}^2|a_{l+1}b_{l+1}|\big)=$$

$$r(A)+\sum_{i=1}^{l}r(k_iB_i,k_{l+1}B_{l+1}),$$

где через $r(k_iB_i,k_{l+1}B_{l+1})$ обозначен голономный ранг «параллелепипедной» системы Горна, заданной матрицей, состоящей из k_i копий блока B_i и k_{l+1} копий блока B_{l+1}.

Теперь мы покажем, что добавление (по Минковскому) отрезка к зонотопу сохраняет свойство гипергеометрической системы иметь базис из многочленов Пюизо в пространстве ее голоморфных решений при подходящих значениях параметров.

Вначале отметим, что для любого целого положительного числа m_{l+1} полюсы мероморфной функции

$$\frac{\Gamma(a_{l+1}s_1+b_{l+1}s_2+c_{l+1})}{\Gamma(a_{l+1}s_1+b_{l+1}s_2+c_{l+1}+m_{l+1}+1)}$$

лежат на прямых $\bigcup\limits_{h=0}^{m_{l+1}}\{s:a_{l+1}s_1+b_{l+1}s_2+c_{l+1}+h=0\}$. Полюсы функции

$$\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{k_i}\frac{\Gamma(a_is_1+b_is_2+c_{i,j})}{\Gamma(a_is_1+b_is_2+c_{i,j}+m_{i,j}+1)}$$

также находятся на конечном семействе прямых $\bigcup\limits_{i=1}^{l}\bigcup\limits_{j=1}^{k_i}\bigcup\limits_{h=0}^{m_{i,j}}\{s:a_is_1+b_is_2+c_{i,j}+h=0\}$. Из этого мы заключаем, что для подходящего выбора вектора параметров c число двукратных полюсов следующей мероморфной функции конечно:

$$\prod_{i=1}^{l+1}\prod_{j=1}^{k_i}\frac{\Gamma(a_is_1+b_is_2+c_{i,j})}{\Gamma(a_is_1+b_is_2+c_{i,j}+m_{i,j}+1)}.$$

Для доказательства данного факта, нужно выбрать вектор параметров c, так чтобы параллелограмм

$$\Pi(i,j;k,\ell)=\bigcup_{t=0}^{1}\bigcup_{u=0}^{1}\{s:a_is_1+b_is_2+c_{i,j}+tm_{i,j}=0,a_ks_1+b_ks_2+c_{k,\ell}+um_{k,\ell}=0\}$$

не пересекался с другим аналогичным параллелограммом $\Pi(i',j';k',\ell')$ если $|i-i'|+|j-j'|+|k-k'|+|\ell-\ell'|\neq 0$. Стоит заметить, что все двукратные полюсы мероморфной функции, дающие вклад в решение системы $\mathrm{Horn}(A,c)$

$$\frac{\Gamma(a_is_1+b_is_2+c_{i,j})\Gamma(a_ks_1+b_ks_2+c_{k,\ell})}{\Gamma(a_is_1+b_is_2+c_{i,j}+m_{i,j}+1)\Gamma(a_ks_1+b_ks_2+c_{k,\ell}+m_{k,\ell}+1)}$$

содержатся в параллелограмме $\Pi(i,j;k,\ell)$ благодаря сокращению полюсов (ср. определение 6.2 выше) двух факторов $\Gamma(a_is_1+b_is_2+c_{i,j})$ и $\Gamma(a_ks_1+b_ks_2+c_{k,\ell})$. Так как параллелограмм является образом квадрата $\{(t,u):0\le t\le 1,0\le u\le 1\}$ при линейном отображении –т.е. он компактное множество вещественной размерности 2 – то можно выбрать параметры $c_{i,j}$, $c_{k,\ell}$, $c_{i',j'}$, $c_{k',\ell'}$, так чтобы $\Pi(i,j;k,\ell)$ не пересекался с $\Pi(i',j';k',\ell')$ для индексов $(i,j;k,\ell)\neq(i',j';k',\ell')$. Количество таких пар индексов конечно, и соответственно, нужный выбор параметров всегда возможен.

Описанный выше шаг индукции иллюстрируется рис. 3 при дополнительном предположении $a_i,b_i>0$ для $i=1,2,3$. Заштрихованные области содержат носители многочленов Пюизо, удовлетворяющих системе Горна, заданной матрицей, которая получается путем добавления блока $B_3=\begin{pmatrix} a_3 & b_3\\ -a_3 & -b_3\end{pmatrix}$ к матрице, состоящей из блоков B_1 и B_2. Выполненное выше вычисление голономного ранга гипергеометрической системы показывает, что число многочленов Пюизо, чьи носители лежат на пересечениях новой (третьей) пары дивизоров с исходными парами дивизоров в точности компенсирует рост голономного ранга системы за счет добавления новой пары дивизоров. Действительно, по теореме 3.8 ранг гипергеометрической системы, заданной всеми тремя парами дивизоров, равен $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$. Именно столько многочленов Пюизо имеют носители в трех параллелограммах, изображенных на рис. 3.

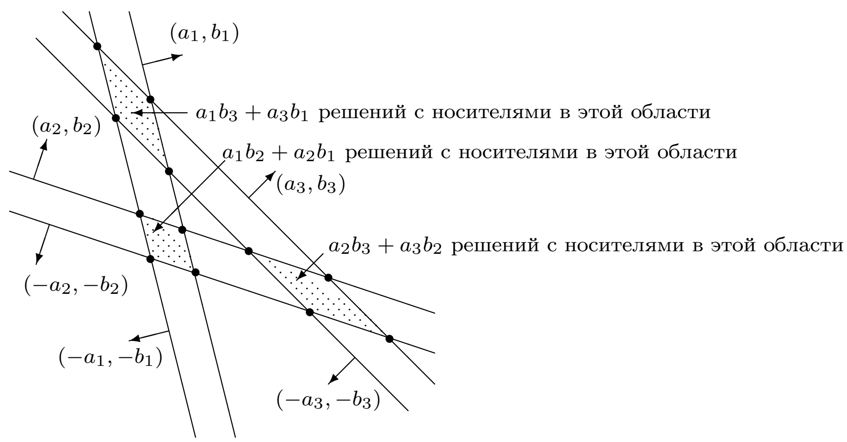


Рис. 3. Добавление отрезка к зонотопу, определяющему систему Горна

Аналогичные рассуждения показывают, что второй класс многоугольников в условии теоремы 6.1 (суммы Минковского треугольников и отрезков, пропорциональных их сторонам) также определяют гипергеометрические системы с базисами из многочленов Пюизо в пространствах их голоморфных решений при подходящем выборе параметров.

Поскольку любой чистый многочлен Пюизо порождает одномерное инвариантное подпространство в пространстве голоморфных решений гипергеометрической системы, решением которой он является, представление монодромии системы, удовлетворяющей условиям теоремы 6.1, является максимально приводимым. □

Докажем теперь необходимость выполнения одного из условий 1), 2) в теореме 6.1.

Предложение 6.6. *Если двумерная гипергеометрическая система уравнений* Horn(A,c) *имеет максимально приводимое представление монодромии, то ее многоугольник Оре-Сато есть либо 1) зонотоп, либо 2) сумма Минковского треугольника и отрезков, параллельных сторонам этого треугольника.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что подходящая мономиальная замена переменных $(x_1, x_2) \mapsto (x^{\rho_1}, x^{\rho_2})$ с линейно независимыми векторами показателей ρ_1 и ρ_2 преобразует матрицу A в матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_r & b_r \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

где $1 + \sum_{j=1}^{r} a_j = 1 + \sum_{j=1}^{r} b_j = 0$, $m = r + 2$.

Если многоугольник коэффициента Оре-Сато является треугольником, то условие 2) автоматически выполняется. Итак, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая $r \geq 2$, а значит, $m \geq 4$. Мы будем также использовать обозначение $\alpha_j(s) = a_j s_1 + b_j s_2$. Рассмотрим две группы линейных функций $\alpha_j(s)$, индексируемых при помощи индексов I_+, I_- таким образом, что $j+ \in I_+$ (соответственно $k- \in I_-$) в том и только том случае, когда $a_{j+} > 0$ (соответственно $a_{k-} < 0$). У полюсов функции $\Gamma(\alpha_{j+}(s)+\gamma_{j+})$, $\alpha_{j+}(s) = -m-\gamma_{j+}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (соответственно $\Gamma(\alpha_{k-}(s)+\gamma_{k-})$, $\alpha_{k-}(s) = -m - \gamma_{k-}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), ограниченной на комплексную плоскость $\{s \in \mathbb{C}^2 : s_2 + \delta_2 + n = 0, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, наблюдается асимптотическое поведение $s_1 \to -\infty$ (соответственно $s_1 \to +\infty$).

Рассмотрим коэффициент Оре-Сато

$$\varphi_{2,j+,k-}(s) = \frac{\Gamma(s_2 + \delta_2)\Gamma(\alpha_{j+}(s) + \gamma_{j+})\Gamma(\alpha_{k-}(s) + \gamma_{k-})}{\Gamma(1 - s_1 - \delta_1) \prod_{\ell \neq j+,k-}^{r} \Gamma(1 - \alpha_\ell(s) - \gamma_\ell)} \tag{6.2}$$

и пространство решений системы уравнений $S(\mathrm{Horn}(A', c'))$, порожденное интегралами вида

$$u_{2,j+}(x) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int\limits_{\mathcal{C}_{2,j+}} \varphi_{2,j+,k-}(s)\, x^s ds,$$

и их всевозможными аналитическими продолжениями. Здесь $c' = (\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ и

$$\mathcal{C}_{2,j+} = \{s \in \mathbb{C}^2 : |s_2 + \delta_2 + n| = |\alpha_{j+}(s) + \gamma_{j+} + m| = \varepsilon, (n, m) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}\}.$$

Здесь радиус круга ε выбирается достаточно малым для того, чтобы каждый из кругов содержал лишь один изолированный двойной полюс функции $\varphi_{2,j+,k-}(s)$.

Отметим, что пространство решений резонансной системы уравнений $\mathrm{Horn}(A', c')$ (см. определение 2.13) имеет недиагонализуемое представление монодромии. Другими словами, для такой системы по крайней мере одна из матриц, порождающих группу монодромии, имеет нетривиальную жорданову клетку размера ≥ 2. Такое представление монодромии заведомо не может быть максимально приводимым. Поэтому мы можем предположить, что система уравнений $\mathrm{Horn}(A', c')$ нерезонансна. Это означает, в частности, что ее решение $u_{2,j+}(x)$ может быть разложено в ряд

Пюизо

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}} c_{n,m} \left(\frac{x_1^{\frac{b_{j+}}{a_{j+}}}}{x_2} \right)^{n+\delta_2} x_1^{\frac{-m-\gamma_{j+}}{a_{j+}}}, \tag{6.3}$$

в окрестности точки $(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}) = (0,0)$. Повторное применение действия представления монодромии $\frac{1}{x_1} \to \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}}x_1}$ к ряду для $u_{2,j+}(x)$ дает a_{j+}-мерное подпространство решений $S_{2,j+} \subset S(\mathrm{Horn}(A', c'))$ в силу невырожденности матрицы Вандермонда.

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение решения, представленного в виде ряда Пюизо $u_{2,j+}(x)$ (6.3), преобразующее это решение в интеграл

$$u_{2,k-}(x) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int\limits_{\mathcal{C}_{2,k-}} \varphi_{2,j+,k-}(s)\, x^s ds, \tag{6.4}$$

при помощи операции, которую мы будем в дальнейшем называть «перебросом контура в интеграле Меллина-Барнса» (см. рис. 4).

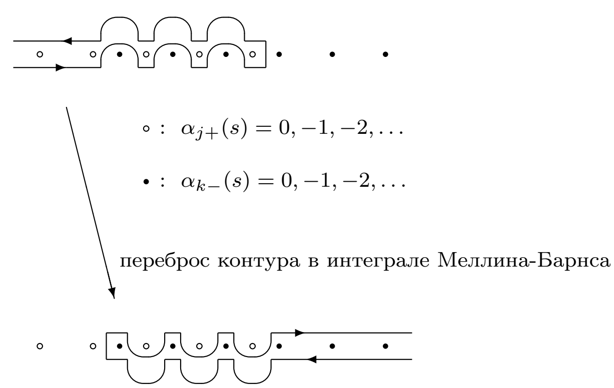


Рис. 4. Переброс контура в интеграле Меллина-Барнса

Данный интеграл может быть вычислен как сумма вычетов внутри контуров

$$\mathcal{C}_{2,k-} = \{s \in \mathbb{C}^2 : |s_2 + \delta_2 + n| = |\alpha_{k-}(s) + \gamma_{k-} + m| = \varepsilon,\ n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$

охватывающих те полюсы, для которых $s_1 \to +\infty$ на комплексной прямой $\{s \in \mathbb{C}^2 : s_2 + \delta_2 + n = 0, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Разложение в ряд Пюизо функции $u_{2,k-}(x)$ в окрестности $\left(x_1, \frac{1}{x_2}\right) = (0,0)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}} d_{n,m} \left(\frac{x_1^{\frac{b_{k-}}{a_{k-}}}}{x_2} \right)^{n+\delta_2} x_1^{\frac{-m-\gamma_{k-}}{a_{k-}}},$$

где $a_{k-} < 0$. Последовательное применение действия представления монодромии $x_1 \to e^{2\pi\sqrt{-1}}x_1$ к ряду для функции $u_{2,k-}(x)$ дает $|a_{k-}|$-мерное подпространство $S_{2,k-} \subset$

$S(\mathrm{Horn}(A', c'))$ в пространстве решений системы Горна в силу невырожденности матрицы Вандермонда.

Рассмотрим теперь следующие этапы применения процедуры аналитического продолжения к решениям гипергеометрической системы:

a) Аналитическое продолжение функции $u_{2,j+}$, преобразующее ее в $S_{2,k-}$ при помощи переброса контура в интеграле Меллина-Барнса.

b) Действие представления монодромии на подпространстве решений $S_{2,k-}$ при помощи отображения $x_1 \mapsto e^{2\pi h\sqrt{-1}}x_1$, то есть, $\varphi_{2,j+,k-}(s)\, x^s \mapsto \varphi_{2,j+,k-}(s)\, e^{2\pi h s_1\sqrt{-1}}x^s$, $h \in \mathbb{Z}$.

c) Обратное аналитическое продолжение, преобразующее $S_{2,k-}$ в $S_{2,j+}$.

Предположим, что представление монодромии гипергеометрической системы максимально приводимо. Если описанные выше процедуры a), b), c) дают корректно определенную нетривиальную монодромию вокруг $x_1 = \infty$, то образ подпространства $S_{2,j+}$ относительно этого действия монодромии имеет размерность $|a_{k-}|$, и, следовательно, $|a_{j+}| = |a_{k-}|$. Отсюда следует, что для любого $j+ \in I_+$ найдется $k- \in I_-$, такой, что $a_{j+} + a_{k-} = 0$.

Поменяв местами s_1 и s_2 (а значит, x_1 и x_2 в (6.3) и (6.4)) и применяя описанную выше схему рассуждений, мы приходим к выводу, что для любого $b_{p+} > 0$ найдется $b_{q-} < 0$, такой, что $b_{p+} + b_{q-} = 0$.

Установим теперь более сильное утверждение, нежели доказанное нами выше: для любого $j+ \in I_+$ существует $k- \in I_-$, такой, что

$$a_{j+} + a_{k-} = 0, \quad b_{j+} + b_{k-} = 0. \tag{6.5}$$

Для доказательства существования такого индекса изучим области сходимости всех рядов, получаемых путем вычисления вычетов в особенностях функции $\varphi_{i,j+,k-}(s)\, x^s$.

Обозначим через $D_{j+,k-}$ область сходимости ряда

$$u_{j+,k-}(x) = \sum_{n,m\geq 0} \operatorname*{Res}_{\substack{\alpha_{j+}(s)+\gamma_{j+}=-n,\\ \alpha_{k-}(s)+\gamma_{k-}=-m}} \varphi_{i,j+,k-}(s)\, x^s,$$

для $i = 1, 2$, $j+ \in I_+$, $k- \in I_-$. Здесь мы используем обозначение

$$\varphi_{2,j+,k-}(s) = \frac{\Gamma(s_2+\delta_2)\Gamma(\alpha_{j+}(s)+\gamma_{j+})\Gamma(\alpha_{k-}(s)+\gamma_{k-})}{\Gamma(1-s_1-\delta_1)\prod\limits_{\ell\neq j+,k-}^{r}\Gamma(1-\alpha_\ell(s)-\gamma_\ell)}.$$

Точно так же определяется и функция $\varphi_{1,j+,k-}(s)$.

Аналогичным образом, рассмотрим области сходимости $D_{i,j+}$ рядов

$$u_{i,j+}(x) = \sum_{n,m\geq 0} \operatorname*{Res}_{\substack{\alpha_{j+}(s)+\gamma_{j+}=-m,\\ s_i+\delta_i=-n}} \varphi_{i,j+,k-}(s)\, x^s,$$

и области сходимости $D_{i,k-}$ рядов

$$u_{i,k-}(x) = \sum_{n,m\geq 0} \operatorname*{Res}_{\substack{\alpha_{k-}(s)+\gamma_{k-}=-m,\\ s_i+\delta_i=-n}} \varphi_{i,j+,k-}(s)\, x^s,$$

для $i = 1, 2$.

Мы покажем, что область $D_{j+,k-}$ имеет непустое пересечение по крайней мере с одной из четырех областей $D_{1,j+}$, $D_{2,j+}$, $D_{1,k-}$, $D_{2,k-}$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим конусы $C_{j+,k-}$, $C_{i,j+}$ и $C_{i,k-}$ носителей решений $u_{j+,k-}(x)$, $u_{i,j+}(x)$ и $u_{i,k-}(x)$, соответственно. Из леммы Абеля (см. [2] предложение 2, а также [15], лемма 1) следует, что

$$\mathrm{Log}\, x^{(a,b)} - C^{\vee}_{a,b} \subset \mathrm{Log}\, (D_{a,b})$$

для некоторого $x^{(a,b)} \in D_{a,b}$ и мультииндекса $x^{(a,b)} \in D_{a,b}$, совпадающего с одним из мультииндексов $(a,b) = (j+,k-)$, $(i,j+)$ или $(i,k-)$. Последовательное рассмотрение каждого из этих случаев позволяет заключить, что $C^{\vee}_{j+,k-}$ имеет непустое двумерное пересечение с одним из четырех двойственных конусов $C^{\vee}_{1,j+}$, $C^{\vee}_{2,j+}$, $C^{\vee}_{1,k-}$, $C^{\vee}_{2,k-}$. Отсюда и следует нужное нам утверждение. (см. рис. 5.)

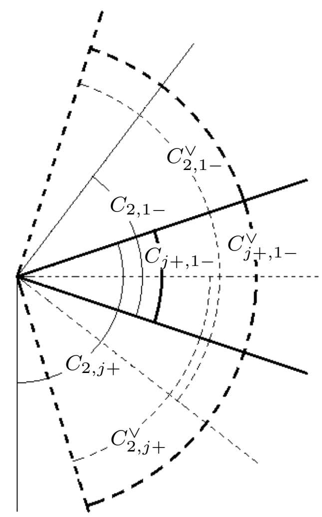


Рис. 5. Пересечение конусов рецессии

Предположим, например, что $D_{j+,k-} \cap D_{2,j+} \neq \emptyset$. Аналитическое продолжение элементов пространства $S_{2,j+}$ при помощи переброса контура в интеграле Меллина-Барнса $\mathcal{C}_{2,j+} \to \mathcal{C}_{j+,k-}$ на комплексных прямых $\{s \in \mathbb{C}^2 : \alpha_{j+}(s) + \gamma_{j+} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$ дает $|a_{j+}(b_{j+} + b_{k-})|$-мерное подпространство решений в пространстве $S(\mathrm{Horn}(A', c'))$, состоящее из рядов Пюизо, сходящихся в области $D_{j+,k-}$ по теореме 3.7 (2). Формула для размерности этого пространства вытекает из следующих неравенств:

$$\left| \det \begin{pmatrix} a_{j+} & b_{j+} \\ a_{k-} & b_{k-} \end{pmatrix} \right| = |a_{j+}(b_{j+} + b_{k-})|, \tag{6.6}$$

где $a_{j+} = -a_{k-}$. С другой стороны, мы уже отмечали ранее, что образ $S_{2,k-}$ аналитического продолжения пространства $S_{2,j+}$ при помощи переброса контура в интеграле Меллина-Барнса $\mathcal{C}_{2,j+} \to \mathcal{C}_{2,k-}$ на комплексных прямых $\{s \in \mathbb{C}^2 : s_2 + \delta_2 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$ имеет размерность $|a_{k-}| = a_{j+}$. Таким образом, нами построено аналитическое продолжение элементов пространства $S_{2,j+}$, в область $D_{j+,k-} \cap D_{2,j+} \neq \emptyset$, образ которого имеет размерность $a_{j+} + |a_{j+}(b_{j+} + b_{k-})|$ по теореме 3.7 (2). Если представление монодромии гипергеометрической системы максимально приводимо, то любое аналитическое продолжение элементов пространства $S_{2,j+}$, включая действие представления монодромии, должно иметь размерность a_{j+}. Отсюда следует, что $b_{j+} + b_{k-} = 0$, а значит, выполнено (6.5).

Если $D_{j+,k-} \cap D_{2,k-} \neq \emptyset$, то нужное утверждение также следует из приведенного выше аргумента.

Если $D_{j+,k-} \cap D_{1,j+} \neq \emptyset$ или $D_{j+,k-} \cap D_{1,k-} \neq \emptyset$, то, меняя местами x_1 и x_2, мы приходим к равенству $|b_{j+}| = |b_{j+}| + |a_{j+}(b_{j+} + b_{k-})|$, откуда $b_{j+} + b_{k-} = 0$. Таким образом, (6.5) также имеет место.

С учетом условия $1 + \sum_{j=1}^{r} a_j = 1 + \sum_{j=1}^{r} b_j = 0$, $m = r + 2$, матрица A', определяющая гипергеометрическую систему с максимально приводимым представлением монодромии и пространством ее решений $\mathrm{Horn}(A', c')$ должна либо иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ a_1 & b_1 \\ -a_1 & -b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r/2-1} & b_{r/2-1} \\ -a_{r/2-1} & -b_{r/2-1} \end{pmatrix}, \quad \text{если } r \text{ четно,} \tag{6.7}$$

либо же вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ a_1 & b_1 \\ -a_1 & -b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)/2} & b_{(r-1)/2} \\ -a_{(r-1)/2} & -b_{(r-1)/2} \end{pmatrix}, \quad \text{если } r \text{ нечетно.} \tag{6.8}$$

Элементарная геометрия на плоскости позволяет заключить, что матрица A' вида (6.7) соответствует гипергеометрической системе, чей многоугольник Оре-Сато является зонотопом.

Для рассмотрения случая (6.8) мы будем использовать обозначение $\mathbf{A}_{1-} = (-1, -1)$, $1- \in I_-$. При $j+ \in I_+$ выполнено одно из следующих неравенств: либо $D_{j+,1-} \cap D_{2,j+} \neq \emptyset$, либо $D_{j+,1-} \cap D_{2,1-} \neq \emptyset$.

Если $D_{j+,1-} \cap D_{2,j+} \neq \emptyset$, то аналитическое продолжение при помощи переброса контура Меллина-Барнса в комплексной прямой $\{s \in \mathbb{C}^2 : \alpha_{j+}(s) + \gamma_{j+} = -m, m \in$

$\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ решения системы Горна

$$u_{2,j+}(x) = \sum_{n,m\geq 0} \operatorname*{Res}_{\substack{\alpha_{j+}(s)+\gamma_{j+}=-m,\\ s_2+\delta_2=-n}} \varphi_{2,1-,j+}(s)\, x^s,$$

дает решение

$$u_{j+,1-}(x) = \sum_{n,m\geq 0} \operatorname*{Res}_{\substack{\alpha_{j+}(s)+\gamma_{j+}=-m,\\ -s_1-s_2+\gamma_{1-}=-n}} \varphi_{2,1-,j+}(s)\, x^s.$$

Применяя теорему 3.7 (2), мы приходим к равенству $a_{j+} = a_{j+} + |a_{j+} - b_{j+}|$. Это означает, что $a_{j+} - b_{j+} = 0$.

Если $D_{j+,1-} \cap D_{j+,1-} \neq \emptyset$, то, применяя тот же аргумент, что и выше, к аналитическому продолжению $u_{2,1-}(x) \to u_{j+,1-}(x)$, мы приходим к равенству $1 = 1+|a_{j+}-b_{j+}|$. Следовательно, $a_{j+} - b_{j+} = 0$, что означает, что вектор $\mathbf{A}_{j+}$ коллинеарен $(-1,-1)$.

Рассуждая аналогичным образом, мы заключаем, что аналитическое продолжение при помощи переброса контура в интеграле Меллина-Барнса вдоль комплексных прямых $\{s \in \mathbb{C}^2 : s_2 + \delta_2 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$ преобразует функцию

$$u_{2,1-}(x) = \sum_{n,m\geq 0} \operatorname*{Res}_{\substack{-s_1-s_2+\gamma_{1-}=-m,\\ s_2+\delta_2=-n}} \varphi_{2,1-,j+}(s)\, x^s,$$

в функцию

$$u_{2,k-}(x) = \sum_{n,m\geq 0} \operatorname*{Res}_{\substack{\alpha_{k-}(s)+\gamma_{k-}=-m,\\ s_2+\delta_2=-n}} \varphi_{2,1-,j+}(s)\, x^s.$$

Ввиду соотношения $C^{\vee}_{2,1+} \subset C^{\vee}_{2,k-}$ мы можем сделать вывод, что $1 + |a_{k-}| = 1$, то есть, $|a_{k-}| = 0$ и, следовательно, вектор $\mathbf{A}_{k-}$ коллинеарен $(0,1)$.

Применяя этот же аргумент к вычетам функций $\varphi_{1,1-,j+}(s)\, x^s$ и $\varphi_{1,1-,k-}(s)\, x^s$, мы заключаем, что каждая строка матрицы (6.8) коллинеарна одному из трех векторов $(1,0),(0,1),(-1,-1)$. Это означает, что многоугольник Оре-Сато системы Горна $\mathrm{Horn}(A',c')$, где A' определено согласно (6.8), есть сумма Минковского треугольника и отрезков, параллельных сторонам этого треугольника. □

Следствие 6.7. *Двумерная гипергеометрическая система уравнений* $\mathrm{Horn}(A,c)$ *имеет максимально приводимое представление монодромии в том и только том случае, когда пространство решений системы уравнений* $\mathrm{Horn}(A,\tilde{c})$ *порождается многочленами Пюизо для некоторого выбора вектора параметров* $\tilde{c}$.

Доказательство. Если пространство решений системы $\mathrm{Horn}(A,\tilde{c})$ имеет базис, состоящий из многочленов Пюизо, то ее представление монодромии является максимально приводимым. Действительно, любой моном Пюизо порождает одномерное инвариантное относительно аналитического продолжения вдоль любого пути пространство, следовательно, пространство решений системы $\mathrm{Horn}(A,\tilde{c})$ есть прямая сумма одномерных инвариантных подпространств.

Согласно предложению 6.6, многоугольник Оре-Сато гипергеометрической системы $\mathrm{Horn}(A,c)$ с максимально приводимым представлением монодромии должен быть либо зонотопом, либо суммой Минковского треугольника и отрезков, параллельных сторонам этого треугольника. В силу предложения 6.5 в пространстве решений системы $\mathrm{Horn}(A, \tilde{c})$ есть базис, состоящий из многочленов Пюизо для подходящего выбора вектора параметров $\tilde{c}$. $\square$

Пример 6.8. *Случайно выбранный зонотоп.* Рассмотрим следующий многоугольник, являющийся суммой Минковского четырех отрезков:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

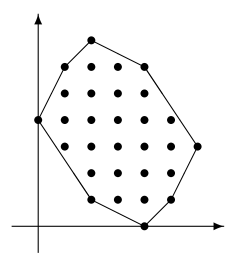


Рис. 6. Зонотоп, задающий матрицу (6.9)

Выберем вектор параметров следующим образом: $c = (3, -5, -2, 1, -2, -1, -1, -1)^T$. Определенная этими данными гипергеометрическая система уравнений $\mathrm{Horn}(A, c)$ голономна, а ее ранг, в соответствии с теоремой 3.8, равен 31. Приведем базис пространства ее голоморфных решений, состоящий из чистых многочленов Пюизо и найденных при помощи системы компьютерной алгебры Mathematica 9.0. Стойкие полиномиальные решения данной системы имеют следующий вид: $x_2, x_1^3 x_2^5, \frac{\sqrt{x_1}}{x_2^{7/4}}, \frac{x_1}{x_2^2}, \frac{x_1^{5/2}}{x_2^{15/4}}, \frac{x_1^3}{x_2^4}$. Прочие ее решения таковы:

$$\frac{x_1^2}{x_2^3}, \frac{x_1^{3/2}}{x_2^{11/4}}, \frac{1}{x_1^{4/5} x_2^{8/5}}, \frac{x_1^{2/7}}{x_2^{3/7}}, \frac{\sqrt[7]{x_2}}{x_1^{3/7}}, \frac{x_2^{3/5}}{x_1^{2/5}}, \frac{x_2}{x_1}, 13068 x_1^2 x_2^4 + 18900 x_1^2 x_2^3 + 74529 x_1 x_2^3 + 715715 x_1 x_2^2,$$
$$\frac{54}{x_1^{4/7}\sqrt[7]{x_2}} + \frac{5x_1^{3/7}}{\sqrt[7]{x_2}}, \frac{99 x_2^{3/7}}{x_1^{2/7}} - \frac{52}{x_1^{2/7} x_2^{4/7}}, \frac{230 x_2^{5/7}}{\sqrt[7]{x_1}} - \frac{407}{\sqrt[7]{x_1} x_2^{2/7}}, \frac{5}{x_2} - 9{,}38\sqrt[7]{x_1} x_2^{2/7} - \frac{99\sqrt[7]{x_1}}{x_2^{5/7}},$$
$$\frac{234 x_2^{6/5}}{x_1^{4/5}} - \frac{1463\sqrt[5]{x_2}}{x_1^{4/5}}, \frac{14 x_2^{7/5}}{x_1^{3/5}} - \frac{837 x_2^{2/5}}{x_1^{3/5}}, \frac{119 x_2^{4/5}}{\sqrt[5]{x_1}} - \frac{4x_2^{4/5}}{x_1^{6/5}}, \frac{275}{x_1^2 x_2} - \frac{7}{x_1^3 x_2}, \frac{129115}{x_1^{5/3} x_2^{2/3}} - \frac{7904}{x_1^{8/3} x_2^{2/3}},$$
$$\frac{203}{x_1^{7/3}\sqrt[3]{x_2}} - \frac{170}{x_1^{7/3} x_2^{4/3}}, \frac{22869 x_1^2}{x_2^{7/2}} + \frac{16065 x_1^2}{x_2^{5/2}} - \frac{143650 x_1}{x_2^{5/2}}, -\frac{2600150 x_1^{5/2}}{x_2^{13/4}} + \frac{29637333 x_1^{3/2}}{x_2^{9/4}} + \frac{4075291 x_1^{3/2}}{x_2^{13/4}},$$
$$\frac{1}{x_1 x_2^2} - \frac{7}{x_1 x_2}, \frac{19}{x_1^{7/5} x_2^{9/5}} + \frac{143}{x_1^{2/5} x_2^{9/5}}, \frac{238}{x_1^{6/5} x_2^{7/5}} + \frac{999}{\sqrt[5]{x_1} x_2^{7/5}}, \frac{2511}{x_1^{3/5} x_2^{6/5}} - \frac{88}{x_1^{3/5} x_2^{11/5}}.$$

Следующий рисунок показывает носители перечисленных выше решений системы уравнений $\mathrm{Horn}(A, c)$. Большие круги соответствуют мономиальным решениям (как стойким, так и нестойким), в то время как маленькие круги используются для изображения всех прочих решений. Параллелограммы, содержащие носители решений, являются пересечениями полос, ограниченных дивизорами определяющего систему коэффициента Оре-Сато.

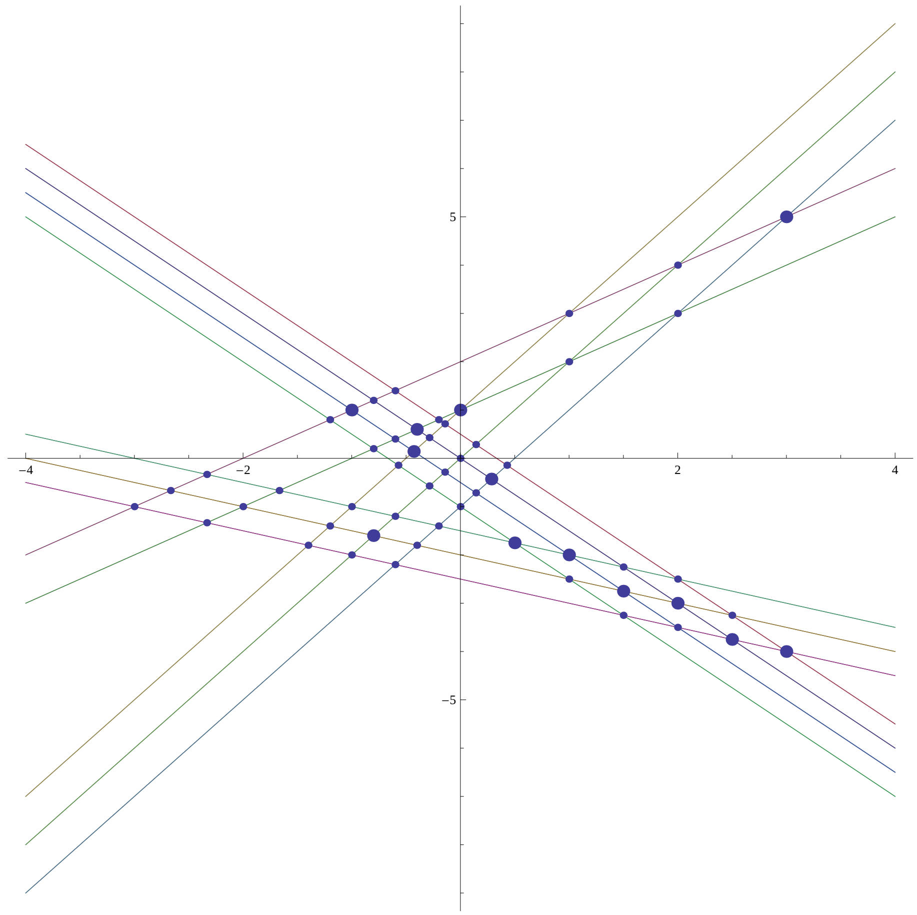


Рис. 7. Носители решений системы $\mathrm{Horn}(A, c)$, заданной матрицей (6.9)

Пример 6.9. *Сумма Минковского треугольника и его сторон.* Рассмотрим следующую конфигурацию, заданную как сумма Минковского треугольника и его сторон:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}. \qquad (6.10)$$

Выберем в качестве вектора параметров вектор $c = (-1, -6, 3, -2, -10, 5, 3, -1, -6)^T$.

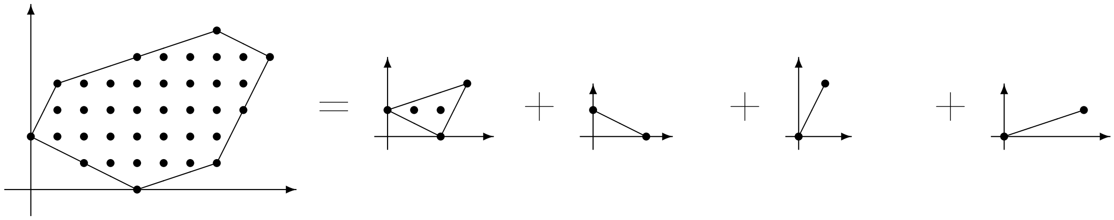


Рис. 8. Многоугольник, определяющий матрицу (6.10) и его разложение в сумму Минковского

Согласно теореме 3.8, гипергеометрическая система уравнений, соответствующая этим данным, голономна, имеет ранг 40, и порождается следующими дифференциальными операторами:

$$x_1(\theta_1-3\theta_2+5)(2\theta_1-\theta_2-6)(2\theta_1-\theta_2-5)(2\theta_1-\theta_2-1)(2\theta_1-\theta_2)(\theta_1+2\theta_2+3)-$$

$$(\theta_1+2\theta_2+6)(\theta_1+2\theta_2+1)(2\theta_1-\theta_2-4)(2\theta_1-\theta_2-3)(\theta_1-3\theta_2+10)(\theta_1-3\theta_2+2),$$

$$x_2(\theta_1-3\theta_2)(\theta_1-3\theta_2+1)(\theta_1-3\theta_2+2)(\theta_1-3\theta_2+8)(\theta_1-3\theta_2+9)$$

$$(\theta_1-3\theta_2+10)(2\theta_1-\theta_2-3)(\theta_1+2\theta_2+3)(\theta_1+2\theta_2+4)-$$

$$(\theta_1-3\theta_2+5)(\theta_1-3\theta_2+6)(\theta_1-3\theta_2+7)(2\theta_1-\theta_2-6)(2\theta_1-\theta_2-1)$$

$$(\theta_1+2\theta_2)(\theta_1+2\theta_2+1)(\theta_1+2\theta_2+5)(\theta_1+2\theta_2+6).$$

Данная система уравнений имеет 5 стойких полиномиальных решений: x_1x_2, $x_1^4x_2^2$, $x_1^{14/5}x_2^{13/5}$, $x_1^{13/5}x_2^{21/5}$, $x_1^{28/5}x_2^{26/5}$. Следующие 30 чистых многочленов Пюизо, удовлетворяющие этой системе, были вычислены с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica 9.0:

$$28+15/x_1,\quad x_1^{-4/5}x_2^{-3/5}(7x_1+22x_2+44x_1x_2),\quad x_1^{-1/5}x_2^{-2/5}(196+297x_2+231x_1x_2),$$
$$x_1^{-3/5}x_2^{-1/5}(198+140x_1+165x_1x_2),\ x_1^{-7/5}x_2^{1/5}(25+120x_1+72x_1^2),$$
$$x_1^{4/5}x_2^{-17/5}(3+1254x_2+52x_1x_2),\quad x_1^{17/5}x_2^{14/5}(298452+129675x_2+27930x_1x_2+588x_1x_2^2+85x_1^2x_2^2),$$
$$x_1^{2/5}x_2^{-16/5}(91+15x_1+15675x_2+3135x_1x_2),\quad x_2^{-3}(1040+819x_1+62700x_1x_2),$$
$$x_1^{3/5}x_2^{-14/5}(2340+182x_1+72675x_2),\quad x_1^{19/5}x_2^{18/5}(8892+266x_1+105x_2+72x_1x_2),$$
$$x_1^3x_2^3(426360+34884x_1+26600x_1x_2+1200x_1^2x_2+51x_1^2x_2^2),$$
$$x_1^{18/5}x_2^{16/5}(43605+741x_1+3325x_2+1125x_1x_2),\quad x_1^{16/5}x_2^{17/5}(46512+6669x_1+900x_1x_2+64x_1^2x_2),$$
$$2660x_1+34884x_1^2+51x_2+4500x_1x_2+74100x_1^2x_2/x_1^7,$$
$$x_1^{-38/5}x_2^{-1/5}(8151x_1^2+9x_2+1980x_1x_2+73150x_1^2x_2+639540x_1^3x_2),$$
$$x_1^{-32/5}x_2^{1/5}(1200+33345x_1+170544x_1^2+336x_2+13300x_1x_2),$$
$$x_1^{-34/5}x_2^{2/5}(32+1596x_1+17442x_1^2+38760x_1^3+105x_1x_2),$$
$$x_1^{-36/5}x_2^{3/5}(17+1575x_1+31122x_1^2+149226x_1^3),\ x_1^{1/5}x_2^{-18/5}(16x_1+48279x_2+18018x_1x_2),$$
$$x_1^{6/5}x_2^{-8/5}(33x_1+9996x_2+3672x_1x_2+22100x_1x_2^2+1326x_1^2x_2^2+4641x_1x_2^3+2652x_1^2x_2^3),$$
$$x_1^{9/5}x_2^{-7/5}(81+3024x_2+192x_1x_2+5720x_2^2+1872x_1x_2^2+624x_1x_2^3+72x_1^2x_2^3),$$
$$x_1x_2^{-1}(420+216x_1+2925x_1x_2+175x_1^2x_2+2145x_1x_2^2+819x_1^2x_2^2),$$
$$x_1^{8/5}x_2^{-4/5}(23520+1728x_1+109200x_2+34125x_1x_2+38220x_1x_2^2+2912x_1^2x_2^2),$$
$$x_1^{7/5}x_2^{-6/5}(9504+990x_1+128700x_2+41580x_1x_2+113256x_1x_2^2+7280x_1^2x_2^2+4455x_1^2x_2^3),$$
$$x_1^{-22/5}x_2^{-9/5}(1225x_1^2+3780x_1^3+1512x_1^4+75x_2+2730x_1x_2+18018x_1^2x_2+27300x_1^3x_2),$$
$$x_1^{-4}x_2^{-2}(120x_1^2+216x_1^3+45x_2+819x_1x_2+3250x_1^2x_2+2925x_1^3x_2),$$
$$x_1^{-18/5}x_2^{-11/5}(3456x_1^2+2835x_1^3+5824x_2+65520x_1x_2+163800x_1^2x_2+82320x_1^3x_2+38220x_1x_2^2),$$
$$x_1^{-19/5}x_2^{-13/5}(66x_1^3+2652x_1x_2+12852x_1^2x_2+11424x_1^3x_2+1377x_2^2+18564x_1x_2^2+48620x_1^2x_2^2),$$
$$x_1^{-16/5}x_2^{-12/5}(198x_1^2+1456x_2+10725x_1x_2+16632x_1^2x_2+3696x_1^3x_2+3432x_2^2+18876x_1x_2^2).$$

Мы не приводим оставшиеся 5 решений ввиду их громоздкости. Их начальные показатели равны $(-23/5,9/5)$, $(-21/5,8/5)$, $(-19/5,7/5)$, $(-17/5,6/5)$, $(-3,1)$.

Список литературы

[1] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, *Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа,* Успехи Мат. Наук **47**:4 (1992), 3-82.

[2] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов, *Гипергеометрические функции и торические многообразия,* Функциональный анализ и его приложения **23**:2 (1989), 12-26.

[3] Б. Я. Казарновский, *С-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий,* Изв. РАН Сер.матем. **67**:3 (2003), 23-44.

[4] В. П. Паламодов, *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* М.: Наука, 1967.

[5] Т. М. Садыков, *О многомерной системе дифференциальных гипергеометрических уравнений*, Сиб. матем. журнал **39** (1998), 1141-1153.

[6] Т. М. Садыков, *Гипергеометрические системы уравнений с максимально приводимой монодромией*, Докл. Рос. Акад. Наук Сер. мат. **423**:4 (2008), 455-457.

[7] Т. М. Садыков, *Hypergeometric systems with polynomial bases*, Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика **1** (2008), 25-32.

[8] F. Beukers. *Algebraic A-hypergeometric functions*, Invent. Math. **180**, no. 3 (2010), 589-610.

[9] F. Beukers. *Monodromy of A-hypergeometric functions*, arXiv.org 1101.0493v2 (2013), 27 pp.
[10] F. Beukers and G. Heckman. *Monodromy for the hypergeometric function* ${}_nF_{n-1}$, Invent. Math. **95**, no. 2 (1989), 325-354.
[11] E. Cattani, A. Dickenstein, and B. Sturmfels. *Rational hypergeometric functions*, Compositio Math. **128** (2001), 217-240.
[12] A. Dickenstein, L. Matusevich, and T. Sadykov. *Bivariate hypergeometric D-modules*, Adv. in Math. **196**, no. 1 (2005), 78-123.
[13] A. Dickenstein, L. Matusevich, and E. Miller. *Binomial D-modules*, Duke Math.J. **151**, no. 3 (2010), 385-429.
[14] R.M. Hain and R. MacPherson. *Higher logarithms*, Illinois Journal of Math. **34**, no. 2 (1990), 392-475.
[15] M. Passare, T.M. Sadykov, and A.K. Tsikh. *Nonconfluent hypergeometric functions in several variables and their singularities*, Compos. Math. 141, no. 3 (2005), 787-810.
[16] M. Passare and A. Tsikh. *Amoebas: their spines and their contours*, Idempotent Mathematics and Mathematical Physics : International workshop, February 3-10, 2003, Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, Vienna, Austria / Eds. G.L. Litvinov, V.P. Maslov. AMS, 2005. V. 377.
[17] T.M. Sadykov. *On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type*, Math. Scand. **91** (2002), 127-149.
[18] T.M. Sadykov. *The Hadamard product of hypergeometric series*, Bull. Sci. Math. **126**, no. 1 (2002), 31-43.
[19] M. Sato. *Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)*, Nagoya Math. J. **120**, (1990), 1-34.
[20] S. Tanabé. *On Horn-Kapranov uniformisation of the discriminantal loci*, Advanced Studies in Pure Mathematics. **46**, (2007), 223-249.

РЭУ им. Г.В. Плеханова
125993, Москва, Россия.
E-mail address: SadykovTM@rsute.ru

Отдел математики
Факультет филологии и естественных наук
университет Галатасарай
34357, Стамбул, Турция.
E-mail address: tanabe@gsu.edu.tr