Compositio Mathematica **130:** 119–160, 2002.

Transformée de Mellin des intégrales-fibres associées aux singularités isolées d'intersection complète quasihomogènes★

(Mellin Transform of Fibre Integrals Associated to Isolated Complete Intersection Singularities)

SUSUMU TANABÉ
Independent University of Moscow, Bol'shoj Vlasievskij pereulok 11, Moscow 121002, Russia. e-mail: tanabe@mccml.ru and Max Planck Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, Bonn, D-53111, Germany. e-mail: tanabe@mpim-bonn.mpg.de

(Received: 25 June 1999)

Abstract. The Mellin transform of the fibre integral is calculated for certain quasihomogeneous isolated complete intersection singularities (above all, unimodal singularities of the list by Giusti and Wall). We show the symmetry property of the Gauss–Manin spectra (Theorem 3.1) and shed light on the lattice structure of the poles of the Mellin transform that are expressed by means of some topological data of the singularities (Theorem 4.3, Theorem 5.2). As an application of these results, we express the Hodge number of the fibre in terms of the Gauss–Manin spectra.

Mathematics Subject Classifications (2000). 14M10, 32S25, 32S40.

Key words. Gauss–Manin connexion, complete intersection, Hodge structure.

0. Introduction

Ici on calcule concrètement le système de Gauss–Manin de l'intégrale-fibre associée aux singularités isolées d'intersection complète (SIIC) quasihomogène.

D'abord nous fixons la situation. Pour les deux variétés complexes

$$X = (\mathbf{C}^{n+k}, 0), S = (\mathbf{C}^k, 0),$$

on regarde une application quasihomogène d'intersection complète,

$$f: X \to S \tag{0.1}$$

telle que

$$X_s := \{(x_1, \dots, x_{n+k}) \in X; f_1(x) = s_1, \dots, f_k(x) = s_k\}.$$

★Travail réalisé par le soutien financier d'homme d'affaires M. Mikhail S. Gavounas (Moscou, Russie) et du Max Planck Institut für Mathematik.

C'est à dire que $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ sont des polynômes quasihomogènes par rapport à un poids et dim $X_0 = n \geqslant 1$. On suppose en plus que f possède une singularité isolée à l'origine, i.e. $\mathrm{d}f(x) = 0$ pour $x \in X_0$ si et seulement si $x = 0$.

Dans ce travail, notre but est de décrire les solutions explicites du système de Gauss–Manin associé à SIIC quasihomogènes pour certains cas de courbe espace, i.e. $n = 1, k = 2$. Ici nous nous servons de la transformée de Mellin d'intégrales-fibres parce que elle permet de mieux visualiser les propriétés importantes de singularités SIIC. Cette situation a incité certains auteurs comme C. Sabbah [21, 22], D. Barlet [6], F. Loeser [16] à poursuivre des recherches sur la transformée de Mellin d'intégrales fibres qui étaient, entre autres, motivés par une idée de P. Deligne reproduite dans [20].

Le plan de cet article est le suivant. Dans le §1, selon Greuel et Hamm [12], on introduit les espaces vectoriels sur lesquels le système de Gauss–Manin associé à SIIC quasihomogène de dimension arbitraire sera défini et représenté au moyen des matrices implicitement définies. Les résultats du §2 montrent le calcul concret du système de Gauss–Manin associé aux singularités isolées simples d'intersection complète (SISIC) $S_\mu,\ U_\mu, T_\mu, W_\mu, Z_\mu\ \ (\mu \geqslant 5)$ de la liste de M. Giusti [10]. Je tiens à noter que le calcul effectué par S. Guzev [13] sert à l'établissement de résultats de cette section.

Dans le §3, les spectres du système de Gauss–Manin associé à SISIC sont définis et la symétrie entre eux est établie. On note que la symétrie des spectres de la structure de Hodge mixte sur la cohomologie relative d'une SIIC a été démontrée par W. Ebeling et J. Steenbrink [9]. Notre approche est différent de celui de Ebeling–Steenbrink, puisque nos objets principaux sur lesquel la transformation de monodromie agit sont les espaces V et Φ de Greuel–Hamm. Dans le §4, la transformée de Mellin de l'intégrale-fibre est décrite au moyen des spectres mentionnés. Pour cela, on résout une équation aux différences finies. L'interprétation de l'intégrale-fibre comme fonction hypergéométrique généralisée au sens de Mellin–Barnes–Pincherle est donnée. Les pôles de la transformée de Mellin donnent des informations sur la $b-$ fonction en 2-variables introduite par Sabbah [21]. Dans le §5, en se servant du caractère assez universel des calculs pour SISIC, on généralise des résultats des §2 et §3 aux séries des singularités 'non-resonantes' et unimodales. Dans le §6, on exprime le nombre de Hodge de la fibre de Milnor $h^{pq}(X_s)$ au moyen des spectres de Gauss–Manin obtenus dans §3, §5.

1. Les espaces vectoriels V et Φ de Greuel–Hamm

1.1. On reprend la situation et les notations de §0. Dans cette section, on prépare quelques lemmes sur l'intersection complète

$$X_s := \{(x_1, \ldots, x_m) \in X; f_1(x) = s_1, \ldots, f_k(x) = s_k\},$$

de dimension $n = m - k \geqslant 0$ qui est définie par une collection de polynômes quasihomogènes $f_1(x), \ldots, f_k(x)$.

D'abord on commence par munir nos objets des poids quasihomogènes. Dès que $f_1, \ldots, f_k$ sont des polynômes quasihomogènes, on peut attribuer aux variables $x_1, \ldots, x_m$ les poids quasihomogènes. Notons les poids de ces variables par

$$w(x_1) = w_1, \ldots, w(x_m) = w_m, \tag{1.1.1}$$

où $w_1, \ldots, w_m$ sont les entiers positifs de pgdc égal à 1. On utilisera la notation $w(f_1) = p_1, \ldots, w(f_k) = p_k$, en sorte que $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_k$. Il est naturel de définir le champ d'Euler

$$E = w_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + w_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m}, \tag{1.1.2}$$

de telle sorte que

$$E(f_j) = p_j f_j \quad \text{pour } j = 1, \ldots, k.$$

On peut associer à une fonction ou une forme holomorphe quasihomogène ξ son poids quasihomogène et on le note par $w(\xi)$.

1.2. Pour calculer le système de Gauss–Manin associé aux singularités notées ci-dessus, nous introduisons les deux espaces vectoriels V et F,

$$F := \frac{\Omega_X^{n+1}}{\mathrm{d}f_1 \wedge \Omega_X^n + \cdots + \mathrm{d}f_k \wedge \Omega_X^n + i_E(\Omega_X^{n+2})}, \tag{1.2.1}$$

où i_E signifie contraction avec le champ d'Euler E défini par (1.1.2).

$$V := \frac{\Omega_X^n}{\mathrm{d}f_1 \wedge \Omega_X^{n-1} + \cdots + \mathrm{d}f_k \wedge \Omega_X^{n-1} + \mathrm{d}\Omega_X^{n-1} + f_1 \Omega_X^n + \cdots + f_k \Omega_X^n}. \tag{1.2.2}$$

L'espace V a été, par exemple, introduit par Greuel–Hamm [12]. Ils s'en servirent afin de calculer le nombre de Milnor μ et le polynôme caractéristique de la monodromie de Picard–Lefschetz pour f, une singularité isolée d'intersection complète quasihomogène. Du lemme 3.6 de [12] on déduit que $rang_{\mathbf{C}} V$ est égal au nombre de Milnor μ de la singularité. Dans leur formule, $P_V(1) = \mu$ pour le cas $n > 0$. Le Satz 3.1 de [12] donne la série de Poincaré $P_V(t)$,

$$P_V(t) = \mathrm{Res}_{\tau=0} \frac{\tau^{-m+k-1}}{\tau + 1} \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{1 + \tau t^{w_i}}{1 - t^{w_i}} \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - t^{p_j}}{1 + \tau t^{p_j}} + \tau \right]. \tag{1.2.3}$$

Quant à l'espace F, on doit sa définition essentiellement à S. Guzev [13].

1.3. Par les propositions suivantes, on voit l'utilité de l'espace F pour le calcul de Gauss–Manin. Introduisons un autre espace vectoriel Φ:

$$\Phi := \frac{\Omega_X^m}{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \Omega_X^n + f_1\Omega_X^m + \cdots + f_k\Omega_X^m}.$$

On introduit un espace vectoriel $\tilde{\Phi}$ qui est évidemment isomorphe à Φ:

$$\tilde{\Phi} = \mathcal{O}_X / \langle \mathcal{J}(f), f_1, \ldots, f_k \rangle,$$

où $\mathcal{J}(f)$ l'ideal jacobien des mineurs d'ordre k:

$$\mathcal{J}(f) := \left\langle \frac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}, 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+k \right\rangle.$$

Pour $\phi_j(x) \in \tilde{\Phi}$, on a $\phi_j(x)dx \in \Phi$. Nous notons par

$$Cr(f) := \{x \in X; df_1(x) \wedge \cdots \wedge df_k(x) = 0\},$$

l'ensemble défini par l'idéal $\mathcal{J}(f)$.

Selon la construction de Brieskorn–Greuel [11], introduisons un module

$$''H = f_*\Omega_X^m / df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \cdot d(f_*\Omega_X^{n-1}) \cong \frac{\Omega_X^m}{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge d\Omega_X^{n-1}},$$

qui est identifié à un $\mathcal{O}_S-$ module du rang μ (Proposition 2.6 [11]). En fait,

LEMME 1.1. *Si $f_1, \ldots, f_k$ sont des polynômes quasihomogènes qui définissent SIIC, l'espace vectoriel Φ est isomorphe à un autre espace vectoriel $''H/(f_1, \ldots, f_k)$, le réseau de Brieskorn.*

Démonstration. Prenons α un élément non nul de Ω_X^m admettant la décomposition

$$\alpha = \omega + \sum_{i=1}^{k} f_i\varphi_i + df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge d\psi,$$

avec $\psi \in \Omega_X^{n-1}$, $\varphi_i \in \Omega_X^m$, pour

$$\omega = df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \phi,$$

avec $\phi \in \Omega_X^n$.

Alors,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} f_i\varphi_i + df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge (d\psi + \phi).$$

L'énoncé du lemme se réduit à la nullité de α dans $''H/(f_1, \ldots, f_k)$.On peut supposer la décomposition de la forme $\phi \in \Omega_X^n$ selon le poids quasihomogène

$$\phi = \sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1}(di_E + i_E d)(\phi_j) = \sum_{j=1}^{L} \phi_j$$

où $w(\phi_j) = (c_1 j + c_0)/c$ avec c, c_0, c_1, les entiers strictement positifs. Avec cette notation, la forme α s'écrit

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{i=1}^{k} f_i\varphi_i + \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \left[\left(\mathrm{d}\psi + \sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1}(di_E + i_E d)\phi_j\right)\right] \\
&\equiv \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \left[d\left(\psi + \sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1} i_E(\phi_j)\right) + i_E\left(\sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1}\mathrm{d}\phi_j\right)\right] \\
&\equiv \sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1}\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge i_E(\mathrm{d}\phi_j), \\
&\equiv (-1)^{k+1} i_E\left[\sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1}\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \mathrm{d}\phi_j\right] \equiv 0 \quad \text{dans } {}''H/(f_1, \ldots, f_k),
\end{aligned}$$

car $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \mathrm{d}\phi_j \in \Omega_X^{m+1} \cong 0$. □

De ce lemme il suit que $\mathrm{rang}_{\mathbf{C}}\Phi = \mu$. Nous notons les éléments de la base de Φ par $\phi_j(x)\mathrm{d}x$, $1 \leqslant j \leqslant \mu$. Ici et par la suite on utilise la notation $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m$. Notons aussi la base de l'espace F par $\tilde{\omega}_i$, $1 \leqslant i \leqslant \mu$.

Nous soulignons ici le caractère topologiquement invariant des espaces F et Φ.

1.4.

PROPOSITION 1.2. *Si on définit le champ d'Euler comme* (1.1.2)*, l'application* i_E *donée par la contraction avec* E, i_E: $F \to V$ *induit un isomorphisme entre les deux espaces vectoriels* F *et* V.

Démonstration. (1) Surjectivité. Si on prend une forme quasihomogène $\omega \in V$, en vertu de la quasihomogénéité de ω,

$$w(\omega)\omega = i_E(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(i_E\omega).$$

Cela veut dire, pour $\mathrm{d}\omega/w(\omega) \in F$,

$$i_E\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{w(\omega)}\right) \equiv \omega \ \text{ dans } V.$$

Ici on note $w(\omega)$ le poids de la forme ω.

(2) Injectivité. Supposons pour $\omega \in F$,

$$i_E(\omega) = \mathrm{d}f_1 \wedge \phi_1 + \cdots + \mathrm{d}f_k \wedge \phi_k + \mathrm{d}\psi + f_1\omega_1 + \cdots + f_k\omega_k,$$

avec $\phi_1, \ldots, \phi_k, \psi \in \Omega_X^{n-1}$, $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega_X^n$. çCa veut dire,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}i_E(\omega) &= \mathrm{d}f_1 \wedge (\mathrm{d}\phi_1 + \omega_1) + \cdots + \mathrm{d}f_k \wedge (\mathrm{d}\phi_k + \omega_k) + f_1 \mathrm{d}\omega_1 + \cdots + f_k \mathrm{d}\omega_k \\ &= w(\omega)\omega - i_E(\mathrm{d}\omega). \end{aligned}$$

Ou bien

$$\omega \equiv \frac{1}{w(\omega)}(f_1 \mathrm{d}\omega_1 + \cdots + f_k \mathrm{d}\omega_k) \quad \text{dans } F.$$

D'autre part, puisque

$$p_1 f_1 \mathrm{d}\omega_1 = i_E(\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}\omega_1) + \mathrm{d}f_1 \wedge i_E(\mathrm{d}\omega_1),$$

on a

$$f_1 \mathrm{d}\omega_1 \equiv 0 \quad \text{dans } F.$$

D'une façon analogue,

$$f_i\, \mathrm{d}\omega_i \equiv 0 \quad \text{dans } F, 2 \leqslant i \leqslant k. \qquad \square$$

1.5. En tenant compte de la Proposition 1.2, nous notons une base de V par ω_i telle que $\omega_i = i_E(\tilde{\omega}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant \mu$. Dans la suite on entend par $\tilde{\omega}_i$ une forme concrète quasihomogène telle que $(\mathrm{d}i_E + i_E\mathrm{d})(\tilde{\omega}_i) = \ell_i \tilde{\omega}_i$, avec le poids quasihomogène $\ell_i = w(\omega_i)$ qui figure dans les termes de la série de Poincaré (1.2.3), $P_F(t) = P_V(t)$. On se sert de la même convention pour la base $\phi_j(x)\mathrm{d}x \in \Phi$. C'est à dire $\tilde{\omega}_i$ est une forme représentant une classe d'équivalence, pas une classe d'équivalence elle même.

PROPOSITION 1.3. *Pour chaque $\tilde{\omega}_i$, on a la décomposition suivante:*

$$\tilde{\omega}_i \wedge \mathrm{d}f_1 \wedge \overset{\ell}{\overset{\vee}{\cdots}} \wedge \mathrm{d}f_k \equiv \sum_{j=1}^{\mu} P_{ij}^{(\ell)}(f)\phi_j \mathrm{d}x \bmod (\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \mathrm{d}\Omega_X^{n-1}), \tag{1.5.1}$$

avec

$$P_{ij}^{(\ell)}(f) \in \mathbf{C}[f_1, \ldots, f_k] \quad et \quad \phi_j(x)\mathrm{d}x \in {}''H/(f_1, \ldots, f_k) \cong \Phi,$$

pour

$$1 \leqslant i, j \leqslant \mu, 1 \leqslant \ell \leqslant k \quad et \quad \mathrm{d}f_1 \wedge \overset{\ell}{\overset{\vee}{\cdots}} \wedge \mathrm{d}f_k = \bigwedge_{i \neq \ell}^{k} \mathrm{d}f_i.$$

Démonstration. D'après la condition d'intersection complète sur f, pour chaque $\alpha \in \Omega^{n+k}$, il existe la décomposition:

$$\alpha = P(f_1, \ldots, f_k)\mathrm{d}x + \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \beta,$$

pour certain polynôme $P(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbf{C}[s_1, \ldots s_k]$ et $\beta \in \mathrm{d}\Omega_X^{n-1}$. L'unicité de la décomposition découle du fait que $''H$ est un $\mathcal{O}_S$-module libre de rang μ engendré des générateurs finis (Korollar 4.9, [11]). On applique ce raisonnement á la forme $\alpha = \tilde{\omega}_i \wedge \mathrm{d}f_1 \wedge \overset{\ell}{\cdot\vee\cdot} \wedge \mathrm{d}f_k$. La conclusion se déduit immédiatement de l'isomorphisme entre $''H/(f_1, \ldots, f_k)$ et Φ. □

1.6. Nous abordons le calcul du système de Gauss–Manin à la manière de Greuel [11] pour $\omega_i \in V$. Nous notons d'ailleurs par ψ_i une n-forme méromorphe telle que

$$\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \psi_i = \phi_i(x)\mathrm{d}x, \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu,$$

pour une base $\phi_j(x)\mathrm{d}x \in {''H}/(f_1, \ldots, f_k) \cong \Phi$. Alors on peut déduire de la Proposition 1.3 la relation suivante:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_j &= \mathrm{d}i_E(\tilde{\omega}_j) \equiv {}_j\,\tilde{\omega}_j \\ &\equiv \left(\sum_{q=1}^{\mu} P_{jq}^{(1)}\mathrm{d}f_1 \wedge \psi_q - \sum_{q=1}^{\mu} P_{jq}^{(2)}\mathrm{d}f_2 \wedge \psi_q + \cdots + (-1)^{k-1}\sum_{q=1}^{\mu} P_{jq}^{(k)}\mathrm{d}f_k \wedge \psi_q\right) \\ &\quad \operatorname{mod}((\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_k)\mathrm{d}\Omega_X^{n-1}). \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Pour obtenir (1.6.1), on utilise la relation déduite de la Proposition 1.3:

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}_j \equiv 0 \quad \operatorname{mod}((\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_k)\mathrm{d}\Omega_X^n),$$

et $\mathcal{L}_E(\tilde{\omega}_i) = \ell_i\tilde{\omega}_i$ pour $\mathcal{L}_E$, la dérivée de Lie de E avec $\ell_i := w(\tilde{\omega}_i)$, le poids de la forme. La relation (1.6.1) implique que la dérivée de la forme ω_i,

$$\mathrm{d}\omega_j \equiv \mathrm{d}f_1 \wedge \beta_j^{(1)} + \mathrm{d}f_2 \wedge \beta_j^{(2)} + \cdots + \mathrm{d}f_k \wedge \beta_j^{(k)} \operatorname{mod}((\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_k)\mathrm{d}\Omega_X^{n-1}), \tag{1.6.2}$$

avec des formes méromorphes $\beta_j^{(i)}$ qui possèdent leurs pôles le long du lieu critique

$$\mathrm{Cr}(f) = \{x \in X; \mathrm{d}f_1(x) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k(x) = 0\}.$$

La relation (1.6.2) est une expression du système de Gauss–Manin à la Greuel p. 249 [11] adoptée à notre situation. Pour le voir, on remarque:

$$\beta_j^{(i)} \equiv (-1)^{j-1}\ell_j\left[\sum_{q=1}^{\mu} P_{jq}^{(i)}\psi_q\right] \quad \operatorname{mod}(\mathrm{d}\Omega_X^{n-1}).$$

L'énoncé sur les pôles des formes $\beta_j^{(i)}$ découle du fait que $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \psi_q \in \Omega_X^m$. Voir le lemme 1.12 et la discussion à la p. 249 de [11].

1.7. Dès que l'expression (1.6.1) ne donne que la relation entre $\mathrm{d}\omega_j$ et ψ_j, elle est peu convenable pour le calcul concret du système de Gauss–Manin. Il est donc souhaitable d'établir la relation entre $\mathrm{d}\psi_j$ et ψ_j, ou bien $\mathrm{d}\omega_j$ et ω_j. Dans ce but, on va chercher des relations entre ω_j et ψ_j. Si on applique i_E du côté gauche au (1.6.1),

$$\begin{aligned} i_E(\mathrm{d}\omega_j) &= i_E\, \mathrm{d}i_E(\tilde{\omega}_j) = (i_E\, \mathrm{d} + \mathrm{d}i_E)i_E(\tilde{\omega}_j) = \ell_j\omega_j \\ &= \ell_j i_E(\tilde{\omega}_j) \equiv \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left[p_i \sum_{q=1}^{\mu} P_{jq}^{(i)} f_i \psi_q - \sum_{q=1}^{\mu} P_{jq}^{(i)}\, \mathrm{d}f_i \wedge i_E(\psi_q)\right] \\ &\quad \operatorname{mod}((\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_k)\Omega_X^{n-1}, ((f_1, \ldots, f_k)\mathrm{d}\Omega_X^{n-1}). \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Ici on a utilisé la formule $i_E(i_E(\omega)) = 0$.

1.8. La situation ci-dessus se simplifie si l'on regarde la relation entre des intégrales $\int_{\gamma(s)} \psi_q$, au lieu de celle entre des formes. On définit l'intégrale-fibre $I_{\phi_q,\gamma}$ prise le long d'un cycle évanescent γ dont l'ambiguïté dans l'homologie $H_n(X_s)$ ne sera precisée qu'ultérieurement (voir §4 Théorème 4.3),

$$\begin{aligned} I_{\phi_q,\gamma}(s) := \int_{\gamma(s)} \psi_q &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \int_{\partial\gamma(s)} \frac{\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \wedge \psi_q}{(f_1 - s_1)\cdots(f_k - s_k)} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \int_{\partial\gamma(s)} \frac{\phi_q \mathrm{d}x}{(f_1 - s_1)\ldots(f_k - s_k)}, \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

où $\partial\gamma(s) \in H_n(X \setminus X_s)$ est un cycle obtenu à l'aide de ∂, l'opérateur de cobord de Leray. Quant à l'opération de Leray, on renvoie au livre de F. Pham [19], ou bien à celui de V. A. Vasiliev [26].

1.9. De (1.7.1) on déduit:

$$\ell_j \int_{\gamma(s)} \omega_j = \sum_{q=1}^{\mu}\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1} p_i s_i P_{jq}^{(i)}(s)\right] I_{\phi_q,\gamma}(s). \tag{1.9.1}$$

Cette relation est une conséquence immédiate d'application de la définition de l'intégrale-fibre (1.8.1) à (1.7.1):

$$\int_{\gamma(s)} \mathrm{d}f_1 \wedge i_E(\psi_j) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \int_{\partial\gamma(s)} \frac{\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k}{(f_1 - s_1)\cdots(f_k - s_k)} \wedge \mathrm{d}f_1 \wedge i_E(\psi_j) = 0.$$

D'une façon analogue,

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\gamma(s)} \frac{\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k}{(f_1 - s_1)\ldots(f_k - s_k)} \mathrm{d}f_i \wedge i_E(\psi_j) = 0, \quad 2 \leqslant i \leqslant k, \\ &\int_{\partial\gamma(s)} \frac{\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k}{(f_1 - s_1)\ldots(f_k - s_k)} \wedge (f_j \mathrm{d}\omega) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k,\ \omega \in \Omega_X^{n-1}. \end{aligned}$$

On fait comparaison entre la relation

$$\mathrm{d}\int_{\gamma(s)}\omega_j = \ell_j\sum_{q=1}^{\mu}\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}P_{jq}^{(i)}(s)\mathrm{d}s_i\right]I_{\phi_q,\gamma}(s), \tag{1.9.2}$$

obtenue de (1.6.1) avec la relation (1.9.1). Pour dériver (1.9.2) de (1.6.1), on utilise l'égalité:

$$\frac{\partial}{\partial s_\ell}\int_{\gamma(s)}\omega_j = \int_{\gamma(s)}\frac{\mathrm{d}\omega_j}{\mathrm{d}f_\ell},\quad \ell = 1,\ldots,k.$$

Voir [11].

En résultat nous obtenons les équations suivantes entre $I_{\phi_q}(s)$ et $(\partial/\partial s_\ell)I_{\phi_q}$, $1\leqslant \ell\leqslant k$ (on se passe de préciser le cycle $\gamma(s)$ sinon des cas exigés):

$$\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{\mu}\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_is_iP_{jq}^{(i)}\right]\partial/\partial s_\ell I_{\phi_q}\\ &\quad=\sum_{q=1}^{\mu}\left((\ell_j-p_\ell)P_{jq}^{(\ell)}-p_\ell s_\ell\frac{\partial}{\partial s_\ell}P_{jq}^{(\ell)}+\sum_{i\neq\ell}(-1)^{i-1}p_is_i\frac{\partial}{\partial s_\ell}P_{jq}^{(i)}\right)I_{\phi_q},\quad 1\leqslant j\leqslant\mu.\end{aligned} \tag{1.9.3}$$

C'est un système d'équations qui donnent la connexion (système) de Gauss–Manin.

1.10. Pour énoncer la proposition dans une forme plus simple, nous introduisons les notations suivantes:

$$\mathbf{I}_V = \left(\int\omega_1,\cdots,\int\omega_\mu\right), \mathbf{I}_\Phi = (I_{\phi_1}(s),\ldots,I_{\phi_\mu}(s)).$$

On introduit les $\mu\times\mu$ matrices définies comme suit: $L_V = \mathrm{diag}(\ell_1,\ldots,\ell_\mu)$ avec

$$\ell_i = w(\omega_i),\quad P^{(1)}(s) = (P_{jq}^{(1)}(s)),\ldots,P^{(k)}(s) = (P_{jq}^{(k)}(s)),\quad 1\leqslant j,\quad q\leqslant\mu.$$

THÉORÈME 1.4. (1). *Pour une application quasihomogène $f\colon X\to S$ aux singularités isolées d'intersection complète de dimension n, le système de Gauss–Manin pour $\mathbf{I}_\Phi$ est décrit par les systèmes suivants*

$$\mathrm{d}\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_is_iP^{(i)}(s)\mathbf{I}_\Phi\right] = L_V\left[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}P^{(i)}(s)\mathrm{d}s_i\right]\mathbf{I}_\Phi, \tag{1.10.1}$$

ou bien,

$$\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s)\right)\frac{\partial}{\partial s_\ell}\mathbf{I}_\Phi = \left[L_V P^{(\ell)}(s) - \frac{\partial}{\partial s_\ell}\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s)\right)\right]\mathbf{I}_\Phi, \tag{1.10.2}$$

$1 \leqslant \ell \leqslant k$.

(2) *La valeur critique D de déformation X_s est donné par $D = \{s \in S\colon \Delta(s) = 0\}$ avec*

$$\Delta(s) = \det\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s)\right). \tag{1.10.3}$$

(3) *Le système (1.10.1) est un système holonôme d'équations différentielles.*

Démonstration. (1) Dans l'expression introduite, la démarche notée ci-dessus peut être interprétée comme suit. La relation (1.9.2) signifie

$$\mathrm{d}\mathbf{I}_V = \left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}P^{(i)}(s)\mathrm{d}s_i\right)\mathbf{I}_\Phi. \tag{1.10.4}$$

En revanche la relation (1.9.1) entraîne

$$L_V\mathbf{I}_V = \left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s)\right)\mathbf{I}_\Phi. \tag{1.10.5}$$

En prenant la dérivée de (1.10.5) et comparant celle-ci avec (1.10.3), on obtient la relation entre $\mathbf{I}_\Phi$ et $d\mathbf{I}_\Phi$ dont on peut déduire (1.10.1) et (1.10.2).

(2) Il est établi par Greuel que le système de Gauss–Manin associé à X_s possède son pôle le long de la valeur critique de l'application f. D'autre part, il est clair que (1.10.1) et (1.10.2) s'écrivent comme des systèmes de Pfaff avec le pôle $D = \{s \in \mathbf{C}^k;\ \det(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s)) = 0\}$.

(3) Des énonncés ci-dessus, il est évident que la variété caractéristique de l'équation (1.10.1) est un fibré cotangent:

$$T_D^*S = \{(s,\sigma) \in T^*S;\ \Delta(s) = 0,\ \langle\sigma, \operatorname{grad}\Delta(s)\rangle = 0\}.$$

Puisque $\dim T_D^*S = k$, (1.10.1) est un système holonôme avec une variété caractéristique lagrangienne. □

Il faut remarquer ici que le système de Gauss–Manin est complètement déterminé par les matrices $P^{(i)}(s)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ introduites dans la Proposition 1.2.

2. Liste des systèmes de Gauss–Manin pour les singularités isolées simples d'intersection complète de courbe espace

Dans cette section, on calcule le système de Gauss–Manin associé aux singularités isolées simples d'intersection complète, dans le cas important celui de la courbe espace, i.e. $n = 1, k = 2, m = 3$. La forme normale des singularités isolées simples d'intersection complète (SISIC) a été obtenue par M.Giusti [10]. Par la suite, on établit une liste des notions nécéssaires pour décrire le système de Gauss–Manin associé aux SISIC comme (1.10.1) et (1.10.2).

(0) Polynômes f_1 et f_2,
(1) Poids des variables,

$$w_1 := w(x_1), \quad w_2 := w(x_2), \quad w_3 := w(x_3), \qquad p_1 := w(f_1), \quad p_2 := w(f_2),$$

(2) L'espace vectoriel F,
(3) L'espace vectoriel $\tilde{\Phi}$ défini dans **1.3**,
(4) Les matrices $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$,
(5) La fonction définissant la valeur critique $\Delta(s)$ pour la déformation X_s.

Pour la description de la matrice $P^{(2)}(s)$ du 4. ci-dessus, on se sert d'une expression comme suit:

$$P^{(2)}(s) = Q(s) \times V \times \Sigma, \tag{2.1}$$

où les matrices composantes sont dans $\mathrm{GL}(\mu, \mathbf{C}[s])$. Notamment, $Q(s)$ indique une matrice diagonale avec les éléments monomiaux en les variables s_1, s_2; V est une matrice diagonale d'éléments rationnels,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}.$$

Ici on a noté par $\sigma_k \in \mathrm{SL}(v_k, \mathbf{Z})$, $1 \leqslant k \leqslant m$ la matrice de permutation d'ordre v_k,

$$\sigma_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

telle que $\sigma_k^{v_k} = \mathrm{id}_{v_k}$. Dans la suite, on décrit $P^{(2)}(s)$ par les données $Q(s)$, V et $v_1, v_2, \ldots, v_m$ telles que $\sum_{i=1}^{m} v_k = \mu$. Dans les cas ci-dessous, les matrices $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$ sont toutes les deux matrices semblables à des matrices diagonales. On a choisi la numérotation de la base de $\tilde{\Phi}$ de sorte que $P^{(1)}$ soit une matrice diagonale. Par la suite, nous notons tout simplement $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$, etc., au lieu de $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ afin d'économiser les colonnes.

Le cas $S_{2m+3}, m \geqslant 1.$

0. $f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2m} = 0,$
   $f_2(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3 = 0.$

1. $w(x_1) = m, \quad w(x_2) = m, \quad w(x_3) = 1, \qquad p_1 := w(f_1) = 2m,$
   $p_2 := w(f_2) = m+1,$

2. $$F = \{x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \overbrace{x_3\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3^3\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \ldots, x_3^{2m-1}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1}^{m}, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$
   $$\overbrace{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3^2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \ldots, x_3^{2m-2}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1}^{m}, \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\}.$$

3. $$\tilde{\Phi} = \{\overbrace{1, x_3^2, \ldots, x_3^{2m}}^{m+1}, x_2, \overbrace{x_3, x_3^3, \ldots, x_3^{2m-1}}^{m}, x_1\},$$
   $$w(\phi_j) = \{\overbrace{0, 2, \ldots, 2m}^{m+1}, m, \overbrace{1, 3, \ldots, 2m-1}^{m}, m\}.$$

4. $$P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_2, \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{2m+1}, 0),$$
   $$Q = \mathrm{diag}(1, \overbrace{s_2, \ldots, s_2}^{m}, 1, 1\overbrace{s_2, \ldots, s_2}^{m-1}, 1), \quad v_1 = v_2 = m+1, \quad v_3 = 1.$$
   $$V = \mathrm{diag}(2m, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m}, 2m, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m+1})$$

5. $$\Delta(s) = s_2^2\left(\left(\frac{-s_1}{m+1}\right)^{m+1} - \left(\frac{s_2^2}{m}\right)^{m}\right)^2.$$

Le cas $S_{2m+4}, m \geqslant 1$

0. $f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2m+1} = 0,$
   $f_2(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3 = 0.$

1. $w(x_1) = 2m+1, \quad w(x_2) = 2m+1, \quad w(x_3) = 2, \qquad p_1 := w(f_1) = 2(2m+1),$
   $p_2 := w(f_2) = 2m+3.$

2. $$F = \{x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \overbrace{x_3\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3^3\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \ldots, x_3^{2m-1}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1}^{m},$$
   $$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \overbrace{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3^2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \ldots, x_3^{2m}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1}^{m+1}, \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\}.$$

3. $$\tilde{\Phi} = \{\overbrace{1, x_3^2, \ldots, x_3^{2m}}^{m+1}, x_2, \overbrace{x_3, x_3^3, \ldots, x_3^{2m+1}}^{m+1}, x_1\},$$
   $$w(\phi_j) = \{\overbrace{0, 4, \ldots, 4m}^{m+1}, 2m+1, \overbrace{2, 6, \ldots, 2(2m+1)}^{m+1}, 2m+1\}.$$

4. $$P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_2, \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{2m+2}, 0),$$
$$Q = \mathrm{diag}(1, \overbrace{s_2, \ldots, s_2}^{m}, 1, 1, \overbrace{s_2, \ldots, s_2}^{m}, 1), \quad v_1 = 2m+3, \quad v_2 = 1.$$
$$V = \mathrm{diag}(2m+1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m}, 2m+1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m+2}).$$

5. $$\Delta(s) = s_2^2\left(\left(\frac{s_1}{2m+3}\right)^{2m+3} + \left(\frac{s_2^2}{2m+1}\right)^{2m+1}\right).$$

Le cas T_7.

0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^3 = 0$,
   $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 = 0$.
1. $w(x_1) = 3, \quad w(x_2) = 2, \quad w(x_3) = 2, \qquad p_1 := w(f_1) = 6, \quad p_2 := w(f_2) = 4.$
2. $F = \{x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3^2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3\}$.
3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_3^3, x_2, x_3^2, x_2^2, x_3, x_1\}. \qquad w(\phi_j) = \{0, 6, 2, 4, 4, 2, 3\}$.
4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$,
   $Q = \mathrm{diag}(s_2^2, 1, 1, s_2, 1, s_2, 1, s_2, 1)$,
   $v_1 = v_2 = v_3 = 2, \quad v_4 = 1$,
   $V = \mathrm{diag}(3, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$.
5. $\Delta(s) = s_2^2(s_1^2 - 4s_2^3)^3$.

Le cas T_8.

0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4 = 0$,
   $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 = 0$.
1. $w(x_1) = 6, (x_2) = 4, \quad w(x_3) = 3, \qquad p_1 := w(f_1) = 12, \quad p_2 := w(f_2) = 7.$
2. $F = \{x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3^2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_3^3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3\}$.
3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_3^3, x_2, x_3^2, x_2^2, x_3, x_3^4, x_1\}$,
   $w(\phi_j) = \{0, 9, 4, 6, 8, 3, 12, 6\}$.
4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$,
   $Q = \mathrm{diag}(1, s_2^2, 1, s_2, s_2, 1, s_2^2, 1), \quad v_1 = 7, \quad v_2 = 1,$
   $V = \mathrm{diag}(4, 3, 4, 3, 4, 3, 3, 1)$.
5. $\Delta(s) = s_2^2(3^3 4^4 s_1^7 - 7^7 s_2^{12})$.

Le cas T_9.

0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^5 = 0$,
   $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 = 0$.
1. $w(x_1) = 15, \quad w(x_2) = 10, \quad w(x_3) = 6, \qquad p_1 := w(f_1) = 30, \quad p_2 := w(f_2) = 16.$

2. $F = \{x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3^2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1,$
$x_3^3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_3^4 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3\}.$
3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_3^3, x_2^2, x_3, x_3^4, x_2, x_3^2, x_3^5, x_1\},$
$w(\phi_j) = \{0, 18, 20, 6, 24, 10, 12, 30, 15\}.$
4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0),$
$Q = \mathrm{diag}(1, s_2^2, s_2, 1, s_2, 1, s_2, s_2^2, 1), \quad v_1 = 8, \quad v_2 = 1,$
$V = \mathrm{diag}(5, 3, 5, 3, 3, 5, 3, 3, 2).$
5. $\Delta(s) = s_2(5^5 3^3 s_1^8 - 2^{24} s_2^{15}).$

Le cas U_7.
0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3 = 0,$
$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3^3 = 0.$
1. $w(x_1) = 4, \quad w(x_2) = 5, \quad w(x_3) = 3, \qquad p_1 := w(f_1) = 8, \quad p_2 := w(f_2) = 9.$
2. $F = \{x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_1 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_3^2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + x_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,$
$x_3^2 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_1 x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1\}.$
3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_1 x_3^2, x_3, x_1, x_2, x_3^2, x_1 x_3\}, \qquad w(\phi_j) = \{0, 10, 3, 4, 5, 6, 7\}.$
4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_1, 1, s_1, 1, 1, 1, 1),$
$Q = \mathrm{diag}(1, s_2, 1, 1, 1, 1, 1), \quad v_1 = 7,$
$V = \mathrm{diag}(3, \frac{1}{4}, 3, 1, 2, \frac{1}{3}, 1).$
5. $\Delta(s) = 2^{22} s_1^9 - 3^{15} s_2^8.$

Le cas U_8.
0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3 + x_3^3 = 0,$
$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 = 0.$
1. $w(x_1) = 3, \quad w(x_2) = 4, \quad w(x_3) = 2, \qquad p_1 := w(f_1) = 6, \quad p_2 := w(f_2) = 7.$
2. $F = \{x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, x_1 x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 - \dfrac{x_1}{3} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,$
$x_1 x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 - \frac{1}{3} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_1 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\}.$
3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_1^2 x_3, x_3, x_1, x_2, x_1 x_3, x_1^2, x_3^2\}, \qquad w(\phi_j) = \{0, 8, 2, 3, 4, 5, 6, 4\}.$
4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_2, 1, s_2, 1, 1, 1, 1, 0),$
$Q = \mathrm{diag}(1, s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad v_1 = 7, \quad v_2 = 1,$
$V = \mathrm{diag}(2, \frac{-1}{3}, 2, 1, 2, \frac{-1}{3}, 1, 3).$
5. $\Delta(s) = s_2^3(2^4 3^9 s_1^7 - 7^7 s_2^6).$

Le cas U_9.
0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3 = 0,$
$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3^4 = 0.$

1. $w(x_1) = 5, \quad w(x_2) = 7, \quad w(x_3) = 3, \qquad p_1 := w(f_1) = 10, \quad p_2 := w(f_2) = 12.$
2. $F = \{x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_1 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_3^3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + x_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \ x_3^3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_1 x_3^2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1,$
   $x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3^2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_3^2 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_1 x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \}.$
3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_1 x_3^3, x_3^2, x_1 x_3, x_2, x_3^3, x_1 x_3^2, x_3, x_1\},$
   $w(\phi_j) = \{0, 14, 6, 8, 7, 9, 11, 3, 5\}.$
4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_1, 1, s_1, 1, 1, 1, s_1, 1),$
   $Q = \mathrm{diag}(1, s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad v_1 = 4, \quad v_2 = 5,$
   $V = \mathrm{diag}(3, \frac{1}{5}, 3, 1, 8, \frac{1}{4}, 1, 3, 1)$
5. $\Delta(s) = (5^5 s_1^6 - 2^4 3^6 s_2^5)^2.$

Le cas W_8.

0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_1 x_3 = 0,$
   $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^3 = 0.$
1. $w(x_1) = 6, \quad w(x_2) = 5, \quad w(x_3) = 4, \qquad p_1 := w(f_1) = 10, \quad p_2 := w(f_2) = 12.$
2. $F = \{3x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + 2x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3^2 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,$
   $3x_1 x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + 2x_3^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1\}.$
3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_1 x_3^2, x_3, x_1, x_3^2, x_1 x_3, x_2, x_2 x_3\},$
   $w(\phi_j) = \{0, 14, 4, 6, 8, 10, 5, 9\}.$
4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(6s_2, 5, 6s_2, 1, 1, 2, 0, 0),$
   $Q = \mathrm{diag}(1, s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad v_1 = 6, \quad v_2 = v_3 = 1,$
   $V = \mathrm{diag}(5, 1, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 1, 2).$
5. $\Delta(s) = s_2^4 (5^5 s_1^6 - 2^2 3^3 s_2^5).$

Le cas W_9.

0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_1 x_3 = 0,$
   $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3^2 = 0.$
1. $w(x_1) = 5, \quad w(x_2) = 4, \quad w(x_3) = 3,$
   $p_1 := w(f_1) = 8, \quad p_2 := w(f_2) = 10.$
2. $F = \{x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_2 x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_1 x_2 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_2 x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,$
   $\mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, 2x_1 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + x_2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_2 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3\}.$
3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_1 x_2 x_3, x_2, x_3^2, x_1 x_3, x_3, x_1, x_2 x_3, x_1 x_2\},$
   $w(\phi_j) = \{0, 12, 4, 6, 8, 3, 5, 7, 9\}.$
4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(2s_2, 4, 2s_2, 1, 2, s_1, 2, 2, 2),$
   $Q = \mathrm{diag}(1, s_2, 1, \ldots, 1), \quad v_1 = 5, \quad v_2 = 4,$
   $V = \mathrm{diag}(2, 1, 2, 2, 1, 5, 1, 1, 1)$
5. $\Delta(s) = s_2^3 (2^{12} s_1^5 - 5^5 s_2^4)^2.$

Le cas Z_9.

0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 0,$

   $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 = 0.$

1. $w(x_1) = 3, \quad w(x_2) = 3, \quad w(x_3) = 2,$

   $p_1 := w(f_1) = 6, \quad p_2 := w(f_2) = 6.$

2. $F = \{x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, x_1 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_1 x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3,$
   $x_1 x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\}.$

3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_1^2, x_2, x_1, x_3, x_1^2 x_3, x_2 x_3, x_1 x_3, x_3^2\},$

   $w(\phi_j) = \{0, 6, 3, 3, 2, 8, 5, 5, 4\}.$

4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(s_2, 1, 1, 1, s_2, 1, 1, 1, 0),$

   $Q = \mathrm{diag}(1, s_2, 1, 1, 1, s_2, 1, 1, 1), \quad v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 2, \quad v_5 = 1,$

   $V = \mathrm{diag}(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1).$

5. $\Delta(s) = s_2^3 (s_1^2 - 4 s_2^2)^4.$

Le cas Z_{10}.

0. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3^2 = 0,$

   $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^3 = 0.$

1. $w(x_1) = 7, \quad w(x_2) = 6, \quad w(x_3) = 4, \qquad p_1 := w(f_1) = 14, \quad p_2 := w(f_2) = 12.$

2. $F = \{3x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + 2x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1,$
   $x_1 x_2 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + x_2 x_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, 3x_2 x_3 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + 2x_3^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, 2x_3^2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1$
   $+ x_2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3, x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3\}.$

3. $\tilde{\Phi} = \{1, x_3^3, x_2 x_3, x_3^2, x_2, x_2 x_3^3, x_3, x_2 x_3^2, x_1, x_1 x_3\},$

   $w(\phi_j) = \{0, 12, 10, 8, 6, 18, 4, 14, 7, 11\}.$

4. $P^{(1)} = \mathrm{diag}(6s_2, 3, 2, 3, 2, 3, 6s_2, 7, 0, 0),$

   $Q = \mathrm{diag}(1, s_1, 1, 1, 1, s_1, 1, s_2, 1, 1), \quad v_1 = 8, \quad v_2 = v_3 = 1.$

   $V = \mathrm{diag}(7, 2, 1, 2, 1, 2, 7, 2, 1, 1).$

5. $\Delta(s) = s_1^2 s_2^4 (7^7 s_1^6 - 2^8 3^3 s_2^7).$

3. Les spectres du système de Gauss–Manin

Pour les singularités simples SISIC, on peut mettre en évidence les informations topologiques sur la singularité à partir des systèmes (1.10.1) et (1.10.2). Nous formulons ce fait comme suivant.

3.1.

THÉORÈME 3.1. (1) *Le système de Gauss–Manin pour* $\mathbf{I}_\Phi$ *associé aux singularités isolées simples d'intersection complète de courbe espace s'écrit sous la forme suivante:*

$$P'^{(1)}(s_1)\left(s_1 \mathrm{id}_\mu \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{1}{p_1} L_\Phi\right)\mathbf{I}_\Phi = \frac{p_2}{p_1} s_2 P'^{(2)}(s_2)\frac{\partial}{\partial s_1}\mathbf{I}_\Phi, \tag{3.1.1}$$

où $P'^{(1)}(s_1)$, *une matrice diagonale, et* $P'^{(2)}(s_2)$, *une matrice semblable à une matrice diagonale.*

$$\frac{1}{p_1} L_\Phi = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu\},\ \lambda_j = w(\psi_j)p_1.$$

D'une façon analogue:

$$P'^{(2)}(s_2)\left(s_2 id_\mu \frac{\partial}{\partial s_2} - \frac{1}{p_2} L_\Phi\right)\mathbf{I}_\Phi = p_1 p_2 s_1 P'^{(1)}(s_1)\frac{\partial}{\partial s_2}\mathbf{I}_\Phi. \tag{3.1.2}$$

(2) *(la symétrie des spectres). Notons* $\sigma \in \mathcal{S}_\mu$ *la permutation telle que:*

$$\tilde{\lambda}_1 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \leqslant \cdots \leqslant \tilde{\lambda}_\mu,$$

alors il existe un nombre rationnel $\tilde{\lambda}_0$ *tel que*

$$\tilde{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_{\mu-i} - \tilde{\lambda}_0, \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu.$$

DÉFINITION 1. Nous appelons les rationnels $\{\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_\mu\} \in (1/p_1)\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ les spectres du système de Gauss–Manin (3.1.1). D'une façon analogue,

$$\left\{\frac{p_1}{p_2}\tilde{\lambda}_1, \ldots, \frac{p_1}{p_2}\tilde{\lambda}_\mu\right\} \in \frac{1}{p_2}\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$$

les spectres du système (3.1.2).

Remarque 1. La propriété de symétrie des spectres de la structure de Hodge mixte de la cohomologie relative associée à SIIC a été démontrée par W. Ebeling et J. Steenbrink [9]. Les calculs concrets ont été achevés par ce dernier pour les singularités isolées unimodales d'intersection complète [24].

Notre approche est différent de celui de Ebeling–Steenbrink, puisque nos objets principaux sur lesquel la transformation de monodromie agit sont les espaces V et Φ de Greuel–Hamm. En général la dimension de la cohomologie relative est plus grande que le nombre de Milnor de la singularité X_0 car une structure supplémentaire intervient dans la cohomologie relative. Notamment ils regardent une déformation d'une SIIC dépendant de deux paramètres:

$$(f, g)\colon (X_s, x) \to (\mathbf{C}^2, 0),$$

en sorte que la fonction g définisse une singularité isolée d'hypersurface non-dégénérée. C'est la cohomologie de la fibre de Milnor de g qui intervient dans la cohomologie relative.

3.2. *Démonstration.* (1) D'abord on observe la possibilité d'étendre la connexion de Gauss–Manin sur un module plus grand que F. On regarde un module $F' = F[1/f_1, 1/f_2]$ au lieu de F, et choisit sa base $\tilde{\omega}_i'$, $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ de telle sorte que la relation suivante analogue à (1.10.5) ait lieu pour $\mathbf{I}_{F'} = (\int_{\gamma(s)} i_E(\tilde{\omega}'_1), \ldots, \int_{\gamma(s)} i_E(\tilde{\omega}'_\mu))$:

$$L_{F'}\mathbf{I}_{F'} = (p_1 s_1 P'^{(1)}(s_1) - p_2 s_2 P'^{(2)}(s_2))\mathbf{I}_\Phi, \tag{3.2.1}$$

où $L_{F'} = \mathrm{diag}(\ell'_1, \ldots, \ell'_\mu)$, et $\ell'_i = w(\tilde{\omega}'_i)$.

Pour le voir, on définit les formes $\tilde{\omega}_i'$, comme suit:

$$\tilde{\omega}_i' = \frac{\tilde{\omega}_i}{f_1^{\eta_i} f_2^{\delta_i}} \quad \text{si} \quad \frac{P^{(1)}_{i,j}(s)}{s_1^{\eta_i} s_2^{\delta_i}} \in \mathbf{C}[s_1, s_1^{-1}], \quad \text{et} \quad \frac{P'^{(2)}_{i,j}(s)}{s_1^{\eta_i} s_2^{\delta_i}} \in \mathbf{C}[s_2, s_2^{-1}],$$
$$\eta_i, \delta_i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Nous nous servirons des notations

$$P'^{(1)}(s_1) = \mathrm{diag}(s_1^{-\eta_1} s_2^{-\delta_1}, \ldots, s_1^{-\eta_\mu} s_2^{-\delta_\mu}) \times P^{(1)}(s_1, s_2),$$
$$P'^{(2)}(s_2) = \mathrm{diag}(s_1^{-\eta_1} s_2^{-\delta_1}, \ldots, s_1^{-\eta_\mu} s_2^{-\delta_\mu}) \times P^{(2)}(s_1, s_2).$$

C'est à dire:

$$\begin{aligned} P'^{(1)}(s_1) &= \mathrm{diag}(s_1^{\tilde{\eta}_1}, \ldots, s_1^{\tilde{\eta}_\mu}) \times \mathrm{diag}(p_1^{(1)}, \ldots, p_\mu^{(1)}), \\ P'^{(2)}(s_2) &= \mathrm{diag}(s_2^{\tilde{\delta}_1}, \ldots, s_1^{\tilde{\delta}_\mu}) \times \mathrm{diag}(p_1^{(2)}, \ldots, p_\mu^{(2)}) \cdot \Sigma, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

où $p_i^{(\ell)}$, $(1 \leqslant i \leqslant \mu, \ell = 1, 2)$ sont des rationnels et Σ une matrice comme dans (2.1). Cette opération est faisable pour toutes les $P^{(1)}, P^{(2)}$ calculées dans §2 car il existe au plus des entiers uniques $j_1, j_2 \in [1, \mu]$ tels que

$$\tilde{\omega}_j \wedge \mathrm{d}f_1 = P^{(2)}_{jj_2}(f)\phi_{j_2}(x)\mathrm{d}x, \qquad \tilde{\omega}_j \wedge \mathrm{d}f_2 = P^{(1)}_{jj_1}(f)\phi_{j_1}(x)\mathrm{d}x$$

pour chaque $j \in [1, \mu]$.

En bref, on arrive à l'expression (3.2.1), si on multiplie la matrice $\mathrm{diag}(s_1^{-\eta_1} s_2^{-\delta_1}, \ldots, s_1^{-\eta_\mu} s_2^{-\delta_\mu})$ du côté gauche à (1.10.5). On obtient par une manière analogue à (1.6.1):

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\mathbf{I}_{F'} = P'^{(1)}(s_1)\mathbf{I}_\Phi. \tag{3.2.3}$$

D'autre part, ayant différentié l'expression (3.2.1), on obtient:

$$\ell_i' \frac{\partial}{\partial s_1} \int_{\gamma(s)} i_E(\tilde{\omega}_i') = \sum_{j=1}^{\mu} \left(p_1 P_{ij}'^{(1)} + p_1 s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} P_{ij}'^{(1)} \right) I_{\phi_j} + \\ + \sum_{j=1}^{\mu} \left(p_1 s_1 P_{ij}'^{(1)}(s_1) - p_2 s_2 P_{ij}'^{(2)}(s_2) \right) \frac{\partial}{\partial s_1} I_{\phi_j},$$

c'est-à-dire,

$$L_{F'} \frac{\partial}{\partial s_1} \mathbf{I}_{F'} = \left(p_1 P'^{(1)}(s_1) + p_1 s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} P'^{(1)} \right) \mathbf{I}_{\Phi} + \\ + \left(p_1 s_1 P'^{(1)}(s_1) - p_2 s_2 P'^{(2)}(s_2) \right) \frac{\partial}{\partial s_1} \mathbf{I}_{\Phi}, \tag{3.2.4}$$

En suite, on remarque que la relation suivante:

$$\tilde{\omega}_i' = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant \mu} P_{ij}'^{(1)} \wedge \mathrm{d}f_1 \left(\frac{\phi_j \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2} \right) - \\ - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant \mu} P_{ij}'^{(2)} \wedge \mathrm{d}f_2 \left(\frac{\phi_j \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2} \right)$$

donne une relation entre les éléments de matrices $L_\Phi, L_{F'}$ et $P'^{(1)}$:

$$L_{F',i} = \frac{E_*(P_{ij}'^{(1)})}{P_{ij}'^{(1)}} + p_1 + L_{\Phi,j} = \frac{E_*(P_{ij}'^{(2)})}{P_{ij}'^{(2)}} + p_2 + L_{\Phi,j},$$

ici

$$E_* = p_1 s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + p_2 s_2 \frac{\partial}{\partial s_2},$$

le champ d'Euler sur S. Ce dernier entraîne

$$\sum_{j=1}^{\mu} (-L_{F',i} + p_1 + L_{\Phi,j}) P_{ij}'^{(\ell)} + E_*(P_{ij}'^{(\ell)}) = 0, \quad \ell = 1, 2.$$

Autrement dit,

$$P'^{(1)}(L_\Phi - L_{F'} + p_1 \cdot id_\mu) + E_*(P'^{(1)}) = 0 \tag{3.2.5}$$

$$P'^{(2)}(L_\Phi - L_{F'} + p_2 \cdot id_\mu) + E_*(P'^{(2)}) = 0. \tag{3.2.6}$$

En somme, (3.2.3), (3.2.4), et (3.2.5) nous mènent à conclure (3.1.1).

La démonstration de (3.1.2) est parallèlle à celle de (3.1.1), en tenant compte de (3.2.6).

(2) Nous introduisons ici la notation

$$|w| := w_1 + w_2 + w_3 \quad \text{et} \quad |p| := p_1 + p_2.$$

Puisque

$$\lambda_j = \frac{1}{p_1}(w(\phi_j) + |p| - |w|),$$

il suffit de démontrer la symétrie entre les poids des éléments de l'espace $\tilde{\Phi}$.

On peut déduire de [2, 3], 3.4 que la série de Poincaré $P_{\tilde{\Phi}}(t)$ de l'espace vectoriel $\tilde{\Phi}$ s'écrit comme suit:

$$P_{\tilde{\Phi}}(t) = t^{|p|-|w|} + (1 - t^{|p|-|w|})\frac{(1 - t^{p_1})(1 - t^{p_2})}{(1 - t^{w_1})(1 - t^{w_2})(1 - t^{w_3})}. \tag{3.2.6}$$

Il est facile de voir que le polynôme $P_{\tilde{\Phi}}(t)$ a coefficients symétriques par rapport au terme central $t^{|p|-|w|}$. □

4. L'expression explicite de la transformée de Mellin de l'intégrale-fibre

Dans cette section, nous essayons d'établir une expression explicite de la transformée de Mellin de l'intégrale-fibre au moyen des invariants topologiques de singularités.

4.1. L'EDF ET SES SOLUTIONS EXPLICITES

D'abord on établit les équations aux différences finies (EDF) pour la transformée de Mellin $M_{\phi_j}(z_1, z_2)$ de $I_{\phi_j}(s_1, s_2)$:

$$M_j(z_1, z_2) = \int_\gamma I_j(s_1, s_2) s_1^{z_1} s_2^{z_2} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2$$

pour un certain γ qui évite les pôles de $I_j(s_1, s_2)$ (on note $M_j(z)$ et $I_j(s)$ au lieu de $M_{\phi_j}(z_1, z_2)$, $I_{\phi_j}(s_1, s_2)$ pour alléger l'écriture). Il est évident que l'intégrale $M_j(z_1, z_2)$ est bien définie pour $\Re z_1, \Re z_2 >> 0$, $|\Im z_1|, |\Im z_2| >> 0$ grâce à la régularité de tous ses points singuliers y compris l'infini de l'équation différentielle satisfaite par les intégrales $I_j(s_1, s_2)$ (voir Théorème 3.1). Cette démarche est bien formulée dans [16] §1, sous le terme de 'transformation de Mellin algébrique'.

On applique la transformation de Mellin à la relation (3.1.1). Alors on en tire l'EDF entre $M_j(z_1, z_2)$. A l'aide des $\tilde{\eta}_k, \tilde{\delta}_k$ définis dans (3.2.2) et v_k introduit dans le §2, elles s'expriment comme suit:

$$(z_1 + \tilde{\eta}_k + \lambda_k + 1) M_k(z_1 + \tilde{\eta}_k, z_2) = \tilde{v}_k z_1 M_{[k-1]}(z_1 - 1, z_2 + 1 + \tilde{\delta}_k), \tag{4.1.1}$$

où

$$\tilde{v}_k \in \mathbf{Q} v_1 + v_2 + \cdots + v_m + 1 \leqslant k \leqslant v_1 + \cdots + v_{m+1},$$

et

$$[k-1] = k-1 \text{ si } v_1 + v_2 + \cdots + v_m + 1 < k \leqslant v_1 + \cdots + v_{m+1},$$

et

$$[k-1] = v_1 + v_2 + \cdots + v_{m+1}$$

si

$$k = v_1 + v_2 + \cdots + v_m + 1.$$

L'équation (4.1.1) se déduit du fait que l'intégrale $I_k(s_1, s_2)$ est liée à l'autre intégrale $I_{k'}(s_1, s_2)$, par une relation non-triviale si et seulement si

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m + 1 \leqslant k, k' \leqslant v_1 + \cdots + v_{m+1},$$

i.e. si et seulement si elles sont toutes les deux d'un bloc de taille v_{m+1}. Nous disons que la relation de récurrence (4.1.1) se ferme pour

$$\phi_{v_1+v_2+\cdots+v_m+1}(x), \ldots, \phi_{v_1+\cdots+v_{m+1}}(x).$$

On va représenter par le signe $*$ l'une des singularités simples d'intersection complète de courbe espace, i.e. $* = S_\mu, U_\mu, T_\mu, W_\mu, Z_\mu$ $(\mu \geqslant 5)$.

Pour chaque singularité $*$, on désigne par d_j la coordonnée du point d'intersection du diagramme de Newton du facteur irréductible du discriminant $\Delta(s)$ avec l'axe $z_j, j = 1, 2$.

Par récurrence, on obtient de (4.1.1) une EDF pour $M_k(z_1, z_2)$. Quant aux cas S_μ, nous renvoyons les lecteurs à [4].

LEMME 4.1. *Soit $*$ une des singularités de la liste de Giusti (i.e. SISIC courbe espace). Alors pour chaque singularité $*$, la transformée de Mellin $M_k(z_1, z_2)$ de l'intégrale -fibre $I_k(s_1, s_2)$ avec $v_1 + v_2 + \cdots + v_m + 1 \leqslant k \leqslant v_1 + \cdots + v_{m+1}$, satisfait l'EDF suivante:*

$$\begin{aligned} &M_k(z_1 + d_1, z_2 - d_2) \\ &\quad = V_m \prod_{j=k}^{v_1+\cdots+v_{m+1}} \frac{1}{L(*, k, j; z_1)} \times \prod_{j=v_1+\cdots+v_m}^{k-1} \frac{1}{\tilde{L}(*, k, j; z_1)} \times \\ &\quad\quad \times \prod_{j=1}^{v_{m+1}} (z_1 + j) M_k(z_1, z_2), \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

où $V_m = \prod_{j=v_1+v_2+\cdots+v_m+1}^{v_1+v_2+\cdots+v_m+v_{m+1}} v_j$, produit d'éléments de la matrice diagonale $V =$ $\mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_\mu)$ de la liste de §2.

$$L(*, k, j; z_1) = z_1 + \lambda_j + (j-k) + \delta_{k,j} d_1, \quad k \leqslant j \leqslant v_1 + \cdots + v_{m+1},$$

$$\tilde{L}(*, k, j; z_1) = z_1 + \lambda_j + (j-k) + v_{m+1} + 1, \quad v_1 + \cdots + v_m + 1 \leqslant j \leqslant k-1,$$

avec $\delta_{k,j}$, delta de Kronecker. Les données λ_j, d_1, d_2 sont classées pour chaque singularité $*$ dans la liste du §2.

Pour résoudre l'équation (4.1.2), on établit un lemme.

LEMME 4.2. *L'équation aux différences finies*

$$M(z+\alpha) = c \cdot \prod_{j=1}^{v} \frac{(z+\beta_j)}{(z+\gamma_j)} M(z),$$

admet une solution comme suit:

$$M(z) = c^{\frac{z}{\alpha}} \cdot \prod_{j=1}^{v} \frac{\Gamma\left(-\frac{z}{\alpha} - \frac{\gamma_j}{\alpha}\right)\Gamma\left(-\frac{\beta_j}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(-\frac{z}{\alpha} - \frac{\beta_j}{\alpha}\right)\Gamma\left(-\frac{\gamma_j}{\alpha}\right)} g(z),$$

avec une fonction périodique $g(z) = g(z+\alpha)$.

A l'aide du lemme 4.2, on obtient une expression explicite de $M_k(z)$. Avant de formuler le théorème, introduisons la notation $M_{\phi_k,\gamma_q}(z)$, $1 \leqslant k, q \leqslant \mu$ qui correspond à la transformée de Mellin de l'intégrale $I_{\phi_k,\gamma_q}(s_1, s_2)$ prise le long d'un cycle évanescent γ_q que l'on n'a pas precisé dans (1.8.1):

$$I_{\phi_k,\gamma_q}(s_1, s_2) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial\gamma_q(s)} \frac{\phi_k \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3}{(f_1 - s_1)(f_2 - s_2)}.$$

Et

$$M_{\phi_k,\gamma_q}(z_1, z_2) = \int_{\gamma} I_{\phi_k,\gamma_q}(s_1, s_2) s_1^{z_1} s_2^{z_2} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2$$

pour un certain 2-cycle réel γ qui évite les pôles de $I_{\phi_k,\gamma_q}(s)$.

THÉORÈME 4.3. *Dans la situation décrite ci-dessus, pour $v_1 + v_2 + \cdots + v_m + 1 \leqslant k \leqslant v_1 + \cdots + v_{m+1}$, on a l'expression suivante:*

$$\begin{aligned} M_{\phi_k,\gamma_q}(z) = V_m^{\frac{z_1}{d_1}} \times \prod_{j=k}^{v_1+\cdots+v_{m+1}} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1} L(*, k, j; z_1)\right) \times \\ \times \prod_{j=v_1+\cdots+v_m}^{k-1} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1} \tilde{L}(*, k, j, ; z_1)\right) \times \prod_{j=1}^{v_{m+1}} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1}(z_1 + j)\right)^{-1} \times \\ \times \left(\frac{z_2 - \zeta_q}{d_2} + \frac{z_1}{d_1}\right)^{-1} g(z_1), \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

avec $\zeta_q \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, $1 \leqslant q \leqslant \mu$, *et* $\zeta_1 = 0$. *Ici* $g(z_1)$ *est une fonction méromorphe périodique telle que* $g(z_1) = g(z_1 + d_1)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer lemme 4.2 à (4.1.2). Quant aux ζ_q, ils sont déterminés par l'équation déterminante pour les exposants caractéristiques à $s = 0$ du système (1.10.1), (1.10.2) (la méthode de Frobenius) [5]. Il est facile de voir que la série des exposants caractéristiques ζ_q contient la série des entiers $\zeta_q = 0, 1, 2, \ldots$. □

Nous notons $\mathrm{supp}(M_{\phi_k,\gamma_q})(z_1, z_2) \subset (1/d_2)\mathbf{Q}_{z_1} \times (1/d_1)\mathbf{Q}_{z_2}$ des points d'intersection des droites polaires

$$\frac{1}{d_1}L(*, k, j; z_1), \frac{1}{d_1}\tilde{L}(*, k, j; z_1), d_1 z_2 + d_2 z_1 \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}.$$

En liaison avec le Théorème 3.1, nous remarquons que $d_2/d_1 = p_1/p_2$. C'est les points de $suppM_{\phi_k,\gamma_q}(z_1, z_2)$ qui vont essentiellement contribuer à la transformation inverse de Mellin de $M_{\phi_k,\gamma_q}(z_1, z_2)$ qui nous permet de récupérer $I_{\phi_k,\gamma_q}(s_1, s_2)$. Si on choisit la fonction méromorphe périodique $g(z_1)$ dans (4.1.3) en sorte que la transformation inverse de Mellin de $M_{\phi_k,\gamma_q}(z_1, z_2)$ ait sens (cf. l'astuce de Nörlund de §4.2 ci-dessus), alors on verra facilement la propriété suivante de cet ensemble. Ici on fait attention à l'inégalité $\nu_j \leqslant d_1, j = 1, 2, \ldots$

COROLLAIRE 4.4. *Pour un cycle évanescent quelconque* γ, *l'ensemble* $\mathrm{supp}(M_{\phi_k,\gamma})(z_1, z_2)$ *consiste en les points de la forme*

$$\left(-\lambda_i + a, \frac{d_2}{d_1}(\lambda_i + b)\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \ (a, b) \in \mathbf{Z}^2$$

qui sont contenus dans un cône Γ_k

$$\Gamma_k = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; z_1 \geqslant -\lambda_k - d_1, \frac{z_1}{d_1} + \frac{z_2}{d_2} \geqslant 0\right\}$$

de sommet $(-\lambda_k - d_1, (d_2/d_1)(\lambda_k + d_1))$.

Si on regarde plus précisement la projection $\mathrm{proj}_{z_1}(M_{\phi_1,\gamma}(z_1, z_2))$ sur l'axe z_1 de $\mathrm{supp}(M_{\phi_k,\gamma})(z_1, z_2)$, les suites suivantes s'obtiennent:

$$\mathrm{proj}_{z_1}(M_{\phi_1,\gamma}(z_1, z_2)) \subseteq \{-\lambda_1 - d_1, -\lambda_2 - 1, -\lambda_3 - 2, \ldots, 1 - \nu_1 - \lambda_{\nu_1}\} + d_1\mathbf{Z}_{\geqslant 0},$$
$$\mathrm{proj}_{z_1}(M_{\phi_2,\gamma}(z_1, z_2)) \subseteq \{-\lambda_2 - d_1, -\lambda_3 - 1, -\lambda_4 - 2, \ldots, 1 - \nu_1 - \lambda_1\} + d_1\mathbf{Z}_{\geqslant 0}.$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{proj}_{z_1}(M_{\phi_k,\gamma}(z_1, z_2)) \subseteq \{-\lambda_k - d_1, -\lambda_{k+1} - 1, -\lambda_{k+2} - 2, \ldots, 1 - \nu_m - \lambda_{[k-1]}\} + d_1\mathbf{Z}_{\geqslant 0},$$

pour k tel que $v_1 + v_2 + \cdots + v_m \leqslant k \leqslant v_1 + \cdots + v_{m+1}$. La notation $[k-1]$ est la même qu'au début de la section.

Remarque 2. Il est opportun d'évoquer ici le travail [25] de A.N.Varchenko qui a défini, dans le cas des singularités isolées d'hypersurface associées au germe $f\colon(\mathbf{C}_x^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, le poids d'une forme holomorphe ω de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \inf\left\{\alpha \in \mathbf{Q}; \frac{1}{t^\alpha}\left(\int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{\mathrm{d}f}\right) \to 0 \quad \text{lorsque } t \to 0\right\} \\ &= \min\{\alpha \in \mathbf{Q}; \text{il existe } \ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \quad \text{tel que } A_{k,\alpha} \neq 0\}\end{aligned}$$

du développement asymptotique

$$\int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{\mathrm{d}f} \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\alpha \in L(\lambda)} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} A_{k,\alpha} t^\alpha (\log\ t)^k\},$$

où $\gamma(t)$ est un cycle évanescent lorsque $t \to 0$,

$$L(\lambda) = \{\beta > -1; \exp(-2\pi i\beta) = \lambda\},$$

$\Lambda = \{$ les valeurs propres λ de la monodromie de Picard–Lefschetz de la singularité $f(x) = 0$ $\}$.

Il est facile de voir que dans notre situation le bord du cône Γ_k introduit dans le Corollaire 4.4 correspond à $\alpha(\omega)$ de Varchenko. En particulier, si la valeur critique de f est constituée d'un cusp (et d'une droite en position générique) notre λ_i donne la monodromie de Picard–Lefschetz de la singularité.

A juste titre, on pourrait donner une autre définition plus générale des spectres du système de Gauss–Manin au lieu de la Définition 1.

DÉFINITION 2. Les spectres du sytème de Gauss–Manin associé aux SIIC courbe-espace quasihomogène consistent en les données suivantes: la partie de l'ensemble des droites contenue dans le bord d'un cône $\bigcup_\gamma$ $\mathrm{supp}(M_{\phi_k,\gamma})(z_1, z_2)$, $1 \leqslant k \leqslant \mu$, où γ parcourt tout les cycles évanescents de la singularité.

D'après cette nouvelle définition, les spectres du système (3.1.1) sont donnés par le bord d'ensembles $(\{z_1 \geqslant -\lambda_k - d_1\} \cap \{d_1 z_2 + d_2 z_1 \geqslant 0\})$, $1 \leqslant k \leqslant \mu$.

Remarque 3. Il faut remarquer que les réseaux de l'ensemble $\mathrm{supp}(M_{\phi_k,\gamma})(z_1, z_2)$ donnent naissance à la bonne κ-filtration ($\kappa = 2$) introduite par C. Sabbah [20, 21].

Donc il suffit d'appliquer sa Proposition 1.2. de [21] à cette bonne filtration, pour voir l'existence de l'ensemble $\mathcal{L}_1$ de formes linéaires et d'un polynôme à une variable $b_{L,1}$ tels que

$$\left[\prod_{L \in \mathcal{L}_1} b_{L,1}(L(s))\right] f_1^{s_1} f_2^{s_2} = P_1\left(x_1, x_2, x_3; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, s_1, s_2\right) f_1^{s_1+1} f_2^{s_2},$$

pour les polynômes f_1, f_2 traités dans cet article. Ici nous avons comme l'ensemble $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_1 = \{s_1 + \lambda_k + d_1 - \alpha, d_1 s_2 + d_2 s_1 - \gamma\}$, avec certains $\alpha, \gamma \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ les spectres du système de Gauss–Manin. Il est naturel de considérer le polynôme $\prod_{L \in \mathcal{L}_1} b_{L,1}(L(s))$ ci-dessus comme la b—fonction en 2-variables.

Quant à l'EDF correspondant aux décalages en s_2, elle s'obtient d'une façon analogue en partant du système (3.1.2).

$$\left[\prod_{L \in \mathcal{L}_2} b_{L,2}(L(s))\right] f_1^{s_1} f_2^{s_2} = P_2\left(x_1, x_2, x_3; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, s_1, s_2\right) f_1^{s_1} f_2^{s_2+1},$$

où

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ s_2 - \frac{d_2}{d_1}\lambda_k - \beta, d_1 s_2 + d_2 s_1 - \gamma \right\},$$

avec certains $\beta, \gamma \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Les notations sont les mêmes que celles de $\mathcal{L}_1$.

4.2. L'INTÉGRALE-FIBRE EN TANT QU'UNE FONCTION HYPERGÉOMÉTRIQUE GÉNÉRALISÉE

D'ailleurs il serait utile de voir le résultat du Théorème 4.3 en liaison avec la notion des fonctions hypergéométriques généralisées (FHG) au sens de Mellin–Barnes–Pincherle [5, 18]. Par cette formulation la FHG de Gauss s'exprime par l'intégrale,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0 - i\infty}^{z_0 + i\infty} (-s)^z \frac{\Gamma(z+\alpha)\Gamma(z+\beta)\Gamma(-z)}{\Gamma(z+\gamma)} \mathrm{d}z, \quad -\Re\alpha, -\Re\beta < z_0.$$

Pour assurer la convergence de la transformée de Mellin inverse de $M_{\phi_k,\gamma}(z)$ de (4.1.3):

$$\int_{\Pi} s_1^{-z_1-1} s_2^{-z_2-1} M_{\phi_k,\gamma}(z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2, \tag{4.2.1}$$

on vérifie que l'EDF (4.1.2) admet la solution $M_{\phi_k}(z)$ telle que pour un certain $\varepsilon > 0$,

$|\ M_{\phi_k}(z)\ | < C_k \exp(-\varepsilon \mid \mathrm{Im}\ z \mid)$ lorsque $Im\ z \to \infty$,
dans un secteur d'ouverture $< 2\pi$.

Pour voir l'existence d'une solution de l'EDF avec décroissance exponentielle, on recourt à une astuce de Nörlund [18]. Sa technique consiste en un choix du facteur $g(z_1)$ de (4.1.3) qui doit être une fonction méromorphe de période d_1. Si on note $z = -(z_1/d_1)$, notre analyse de (4.2.1) est reduite à l'étude de l'intégrale

$$\int_{z_0 - i\infty}^{z_0 + i\infty} s^z g(z) \prod_{j=1}^{v} \frac{\Gamma(z+\alpha_j)}{\Gamma(z+\rho_j)} \mathrm{d}z. \tag{4.2.2}$$

LEMME 4.5. *Si on choit une des fonctions suivantes* $g^{+}(z)$ *(resp.* $g^{-}(z)$*) en tant que* $g(z)$, *alors l'intégrand de (4.2.2) est de décroissance exponentielle lorsque* Im z *tend vers* ∞ *dans le secteur* $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, *(resp.* $-\pi \leqslant \arg z < \pi$.*)*

$$g^{\pm}(z) = 1 + \mathrm{e}^{\pm 2\pi i \beta_v} \prod_{j=1}^{v} \frac{\sin 2\pi(z+\alpha_j)}{\sin 2\pi(z+\rho_j)},$$

avec $\beta_v = -1 + \sum_{j=1}^{v}(\rho_j - \alpha_j)$

Démonstration. Il suffit de se rappeler

$$\prod_{j=1}^{v} \frac{\Gamma(x+iy+\alpha_j)}{\Gamma(x+iy+\rho_j)} \to \text{const.} \mid y \mid^{-(\beta_v+1)}$$

lorsque $y \to \pm\infty$. Ici, on se sert de la formule de Binet:

$$\log \Gamma(z+a) = \log \Gamma(z) + a \log z - \frac{a-a^2}{2z} + \mathcal{O}(\mid z \mid^{-2})$$

si $\mid z \mid >> 1$, (Whittaker–Watson, Chapter XII, Example 44). Le facteur $\mid s^{-(x+iy)} \mid = r^{-x}\mathrm{e}^{\theta y}$, pour $s = r\mathrm{e}^{i\theta}$ donne la contribution exponentiellement décroissante dans chaque cas. □

Ainsi on a démontré la convergence de l'expression (4.2.1) pour un certain Π qui est obtenu comme un produit du chemin d'intégration dans $\mathbf{C}_{z_1}$ et celui dans $\mathbf{C}_{z_2}$.

PROPOSITION 4.6. *L'intégrale- fibre* $I_{\phi_k,\gamma_q}(z)$ *des SISIC prise le long d'un cycle évanescent* γ_q *est une FHG au sens de Mellin–Barnes–Pincherle définie par l'expression suivante*

$$\int_{\Pi} s_1^{-z_1-1} s_2^{-z_2-1} M_{\phi_k,\gamma_q}(z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2,$$

pour le $M_{\phi_k,\gamma_q}(z)$ *qui apparaît en (4.1.3) avec* $g(z_1) = g^{+}(-(z_1/d_1))$ *introduit dans Lemme 4.5.*

5. Des cas unimodaux et des autres cas accessibles

Malgré le caractère restrictif de calculs faits dans les sections précedentes, nos démarches s'appliquent aux autres cas qui contiennent des séries infinies.

5.1. LE CAS NON-RÉSONANT

On regarde l'application quasihomogène suivante,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^{q_1} + x_2^{q_2} + x_3^{q_3} = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

où on impose la condition que les poids w_i et w_j ($1 \leqslant i, j \leqslant 3$) soient premiers entre eux. Nous l'appelons le cas non-résonant. Selon la notation du §2, $p_1 = q_1 w_1 = q_2 w_2 = q_3 w_3, p_2 = w_1 + w_2$. Pour voir l'analogie du cas (5.1.1) avec les cas de singularités isolées simples de courbe espace, on établit l'enoncé suivant:

LEMME 5.1. *Pour (f_1, f_2) de (5.1.1) sous l'hypothèse sur les poids w_1, w_2, w_3 comme ci-dessus, les matrices $P^{(1)}, P^{(2)}$ définies dans la Proposition 1.2 sont semblables à des matrices diagonales. Plus précisément, pour chaque $1 \leqslant j \leqslant \mu$, il existe au plus des uniques j_1 et j_2 tels que*

$$\tilde{\omega}_j \wedge \mathrm{d}f_2 = P^{(1)}_{jj_2} \phi_{j_2} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \tag{5.1.2}$$

$$\tilde{\omega}_j \wedge \mathrm{d}f_1 = P^{(2)}_{jj_1} \phi_{j_1} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \tag{5.1.3}$$

avec $P^{(1)}_{jj_2} \neq 0$, $P^{(2)}_{jj_1} \neq 0$ et $j_1 \neq j_2$. En revanche pour chaque indice j, on trouve au plus des entiers uniques $\tilde{j}_1, \tilde{j}_2$ tels que

$$\tilde{\omega}_{\tilde{j}_2} \wedge \mathrm{d}f_1 = P^{(2)}_{\tilde{j}_2 j} \phi_j(x) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \tag{5.1.4}$$

$$\tilde{\omega}_{\tilde{j}_1} \wedge \mathrm{d}f_2 = P^{(1)}_{\tilde{j}_1 j} \phi_j(x) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \tag{5.1.5}$$

avec $P^{(2)}_{\tilde{j}_2 j} \neq 0$, $P^{(1)}_{\tilde{j}_1 j} \neq 0$.

Démonstration. Nous faisons la comparaison entre les poids des termes. On démontre le cas (5.1.2). Le cas (5.1.3) se démontre d'une manière similaire.

S'il existe un autre terme à part de ϕ_{j_2} (disons $\phi_{j'_2}$) qui participe à la décomposition (5.1.2), leurs poids satisfont les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \ell_j + p_2 &= w(P^{(1)}_{jj_2}) + w(\phi_{j_2}) + w_1 + w_2 + w_3 \\ &= w(P^{(1)}_{jj'_2}) + w(\phi_{j'_2}) + w_1 + w_2 + w_3. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Remarquons que $w(P^{(1)}_{jj_2}), w(P^{(1)}_{jj'_2}) \in p_1 \mathbf{Z}_{\geqslant 0} + p_2 \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Donc la différence des poids de deux formes $w(\phi_{j_2})$ et $w(\phi_{j'_2})$ doit appartenir au réseau des entiers $p_1 \mathbf{Z} + p_2 \mathbf{Z}$.

Maintenant on se souvient de la formule de la série de Poincaré de l'espace $\tilde{\Phi}$, (3.2.6). Pour le cas (5.1.1), elle devient,

$$\begin{aligned} & P_{\tilde{\Phi}}(t) \\ & \quad = t^{(q_3-1)w_3} + (1 + t^{w_3} + \cdots + t^{(q_3-2)w_3})\times \\ & \qquad \times (1 + t^{w_2} + \cdots + t^{q_2 w_2} + t^{w_1} + \cdots + t^{(q_1-1)w_1}). \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

De la formule (5.1.7), il est facile de voir que

$$w(\phi_{j_2}) - w(\phi_{j_2'}) \notin p_1\mathbf{Z}_{\geqslant 0} + p_2\mathbf{Z}_{>0} = q_i w_i \mathbf{Z}_{\geqslant 0} + (w_1 + w_2)\mathbf{Z}_{>0}.$$

Cela veut dire que $P^{(1)}_{jj_2}/P^{(1)}_{jj_2'} \notin s_2\mathbf{C}[s]$ si $P^{(1)}_{jj_2'} \neq 0$. Autrement dit, si on trouve deux indices j_2, j_2' pour lesquels (5.1.6) sont vérifié, alors ils sont pour ces indices:

$$w(\phi_{j_2}) = kw_3 + p_1,\, w(\phi_{j_2'}) = kw_3,\, 0 \leqslant k \leqslant q_3 - 1,$$

d'après (5.1.7). Cette relation entraîne que $P^{(1)}_{jj_2} = cf_1 P^{(1)}_{jj_2'}$ pour certain constant c:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_j \wedge \mathrm{d}f_2 &= (P^{(1)}_{jj_2'}\phi_{j_2'} + P^{(1)}_{jj_2}\phi_{j_2})\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &= P^{(1)}_{jj_2'}(\phi_{j_2'} + cf_1\phi_{j_2})\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3. \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Il faut remarquer ici que le terme de gauche est un monôme pour les singularités définies par (5.1.1), par contre le terme de droite doit être essentiellement polynomial sinon $c = 0$. Donc il faut qu'un seul terme $P^{(1)}_{jj_2'}\phi_{j_2'}$ prenne part à la décomposition (5.1.8).

Pour voir que les indices j_1, j_2 de (5.1.2), (5.1.3) sont différents, il faut calculer l'espace F:

$$\begin{aligned} & P_F(t) \\ & \quad = (1 + t^{w_3} + \cdots + t^{(q_3-1)w_3})t^{w_1+w_2} + t^{w_3}(1 + t^{w_3} + \cdots + t^{(q_3-2)w_3})\times \\ & \qquad \times (t^{w_2} + \cdots + t^{q_2 w_2} + t^{w_1} + \cdots + t^{(q_1-1)w_1}). \end{aligned}$$

Des formes qui pourraient produire la situation avec $j_1 = j_2$ dans (5.1.2),(5.1.3) sont celles dont les poids appartiennent au réseau $w_1 + w_2 + w_3 + w_1\mathbf{Z}_{\geqslant 0} + w_2\mathbf{Z}_{\geqslant 0} + w_3\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Par le calcul direct des formes de F, les uniques formes qui satisfont cette condition sont $x_2 x_3^i \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 \in F$ $(0 \leqslant i \leqslant q_3 - 2)$. Cela achève la démonstration de (5.1.2) et d'une façon analogue (5.1.3). D'après une comparaison des séries de Poincarés $P_F(t)$ et $P_{\tilde{\Phi}}(t)$ on peut conclure (5.1.4), (5.1.5) en tenant compte de (5.1.2), (5.1.3). □

On remarque ici que la condition de nonrésonance a été essentiellement utilisée pour que le terme de gauche de (5.1.8) soit monomial.

5.2. LA LISTE DE WALL ET D'ALEKSANDROV

Pour les singularités d'intersection complète pas nécessairement simples, les résultats analogues aux Théorèmes 3.1, 4.3 et 4.4 sont valables. Notamment la série des singularités unimodales de la liste de Wall [27]:

$P_{k,\ell}, k \geqslant \ell \geqslant 2, \mu = k + \ell + 1,$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^k + x_2^\ell + x_3^2 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 = 0,$$

$G_{2m+6}, m \geqslant 3$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3^m = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^3 = 0,$$

$G_{2m+3}, m \geqslant 3$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^m = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^3 = 0,$$

FZ_{6m+6}

$$f_1 = x_1 x_3 + x_3^3 + x_2^{3m+1},$$
$$f_2 = x_1 x_2,$$

FZ_{6m+8}

$$f_1 = x_1 x_3 + x_3^3 + x_2^{3m+2}$$
$$f_2 = x_1 x_2.$$

On remarque la structure du module F analogue à celle des cas S_μ, T_μ (pour $P_{k,\ell}$) et des cas Z_{10} (G_{2m+3} et G_{2m+6}). C'est-à-dire:

$P_{k,\ell}$

$$F = \{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1,$$
$$\overbrace{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, x_2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \ldots, x_2^{\ell-2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3}^{\ell-1}, \overbrace{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \ldots, x_1^{k-1}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1}^{k}\},$$
$$w_1 = 2\ell,\ w_2 = 2k,\ w_3 = k\ell,\ p_1 = 2k\ell,\ p_2 = 2(k+\ell)w,$$
$$\tilde{\Phi} = \{1, x_1, \ldots, x_1^{k-1}, x_2, \ldots, x_2^\ell, x_3\},$$
$$w(\phi_j) = \{0, 2\ell, \ldots, 2(k-1)\ell, 2k, \ldots, 2k\ell, k\ell\}.$$

G_{2m+6}

$$
\begin{aligned}
&F = \{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, x_3\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1,\\
&\overbrace{3x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, x_3(3x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2), \ldots, x_3^{m-2}(3x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)}^{m-1},\\
&\overbrace{x_2(mx_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2), x_2x_3(mx_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2), \ldots, x_2x_3^{m-2}(mx_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)}^{m-1},\\
&mx_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, x_3(mx_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2), mx_3^2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\},\\
&w_1 = 2m+3,\ \ w_2 = 6,\ \ w_3 = 4,\ \ p_1 = 2(2m+3),\ \ p_2 = 12,\\
&\tilde{\Phi} = \{1, x_3, x_3^2, \ldots, x_3^{m+1}, x_2, x_2x_3 \cdots, x_2x_3^{m+1}, x_1, x_1x_3\},\\
&w(\phi_j) = \{4i, 6+4i\ (0 \leqslant i \leqslant m+1), 2m+3, 2m+7\}.
\end{aligned}
$$

G_{2m+3}

$$
\begin{aligned}
&F = \{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, x_3^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \overbrace{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \ldots, x_3^{m-2}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1}^{m-1},\\
&\overbrace{mx_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, x_3(mx_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2), \ldots, x_3^{m-2}(mx_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)}^{m-1}\},\\
&w_1 = m,\ \ w_2 = 3,\ \ w_3 = 2,\ \ p_1 = 2m,\ \ p_2 = 6,\\
&\tilde{\Phi} = \{1, x_3, x_3^2, \ldots, x_3^{m+1}, x_2, x_2x_3 \cdots, x_2x_3^{m-2}, x_1, x_1x_3\},\\
&w(\phi_j) = \{2i\ (0 \leqslant i \leqslant m+1), 3+2j\ (0 \leqslant j \leqslant m-2), m, m+2\}.
\end{aligned}
$$

FZ_{6m+6}

$$
\begin{aligned}
&F = \{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, x_2^i(3x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 - \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2),\\
&0 \leqslant i \leqslant 3m-1, x_1(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - 3x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3),\\
&x_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3, x_2^j\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, 0 \leqslant j \leqslant 3m, x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1\},\\
&w_1 = 2(3m+1),\ \ w_2 = 3,\ \ w_3 = 3m+1,\ \ p_1 = 6m+5,\ \ p_2 = 3(3m+1),\\
&\tilde{\Phi} = \{x_1, x_3^2, x_1^2, x_2^i, 0 \leqslant i \leqslant 3m+1, x_2^kx_3, 0 \leqslant k \leqslant 3m\},\\
&w(\phi_1) = \{2(3m+1), 4(3m+1), 3i, 0 \leqslant i \leqslant 3m+1, 3k+3m+1, 0 \leqslant k \leqslant 3m\}.
\end{aligned}
$$

FZ_{6m+8}

$$
\begin{aligned}
&F = \{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, x_2^i(3x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 - \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2),\\
&0 \leqslant i \leqslant 3m, x_1(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 - 3x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3),\\
&x_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3, x_2^k\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, 0 \leqslant k \leqslant 3m+1, x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1\},\\
&w_1 = 2(3m+2),\ \ w_2 = 3,\ \ w_3 = 3m+2,\ \ p_1 = 6m+7,\ \ p_2 = 3(3m+2),\\
&\tilde{\Phi} = \{x_1, x_3^2, x_1^2, x_2^i, 0 \leqslant i \leqslant 3m+2, x_2^kx_3, 0 \leqslant k \leqslant 3m+1\},\\
&w(\phi_j) = \{2(3m+2), 2(3m+2), 4(3m+2), 2i, 0 \leqslant i \leqslant 3m+2,\\
&2k+3m+2, 0 \leqslant k \leqslant 3m+1\}.
\end{aligned}
$$

On trouve chez A. G. Aleksandrov [1] une série des singularités U_{2m+1} (dans [27] on trouve J_{6m+7}, J_{6m+9}) dont le système de Gauss–Manin peut être calculé d'une façon analogue au cas U_7, U_9:

$U_{2m+1}, m \geqslant 5$

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3^m = 0,\\
&f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2x_3 = 0,\\
&F = \{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, x_3^{m-1}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + x_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \overbrace{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \ldots, x_3^{m-2}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1}^{m-1},\\
&\overbrace{x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, x_3(x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1), \ldots, x_3^{m-2}(x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1)}^{m-1}\},\\
&w_1 = m+1,\ w_2 = 2m-1,\ w_3 = 3,\ p_1 = 3m,\ p_2 = 2m+2,\\
&\tilde{\Phi} = \{1, x_3, x_3^2, \ldots, x_3^{m-1}, x_1, x_1x_3 \cdots, x_1x_3^{m-1}, x_2\},\\
&w(\phi_j) = \{3i, m+1+3i\ (0 \leqslant i \leqslant m-1), 2m-1\}.
\end{aligned}
$$

Par un calcul semblable à celui des §2, §3, on obtient un analogue des Théorèmes 3.1 et 4.4. On reprend la notation,

$$
\begin{aligned}
I_{k,\gamma}(s) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial\gamma(s)} \frac{\phi_k \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3}{(f_1 - s_1)(f_2 - s_2)},\\
M_{k,\gamma}(z) &= \int_\Pi I_{k,\gamma}(s_1, s_2) s_1^{z_1} s_2^{z_2} \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2,
\end{aligned}
$$

pour un certain Π qui évite les pôles de $I_{k,\gamma}(s)$, et $\mathbf{I}_\Phi = (I_{1,\gamma}(s_1, s_2), \ldots, I_{\mu,\gamma}(s_1, s_2))$. En somme, le calcul des cas traités dans 5.1 et 5.2 donnent le résultat suivant.

THÉORÈME 5.2. (1) *Le système de Gauss–Manin pour* $\mathbf{I}_\Phi$ *associé aux singularités isolées d'intersection complète de courbe espace des cas non-résonants (5.1.1),* $P_{k,l}$, G_{2m+6}, G_{2m+3}, FW_{13}, FW_{19}, K_{13} FZ_{6m+6}, FZ_{6m+8}, HD_{13}, HD_{14}, K_{14} *de la liste de Wall et* U_{2m+1} *de la liste d'Aleksandrov s'écrit sous la forme suivante:*

$$
P'^{(1)}(s_1)\left(s_1 id_\mu \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{1}{p_1} L_\Phi\right)\mathbf{I}_\Phi = \frac{p_2}{p_1} s_2 P'^{(2)}(s_2) \frac{\partial}{\partial s_1} \mathbf{I}_\Phi, \tag{5.2.1}
$$

où $P'^{(1)}(s_1)$: *une matrice diagonale, et* $P'^{(2)}(s_2)$: *une matrice semblable à une matrice diagonale.*

$$
\frac{1}{p_1} L_\Phi = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu\}, \lambda_j = \frac{w(\phi_j) + w_1 + w_2 + w_3 - p_1 - p_2}{p_1}.
$$

D'une façon analogue:

$$P'^{(2)}(s_2)\left(s_2 id_\mu \frac{\partial}{\partial s_2} - \frac{1}{p_2} L_\Phi\right)\mathbf{I}_\Phi = \frac{p_1}{p_2} s_1 P'^{(1)}(s_1) \frac{\partial}{\partial s_2}\mathbf{I}_\Phi, \tag{5.2.2}$$

avec les spectres $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu\}$ possédant la propriété de symétrie.

(2) *Soit* $*$ *une des singularités suivantes: cas non-résonants (5.1.1),* $P_{k,l}$, G_{2m+6}, G_{2m+3}, U_{2m+1}, FW_{13}, FW_{19}, K_{13}. *Alors on a la formule suivante de la transformée de Mellin de l'intégrale-fibre* $M_{k,\gamma_q(z)}$ *associée à* $*$. *Pour chaque* $\phi_k \in \tilde{\Phi}$, *on trouve des ensembles d'entiers* $I_1^{(k)} \neq \emptyset$ *et* $I_2^{(k)} \neq \emptyset$ *tels que* $I_1^{(k)} \cap I_2^{(k)} = \emptyset, I_1^{(k)} \cup I_2^{(k)} \subset [1, \mu], k \in I_1^{(k)}$ *et*

$$\begin{aligned} M_{k,\gamma_q}(z) = {} & V_k^{\frac{z_1}{d_1(k)}} \prod_{i \in I_1^{(k)}} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1(k)} L(*, k, i; z_1)\right) \times \\ & \times \prod_{j \in I_2^{(k)}} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1(k)} \tilde{L}(*, k, j; z_1)\right) \prod_{t=1}^{|I_1^{(k)}|+|I_2^{(k)}|} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1(k)}(z_1 + t)\right)^{-1} \times \\ & \times (p_2(z_2 - \zeta_q) + p_1 z_1)^{-1} g(z_1) \end{aligned}$$

où on utilise les notations ci-dessous:

$$\begin{aligned} & L(*, k, i; z_1) = z_1 + \lambda_i + (i - k) + \delta_{k,i} d_1(k), \\ & \tilde{L}(*, k, j; z_1) = z_1 + \lambda_j + (j - k) + \mid I_1^{(k)} \mid + \mid I_2^{(k)} \mid + 1, \end{aligned}$$

où $\delta_{k,j}$ *delta de Kronecker,* $d_1(k), \zeta_q \in Z_{\geqslant 0}$, $V_k \in Q$, $g(z_1)$ *une fonction méromorphe périodique telle que* $g(z_1 + d_1(k)) = g(z_1)$. *Les rationnels (spectres)* λ_j *sont définis comme* $\lambda_j = w(\phi_j) + |w| - |p|/p_1$.

(3) Soit $*$ une des singularités suivantes de la liste de Wall: FZ_{6m+6}, FZ_{6m+8}, HD_{13}, HD_{14}, K_{14}. Alors, pour chaque $\phi_k \in \tilde{\Phi}$ on trouve des ensembles d'entiers $I_1^{(k)} \neq \emptyset, I_2^{(k)} \neq \emptyset, I_3^{(k)}$ et un entier $\tilde{k} \in [1, \mu]$ tels que

$$I_1^{(k)} \cap I_2^{(k)} = \emptyset, \quad I_2^{(k)} \cap I_3^{(k)} = \emptyset, \quad I_1^{(k)} \cap I_3^{(k)} = \{\tilde{k}\}, \quad I_1^{(k)} \cup I_2^{(k)} \cup I_3^{(k)} \subset [1, \mu]$$

avec lesquels la transformée de Mellin $M_{k,\gamma_q}(z)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} M_{k,\gamma_q}(z) = {} & V^{\frac{z_1+\tau_k}{d_1(k)}} \prod_{i \in I_1^{(k)}} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1(k)} L(*, \tilde{k}, i; z_1 + \tau_k)\right) \times \\ & \times \prod_{j \in I_2^{(k)}} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1(k)} \tilde{L}(*, \tilde{k}, j; z_1 + \tau_k)\right) \times \\ & \times \prod_{t=1}^{|I_1^{(k)}|+|I_2^{(k)}|} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1(k)}(z_1 + t + \tau_k)\right) \times \\ & \times \prod_{r \in I_3^{(k)} \setminus \{\tilde{k}\}} \left(\frac{z_1 + \tilde{\alpha}_r}{z_1 + \tilde{\beta}_r}\right) (p_1(z_1 + \tau_k) + p_2(z_2 - \zeta_q + \sigma_k))^{-1} g(z_1) \end{aligned}$$

où $\sigma_k, \tau_k \in Z$ et soit $\tilde{\alpha}_r \in Z, \tilde{\beta}_r \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_\mu\} + Z$ soit $\tilde{\alpha}_r \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_\mu\} + Z, \tilde{\beta}_r \in Z$. Ici on utilise la notation $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\mu\} + Z = \{\lambda \in R$: il existe λ_i tel que $\lambda \equiv \lambda_i \bmod Z\}$. Les autres notations sont celles de l'énoncé **2**.

Première partie de la démonstration: Preuve des énoncés 1 et 2 pour $P_{k,l}$, G_{2m+6}, G_{2m+3}, U_{2m+1}, FW_{13}, FW_{19}, K_{13}. On se rappelle que l'argument de la démonstration du Théorème 4.1 5.3 s'appuyait sur (**a**) le fait que les éléments des matrices $P^{(1)}, P^{(2)}$ sont monomiaux, (**b**) après un changement de base de $\tilde{\Phi}$ et F, on peut supposer que $P^{(1)}(s)$ est une matrice diagonale et que $P^{(2)} =$ (matrice diagonale) $\times\Sigma$ avec $\Sigma \in \mathrm{SL}(\mu, Z)$ telle que $\Sigma^\mu = i\mathrm{d}_\mu$.

Les énoncés **1** et **2** se déduisent de (**a**) et (**b**).

Preuve de **(a)**. D'abord on se souvient de la série de Poincaré $P_V(t)$, (1.2.3) dans le cas $n = 1, k = 2, m = 3$,

$$P_V(t) = (1 - t^{p_1})(1 - t^{p_2})\frac{(t^{w_1} + t^{w_2} + t^{w_3} - t^{p_1} - t^{p_2} - 1)}{(1 - t^{w_1})(1 - t^{w_2})(1 - t^{w_3})} + 1. \tag{5.2.3}$$

Cela et la relation (1.4.1) donnent:

$$w(P^{(1)}_{ij}(s)) = p_2 + w(\tilde{\omega}_i) - w(\phi_j) - |w| \leqslant 2(|p| - |w|) - w(\phi_j). \tag{5.2.4}$$

D'autre part, pour que un élément de $P^{(1)}_{ij}(s)$ consiste de plusieurs monômes, il faut qu'il existe des paires de vecteurs entiers $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta') \in \mathbf{Z}^2_{\geqslant 0}$ telles que:

$$w(P^{(1)}_{ij}(s)) = \alpha p_1 + \beta p_2 = \alpha' p_1 + \beta' p_2.$$

Pour les singularités de 5.1, 5.2 ci-dessus, il est impossible de trouver de telles paires de vecteurs entiers positifs d'après (5.2.4). Quant à la matrice $P^{(2)}$ le même argument fonctionne.

Preuve de **(b).** Le lemme 5.1 a déjà démontré la propriété (**b**) dans les cas non-résonants.

Afin de le prouver dans les cas unimodaux qui figurent dans l'énonncé **2**, on reproduit l'argument du lemme 5.1. Plus précisement, il suffit de démontrer la validité de la décomposition comme (5.1.8) à laquelle en fait un seul terme prend part. On va démontrer que si on a une décomposition sous la forme suivante,

$$\tilde{\omega}_j \wedge \mathrm{d}f_2 = (P^{(1)}_{jj_2}\phi_{j_2} + P^{(1)}_{jj_2'}\phi_{j_2'})\mathrm{d}x, \qquad \tilde{\omega}_j \wedge \mathrm{d}f_1 = (P^{(2)}_{jj_1}\phi_{j_1} + P^{(1)}_{jj_1'}\phi_{j_1'})\mathrm{d}x, \tag{5.2.5}$$

alors $P^{(1)}_{jj_2} = 0$ ou $P^{(1)}_{jj_2'} = 0$ ($P^{(2)}_{jj_1} = 0$ ou $P^{(2)}_{jj_1'} = 0$). Il est évident qu'il y aurait au plus deux termes à droite de (5.2.5), car $\tilde{\omega}_j$ consiste au plus en deux termes.

La liste ci-dessus donne la démonstration de l'énoncé (**b**) pour les cas $P_{k,l}$, G_{2m+3}, G_{2m+6}, U_{2m+1}.

Quant aux cas FW_{13}, FW_{19}, K_{13} il suffit de comparer les poids quasihomogènes des formes $\tilde{\omega}_j \in F$ et ceux de $\phi_i(x)\mathrm{d}x$, $\phi_i(x) \in \tilde{\Phi}$. (Il n'est pas nécéssaire de calculer toutes les formes de F):

$FW_{3r+1}(r = 4, 6)$:

$$f_1 = x_1x_3 + x_2^r, \qquad f_2 = x_1x_2 + x_3^3,$$
$$w(\tilde{\omega}_j) = \{r+1+4(i+1), 2(r+1)+4(i+1),$$
$$3(r+1)+4i(0 \leqslant i \leqslant r-1), 7r+3\},$$
$$w(\phi_j(x)\mathrm{d}x) = \{4(r+1)+4i, 5(r+1)+4i, 6(r+1)+4i(0 \leqslant i \leqslant r-1), 7r+3\}.$$

K_{13}:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^3x_3, \qquad f_2 = x_1x_2 + x_3^2,$$
$$w(\tilde{\omega}_j) = \{8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23\},$$
$$w(\phi_j(x)\mathrm{d}x) = \{15, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 33\}.$$

Pour que la situation (5.2.5) avec deux termes non-nuls se produise, il est nécéssaire qu'il existe $\phi_{j_1}, \phi_{j'_1}, \phi_{j_2}, \phi_{j'_2} \in \tilde{\Phi}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \boldsymbol{Z}_{\geqslant 0}$, $j_1 \neq j'_1, j_2 \neq j'_2$ tels que

$$\begin{aligned} w(\tilde{\omega}_j) + p_2 &= w(\phi_{j_2}) + \alpha p_1 + \beta p_2 + |w| = w(\phi_{j'_2}) + \alpha' p_1 + \beta' p_2 + |w|,\\ w(\tilde{\omega}_j) + p_1 &= w(\phi_{j_1}) + \gamma p_1 + \delta p_2 + |w| = w(\phi_{j'_1}) + \gamma' p_1 + \delta' p_2 + |w|. \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Afin de voir (**b**), il suffit de le vérifier pour $\tilde{\omega}_j \in F$ qui satisfait (5.2.6). Il n'existe pas de telle forme $\tilde{\omega}_j \in F$ dans les cas FW_{13}, FW_{19}. Dans le cas K_{13}, on trouve les formes satisfaisant (5.2.6) comme suit:

$$\{\tilde{\omega}_{15} = 3x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1, \tilde{\omega}_{18} = x_2\tilde{\omega}_{15}, \tilde{\omega}_{20} = x_3\tilde{\omega}_{15}, \tilde{\omega}_{23} = x_2x_3\tilde{\omega}_{15}\}$$

où l'indice de chaque forme indique son poids quasihomogène. On voit facilement que la situation (5.2.5) avec deux termes non-nuls n'arrive pour aucune des formes ci-dessus. On a donc démontré que dans les cas de FW_{13}, FW_{19}, K_{13}, on trouve au plus des entiers uniques $j_1, j_2 \in [1, \mu]$ pour chaque $j \in [1, \mu]$ tels que

$$\tilde{\omega}_{j_2} \wedge \mathrm{d}f_1 = P^{(2)}_{j_2j}(f)\phi_j(x)\mathrm{d}x, \qquad \tilde{\omega}_{j_1} \wedge \mathrm{d}f_2 = P^{(1)}_{j_1j}(f)\phi_j(x)\mathrm{d}x$$

avec $P^{(2)}_{j_2j} \neq 0, P^{(1)}_{j_1j} \neq 0$. L'énoncé **(b)** s'en déduit immédiatement.

Seconde partie: Preuve des énoncés 1 et 3 pour les cas FZ_{6m+6}, FZ_{6m+8}, HD_{13}, HD_{14}, K_{14}. Dans ces cas, on trouve des formes $\phi_j(x)\mathrm{d}x$, $\phi_j \in \tilde{\Phi}$ et $1 \leqslant i \neq i' \leqslant \mu$ tels que

$$\tilde{\omega}_i \wedge \mathrm{d}f_l = P^{(l)}_{ij}\phi_j(x)\mathrm{d}x, \qquad \tilde{\omega}_{i'} \wedge \mathrm{d}f_l = P^{(l)}_{i'j}\phi_j(x)\mathrm{d}x$$

avec $P^{(l)}_{ij} \neq 0, P^{(l)}_{i'j} \neq 0$ et $l \in \{1, 2\}$. Cela implique que (**b**) n'est pas valable pour ces singularités. Pourtant on trouve parmi elles des sous-ensembles $\tilde{\Phi}_0 := \{\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_\nu}\} \subset \tilde{\Phi}$ et $F_0 := \{\tilde{\omega}_{i_1}, \ldots, \tilde{\omega}_{i_\nu}\} \subset F, 2 \leqslant \nu \leqslant \mu$, tels que les matrices $P_0^{(1)}(s), P_0^{(2)}(s) \in GL(\nu, C) \otimes C[s]$ définies comme dans (1.4.1) pour les formes de F_0 et $\phi_{j_1}\mathrm{d}x, \ldots, \phi_{j_\nu}\mathrm{d}x$ soient toutes les deux des produits d'une matrice diagonale et d'une matrice de permutation. Bien entendu, pour la transformée de Mellin $M_{j_k}(z)$ définie par le monôme $\phi_{j_k} \in \tilde{\Phi}_0$ un énoncé parallel à celui du Théorème 3.1 est valable.

Pour établir l' énoncé **1**, on reproduit un argument similaire à celui utilisé pour voir (**b**) dans les cas FW_{13}, FW_{19}, K_{13}. Les formes satisfaisant (5.2.6) sont énumérées ci-dessous. On établit aussi une liste des poids quasihomogènes de $\tilde{\omega}_w \in F$, l'espace $\tilde{\Phi}$ et des poids quasihomogènes $\phi_j(x)\mathrm{d}x$, $\phi_j(x) \in \tilde{\Phi}$.

$$HD_{13}: f_1 = x_1^2 + x_2^2 x_3,$$
$$f_2 = x_1 x_2 + x_3^3,$$
$$w(\tilde{\omega}_j) = \{9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24\},$$
$$\tilde{\Phi} = \{1, x_3, x_2, x_1, x_3^2, x_2x_3, x_2^2, x_1x_3, x_1x_2, x_1x_3^2, x_1x_2x_3, x_1x_2x_3^2\},$$
$$w(\phi_j \mathrm{d}x) = \{16, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 36\},$$
$$\tilde{\omega}_{12} = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$
$$\tilde{\omega}_{14} = x_2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$$
$$\tilde{\omega}_{16} = x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1,$$
$$\tilde{\omega}_{18} = x_2x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1,$$
$$\tilde{\omega}_{20} = 3x_1x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + x_3^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$
$$\tilde{\omega}_{24} = x_3^2\tilde{\omega}_{16}.$$

$$HD_{14}: f_1 = x_1^2 + x_2^3,$$
$$f_2 = x_1x_2 + x_3^3,$$
$$\tilde{\omega}_{17} = x_2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$$
$$\tilde{\omega}_{20} = 3x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1,$$
$$\tilde{\omega}_{26} = x_2\tilde{\omega}_{20},$$
$$\tilde{\omega}_{23} = x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + x_2^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$$
$$w(\tilde{\omega}_j) = \{11, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 31\},$$
$$\tilde{\Phi} = \{1, x_3, x_2, x_1, x_3^2, x_2x_3, x_2^2, x_1x_3, x_1x_2, x_2x_3^2, x_2^2x_3, x_3^4, x_1x_2^2, x_2x_3^4\},$$
$$w(\phi_j \mathrm{d}x) = \{20, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 46\}.$$

K_{14}: $f_1 = x_1^2 + x_2^5,$
$f_2 = x_1x_2 + x_3^2,$
$w(\tilde{\omega}_j) = \{11, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 33\},$
$\tilde{\Phi} = \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_1, x_2x_3, x_2^3, x_1x_2, x_2^2x_3, x_2^4, x_1x_2^2, x_2^3x_3, x_1x_2^3, x_1x_2^4\},$
$w(\phi_j \mathrm{d}x) = \{21, 25, 28, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 47\},$
$\tilde{\omega}_{15} = x_2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$
$\tilde{\omega}_{19} = x_2\tilde{\omega}_{15},$
$\tilde{\omega}_{22} = x_2^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$
$\tilde{\omega}_{21} = 5x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + 2x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1,$
$\tilde{\omega}_{25} = x_2\tilde{\omega}_{21},$
$\tilde{\omega}_{23} = x_2^3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$
$\tilde{\omega}_{27} = x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + x_2^4\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$
$\tilde{\omega}_{29} = x_2^2\tilde{\omega}_{21},$
$\tilde{\omega}_{33} = x_2^3\tilde{\omega}_{21}.$

Ici l'indice de chaque forme indique son poids quasihomogène. Le calcul direct montre que la situation (5.2.5) avec deux termes non-nuls ne peut se produire pour aucune des formes ci-dessus. Cela démontre l'énoncé **1** pour ces singularités.

Quant aux monômes de $\tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0$, après un calcul simple, on observe la situation suivante. Pour les monômes $\phi_{j_{\nu+l(r)}} \in \tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0$, $1 \leqslant r \leqslant \mu - \nu$ il existe au moins un monôme $\phi_{j_{\nu+l(0)}} \in \tilde{\Phi}_0$ et des monômes $\phi_{j_{\nu+l(1)}}, \phi_{j_{\nu+l(2)}}, \ldots, \phi_{j_{\nu+l(r-1)}} \in \tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0$ tels que

$$\begin{aligned}(z_1 + \tilde{\eta}_{j_{\nu+l(q)}} + \lambda_{j_{\nu+l(q)}} + 1)M_{j_{\nu+l(q)}}(z_1 + \tilde{\eta}_{j_{\nu+l(q)}}, z_2) \\ = \tilde{\nu}_{j_{\nu+l(q)}} z_1 M_{j_{\nu+l(q-1)}}(z_1 - 1, z_2 + \tilde{\delta}_{j_{\nu+l(q)}} + 1), q = 1, \ldots, r\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

pour certains $\tilde{\eta}_{j_{\nu+l(q)}}, \tilde{\delta}_{j_{\nu+l(q)}} \in Z_{\geqslant 0}$ et $\tilde{\nu}_{j_{\nu+l(q)}} \in Q$. En contraste avec le cas des monômes de $\tilde{\Phi}_0$, la relation de récurrence (5.2.7) ne se ferme pas pour $\phi_{j_{\nu+l(q)}} \in \tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0$. Voir (4.1.1). C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'indices $0 \leqslant r'' < r' \leqslant r$ tels que une $(r+1)$ ème relation de récurrence comme (5.2.7) soit vérifiée pour $M_{j_{\nu+l(r')}}$ et $M_{j_{\nu+l(r'')}}$, $r'' \neq r' - 1$. On note des monômes de $\tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0$ ci-dessous:

FZ_{6m+6}, FZ_{6m+8}: $\tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0 = \{x_3^2\},$
HD_{13}: $\tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0 = \{x_1x_2x_3\},$
HD_{14}: $\tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0 = \{x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, x_2^2x_3, x_3^4, x_1x_2^2, x_2x_3^4\},$
K_{14}: $\tilde{\Phi} \setminus \tilde{\Phi}_0 = \{x_2, x_2^2x_3, x_2^3x_3\}.$

En reproduisant l'argument du Théorème 4.3 il est facile de voir que

$$
\begin{aligned}
M_{j_{v+l(0)},\gamma_q}(z) = V_{j_{v+l(0)}}^{\frac{z_1}{d_1(j_{v+l(0)})}} & \prod_{j\in I_1^{(j_{v+l(0)})}} \Gamma\left(-\frac{1}{d_1(j_{v+l(0)})} L(*, j_{v+l(0)}, j;\, z_1)\right)\times \\
& \times \prod_{i\in I_2^{(j_{v+l(0)})}} \Gamma\left(-\frac{\tilde{L}(*, j_{v+l(0)}, i;\, z_1)}{d_1(j_{v+l(0)})}\right)\times \\
& \times \prod_{t\in I_1^{(j_{v+l(0)})}\cup I_2^{(j_{v+l(0)})}} \Gamma\left(-\frac{(z_1+t)}{d_1(j_{v+l(0)})}\right)^{-1} (p_2(z_2-\zeta_q)+p_1z_1)^{-1} g(z_1)
\end{aligned}
\tag{5.2.8}
$$

avec les notations de l'énoncé **2**. L'expression (5.2.8) et la relation de récurrence pour $\phi_{j_{v+l(q)}}$, $q = 0, 1, \ldots, r$ entraînent le résultat. □

Remarque 4. D'après la méthode présentée ci-dessus au §4, on n'est pas susceptible de résoudre le système de Gauss–Manin associé aux SIIC unimodales quasi-homogènes de courbe espace qui ne figurent pas dans le Théorème 5.2.

Pour ces singularités, i.e. $FT_{4,4}, FW_{14}, FW_{1,0}, FW_{18}, FZ_{6m+7}, FZ_{6m-1,0}, J_{6m+8}, J_{m+1,0}, K_{1,0}$ de la liste de Wall, il existe au moins une forme $\tilde{\omega}_j \in F$ qui suscite la situation (5.2.5) avec deux termes non-nuls. Par example, pour la singularité $FT_{4,4}$:

$$
\begin{aligned}
& f_1 = x_1x_2 + x_3^3, \\
& f_2 = x_1x_3 + x_2^3 + \lambda x_2x_3^2,\ \lambda \neq 0.
\end{aligned}
$$

On trouve trois formes $\tilde{\omega}_6, \tilde{\omega}_7, \tilde{\omega}_8$ du même poids quasihomogène i.e.

$$
\begin{aligned}
& w(\tilde{\omega}_6) = w(\tilde{\omega}_7) = w(\tilde{\omega}_8) = 4, \qquad \text{car} \qquad w_1 = 2, w_2 = w_3 = 1, \\
& \tilde{\omega}_6 = 2x_2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + (-4\lambda x_2^2 + (2\lambda^2+6)x_3^2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \\
& \mathrm{d}f_1 \wedge \tilde{\omega}_6 = \lambda(-4f_1 + x_1x_3)\mathrm{d}x, \\
& \mathrm{d}f_2 \wedge \tilde{\omega}_6 = (2f_1 - 8x_3^3)\mathrm{d}x, \\
& \tilde{\omega}_7 = x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \\
& \mathrm{d}f_1 \wedge \tilde{\omega}_7 = (f_1 - x_3^3)\mathrm{d}x, \\
& \mathrm{d}f_2 \wedge \tilde{\omega}_7 = x_1x_3\mathrm{d}x. \\
& \tilde{\omega}_8 = 2x_2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \lambda x_3\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 - (\lambda x_2^2 + (\lambda^2+6)x_3^2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \\
& \mathrm{d}f_1 \wedge \tilde{\omega}_8 = -\lambda f_2\mathrm{d}x, \\
& \mathrm{d}f_2 \wedge \tilde{\omega}_8 = (2f_1 - (8+2\lambda^2)x_3^3)\mathrm{d}x, \\
& \tilde{\Phi} = \{1, x_2, x_3, x_1, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_3^3, x_1x_2^2\}.
\end{aligned}
$$

On peut voir qu'il est impossible d'éviter la situation (5.2.5) avec deux termes non-nuls en choisissant une autre base de F et Φ.

Les espaces vectoriels F, Φ et les matrices $P^{(1)}(s), P^{(2)}(s)$ sont disponibles sur demande pour toutes les SIIC unimodales quasihomogènes de courbe espace.

Remarque 5. Tout récemment, l'auteur a reussi à obtenir le résultat suivant.

Les spectres du système (1.10.1), définis comme dans la Définition 2 consistent des données du type;

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + w(\psi_j) + p_2 - p_1 \leqslant 0$$
$$z_1 \leqslant -1 \quad \text{ou} \quad z_2 \leqslant -1.$$

De cet énoncé, il suit facilement que les spectres du système de Gauss–Manin associé à une ICIS quasihomogène de courbe espace sont symétriques par rapport à une droite. On peut ainsi en déduire que le Théorème 6.1 ci-dessous est valable pour ces singularités, si on pose $\lambda_i = (1/p_1)w(\psi_i),\ 1 \leqslant i \leqslant \mu$.

La démonstration s'appuie sur une méthode appelée "Cayley trick" qui calcule la cohomologie relative de Rham d'une SIIC (0.1) au moyen de la cohomologie d'une hypersurface définie comme suit:

$$X_f = \{(x_1, \dots, x_{n+k}, y_1, \dots, y_k) \in \mathbf{C}^{n+2k}; y_1(f_1(x) - s_1) + \dots y_k(f_k(x) - s_k) = 0\}.$$

Le detail doit paraître dans un travail suivant.

6. Nombre de Hodge des fibres de Milnor

On revient à la situation des chapitres §0, §1. Soit X_s une fibre de Milnor de SIIC courbe espace pour $(s_1, s_2) \in S$ hors sa valeur critique. On regarde une variété projective $\bar{X}_s \subset \mathbf{P}(w_1, w_2, w_3, 1)$ associée à X_s:

$$\bar{X}_s := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{P}(w_1, w_2, w_3, 1); f_1(x_1, x_2, x_3) = s_1 u^{p_1}, f_2(x_1, x_2, x_3) = s_2 u^{p_2}\}.$$

C'est une clôture de $\bar{X}_s$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}(w_1, w_2, w_3, 1)$ avec des poids comme en (1.1.1). On prend le poids de la variable u égal à 1. On peut consulter [7, 8] pour la projectivisation d'une SIIC.

On note $p_g(\bar{X}_s)$ le genre géométrique de la courbe $\bar{X}_s$ qui doit égaler le rang du groupe de cohomologie $H^1(\bar{X}_s, \mathcal{O}_{\bar{X}_s})$. Le genre géométrique de la fibre de Milnor est un des invariants importants de la singularité X_0. On a une expression assez simple de cet invariant au moyen des spectres du système de Gauss–Manin.

Nous nous rappelons ici que les nombres de Hodge $h^{pq}(X_s) = Gr_F^p Gr_{p+q}^W H^n(X_s)$ (et sa série de Poincaré) eux-mêmes ont été calculés par F. Hirzebruch pour le cas d'une SIIC homogène [15], §22 et par H. Hamm pour le cas d'une SIIC quasihomogène de dimension positive quelconque [14].

THÉORÈME 6.1. *Pour les singularités traitées dans les Théorèmes 4.3 et 5.2, on a les formules suivantes*

$$h^{01}(X_s) = h^{10}(X_s) = p_g(\bar{X}_s) = \sharp\{i; \lambda_i < 0\}, \tag{6.1}$$

$$h^{11}(X_s) = p_g(X_0) = \sharp\{i; \lambda_i = 0\} \tag{6.2}$$

où $\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant \mu$ *sont les spectres du système de Gauss–Manin (3.1.1), (5.2.1).*

Démonstration. (i) Démonstration de (6.1). Tout d'abord, rappelons que les $\mathbf{C}$−modules $A_{X_0}, A_{\bar{X}_s}$ des polynômes sur X_0 et $\bar{X}_s$ sont:

$$A_{X_0} := \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]/(f_1, f_2),\ A_{\bar{X}_s} = \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3, u]/(f_1 - s_1 u^{p_1}, f_2 - s_2 u^{p_2}).$$

Ces deux modules $A_{X_0}, A_{\bar{X}_s}$ sont munis d'une filtration naturelle compatible avec le poids $w(g)$ de $g \in A_{X_0}, A_{\bar{X}_s}$. Ici

$$\left(E + u\frac{\partial}{\partial u}\right)g(x_1, x_2, x_3, u) = w(g)g(x_1, x_2, x_3, u)$$

avec le champ de Euler introduit par (1.1.2). On peut regarder les séries de Poincaré $P_{A_{X_0}}(t), P_{A_{\bar{X}_s}}(t)$ définies par une filtration de poids:

$$P_{A_{X_0}}(t) = \sum_{a_d = \sharp\{g(x_1,x_2,x_3) \in A_{X_0};\, w(g) = d\}} a_d t^d,$$

$$P_{A_{\bar{X}_s}}(t) = \sum_{a_d = \sharp\{h(x_1,x_2,x_3,u) \in A_{\bar{X}_s};\, w(h) = d\}} a_d t^d.$$

Selon Dolgachev [8] 3.4.4, elles satisfont la relation suivante:

$$P_{A_{X_0}}(t) = (1 - t)P_{A_{\bar{X}_s}}(t)$$

où

$$P_{A_{X_0}}(t) = \frac{(1 - t^{p_1})(1 - t^{p_2})}{(1 - t^{w_1})(1 - t^{w_2})(1 - t^{w_3})}.$$

Par contre on a

$$P_{\tilde{\Phi}}(t) = t^{|p|-|w|} + (1 - t^{|p|-|w|})P_{A_{X_0}}(t) \tag{6.3}$$

d'après la formule d'Aleksandrov (3.4.6). Ici

$$|w| = w_1 + w_2 + w_3 \quad \text{et} \quad |p| = p_1 + p_2.$$

En somme

$$P_{A_{\bar{X}_s}}(t) = \frac{P_{\tilde{\Phi}}(t) - t^{|p|-|w|}}{(1 - t)(1 - t^{|p|-|w|})} = (P_{\tilde{\Phi}}(t) - t^{|p|-|w|})\left(\sum_{j \geqslant 0} t^j\right)\left(\sum_{k \geqslant 0} t^{k(|p|-|w|)}\right). \tag{6.4}$$

Le théorème de Dolgachev cité plus haut implique que le coefficient de $t^{|p|-|w|-1}$ de $P_{A_{\bar{X}_s}}(t)$ donne le genre géométrique $p_g(\bar{X}_s)$. Si on note le développement de $P_{\tilde{\Phi}}(t)$:

$$P_{\tilde{\Phi}}(t) = \sum_{j \geqslant 0} \pi_j t^j,$$

on déduit de la relation (6.4),

$$\begin{aligned} p_g(\bar{X}_s) &= 2\pi_0 + \pi_1 + \cdots \pi_{|p|-|w|-1} - 1 \\ &= \sharp\{\text{polynomes de } \tilde{\Phi} \text{ de poids} \leqslant |p| - |w| - 1\} \\ &= \sharp\{\text{polynomes de } \tilde{\Phi} \text{ de poids} < |p| - |w|\}. \end{aligned}$$

L'unicité de l'élement de poids 0 dans $\tilde{\Phi}$ entraîne la première égalité. La dernière egalité donne (6.1) en utilisant les Théorèmes 3.1 et 5.2.

(ii) Démonstration de (6.2). Quant à la seconde égalité, on reproduit l'argument bien utilisé depuis Steenbrink [23]. Voir aussi [7], [2], (5.4). Soit $Y = \bar{X}_s \setminus X_s$. A partir de la suite exacte

$$\cdots \to H^{n-2}(Y)(-1) \to H^n(\bar{X}_s) \to H^n(X_s) \to H^{n-1}(Y)(-1) \to H^{n+1}(\bar{X}_s) \to \cdots,$$

on obtient une suite exacte courte

$$0 \to P^n(\bar{X}_s) \to H^n(X_s) \to P^{n-1}(Y)(-1) \to, \tag{6.5}$$

où

$$\begin{aligned} &P^n(\bar{X}_s) = \operatorname{coker}(H^{n-2}(Y)(-1) \to H^n(\bar{X}_s)) \\ &P^{n-1}(Y)(-1) = \ker(H^{n-1}(Y)(-1) \to H^{n+1}(\bar{X}_s)) \end{aligned}$$

qui s'appellent la partie primitive de la cohomologie correspondente. De (6.5), on obtient

$$h^{p,n+1-p}(X_s) = \mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{n+1}^W H^n(X_s) = \mathrm{Gr}_F^p P^{n-1}(Y)(-1) = h_0^{p-1,n-p}(Y).$$

Le dernier est calculé par le Théorème 4.4, 3) de [2] qui dit que

$$h_0^{0,0}(Y) = \text{ coefficient de } t^{|p|-|w|} \text{ de } P_{A_{X_0}}(t),$$

qui est égal à son tour au coefficient de $t^{|p|-|w|}$ de $P_{\tilde{\Phi}}(t)$, par (6.3). La démonstration s'achève si on se souvient de la définition des spectres λ_i des Théorèmes 3.1 et 5.2. □

Remerciement

Je tiens à remercier D. Barlet, E. Brieskorn, J. H. M. Steenbrink et C. Sabbah de leurs critiques utiles et V. P. Palamodov d'avoir mis à ma disposition une copie de manuscrit [13].

References

1. Aleksandrov, A. G.: Normal forms of one-dimensional quasihomogeneous complete intersections, *USSR Mat. Sb.* **117**(159) (1982), 3–31.
2. Aleksandrov, A. G.: Cohomology of quasihomogeneous complete intersections, *Math. USSR, Izv.* **26** (1986), 437–477.
3. Aleksandrov, A. G.: Duality and de Rham complex on singular varieties, *Contemp. Math.* **161** (1994), 81–93.
4. Aleksandrov, A. G. et Tanabé, S.: Computing Gauss–Manin systems for complete intersection singularities S_μ, *Georgian Math. J.* **3**(5) (1996), 401–421.
5. Appell, P. et Kampé de Fériet, J.: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques,* Paris, 1926.
6. Barlet, D. et Maire, H. M.: Asymptotiques des intégrales fibres, *Ann. Inst. Fourier* **43**(5) (1993), 1267–1299.
7. Dimca, A.: Monodromy and Betti numbers of weighted complete intersections, *Topology* **24**(3) (1985), 369–374
8. Dolgachev, I.: Weighted projective varieties, In: *Lecture Notes in Math.* 956, Springer-Verlag, New York, 1982, pp. 34–71.
9. Ebeling, W. et Steenbrink, J. H. M.: Spectral pairs for isolated complete intersection singularities, *J. Algebraic Geom.* **7**(1) (1998), 55–76.
10. Giusti, M.: Classification des singularités isolées simples d'intersections completès, In: *Singularities*, Proc. Sympos. Pure Math. 40(1), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 457–494.
11. Greuel, G.-M.: Der Gauß–Manin–Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten, *Math. Ann.* **214**(3) (1975), 235–266.
12. Greuel, G.-M. et Hamm, H. A.: Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitten, *Invent. Math.* **49** (1978), 67–86.
13. Guzev, S.: Manuscrit inédit, Moscou, 1983.
14. Hamm, H. A.: The genus χ_y of quasihomogeneous complete intersections, *Funct. Anal. Appl.* **11** (1977), 86–87.
15. Hirzebruch, F.: *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3rd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
16. Loeser, F. et Sabbah, C.: Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes, *Comment. Math. Helv.* **66** (1991), 458–503.
17. Naruki, I.: Some remarks on isolated singularity and their application to algebraic manifolds, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **13** (1977), 17–46.
18. Nörlund, I.: Hypergeometric functions, *Acta Math.* **94**, (1955/56), 289–349.
19. Pham, F.: *Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau,* Gauthier-Villars, Paris, 1967.
20. Sabbah, C.: Proximité évanescente, I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-module, *Compositio Math.* **62** (1987), 283–328.
21. Sabbah, C.: Proximité évanescente, II. Equations fonctionelles pour plusieurs fonctions analytiques, *Compositio Math.* **64** (1987), 213–241.
22. Sabbah, C.: Lieu des pôles d'un système holonome d'equations aux différences finies, *Bull. Soc. Math. France* **120** (1992), 371–396.
23. Steenbrink, J. H. M.: Intersection form for quasihomogeneous singularities, *Compositio Math.* **34** (1977), 211–223.
24. Steenbrink, J. H. M.: Spectra of $\mathcal{K}$- unimodal isolated singularities of complete intersections, Preprint, (1996).
25. Varchenko, A. N.: Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology, *Math. USSR Izvest.* **18**(3) (1982), 471–512.

26. Vasiliev, V. A.: *Ramified Integrals, Singularities and Lacunas,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
27. Wall, C. T. C.: Classification of unimodal isolated singularities of complete intersections, In: *Singularities*, Proc. Sympos. Pure Math. 40(2), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 625–640.