|  |
| --- |
| **TÜBİTAK**  **ARAŞTIRMA PROJESİ**  **GELİŞME RAPORU**  **(*Bilimsel Rapor*)**  **PROJE NO :116F130**  **RAPOR NO :3**  **RAPOR DÖNEMİ : 01/09/2018 - 01/03/2019**  **PROJE YÜRÜTÜCÜSÜ :Susumu Tanabé**  **BİLİMSEL RAPORDA OLMASI GEREKEN BİLGİLER**   1. Dönem içinde projeyle ilgili bilimsel ve teknik gelişmeler proje planı ile karşılaştırılarak verilmeli, elde edilen veriler ile varılan ara sonuçlar, varsa materyal, yöntem ve kapsam değişikleri belirtilmeli ve tartışılmalıdır. 2. Dönem içindeki idari gelişmeler (yardımcı araştırıcı ve personel değişikliği, ek süre, yürütücünün kurum değişikliği ve varsa diğer destekleyen kuruluşlarla sürdürülen işbirliği, vb. konularındaki bilgiler) verilmelidir. 3. Proje çalışmaları kabul edilen çalışma takvimine uygun yürümüyorsa gerekçeleri açıklanmalıdır. 4. Bir sonraki dönem içinde yapılması planlanan çalışmalar (öneri formundan farklı bir durum oluşmuş ise) belirtilmelidir. 5. Destekleyen diğer kuruluşlarla ilgili sorunlar var ise ayrıntıları ve çözüm önerileri sunulmalıdır.   **Bilgi Notu:**  - TÜBİTAK tarafından kabul edilebilir geçerli bir mazeret bildirilmeksizin; proje gelişme raporlarının sözleşmede belirtilen tarihlerde, proje sonuç raporlarının ise, sözleşmede belirtilen proje bitiş tarihinden  itibaren 2 (iki) ay içinde gönderilmemesi halinde, ilgili rapor dönemine ait Proje Teşvik İkramiyeleri (PTİ) ödenmeyecektir.  - Proje ekibi tarafından, TÜBİTAK desteği ile yürütülmekte/sonuçlandırılmış olan projeler kapsamında yapılan yayınlarda [makale, kitap, bildiri (sözlü sunum/poster sunum), tez, yayılım vb.] proje sözleşmesi ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği (AYEK) gereğince ilgili proje numarası ile birlikte TÜBİTAK desteği belirtilmelidir.  **-**03/11/2012 tarihinden sonra sonuçlanan projelerde, projelerin yürütücü ve araştırmacılarını ödüllendirmek amacıyla Proje Performans Ödülü (PPÖ; ppo.tubitak.gov.tr) uygulamasına başlanmıştır. Bu uygulamaya paralel olarak proje çıktılarının değerlendirilmesi de ARDEB Proje Takip Sistemi (ardeb-pts.tubitak.gov.tr) üzerinden yapılmaktadır. Bu kapsamda projenize ait çıktıların PTS'ye yüklenmesi önem taşımaktadır. |

**BİLİMSEL GELİŞME RAPORU EK SAYFASI**

(Proje No:116F130.)

**(Her madde için gerektiği kadar alan ve ek sayfa kullanabilirsiniz)**

|  |
| --- |
| **1.** **Dönem İçinde Projeyle İlgili Bilimsel ve Teknik Gelişmeler**  “Monodromy of Period integrals associated to hypersurfaces in toric varieties via Mellin-Barnes integrals’ (Yazar=S. Tanabé) adlı bir önbaskısında karmaşık boyutu birden büyük olan bir Gorenstein konisi tarafından belirtilen hiperyüzeyler için periyot integrallerinin monodromi davranışını inceledik. “Mellin transforms of period integrals associated to non-degenerate complete intersection” (Yazar=S. Tanabé) adlı önbaskısında çok değişkenli periyot integrallerinin Mellin dönüşümünün kutuplarının (dik vektörlerin diskriminantından verilen sonsuz tane hiperdüzlem) ve varyetenin kohomoloji grubunun melez Hodge yapısının alakasını inceledik.  **İP ‘A’** ‘cebirsel varyetenin melez Hodge yapısının periyot integrallerinin asimptotik davranış ile münasebetlerinin ortaya çıkarılması’ konusunda aşağıdaki sonuçları elde ettik (“Mellin transforms of period integrals associated to non-degenerate complete intersection” adlı önbaskısında). Sonuç tam olarak PY’ye aittir.    Bazı dejenere olmayan, afin, tam kesişim sınıfları için, özellikle de ‘simpliciable’ sınıflar için, periyot integrallerinin Mellin dönüşümlerini hesapladık. Afin varyetenin Hodge yapısını belirleyen topolojik veriler yardımıyla, Mellin dönüşümünün kutuplarının yapısını ortaya çıkardık. Periyot integralleri ile Horn ve Gel’fand-Kapranov-Zelevinsky hipergeometrik fonksiyonları arasında ilişki kurduk.  X=CN ve X=(C\*)N  karmaşık varyeteleri ve S=Ck için, Xs={(x1,…,xN )ꞓ X: f1(x)+s1=0,…, fk(x)+sk=0} olacak şekilde bir f:X->S fonksiyonu olsun. F(x)=(f1(x),…, fk(x)) Danilov-Khovanski’nin tanımıyla dejenere olmayan, tam kesişim(complete intersection) veren polinomlar olsun. n de X0=n≥0 varyetesinin boyutu olsun. Boyutu N+k-1 olan Ws:={(x1,…,xN,y1,…,yk) ꞓ X×(C\*)k: y1(f1(x)+s1)+…+yk(fk(x)+sk)=0} hiperyüzeyine bakalım. XS ve WS varyetelerinin, gereğince inşa edilmiş torik varyetelerdeki kompaktlaştırılmaları *Xs* ve *Ws* için, Terasoma’nın (homojen durumdaki), Dimca’nın (yarıhomojen durumdaki), Mavlyutov’un (genel durumdaki) sonuçları, PHN-k(*Xs*) ve PHN+k-1(*Ws*) kohomolojilerinin ilkel kısımları arasında bir eşyapı dönüşümü olması gerektiğini söylüyor. Yakın geçmişte Terasoma, XS ve WS’nin torusta tanımlandığı durumda, bu eşyapı dönüşümünün afin versiyonunu elde etti. Bu ve benzeri tekniklerin etkin bir biçimde kullanılması, literatürde ‘Cayley tekniği’ adıyla anılıyor.  Bu çalışmada, Hodge yapıları arasındaki bu eşyapı dönüşümünü daha detaylı bir şekilde ele alıyoruz. Açmak gerekirse, XS’e bağlı periyot integrallerinin Mellin dönüşümlerini, eşyapı dönüşümü aracılığı ile ve Cayley tekniğini afin varyeteye uygulayarak hesaplıyoruz. Periyot integralinin Mellin dönüşümünü kullanmamızın sebebi, integral ya da diferansiyel denklem(Gauss-Manin bağlantısı=Gauss-Manin connection) temsillerine kıyasla, dejenere olmayan, tam kesişim varyetelerinin önemli özelliklerini görselleştirme açısından daha avantajlı olması. Bu durum C.Sabbah, D.Barlet, F.Loeser gibi yazarları, Deligne’in bir fikri ile de desteklenen periyot integrallerinin Mellin dönüşümlerini araştırma konusunda cesaretlendirdi.  Önbaskısının birinci kısmında F(x)’ye bağlı periyot integralini tanımlarken, tam kesişimin Cayley tekniğindeki işimize yarayacak özelliklerini hatırlatıyoruz. İkinci kısımda periyot integralini Mellin-Barnes anlamındaki genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon olarak yorumluyoruz. Böylece periyot integralinin, Horn tipi diferansiyel denklem sistemini sağladığını gösteriyoruz. Aynı zamanda her denklemin derecesi, bir tam kesişim varyetesinin Euler karakteristiği cinsinden ifade ediyoruz. Üçüncü kısımda periyot integralinin Mellin dönüşümünün kutuplarını, V.Batyrev tarafından verilen karışık Hodge yapısı cinsinden ifade ediyoruz.  Dördüncü kısımda önce Horn ve Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky’nin genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonları arasındaki ilişkiyi ortaya koyuyoruz. Sonrasında hesaplamalarımızın ayna simetrisine uygulamalarına bakıyoruz : Givental’ın projektif tam kesişim durumu ve çok ağırlıklı yarı-homojen(multi-weighted homogenous complete intersection) tam kesişim durumları. İkinci kısımdaki sonuçları kullanıp Berglund, Candelas ve arkadaşları tarafından ortaya atılmış bir hipotezi kanıtlıyoruz.  **İP ‘B** ‘ ‘Salınımlı integraller (oscillating integral) ve Stokes matrisi‘ konusu ile ilgili PY tarafından elde edilen sonuç aşağıdaki gibidir.  Kazushi Ueda ile güncel işbirliğimizde (S.Tanabé -K.Ueda, 2013), Stokes matrisinin faz fonksiyonunun (phase function) cebirsel torusda lineer fonksiyona eşit olduğu durum için tanımlanan salınımlı integraller için hesabının sonucu Dubrovin sanısını ispatlamak üzere uygulanmıştır.  Hazırlık aşamasındaki ‘Lefschetz yüksüğünün kesişim sayısı aracılığı ile salınım integrallerinin Stokes matrisi’(Stokes matrix of oscillating integrals via intersection number of Lefschetz thimbles) önbaskısında PY, salınım integrallerinin Stokes matrisinin, daha genel olarak sonsuzda dejenere olmayan Laurent polinomu faz fonksiyonu f(x) için tanımlı halini inceledi. Bu durumda, Kouchnirenko’nun klasik sonucuna göre, Laurent polinomu faz fonksiyonu f(x)’in kritik nokta sayısı, Newton poligonunun hacmine eşittir. Biz her kritik noktayı, f(x)’in yok olan homolojik deviriyle inşa edilmiş göreceli homoloji grubundan bir temsilci olan Lefschetz yüksüğü ile ilişkilendiriyoruz.  Bu makalede geliştirdiğimiz ana argüman, salınım matrisiyle bağıntılı Stokes matrisi S’nin monodromi verisinin bir kısmı olması fikrine ve S’nin, f(x) faz fonksiyonu için tanımlı yok olan devirlerin kesişim sayısı (intersection number of vanishing cycles) ile ifade edilebilmesi fikrine dayanıyor.  Bu süreci ifade etmek için kritik değerler üzerinde, yok olan devirlerin ayrıcalıklı tabanını (distinguished basis) ve zayıf ayrıcalıklı tabanını (weakly distinguished basis) tanımlamak için, bir sıralama ortaya koyuyoruz. Belirli tarayan yollardan oluşan bir küme, yok olan devirlerin ayrıcalıklı tabanının altında yatan çizgileri oluşturuyor. Asıl argümanımız, yok olan devirlerin kesişim sayıları ve Lefschetz yüksükleri arasındaki ilişkiyi kullanıyor. A.Gabrielov’un inşasına benzer bir yöntem kullanarak, ayrıcalıklı yok olan devirlerden zayıf ayrıcalıklı yok olan devirlere taban dönüşümünü tüm kesinliği ile betimliyoruz. Bu sonuç, Fano torik varyeteleri için olan Gamma sanısını(Galkin-Golyshev-Iritani, Duke Math.J. 2016) doğrulamak için kullanılabilir.   **İP  ‘C**‘  ‘Varyetenin tekil mahallerinin topolojik çalışması’ konusu ile ilgili PY tarafından elde edilen sonuç aşağıdaki gibidir.  "Monodromy of Period integrals associated to hypersurfaces in toric varieties via Mellin-Barnes integrals" ön baskısında aşağıdaki inşa elde edilmiştir.  Çalışılan hipergeometrik sistemin tekil mahallerini tanımlayan polinomun Newton politopunun köşe sayısını q ile gösterelim. GKZ A-HG sisteminden ortaya çıkan bir Horn tipi hipergeometrik sistemin tam desteklenen çözümleri uzayında q farklı bazların bir ailesini inşa ettik. Bir afin karmaşık uzayında Cn bir S kümesinin amipi, S kümesinin Rn içine Log gönderimi altında Log (S) görüntüsü olarak tanımlanır. Bir içbükey kümenin girintili konisi(recession cone) ötelemesi bu küme içinde bulunan koniler ailesinde maksimal elemandır.(kapsamaya göre)  Tekil mahallerin amipinin tümleyeni ile ilişkili girintili koni ve çözüm bazı arasındaki bu uygunluk Gel’fand-Kapranov-Zelevinsky'ye dayanan ikincil fan (secondary fan) inşasının önemli özelliklerini taşır.  İP 'D'de ‘ Periyot integrallerinin bütünsel monodromi grubunun tanımlanması’ periyot integrallerin tekil mahalleri D dışında analitik uzanımını kesin bir şekilde anlamak esastır. Böylelikle, yukarıdaki sonuç İP 'D'de merkezi rol alan monodromi formülünü oluşturmada temel olarak görülebilir.  **İP ‘D**‘ Periyot integrallerinin bütünsel monodromi grubunun tanımlanması’ konusunda aşağıdaki gibi sonuçlarını elde ettik.  P.R.Horja'nın ön baskılarını ve makalelerini analiz ettikten sonra PY Gorenstein konisi ile ilişkili periyot integrallerin analitik uzanımını tasvir eden oldukça genel karakterli bir formüle ulaştı. Elde edilen monodromi formülü Gorenstein konisi ile ilişkili bir torik varyete içindeki bir cebirsel hiperyüzeyin Picard-Lefschetz formülünün bir değişeni olarak yorumlanabilir. Tam kesişim durumlarının genelleştirilmesi benzer bir yolla yalnızca birkaç teknik argüman değişikliğiyle yapılabilir. Homolojik devir deformasyonununa dayanan var olan metotların aksine monodromiyi kohomoloji halkası aracılığıyla çalışma yöntemini teklif ediyoruz.  Amipin tümleyeninin bir bağlantılı bileşeni için diyelim ki M1 periyot integrallerini Log-1 (M1 ) ters görüntüsünde Cn içinde açık bir bölgede yakınsak olan GKZ A-HG serisi cinsinden düşünelim. Benzer bir şekilde amipin tümleyeninin diğer bağlantılı bileşenini düşünebiliriz, ona da M2 diyelim, ve periyot integrallerini bir açık bölge üzerinde Log-1 (M2 ) yakınsak olan  GKZ A-HG serisi cinsinden bulalım. İki açık bölge Log-1 (M1 ) ve Log-1 (M2 ) kesişmez ve bu her iki açık bölge tekil mahallerin D dışındadır. Log-1 (M1 ) 'in bir noktasını ve Log-1 (M2 )'nin bir noktasını D tekil mahaller ile kesişmeyen bir yol aracılığıyla birleştirmek mümkündür (Cn çevreleyen uzaynda tümleyici boyutu 2'dir).  Temel formülümüz Log-1 (M2 )'de yakınsak olan GKZ A-HG serisi ile Log-1 (M1 ) 'de yakınsak olan GKZ A-HG serisi arasındaki tam bağlantı matrisini ortaya koyar. Doğal bir sonuç olarak Log-1 (M1 ) 'da başlayıp Log-1 (M2 )'deki bir noktaya geçip son olarak tekrar başlangıç noktasına dönen kapalı bir yol için bir monodromi formülü (Picard-Lefschetz formülünün benzeşimi) elde ederiz.  Bu analitik uzanım prosedürünü takip etmekte kullanılan temel araca “Mellin-Barnes contour throw” denir, ve PY daha önceki makalesinde “Maximally reducible monodromy of bivariate hypergeometric systems,” Izvestiya Math.80:1 (2016) T.Sadykov ile bu prosedürü kullanmaya başladı. Bu analitik uzanım prosedürü F.C Smith, N.E.Nörlund tarafından tek değişkenli Pochhammer HGF için bağlantı matrislerini elde etmek amacıyla kullanılmıştır. Fakat bizim “Mellin-Barnes contour throw” metodumuz yukarıda belirtilen amiplerin M1 , M2 tümleyenlerinin bağlantılı bileşenleri ile ilişkili girintili koni(recession cone) ile bağlantılı olarak çok değişkenli durum ile ilgilenir.  Konunun temel referans kitabında "Mirror symmetry and Algebraic Geometry" (D.Cox-S.Katz) homolojik devirlerin monodromisinden bahsedilmemiştir. Bir yere kadar kohomolojinin monodromisi üzerinde durulmuştur. Yani GKZ hipergeometrik fonksiyon olarak temsil edilen periyot integralleri. Bu yüzden sonucumuz cebirsel geometriciler tarafından sunulan ayna simetrisiyle alakalı ana yönde bir açındırma olarak anlaşılabilir.  A-hipergeometrik fonskiyonun A-matrisi bir Gorenstein konisi verdiği durumda buna karşılık gelen Stanley-Reisner halkasını GKZ A-HGF'nin bazı olarak kullanabiliriz. Özellikle, A-matrisi bir yansımalı Gorenstein konisi verdiğinde Stanley-Reisner halkası pürüssüz izdüşümsel torik varyetenin kohomoloji halkasını onun alt halkasıdır çıkarımını yapabiliriz. Bu durum ilişkili Calabi-Yau varyetelerinin periyot integrallerinin monodromisini tarif etmede oldukça kullanışlı olduğunu yukarıda ifade edilen analitik uzanımı prosedürde iddia ediyoruz.  B.Borisov - R.Horja ufuk açıcı makalelerinde, torik varyeteler için X periyot integrallerin analitik uzanım metodunu Mellin-Barnes integral temsilinin analitik uzanımı yöntemi aracılığıyla kullandılar. Böylelikle X’in ayna simetrisi Y üzerindeki tutarlı demetlerin istisnai topluluğun Foruier-Mukai dönüşümüyle karşılaştırmak üzere bağlantı matrislerini hesapladılar. Bu dönem içinde bazı Calabi-Yau varyeteler için bu yöntemi uygulamayı çalıştık.  **İP ‘E**‘ ‘Monodromi grubunun aritmetikliği’ konusunda aşağıdaki sonuçları elde ettik.  PY yönetim altında Mutlu Koçar (YL Bursiyer, 15.04.2017 -14.10.2018) YL tez içinde aşağıdaki sonuçları elde etti.  İşbu YL tezinin amacı, bazı özel koşulları sağlayan genel üçterimli cebirsel denklemin (trinomial algebraic equation) çözümlerini genelleşmiş hipergeometrik fonskiyonlar aracılığıyla tavsir etmektir. Bir cebirsel fonskiyonun orijin civarındaki kesirli kuvvet serisini bulmak için kullanılan Newton-Puiseux algoritması açıklanmıştır. Fakat bu algoritma, bir cebirsel fonksiyonun tüm çözümlerini elde etmemize olanak tanısa da, yüksek dereceli cebirsel fonksiyonlarla ilgilenildiğinde Newton-Pusieux algoritmasının uygulanması yüksek dereceli terimler yüzünden zor bir hal almaktadır. Bu tezde genel üç terimli bir cebirsel fonksiyonun çözümlerinin Mellin dönüşümü tasvir edilmiştir. Dahası, böyle bir dönüşümle gamma fonksiyonu arasındaki ilişki çalışılmıştır. Bu ilişki yardım ile ters Mellin formülünden ortaya çıkan genel üç terimli cebirsel fonksiyonun çözümleri incelenmiştir. Tezin son kısmında, Mellin dönüşümün argümanı ve Newton-Puiseux algoritması verilen genel üç terimli özel ve doğal koşulları sağlayan cebirsel fonksiyona uygulandı ve elde edilen sonuçları karşılaştırıldı. Mellin dönüşüm ifadesi bir tür hipergeometrik denklemi sağlar ve onun analitik uzanımını bu integrali kullanarak gerçekleştirmek mümkün olacak. Sonuç olarak elde edilen monodromi grubunu örgü grubunun temsili (braid group representation) olarak anlaşılmasının mümkün olacağını iddia edebiliriz. Bu monodromi grubunun simetrik grup Sn olduğunu zannedilir ve bu grubun temel grubunu bir temsili olarak farz ederek Galois grubu tarifinden daha ayrıntılı topolojik bir betimleme elde etmemiz mümkün olacak.  Delsarte varyete durumunda, Hodge teorisini kullanarak, periyot integralinin monodromi grubuna ait hermisyen kuadratik değişmezinin işaretini (signature of the Hermitian quadratic invariant) de somut olarak hesapladık ve dolaysıyla monodromi grubunun hangi Lie grubu içinde (örneğin bir simplektik grubu) olduğunu tespit ettik. Bu sonuç aritmetiklik problemine temsil teorisini uygulamak üzere lüzumlu bir aşama olarak anlaşılmaktadır. Bu problemin çözümü için ‘pingpong lemma’ adlı tekniğin kullanılması neredeyse çağdaş grup teoresine göre tek yoldur.  **İP ‘F**‘ PY doktora öğrencilerinden birisi (A. Gündüz) ile tezin bir kısmı olarak sonucunu sunan ‘On an effective method to construct curves approaching to the asymptotic critical value set of a polynomial map’ adlı makaleyi hazırlarken bazı yeni örnek hesaplamalarını da makaleye ekledik. Bu makalede bir polinom tasvirinin sonsuzdaki çatallaşma kümesine (bifurcation set at infinity) yaklaşan analitik eğriyi inşa etmek üzere etkili bir metodu (eğriyi veren parametrelerin sayısı yeterince az olduğundan dolayı) önerdik. Bu problem sadece cebirsel geometride değil, bilgisayarlı bilimlerde de uygulaması mümkün olan bir konudur.  Bir polinom fonksiyonun kritik noktası, fonksiyonun gradiyentinin sıfır olduğu noktalardır. Fonksiyonun bu kritik noktalarda aldığı değerlere ise fonksiyonun kritik değerleri denir. Böylece fonksiyonun çatallaşma kümesi fonksiyonun kritik noktalardaki değerleri ve sonsuzdaki kritik noktalarının birleşimidir. Eğer bir polinomunun kritik noktaları hepsi sonlu bölge içinde kalıyorsa bu polinom evcil (‘tame ’) denir (S.A. Broughton ‘Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces’ Invent.Math. 92,1988). Biz bu makalede, evcil olmayan polinom fonksiyonların çatallaşma kümelerini anlamak için bir eğri inşaat ediyoruz. Öyle ki belirli koşullarla verilecek olan bu eğri yardımıyla fonksiyonun kritik noktalardaki değerlerini elde ediyoruz.  Bu işlemler için torik geometrinin araçlarını kullanıyoruz. Polinom fonksiyonun terimlerinin derecelerini vektör alarak bu vektörlerin ürettiği lineer uzaya bakıyoruz. Özel olarak her bir yüz(face) içinde orijini ve pozitif lineer alt uzayı (octant) içeren ama sınırda olan yani başka bir face tarafından içerilmeyen yüze ‘bad face’ diyelim. İncelememizde görüyoruz ki fonksiyonumuzun asimptotik kritik değerlerini belirlemek için bad face belirleyen vektörlere karşılık gelen fonksiyonu incelemek yeterli olacaktır.  Biz bu makalede Zaharia’nın makalesinde fonksiyonun asimptotik kritik değerleri için kullandığı Torik geometriyi ve Z.Jelonek ve K.Kurdyka’nın asimptotik kritik değerlere yaklaşan eğriyi etkili biçimde kullanıyoruz.  Sonuç olarak bu makalede iki noktada özgünlük arıyoruz. İlk olarak Dias, Tanabe, Tibar makalesindeki (2017) kapsamanın tersine biz ‘bad face’ üzerindeki tüm kritik değerlerin asymptotik kritik değer olduğunu gösteriyoruz. İkincisi ise M.Tibar böyle bir eğriyi 3601 katsayı ile inşaa ederken biz verdiğimiz bu yeni yöntemle bunu çok az (örneğin 9) katsayı ile veriyoruz. |
| **2.** **Dönem İçinde İdari Gelişmeler**    Projede çalışanların durumu aşağıdaki gibidir:  DS. Bursiyer, Can Ozan Oğuz 18.10.2018-  D. Bursiyer, Turgay Akyar 18.10.2017-  YL Bursiyer, Berkan Üze 18.10.2018 -  L. Bursiyer, Kaan Bilgin 01.06.2018-  Projeye önceki dönemde katılan kişiler  DS. Bursiyer, Mustafa Hakan Güntürkün 15.04.2017-08.10.2018  D. Bursiyer, Abuzer Gündüz 15.04.2017 -15.10.2017  YL Bursiyer, Mutlu Koçar 15.04.2017 -14.10.2018  Proje kapsamında 2018 Ekim ayından beri her iki haftada bir Cumartesi günü araştırma seminerlerini düzenledik. Seminer buluşması genelde iki veya üç farklı konuşmalardan oluşur. Konuşma konuları aşağıdaki gibidir: Pochhammer Hipergeometrik fonksiyonunun monodromisi, Picard-Lefschetz teoremine giriş (S. Tanabé, B. Üze), Fuchsian groups, Riemann surfaces (K.Bilgin), Torik geometrinin temelleri (T.Akyar), Temel grup ve (has)örgü grup (Can Ozan Oğuz). GSÜ, Koç, Yeditepe, Boğaziçi, MSGSÜ gibi İstanbul daki YL veya doktora programda okuyan birçok öğrenci de seminere sürekli katılıyorlar.  YL ve L öğrencileri (M.Koçar, B.Üze, K.Bilgin ve diğerleri) için her hafta bir gün boyunca PY yönetimin altında seminerler düzenledik (2017 Hazirandan beri). Araştırma konuları aşağıdaki gibidir: Cebirsel fonksiyonun topolojisi ve analizi. Riemann yüzeyinin topolojisi ve analizi. Örgü ve Torus düğümü.   * YA Oğuzhan Kaya 12-15.09.2018 tarihinde O Instituto Superior Técnico, Lisboa ile birlikte GSÜ bünyesinde ‘Mathematical Topics in Quantization’ adlı bir çalıştayı düzenledi.   <http://math.gsu.edu.tr/2018workshopgeomquant.html>  Çalıştay sırasında aşağıdaki konuşmalar vuku buldu.  Brian C. Hall (University of Notre Dame) Segal–Bargmann transform for unitary groups in the large-N limit.  Mauro Spera (Università Cattolica del Sacro Cuore) Geometric Quantization, Landau Levels, Helicity and the HOMFLYPT Polynomial.  Kadri İlker Berktav, (ODTÜ) An Introduction to Geometric Quantization  Romero Solha, (The Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro) Real geometric quantization of K3 surfaces.  Roberto Paolettti (Università di Milano Bicocca) Equivariant Asymptotics of Szegö kernels under Hamiltonian U(2) and SU(2) action.  Joachim Hilgert (University of Paderborn) The quantum-classical correspondence of resonant states for hyperbolic surfaces.   * D. Bursiyer, Turgay Akyar 20.10.2018 ‘Random Real Algebraic Curves’ adlı bir konuşmayı AGNT XXVII kapsamında Boğaziçi Ü. IMBM de verdi. * PY Susumu Tanabé 17-19/12/2018 tarihinde Kiyoshi Takeuchi (Tsukuba Üniv.), Kazushi Ueda (Tokyo Üniv.)   ile Tokyo Üniversite bünyesinde ‘ Hypergeometric functions and Mirror symemtry ’ adlı bir  uluslararası etkinlik düzenledi.  <https://sites.google.com/view/hgms2018/>  Bu çalıştayın devamı olarak ikinci uluslararası konferansı 2019-2020 güz döneminde GSÜ bünyesinde düzeltme planımız var.  Çalıştay sırasında aşağıdaki konuşmalar vuku buldu.  Yoshiaki Goto (Otaru University of Commerce)  Monodromy of Lauricella's hypergeometric function F\_C I, II  Paul Horja (University of Miami)  Toric schobers and hypergeometric D-modules I, II  Hiroshi Iritani (Kyoto University)  Quantum D-modules and toric flips  Yohei Ito (University of Tokyo)  Fourier Transforms of Regular Holonomic D-Modules in Higher Dimensions I, II  Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo (Kobe University)  Quadratic relations of GKZ hypergeometric functions I, II  Hossein Movasati (Instituto de Matemática Pura e Aplicada)  B-model of mirror symmetry of non-rigid Calabi-Yau varieties  Fumihiko Sanda (Nagoya University)  Dubrovin conjecture and homological mirror symmetry  Susumu Tanabé (PY) (Galatasaray University)  Monodromy of GKZ A-Hypergeometric functions via Mellin-Barnes integrals I, II  Kazushi Ueda (University of Tokyo)  Gamma conjecture for Brieskorn-Pham singularities 25.01.2019 DS. Bursiyer, Can Ozan Oğuz ‘Diagrammatics of shifted symmetric functions’ adlı bir konuşmayı Brüksel, VUB bünyesinde gerçekleştirilmiş ASPECTS OF HIGHER REPRESENTATION THEORY: QUANTUM GROUPS AND CATEGORIFICATION adlı konferansta verdi.  * DS. Bursiyer, Can Ozan Oğuz geçen dönem verdiği konuşmalar (seminerler, ulusal sempozyum).   GSÜ Matematik bölüm semineri     21.11.2018 - Categorification and Heisenberg algebras  Atılım Üniversitesi Matematik Bölüm Semineri      28.11.2018 - An introduction to categorification     Nesin Matematik Köyü Aratatil Lise-Lisans-Lisansüstü Programı       28.01.2019 - 03.02.2019 - P-sel sayılara giriş   Mimar Sinan Üniversitesi Matematik Bölümü Öğrenci Semineri        26.12.2018 - Somut Cebire Giriş   31. Ulusal Matematik Sempozyumu - Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi         12.09.2018 - Heisenberg Cebirleri ve Kategorileştirme   * 21.02.2019 Galatasaray Üniversitesi bünyesinde, Mutlu Koçar   (YL Bursiyer, 15.04.2017 -14.10.2018) “ALGEBRAIC FUNCTIONS IN TERMS OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS” adlı YL tezini başarıyla savundu. Tez jürisi: Susumu Tanabé (PY), Alp Bassa (Boğaziçi Ü), Ayberk Zeytin (GSÜ). |
| **3.** **Proje Çalışma Takvimine Uygun Yürümüyorsa Gerekçeleri** |
| **4.** **Bir Sonraki Dönemde Yapılması Planlanan Çalışmalar**  **İP ‘A’** ‘cebirsel varyetenin melez Hodge yapısının periyot integrallerinin asimptotik davranış ile münasebetlerinin ortaya çıkarılması’ ile ilgili araştırma konusu olarak:  “Mellin transforms of period integrals associated to non-degenerate complete intersection” ön basımımızda önerdiğimiz inşa ile B.Dwork’un “Genelleştirilmiş Hipergrometrik Fonksiyonlar” makalesindeki inşayı karşılaştırmak. Özellikle Dwork’un çalışmasındaki ‘Modifiye Laplace dönüşümü’, ‘Laplace dönüşümünün cebirsel teorisi’ (‘Modified Laplace transform’, ‘Algebraic theory of Laplace transform’) başlıklı kısımlar, bizim periyot integrallerine olan yaklaşımımızın(salınımlı integralin Laplace dönüşümü) cebirsel kısmına (kohomolojik hesaplar) karşılık geliyor gibi görünüyor. Dwork cebirsel varyetenin topolojisini çalışmayıp, periyot integralini, kohomoloji-homoloji ikilisine başvurmadan, sadece güç serisi olarak ele alıyor. Yaklaşımı tamamen cebirsel, ve günümüzde Dwork’un bölüm halkası, Dwork kohomolojisi olarak anılıyor.  Önceki çalışmalara kıyasla “Period integrals associated to an affine Delsarte type hypersurface’ makalesindeki en büyük teknik değişiklik, söz konusu periyot integrallerin Griffths-Dwork yöntemi veya Gauss-Manin sistemi yerine Mellin-Barnes integral temsilini kullanması. Tam kesişim varyetesinin periyot integralini inceleyen yeni makalede de Griffiths-Dwork yöntemine göre benzer bir teknik değişiklik (Mellin-Barne integrali kullanma) ortaya çıkar ve Dwork ve öteki kişilerin araştırma sonuçlar ile kıyaslamalıdır.  Jingxue Fang’ın “Composition series for GKZ-systems” isimli ön basımında yazar, GKZ sistemi üzerinde bir süzüm (filtration) tanımlıyor ve bu süzümün ardışık bölümlerinin yarıbasit (semi-simple) olduğunu gösteriyor.  (Önceden A.Adolphson tarafından önerilen) Fang’ın tanımladığı süzüm ile, bizim Delsarte hiperyüzeyi ve dejenere olmayan tam kesişim varyetesi için tanımladığımız ağırlık süzümü (weight filtration) arasında şaşırtıcı benzerlikler var. Bu iki süzüm, farklı durumlarda ortaya çıkıyor: Fang’ın süzümü içbükey çokyüzlülerin konisiyle, bizimkisi Mellin-Barnes integralinin kutuplarıyla ilişkili. Bu iki süzüm arasındaki benzerliğin sebeplerini anlamamız gerek.  **İP ‘B** ‘ ‘Salınımlı integraller ve Stokes matrisi‘ ile ilgili araştırma konusu olarak salınımlı integralin Mellin-Barnes integral ifadesini kullanarak onun analitik uzanımını takip etmeyi  teklif ediyoruz. Şu ana kadar salınımlı integrallerin analitik uzanımı kuantum kohomolojisi veya Lefschetz yüksüğü ile belirtilen integral olarak, yani cebirsel varyetenin kohomolojisi veya homolojisi kullanılarak araştırılmış. Torik Fano varyetesi için salınımlı integralin Mellin-Barnes integral ifadesini sadece Gamma fonksiyonu yardımı ile elde ettik. Bu haliyle **İP ‘D** ‘ de periyot integralleri için geliştirilmiş tekniği, salınımlı integral durumuna uygulamanın da mümkün olduğunu zannediyoruz.  M.Hien tarafından giriş yapılan ‘hızlı eksilen homolojisi’ (rapid decay homology, Inventiones Math. 2009) ile bizim Lefschetz yüksüğü kullanımımızı karşılaştırmak düşünülebilir. Salınımlı integraller üzerindeki örgü grubu etkilerinin yok olan devirlerin kesişim sayıları (topolojik veri) yardımıyla tanımlanmadığı bir teori kurmayı hedefliyoruz. Özellikle, Galkin-Golyshev-İritani tarafından önerilmiş ve Dubrovin sanısının genelleşmesi olarak kabul edilen ‘Gamma sanısının’ (Duke Math.J., 2016) bazı torik Fano variyeteler için göstermeye çalışacağız.  Gamma sanısının formülasyonu açısından, S.Tanabé -K.Ueda 2013 ve “Period integrals associated to an affine Delsarte type hypersurface’ makalesinde elde edilen Stokes matrisine ilişkin sonuçların yeni uyarlanmış versiyonunu vermek de istenilebilir. Ayrıca Stokes matrisi ve **İP ‘D’** de elde edilen monodromi (Monodrominin Todd sınıfı ifadesi) arasında bir ilişki kurmak gereklidir.  **İP  ‘C**‘  ‘Varyetenin tekil mahallerinin topolojik çalışması’ ile ilgili araştırma konusu olarak:  T.Terasoma (‘Fundamental group of non-singular locus of Lauricella FC’) ön baskısında pürüssüz Xs'e karşılık gelen mahalin temel grubunun tam tasvirini saptadı. Bu taktirde, diskriminantal mahalin 2k örtüsü her koordinat düzlemine göre yansımaya olanak tanıyan bir reel hiperdüzlem ayarlamasına dönüşür. Terasoma bu reel ayarlamayı etkili bir yolla bir Salvetti karmaşık homotopik mahalle denkliği inşa etmek için kullanmış. PY ‘On monodromy representation of period integrals associated to an algebraic curve with bi-degree (2,2)’ Analele Stiintifice ale Universitatii Constanta, Seria Matematica vol. 25(1), (2017), makalede  yukarıda sözünü ettiğimiz Konstevich gerekçeli problemi k=2 , (n1,n2)=(2,2) durumunda yapısal olarak inceledik. Benzer araştırma genel k içinde Terasoma’nın sonuçlarını kullanarak denemektedir. Genel k için bu araştırma programının somut stratejisi şöyledir:  Terasoma’nın sonucu ve Mellin-Barnes integralinin analitik uzanım metoduna ek olarak Y.Goto tarafından elde edilen FC Lauricella hipergeometrik fonksiyonunun bütünsel monodromisinin kesin bir tarifini (Ann.Sc.Norm.Super. Pisa C.Sci. (5), 16, (2016). Hokkaido Math.J. 2019) kullanacağız.  Hiperdüzlem ayarlamalarının temel grupları, örgü gruplarına (braid groups) tekabul eder. Örgü grupları ve onların temsilleri hakkında henüz çözülememiş sorulara yakın geçmişte yeni yaklaşımlar geliştirildi. Bu yaklaşımlar, özünde, kategorileştirme (categorification) adıyla anılan program dahilinde yapılıyor. Örgü gruplarının vektör uzayları üzerindeki etkisi yerine, vektör uzaylarından daha zengin yapıya sahip lineer kategoriler üzerine etkilerine bakılıyor. Tek başına örgü grubunu çalışmaktansa, örgü grubunun bölümünden ortaya çıkan kimi yapıları çalışmak daha rahat. Bunların en önemlisi Hecke cebiri. Hecke cebiri gibi davranıp daha zengin yapıya sahip kategoriler ise literatürde Soergel ikili-modül kategorileri (Soergel bi-module categories) olarak geçiyor. Can Ozan Oğuz’un araştırma konusu olan Heisenberg kategorileri, Soergel ikili-modül kategorileri ile yakından ilişkili. Bir yandan örgü gruplarını anlamak için, bu yeni yaklaşımların nasıl kullanılabileceğini inceliyoruz.  Bu proje içinde en önemli problem olan **İP ‘D**‘ Periyot integrallerinin bütünsel monodromi grubunun tanımlanması’ konusunda ilerlemeye çaba göstereceğiz. Bu işlem Mellin-Barnes integralinin analitik uzanımına dayanarak yapılabilir. Çok değişkene bağlı periyot integralleri ile ilgili hipergeometrik fonksiyonların genelleştirilmesine emek vermeye devam edeceğiz. Onun için **İP ‘C**‘ deki konu A-diskriminant mahallerinin tümleyeninin temel grubunu (the fundamental group to the complement of A-discriminantal loci) ifade eden metodu geliştirmeye özel ağırlık vereceğiz. Mevcut yöntemleri analiz ettikten sonra, bunun için iyi adaylardan biri olan tropik geometrideki bazı yöntemleri, doğru ayarlamalarının tümleyeninin temel gruplarını bulmak için kullanmaya çalışacağız.  Periyot integrallerin torik varyetede tanımlı varyetelerle ilişkili global monodromi temsilini elde etmek amacıyla karmaşık analitik yaklaşımı ele alacağız. Periyot integralleri GKZ A-hipergeometrik fonksiyonlar olarak düşünüyoruz. Yöntemimiz daha önce A.Givental, S.T.Yau ve işbirlikçileri tarafından kullanılan tekniğin genelleştirmesini yapan J.Stienstra’nın elde ettiği hipergeometrik çözüm bazı sunumuna dayanıyor. Bu yöntem, politopun Stanley-Reisner halkası ve A-hipergeometrik fonksiyonların çözüm uzayı arasında bağlantı kuruyor. Ayrıca, GKZ hipergeometrik fonksiyonlarının Mellin-Barnes integral temsilinin analitik uzanımına dayanan P.R.Horja’ya ait bir monodromi hesabı yönteminin en önemli kısmının kesin ispatı geçen dönemde elde edildi. Bu elde edilen Picard-Lefschetz tarzı formülü kullanarak, Kontsevitch’in homolojik ayna sanısında önem taşan monodromi etkisinin, Todd sınıfının tarifinin geçerli olup olmadığını bazı torik hiperyüzey veya tam kesişimler (complete intersections) için çalışacağız.  Analitik uzanım işleminin esas adımı “Mellin-Barnes contour throw” olarak adlandırılan bir hüner içeriyor. Calabi-Yau varyeteleri için elde edilen durumlara birçok örnek daha ekleyeceğiz. Özellikle kohomoloji kafesinin (lattice of cohomology) tarifi belli olan K3 yüzeyleri durumuna ağırlığı vereceğiz.  Periyot integrallerinin analitik uzanımını çalışırken, cebirsel varyetenin kohomolojisinden faydalanıyoruz. Bu açıdan bizim yöntemimiz, K.Amoto, M. Yoshida vb uzmanların uyguladığı,homolojik devirlerin deformasyonu (Dehn döngüsü=Dehn twist) yönteminden farklı.Kohomolojik metot ve homolojik metot ile elde edilen sonuçların birbirine çevirilmesinde kullanılan bu iki farklı yaklaşımın arasındaki ilişkiyi kurmayı diliyoruz. Yakın geçmişte S.J. Matusbara-Heo(Kobe Üni.), yüksek boyutlu somut homolojik devir üzerinde tanımlanan A-GKZ HG fonksiyonunu, yakınsak bir seri aracılığıyla ifade etmeyi başardı (Yakınsaklık bölgesi için **İP ‘C’**yebakınız). Bu sonuçlar, periyot integraleriyle ilgili homolojik ve kohomolojik yaklaşımların arasında bir bağ kurmaya yönelik ilk adımlar olarak kullanılabilir.  **İP ‘E**‘ ‘Monodromi grubunun aritmetikliği’ konusunda aşağıdaki problemleri incelemelidir.  S.Tanabé 2004, S.Tanabé-K.Ueda 2013 çalışmalarda Batyrev-Borisov yapısına göre izdüşümsel uzayda ayna emsali olan (ayrıca ağırlıklı izdüşümsel uzayda genel Calabi-Yau) afin torik tam kesişim varyetelerinin periyot integrallerinin bütünsel monodromi grubunu somut olarak hesapladık. Aslında, bu monodromi gruplarının her biri simetrik veya antisimetrik kuadratik form ile tanımlanan reel bir Lie grubundaki bir ayrık gruptur. İlginçtir ki; bu kuadratik form, karşılık gelen varyetenin yok olan devirlerinin kesişim matrisi formuna denk gelir. Şimdi soru bu monodromi gruplarının aritmetik olup olmadığıdır. Yani Lie grubunun (Ayrı grup tanımına göre) tam sayı katsayılı kısmının bizim monodromi grubumuzu bir sonlu indeksli alt grup olarak barındırıp barındırmadığıdır. Bu Delign-Mostow tarafından 1986'da daha yüksek genuslu cebirsel eğrinin periyot integraline denk gelen Lauricella hipergeometrik fonksionu için ortaya atılan soruya benzer bir sorudur.  Bizim hipergeometrik grubumuz tek değişkendeki Pochhammer hipergeometrik fonksiyonu (veya daha genelde birkaç değişkendeki GKZ hipergeometrik fonksiyon) için tanımlanmıştır ama bu HGF etrafındaki kombinatorik Lauricella HGF'den çok daha karmaşık olabilir. Dolayısıyla, monodromi grubunun Lie grubuna ve ayrık altgrubuna nasıl gömülü olduğunu çözmek Deligne-Mostow tarafından ortaya atılan durumdan çok daha zor olabilir. Bu, hem cebirsel geometride hem de ayrık gruplar teorisinde zorlu bir problem olabilir.  Güncel bir sonuç olan Ch.Brav-H.Thomas, Thin monodromy in Sp(4), Compositio Math. 150, No.3, 2014 makalenin, GL(4;Z)'in aritmetik olmayan, Sp(4;Z)'de reel mertebesi 2 olan birkaç indirgenemez monodromi altgrubunun varlığını, bu ayrık grupların Sp(4;R)'de Zariski yoğun olmalarına rağmen (S.Tanabé 2004 makalede elde edilen sonuçla beraber) teyit etmesi önemlidir: modern literatürde bu tarz aritmetik olmayan gruplar ince monodromi grupları (thin monodromy group) olarak adlandırılırlar ve uzmanlarca çok fazla ilgi çekici olmaktadırlar. Ayrıca, S.Tanabé-K.Ueda 2013 da elde edilenlerin arasında ince monodromi gruplarının tüm sınıfını bulmamız da muhtemeldir.  Örneğin, S.Tanabé 2004 makaledeki duruma uyarlanmış soruyu formüle edebiliriz. Bu durumda monodromi grubu karakteristik polinomları aşağıdaki gibi verilen iki adet n- mertebeli matrisler tarafından üretilmiştir:  n = 4 durumunda Ch.Brav-H.Thomas 2014 çalışma bu grubun Z\*Z/5Z ile eşyapılı olduğunu ortaya koyar ve n = 3 durumunda, Z/2Z\*Z/4Z (grup bir yansıma içermektedir) ile eşyapılı olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla aşağıdaki soruyu ortaya atmak doğaldır;  **Soru:** Monodromi grubunun n çift ise Z\* Z/(n+1)Z ; n tek ise; Z/2Z\*Z/(n+1)Z ile izomorf olduğu doğru mudur? Bir başka deyişle, n: çift ise monodromi grubu D =diskriminant mahalleri için onun tümleyeni temel grubuna (n=4 durumu için 5.dereceden denkleme tekabül edecek) eşyapılı bir temsil verir mi? Ch.Brav-H.Thomas 2014 çalışmasında "ping pong lemma" monodromi grubunu Z\*Z/5Z serbest çarpımı olarak betimlemede önemli bir rol oynamaktadır. Bizim durumumuzda bu lemma aynı zamanda kullanışlı da olabilecektir.  Mutlu Koçar yüksek lisans tezinde belirli bir sınıf cebirsel fonksiyonların Mellin-Barnes integral temsilini elde etti ve bu cebirsel fonksiyonların sağladığı hipergeometrik tip denklemi buldu. Bu Mellin-Barnes integral temsillerinden fayadalanarak bu cebirsel fonksiyonların bütünsel analitik uzanımlarını çalışmak mümkün olacaktır.  Muhtemel tekniklerden bir tanessi İP 'D'de geliştirilen “Mellin-Barnes contour throw”'dur. Özellikle bu cebirsel fonksiyonların diskriminantal tekil noktalar etrafında döndüklerinde monodromi davranışlarını elde etmek arzulanmaktadır. Bu tür bir tasvir bize cebirsel fonksiyonların monodromisinin örgü grubu temsilini verir, ki temelde bu grup Galois grubundan çok daha zengindir.  **İP ‘F**‘ Geçen yıl A. Gündüz ile hazırladığımız ‘On an effective method to construct curves approaching to the asymptotic critical value set of a polynomial map’ makalesini hakem değerlendirmesi haline getireceğiz. T. Akyar torik geometri veya genel olarak cebirsel geometri ile alakalı bir problem seçip (reel cebirsel geometri, kafes =lattice ile ilgili problem) onun üzerinde araştırma yapmaya başlayabilir. |
| 1. **Destekleyen Diğer Kuruluşlarla İlgili Sorunlar Varsa Ayrıntıları ve Çözüm Önerileri** |
| **6.** **Dönem İçinde Proje Kapsamında Yapılan veya hazırlanan Yayımlar ve Toplantılarda Sunulan Bildiriler**   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **Sıra** | **Çıktı türü** | **Yazarlar** | **Başlık** | **Yayın yeri** | **Durumu\*** | | **1** | **Makale** | **SusumuTanabé** | Period integrals associated to an affine Delsarte type hypersurface | Moscow Mathematical Journal | **Hakem değerlendirmesinde** | | **2** | **Makale** | Oğuzhan Kaya | Non-unitarity of the BKS transformation for symmetric spaces | Journal of Geometry and Physics | **Hakem değerlendirmesinde** | | **3** | **Makale** | Can Ozan Oğuz,  Henry Kvinge, Mike Reeks | The center of the twisted Heisenberg category, factorial P-Schur functions, and transition functions on the Schur graph | Journal of Algebraic combinatorics | **Yayınlanmaya kabul edildi** |   \* Hakem değerlendirmesinde, Yayınlanmaya kabul edildi, Yayınlandı |
|  |