TÜBİTAK

1. ÖZET ve ANAHTAR KELİMELER:

Proje Başlığı :

BAŞLIK : CEBİRSEL VARYETELER İLE İLGİLİ PERİYOT İNTEGRALLERİ

Proje Özeti

Homolojik devirler ve diferansiyel formları temsil eden kohomoloji sınıfları arasındaki eşleşme cebirsel bir varyetenin klasik olarak çalışmasında ortaya çıkar. Bu projede X_s olarak ifade ettiğimiz (karmaşık cebirsel bir simit veya torsal bir varyete üzerinde tanımlanan), $s \in S$ deformasyon parametrelerine bağlı - ki S bir düzgün karmaşık ve boyutu birden büyük olan bir varyetedir- bir karmaşık cebirsel varyete ailesini gözününde bulundurup yukarıda bahsettiğimiz eşleşmeyi "s" sembolü ile gösterdiğimiz deformasyon parametreleri değişkenlerinde çatallanmış fonksiyonlar olarak çalışıyoruz. Bir devir ve diferansiyel form arasındaki eşleşme formun devir üzerinde integrallenmesi anlamına geldiği için, bu fonksiyonlar literatürde **periyot integralleri** veya lif (fiber) integralleri olarak geçer. Sembolik olarak bu integral $I_\omega(s) = \int_{\gamma_s} \omega$ olarak gösterilir - $[\gamma_s] \in H_n(X_s, \mathbf{Z})$ bir **yok olan homolojik devir** dir ve düzgün, boyutu birden büyük bir X_s cebirsel varyetesi için $[\omega] \in H^n(X_s, \mathbf{C})$. Önemli bir örnek olarak $X_\kappa = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2; y^2 = (1 - z^2)(1 - \kappa^2 z^2)\}$ eliptik eğrileri ailesine ilişik olarak verilen, κ parametresine bağlı eliptik integrali veya başka bir deyişle Jacobi eliptik fonksiyonunun, $K(\kappa) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$, periyodunu verebiliriz.

Periyot integrali, $I_\omega(s)$, parametresinin belirli değerleri "s" için tekil olabilir veya çatallanma (dallanma) gösterebilir. Bu çatallanma davranışına **monodromi** denir ve monodromi Galois etkisinin yüksek boyutlardaki benzeridir. Periyot integrallerinin monodromi verisi düzgün cebirsel bir varyete olan X_s'nin yok olan homoloji devirlerine denktir. Bu şekilde, topolojik yapıya sahip olan devirlerinin monodromiyi analitik betimlemesini analitik nesneler olan periyot integrallerinden elde ederiz. Analitik monodromiyi genelde Picard-Lefchetz formülü ile çalışılan topolojik monodromi ile kıyaslamak bu şekilde mümkün hale gelir. Tekil s değerlerinin kümesi S uzayının bir tersboyutlu (diskriminant küme veya singular loci/ tekil mahalli isimli) cebirsel altvaryetesini, D, oluşturur. Monodromiyi çalışmanın, özellikle S'in boyutu ikiden büyük olduğunda D'nin tümleyenin temel grubunun oldukça karmaşık olduğunu göz önünde bulundurursak, hiç de basit olmayan D tekil mahalli hakkında kapsamlı bilgi gerektirdiği kesindir. Bu projede cebirsel bir varyeteye ilişik monodromi çevresindeki yukarıda bahsedilen durumdan matematikteki çeşitli sorulara uygulamak için yararlanmayı deneyeceğiz.

Yöntemimiz sayesinde periyot integraller **genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar** olarak görülebilir. Daha önceden bilinen sonuçlar yardımı ile (örneğin; GKZ hipergeometrik fonksiyonları adı ile bilinen, Gel'fand-Kapranov- Zelevinsky tarafından kurulan A-hipergeometrik fonksiyonlar teorisi), periyot integrallerin monodromisini global ve yerel durumda çalışabiliriz.

Periyot integrallerinin monodromisi hakkındaki tam bilgi Kontsevich'in homolojik ayna simetrisi sanısının önemli bir kısmının veya Dubrovin'in Fano varyetelerin kuantum kohomolojisinin Stokes matrisi hakkındaki sanısının doğrulanması gibi şahane sonuçlar elde etmemizi sağlar. Bu nedenle, projemiz çağdaş cebirsel geometrideki merkezi problemler ile yakından ilgilidir.

Üç yıl sürecek projede hedeflediğimiz amaçlara Dr. İsmail Sağlam ve Dr. Oğuzhan Kaya gibi genç araştırmaçlar, doktora sonrası araştırmlar yapan katılımcılar, lisansüstü ve doktora öğrencilerini içeren ve ev sahibi kurumda oluşturulacak bir araştırma grubu ile ulaşmayı planlıyoruz. Alanlarında uzman davetlilerin katılacağı seminerler ve uluslaarası konferanslar düzenlemeyi planlıyoruz. Belirtmek isteriz ki bu projenin amacı cebirsel geometri ve ilgili alanlardaki analitik yaklaşım sahasında faaliyet gösteren genç araştırmaçları teşvik etmektir. Lisansüstü ve doktora öğrencilerine yönelik derslere ve seminerlere özel önem verilecektir. Proje süresince diferansiyel denklemleri (dinamik sistemler, kısmi diferansiyel denklemler), karmaşık varyetelerin cebirsel temsillerini, örgü grubu ve doğrusal temsillerini, cebirsel varyetelerin yok olan homolojik devirleri gibi esaslı bir anlayış ile desteklenen ayrık grupları (monodromi grubu) kucaklamayı amaçlayan yeni bir matematiksel/bilimsel bilincin oluşmasına katkıda bulunmayı amaçlıyoruz.

Anahtar Kelimeler: cebirsel varyetelerin deformasyonu , yok olan devirler, monodromi, genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar, diskriminant küme, homolojik ayna simetrisi sanısı.

Project Title :

TITLE :PERIOD INTEGRALS ASSOCIATED TO ALGEBRAIC VARIETIES (PERIODS)

Project Summary

The coupling between homological cycles and differential forms representing cohomological classes appears in a classical setting of the topological study of an algebraic variety. In this project we consider a deformation family of complex algebraic varieties X_s (defined in an complex algebraic torus, or a toric variety) depending on deformation parameters $s \in S$ (with S a smooth complex variety of dimension ≥ 1) and study the above mentioned coupling as ramifying functions in deformation parameter variables "s". As the coupling between a cycle and a differential form means the integration of the latter along the former, these functions are known as **period integrals** (or fibre integrals) in the literature. Symbolically this integral can be expressed as $I_\omega(s) = \int_{\gamma_s} \omega$ where $[\gamma_s] \in H_n(X_s, \mathbf{Z})$: **vanishing homological cycle** and $[\omega] \in H^n(X_s, \mathbf{C})$ for a smooth algebraic variety X_s of complex dimension $n \geq 1$. As an important example, one can look at the elliptic integral= period of the Jacobi elliptic function $K(\kappa) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$ associated to the family of elliptic curves $X_\kappa = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2; y^2 = (1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)\}$ depending on the parameter κ.

For specific values of the parameter s the period integral $I_\omega(s)$ may become singular and show ramification i.e. branching behaviour. This ramification behaviour is called **monodromy** (higher dimensional analogue of Galois action). The monodromy data of the period integrals is equivalent to that of vanishing homological cycles of the smooth algebraic variety X_s. In this way we get an analytic description of the monodromy of the cycles (topological in nature) through period integrals (analytic objects). We shall compare this analytic monodromy with topological monodromy which has been usually studied by Picard-Lefschetz formula. The set of singular values s form a codimension one algebraic subvariety D (called discriminantal set or singular loci) of the ambient space S. The study of monodromy presumes the knowledge of nontrivial topology of the singular loci D, especially the dimension of S is higher than 2 in view of the essentially complicated fundamental group to the complement of D.
In this project we try to exploit the above mentioned situation around the monodromy associated to an algebraic variety in order to apply it to different questions in mathematics.

After our method, in some important cases, the period integral can be interpreted as a **generalized hypergeometric function**. With the aid of results known before (e.g. theory of A-hypergeometric functions introduced by Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky called GKZ hypergeometric functions) we shall study the monodromy of the period integrals in global settings (monodromy group) as well as in local settings.

Exact knowledge on the monodromy group of the period integrals allows us to establish spectacular results like verification of important part of the homological mirror symmetry conjecture by Kontsevich or that of Dubrovin's conjecture on the Stokes matrix of the quantum cohomology of Fano variety. So this project addresses also to one of central questions of contemporary algebraic geometry.

We plan to achieve the goals of our three year long project by a team consisting of young researchers (Dr. Ismail Sağlam, Dr. Oğuzhan Kaya), post-doctoral fellows and graduate students by forming a research group at the host institution. We organize regular seminars by invited specialists and plan to arrange international research conferences. It shall be underlined that the central aim of this project is the fostering of new generation of young researchers in the domain of analytic approaches in the algebraic geometry and adjacent fields. Special weight shall be attributed to courses/seminars addressed to graduate students (Master, PhD). We hope that through the conduct of this project we can contribute to the formation of new mathematical/scientific consciousness that embraces differential equations (dynamical systems, PDE), algebraic topology of complex varieties, braid group and its linear representations, discrete groups (monodromy group) supported by a pivotal structural understanding : vanishing homological cycles of algebraic variety.

Keywords: deformation of algebraic varieties, period integrals, vanishing cycles, monodromy, generalized hypergeometric functions, discriminantal set, homological mirror symmetry conjecture.

TÜBİTAK

2. AMAÇ ve HEDEFLER: Bu proje kuramsal bir proje olarak tasarlanmıştır. Amacımız topolojik yapıya sahip olan devirlerinin monodromiyi analitik nesneler olan periyot integrallerinden elde etmektir. Aşağıda açıklanacağı üzere, proje periyot integral ve hipergeometrik fonskiyonlar ile alakalı problemlere ışık tutacak ve bu konunun diğer konular ile ilişkilerini ortaya çıkaracaktır.

Bilimsel Amaç: Konu ve kapsam kısmında daha ayrıntılı ele alacağımız üzere, bu proje kapsamında şu problem öbekleri ortaya çıkmaktadır.

Konu A. Periyot integralleri modülündeki karışık Hodge yapısı (KHY). Orta kohomolojinin,$H^n(X)$, karışık Hodge yapısı hakkındaki teorinin yapısı ile n-boyutlu afin cebirsel X varyetesine ilişik periyot integrallerin uzayındaki yerel monodromi etkilerini betimlemek istiyoruz. Periyot integrallerin üstünde belirlendiği karışık Hodge yapısı ve [DS] makalesinde çalışılan Brieskorn kafesi üzerindeki Kashiwara-Malgrange süzümü arasındaki ilişkiyi açığa kavuşturmak istiyoruz.

Konu B. Salıngaç integralleri ve Stokes Matrisi. Periyot integralinin bir çeşit Fourier-Laplace dönüşümü olan, Lefschetz yüksük (thimble) devri δ üzerindeki salıngaç integralin, $J_\omega(\theta) = \int_\delta e^{-f/\theta}\omega$, derin geometrik ve analitik özellikleri hakkında çalışmalar yapmak. Özellikle Laurent polinomları sınıfı için verilen Stokes matrisinin hesaplanması cebirsel geometride ve matematiksel fizikte önemlidir. $J_\omega(\theta)$'nin Stokes matrisi ve $I_{\omega/df}(s)$ monodromisi arasındaki ilişkiyi net olarak ortaya koymak. Fano varyetelerinin kuantum kohomolojisi hakkındaki Dubrovin sanısını doğrulamak için Stokes matrisini kullanmak.

Konu C. Afin (veya torsal) varyetelerin bir deformasyon ailesi için tanımlanmış tekil mahallerinin (kritik değer kümeleri, diskriminant küme) topolojik çalışılması. Afin (veya torsal) varyetelerin bir deformasyon ailesi için tanımlanmış tekillik mahallerinin tümleyenin (complement) temel grubunu çalışmak. Temel grubun, üreteçler ve ilmekler cinsinden verilecek, mümkün olan en somut tasvirini bulmayı hedefliyoruz. Tekil mahallerinin alternatif bir betimlemesi olarak onun amibine (amoeba) bakabiliriz. Tekillik mahallerde hangi cins katmanlı izole olmayan tekilliklerin (non-isolated singular strata) ortaya çıktığını belirlemek. Tekil mahallerine teğet olan vektör alanları (logaritmik vektör alanları) hesaplamak.

Konu D. Periyot integralleri uzayının monodromi temsilinin betimlenmesi. Çok değişkenli genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların, özellikle bir cebirsel varyetenin periyot integrallerinden elde edilen hipergeometrik fonksiyonların sistematik bir betimlemesine başlamayı amaçlıyoruz. Global monodromi grup hipergeometrik fonksiyonun tekil mahallinin tümleyenin bir temsili (representation) olarak tasvir edilebilir. İlk olarak $X_s, s \in S$ cebirsel varyetelerinin bir deformasyon ailesine ilişik periyot integralleri ile uyumlu Pochhammer hipergeometrik denklemi, Horn hipergeometrik denklemi gibi denklemler saptayacağız. Daha sonra, periyot integrallerin monodromisini, bu adi/kısmi diferansiyel denklemler ailesinin çözüm kümesine etkisi ile açıklamaya çalışacağız. Elde edilen monodromi temsilini Konsevitch'in homolojik ayna hipotezi ile ilgili sanıların doğrulanmasında kullanacağız.

Konu E. Monodromi grubunun aritmetikliği. Konu D'de bahsedilen global monodromi grubunun aritmetik olup olmadığını belirlemek. Benzer şekilde global monodromi grubunun kafes (lattice) olup olmadığnı belirlemek.

Konu F. Periyot integrallerin dinamik sistemlere, hiperbolik Cauchy problemine, dalga yüzlerın topolojisine uygulamaları.

F1. Periyot integrallerin sıfırlarının ve bu sıfırların katsayılarının sayısı için keskin bir değer biçmeyi bulmak. Yukarıda belirtilen X_s bir düzlemsel cebirsel eğri olmak üzere, periyot integrallerin özel örneği olan Abelyen integrallerin monodromisini kullanarak düzlemsel, çokterimli bir dinamik sistemin limit devirlerinin sayısını (number of limit cycles) hesaplamak için iyi bir değer biçmeyi bulmak (Hilbert'in 16. problemi).

F2. Dalga yüzünün tekil katmanını (singular strata) betimlemek. Dalga yüzünün hangi çeşit izole/ızole olmayan tekilliklere (isolate/non-isolated singularities) sahip olabileceğini açıklamak. Dalga yüzünün tekil katman yakınlarındaki çatallanma özelliklerini, (dalga artımında Huygens ilkesi tarafından modellenen) doğrusal kısmi diferansiyel denklem için tanımlanan hiperbolik Cauchy denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını betimlemek.

Eğitsel Amaç: Proje ekibini oluşturan doktora sonrası araştırmacı ve lisansüstü/doktora öğrencilerin araştırmaya geçiş sürecini yönlendirmek. Konu hakkında, İstanbul genelindeki öğrencilerin katılabilleceği lisansüstü/doktora dersleri vermek, araştırma çalıştayı ve konferans düzenlemek. Bu proje evsahibi kurumun yeniden yapılanmakta olan matematik bölümünün araştırmacı niteliğini desteklemeyi ve bir bilimsel buluşma merkezi olmasını sağlamayı hedeflemektedir.

TÜBİTAK

3. KONU,KAPSAM ve LİTERATÜR ÖZETİ:

Jacobi eliptik integralleri ilk ve en önemli **periyot integral**lerindendir. Daha sonraları, 19. yüzyıl boyunca yüksek cinsi (genus) eğrileri üzerindeki 1-boyutlu devir integraller çalışıldı ve harmonik integraller ile teta fonksiyonları teorisinin yapılandırılması için temel destek oluşturuldu. 1., 2. ve 3. çesit integraller (E. Picard, S. Lefschetz) pürüzsüz bir cebirsel eğri üzerindeki Hodge yapısının çağdaş işaretler sisteminde $H^{1,0}, H^{0,1}, H^{1,1}$'a denk gelir. 1960'lı yıllarda Ph. Griffiths [Gr] cebirsel izdüşüm varyeteleri için periyot integrallerinin oldukça genel bir teorisini kurdu. Bu çalışmadan esinlenen P. Deligne, keyfi bir karmaşık cebirsel varyete (hem tıkız hem de tıkız olmayan, hem tekil hem de tekil olmayan) üzerindeki karışık Hodge yapısının (mixed Hodge structure) varlığının üzerine bir teorem kanıtladı. Tüm bu sonuçlar, kohomoloji üzerinde iki süzüm (filtration) açısından formüle edilmiştir: Hodge süzümü ve ağırlık (weight) süzümü. Bu projenin ilk amacı cebirsel bir karışık Hodge yapısının mukabil olan varyetenin kohomolojisi $H^n(X_s, \mathbf{C})$'nin periyot integralinin $I_\omega(s) = \int_{\gamma_s} \omega$ (s: deformasyon değişkeni, $[\omega] \in H^n(X_s, \mathbf{C})$, $[\gamma_s] \in H_n(X_s, \mathbf{Z})$) yerel analitik özelliklerini nasıl etkilediğini anlamak. Periyot integralinin yerel **monodromisi**nin özdeğerleri, Jordan formları ile ilgileneceğiz. Eğer cebirsel bir simit (cebirsel tor, $(\mathbf{C}^*)^n$) ya da tıkız varyetesi (izdüşüm varyetesi, ağırlıklandırılmış izdüşüm varyetesi, vs..) içinde tanımlanmış cebirsel afin varyeteler için kohomoloji düşünülürse onlar arasında büyük fark eder.

Homolojik devirlerin global monodromilerinin, yani monodromi grubunun, çalışmasına bu yaklaşımın ek bir genelliştirmesi olarak, periyot integrallerinin analitik uzanımı (analytic continuation) yardımı ile genel doğrusal gruba temsili (representation into the general linear group) çalışmayı öneriyoruz. Aşağıda belirtilen aslında [DM], [GKZ90], [Ta04], [TaU13] ve diğerleri tarafından 19. yüzyıldan beri kullanılmış olan iyi bilinen genel bir kaidedir: cebirsel varyetenin **"yok olan devirleri" (vanishing cycles)** için monodromi grubu varyete'ye denk gelen periyot integrallerinin monodromisi ile çakışır. Periyot integrallerinin monodromisini çalışmanın en az üç farklı yolu mevcuttur 1) monodromiyi homolojik devirler içinmiş gibi tanımlamak ve bu veriyi Picard-Lefschetz formülün yardım ile devirlerin kesişim sayısı (intersection number) olarak kullanmak, 2) doğrusal kismi türevli denklem (KTD) olarak Gauss-Manin sistemini çözmek üzere ve doğrusal kısmi türevli denklemin temel çözümlerinin bazı bazlarına göre monodromiyi elde etmek, 3) periyot integrallerinin Mellin-Barnes integralini düşünmek ve bir tamlama devrini homotopik olarak denk olan başka devre dönüştürerek analitik uzanımını hesaplamak [BH]. [STa16]'da, bu homotopik devir dönüşümü, 2-boyutlu integral devir için Mellin-Barnes çevre atışı (contour throw) diye adlandırılan, bazı iki değişkenli hipergeometrik denklemler (HGD'ler) için monodromi'nin "maksimum" indirgenebilirliğini (maximally reducible) göstermek için kullanıldı.

Konu A. Periyot integrallerinin modülü üzerinde karışık Hodge yapısı

Kohomolojinin karışık Hodge yapısı ve periyot integralinin yerel asimptotik davranışları ile olan ilişkisi, izole bir tekil hiperyüzey'in Milnor demetinin yok olan kohomolojisi (vanishing cohomology of the Milnor fiber for isolated hypersurface singularity) durumu için [Var]'da derinlemesine incelendi. 80'lerin ortalarında, yerel teori A. Varchenko, A. Khovanski, M. Saito gibi araştırmaçılar tarafından geliştirildi. M. Saito'nun karışık Hodge modülü teorisi bu ilişkinin neredeyse tam bir açıklamasını vermeyi başardı.

[Ta02]'da Proje Yürtücüsü quasihomojen tam kesişim varyete için (özelikle tümleyici boyut 2 olan cebirsel eğriler durumunda) kohomolojinin karışık Hodge yapısı ve periyot integralinin yerel asimptotik davranışları ile olan ilişkiyi incelemiş.

Global olarak, afin bir cebirsel varyete'nin karışık Hodge yapısı'nın kombinatorik tanımları Danilov-Khovanski [DK] ve Bartyrev [Baty] tarafından başlatıldı. Bu tanımlamada, konveks bir çokyüzlüyle ilgili kombinatorik dil (örneğin Ehrhart polinomu) önemli bir rol oynar. [DK] tarafından halihazırda belirtildiği gibi, afin bir hiperyüzeyin karışık Hodge yapısı Cayley yöntemi (Cayley trick) yardımıyla birkaç polinom tarafından tanımlanan **tam kesişim varyete (complete intersection variety)** durumuna genişletilebilir.

Öte yandan, [DS]'nin bir dizi makalesinde, yazarlar Newton çokyüzlüsüne göre bozulmamış bir f Laurent polinomuyla (Laurent polynomial f non-degenerate with respect to its Newton polyhedron) ilişkili Brieskorn kafesi (Brieskorn lattice) adında bir modül üzerinde iyi bir süzümün varlığını göstermiştir. Bu süzüme Newton süzümü denir ki bu Kashiwara-Malgrange süzümüne denktir. Kashiwara-Malgrange süzümü 1970'ler süresince, bir $s \mapsto f^s$ distribusyonu'nun analitik uzanımının temel bilgilerini kapsayan Bernstein-Sato polinomunun çalışmalaraıyla bağlantılı olarak sunuldu. Periyot integralleri anlamında, [DS]'de çalışılan Brieskorn kafesi $J_\omega(\theta) = \int_\delta \mathrm{e}^{-f/\theta}\omega$ (ω : bir diferansiyel form) salıngaç (oscillating) integrallerinin bir modülüne denk gelir, yani Lefschetz yüksük devri (Lefschetz thimble cycle) δ boyunca alınan $I_{\frac{\omega}{df}}(s)$ periyot integralinin bir çeşit Fourier-Laplace dönüşümü.

Konu B. Salıngaç integralleri (oscillating integrals) ve Stokes matrisi

80'lerin ortalarında F.Pham $|x| = \infty$'daki tekilsiz bir $f(x)$ polinomuyla ilişkili $J_\omega(\theta) = \int_\delta \mathrm{e}^{-f/\theta}\omega$ salıngaç integrallerinin sistematik incelemeyi başlattı. Temel amacı bir salıngaç integralinin asimptotik davranışı ile Lefschetz yüksük devirlerinin topolojisi arasındaki ilişkinin kurulumunu içeriyor. O zamandan beri salıngaç integralleri için Lefschetz yüksüklerinin cebirsel topolojisi geniş bir şekilde tanındı.

$J_\omega(\theta)$ integralindeki θ değişkeni kuantum fiziğindeki Planck sabiti h'nin soyut bir genellemesi olarak görülebilir. Durağan bir hiperbolik Cauchy problemine çözüm (geometrik optik) salıngaç integralleri cinsinden ifade edilebilir ve burada θ değişkeni dalga uzunluğunun rolünü oynar ($\theta \to 0$ yüksek frekanslı ultra viyole bölge). Bir salıngaç integrali üzerinde örgü grubu etkisi bir periyot integrali üzerinde monodromi etkisinin benzeri gibi görülebilir. Bir $\theta \in \mathbf{C}$ karmaşık değişkenli fonksiyon olarak salıngaç integrali $\theta = 0$'danbir düzensiz tekillikle (irregular singular) birlikte bir doğrusal türevli denklemi sağlar ve bu durum $J_\omega(\theta)$ integrali'nin Stokes fenomenini tetikler. Analitik uzanım işlemi $\theta \to \mathrm{e}^{\pi i}\theta$ ile, salıngaç integrali bir dönüşüme uğrar ve salıngaç integrallerinin farklı tiplerinin bir doğrusal kombinasyonuna ayrışır. Tüm bu doğrusal dönüşüm verilerinin birleşimi, **Stokes matrisi** diye adlandırılan, $\theta = 0$'da düzensiz tekillikle birlikte bir türevli denklemin bir çözüm uzayı için tanımlanmıştır, bu sebeple Stokes matrisi özellikle analitik karakterlerin. Salıngaç integralleri üzerindeki örgü grubu etkilerinin f ile ilişkili yok olan devirlerin kesişim sayıları (topolojik veri) yardımıyla tanımlanmandığı bir teori kurmayı hedefliyoruz. Aynı zamanda salıngaç integrallerinin global monodromi etkileri (Konu D) ile Stokes matrisini ilişkilendirmeyi deneyeceğiz. [DS]'de çalışılan Brieskorn kafesi üzerinde Newton süzümü (ağırlık süzümü olmadan) dikkate alınacaktır.

Berlin'deki ICM 98'de, B. Dubrovin bir Y Fano varyetesinin kuantum kohomolojisi için Stokes matrisinin Y üzerindeki tutarlı demetlerinin istisnai bir kolleksiyonu (an exceptional collection of coherent sheaves) için Gram matrisiyle aynı olmak zorunda olduğunu söyleyen bir konjektür önerdi. Aslında, bu konjektür Y üzerindeki tutarlı demetlerin (coherent sheaves) kategorisinin ve onun ayna karşılığı (mirror counterpart) X üzerindeki yok olan devirlerinin bir denkliğini tahmin eden Kontsevich'in homolojik ayna simetrisinin (homological mirror symmetry by Kontsevich) bir problemi gibi yorumlanabilir. Y'nin kuantum kohomolojisi X'in periyot integralinin bir Fourier-Laplace dönüşümü gibi anlaşılabilir.

Sonraları, [Guz] Fano varyetesi Y'nin izdüşüm uzayı olduğu durumdaki Dubrovin konjektürünü ispatladı. Proje Yürütücüsü Tanabé ise periyot integrallerinin yardımıyla bu konjektürün başka bir ispatını [Ta04]'te verdi. Bazı salıngaç integralleri için Stokes matrisinin bir hesabı ile ağırlıklandırılmış izdüşüm uzayı durumu için Dubrovin konjektürünü [TaU13]'de ispatladık. Şimdi sorun konjektürü başka Fano varyeteleri için doğrulamak, örneğin V.İskovskikh tarafından sınıflandırılmış17 tane 3-boyutlu Fano varyeteler için. Bu yönde ileriki araştırmaları takip edebilmek için, salıngaç integrallerinin üzerindeki örgü grubu etkilerinin f'ye karşılık gelen yok olan devirlerin kesişim sayılarının (topolojik veri) vasıtasıyla tanımlandığı bir teori kurmak gerekir.

Konu C. Afin (ya da torsal) varyetelerin bir deformasyon ailesi için tanımlanan tekil mahallerinin (kritik değerler kümesi, diskriminant küme) topolojik çalışması

Cebirsel varyetelerin bir deformasyon ailesi için tanımlanan tekil mahallerin topolojik karakterizasyonu deformasyon ailesinin global topolojik denkliğini anlamak için kritik bir rol oynadığından dolayı önemlidir. Ayrıca periyot integrallerinin global monodromileri ve analitik uzanımları (analytic continuations) için de esastır. Böylece, cebirsel varyetelerin bir deformasyon ailesinin topolojik denkliğini kontrol etmek için analitik bir metodumuz olur, yani, tekil mahallerin Horn-Kapranov uniformizasyonu, Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky tarafından önerilen A-diskriminant vs. Bir polinomun gerçek diskriminant mahallerinin tümleyeni (complement to the real dıscriminantal loci), genelde bağlantılı bileşenlerin bir birleşimine ayrışan bir gerçek afin uzaydaki bağlantılı olmayan Zariski açık kümelerini (disconnected Zariski open sets) verdiğini de hatırlatacağız.

Afin torsal varyete'nin deformasyonsu için, periyot integralleri, varyetenin tanımlama denklemlerinin Newton çokyüzlüsü yardımı vasıtasıyla tanımlanabilen Horn tipi diye adlandırılan hipergeometrik denklemi (ya da GKZ A-hipergeometrik denklemi [GKZ]) sağlar. Böylece, denklemin çözümünün bazı kombinatoryal tanımları vardır (yani periyot). Daha somut olarak, çözümlerin Mellin dönüşümü argümanı integrand formunun Hodge süzümünü tanıtan doğrusal fonksiyonlar tarafından ifade edilen Gamma fonksiyonu yardımıyla temsil edilir. Bu Horn-Kaparov uniformizasyonu diye adlandırılan diskriminant mahallerinin bir parametrelemesine yol açar [Ta07], [PTs]. İlk olarak A-diskriminant mahallerinin tümleyenin temel grubunu (the fundamental group to the complement of A-discriminantal loci) tanıtan metodu geliştirmeye ihtiyacımız var.

Diskriminant kümesinin iyi bir örtüsünün bir hiperdüzlem düzenleme (hiperdüzlem aranjman, hyperplane arrangement) haline geldiği durumlar vardır. Bu durumda, diskriminant mahallerin tümleyenin temel grubunun tanımlanması bir hiperdüzlem aranjmanının (genel olarak karmaşık aranjmanı) tümleyene indirgenir. E. Brieskorn [Br]'nin yansıma grubunu (reflection group) tanımlayan bağıntıların yansıtıldığı temel gruba sahip Coxeter yansımasıyla ilişkili Weyl grubunun E_{reg}/W düzenli orbitlerinin uzayını kuran metoduyla benzer bir metod takip etmeyi deneyebiliriz. Bu yaklaşım, diskriminant olmayan mahallerin temel gruplarının üretici ilmiklerini onların örtüleri=yansıma duvarları yardımıyla işleyen K. Saito [KSai] tarafından devam ettirildi.

Öyleyse soru şu "Monodromi çalışmaları için diskriminantın hiperdüzlem aranjmanına bu tarz örtü indirgemesi ne ölçüde geçerli ve kullanışlı? Weyl grubu yansımaları (gerçek ya da karmaşık) olmaksızın bile temel grubun kalıtsal özelliklerini umabilir miyiz?" Şunu da belirtmek önemlidir: Reidemeister-Schreier metodu örtü uzayının temel grubunu baz uzayı ile hesaplar, bizim sorumuz ise sonrakini önceki yardımıyla tanımlamanın mümkün olup olmadığını sorguluyor.

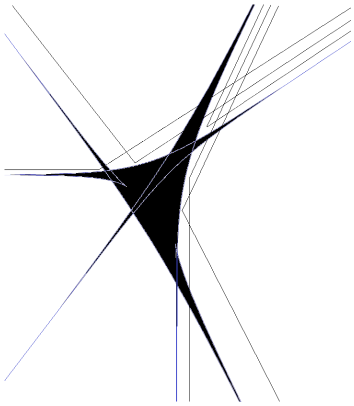
Tabakalı tekil mahaller için olduğu gibi, tekil mahallere teğet olan vektör alanlarını (logaritmik vektör alanları) kullanmak niyetindeyiz. Proje Yürtücüsü bozulmamış tam kesişim cebirsel varyetelerinin deformasyon ailesi (deformation family of non-degenerate complete intersection algebraic varieties) için olan bu teğet vektör alanlarını (logaritmik vektör alanları) somut olarak hesaplayan bir formül geliştirdi [Ta07]. Bu araştırmanın dalga yüzü (wavefront) (geometrik optikte, Konu F2'de işlenen hiperbolik Cauchy problemi) üzerinde tekil mahallerin çalışmasına doğrudan uygulamaları vardır.
Ek olarak, Ge'lfand-Kapranov-Zelevinski tarafından ortaya konan **amipin (amoeba)** diskriminant mahallerin topolojisinin çalışması için güçlü bir araç olarak hizmet edeceğini belirteceğiz. Bu durum, çok değişkenli genelleştirilmiş HGF bağlamında iyi çalışılmıştır [PST], [STa16], [STs]. Hala 2'den yüksek boyutlu durumda amipler yeterince araştırılmadı. Sorunun bu yönü bu projede yer alacaktır.

Konu D. Periyot integrallerinin global monodromi grubunun tanımlanması

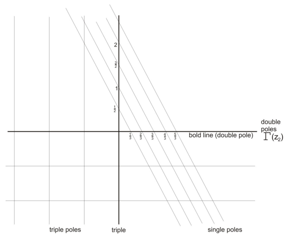
Bu projede çok değişkenli genel hipergeometrik fonksiyonlar (HGF), özellikle cebirsel bir varyetenin periyot integrallerinden elde edilen HGF için için global monodromi grubunun sistematik bir sunumuna başlamayı hedefliyoruz. Şöyle söylemek gerekirse D tekil mahallerinin tümleyenin temel grubunun global bir sunumunu hedefliyoruz. Monodromi HGF'lerin (periyot integralleri) uzayı üzerinde D'nin dışında kapalı ilmikler boyunca analitik uzanım yardımıyla etkir. Burada belirtmeliyiz ki Konu A da sadece yerel monodromi incelendi ve global monodromiyi elde etmek için tüm yerel monodromi verilerini yapıştırmamız gerekir.
Önce hipergeometrik denklemlerin bir sistemini oluşturuyoruz, yani **Pochhammer hipergeometrik denklemi (tek değişkenli), Horn hipergeometrik denklemleri (çok değişkenli)** cebirsel varyetelerin $X_s, s \in S$ bir deformasyon ailesi ile ilişkili periyot integralleri tarafından sağlanır. Periyot integrallerinin monodromisini bu adî/kısmî türevli denklemlerin çözüm uzayı üzerindeki etkisi vasıtasıyla tanımlamaya çaışıyoruz.
Çok az örnekten biri olarak [COFKV] makalelerinin bir serisini sayabiliriz ki orada bu konu çok boyutlu deformasyon uzayı ile birlikte Calabi-Yau varyetelerinin bir sınıfının periyot integralleri için incelendi. [COFKV]'de, yazarlar iki değişkenli uzayın bir boyutlu dilimine kısıtlanışını göz önünde bulunduruyorlar ve bir değişkenli hipergeometrik Pochhammer fonksiyonunun monodromi hesaplarına indirgiyorlar. Onların metodu sadece bu durum için kullanışlıdır. Periyot integrallerinin varyetenin tanımlama denkleminin Newton çokyüzlüsünün kombinatorik verisi ile verildiği gerçeğini göz önünde tutarak, HGF'nin monodromisi için daha sistematik bir yaklaşım oluşturulacak. Monodromi hesabının somut stratejisine gelince, onu "Metodlar" kısmında açıklayacağız.
Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky'nin [GKZ90] etkili makalesinden beri, periyot integrallerinin global monodromi grubunun rezonant olmayan $[\omega] \in H^n(X_s, \mathbf{C})$ için indirgenemez olduğu biliniyor. Çözümlerin analitik uzanımlarını takip etmek için, çözümlerin integralle sunumunu analiz edeceğiz. Özel olarak, çözümlerin Mellin-Barnes integralli sunumlarının avantajını vurgulayacağız. Horn tipindeki genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların Mellin-Barnes integralli sunumları $s = (s_1, \ldots, s_n)$ de dallanan bir fonksiyondur:

$$I_C(s) = \sum_{\tilde{z} \in C} Res_{z=\tilde{z}} \Big(\prod_{\alpha \in A} \Gamma(\mathcal{L}_\alpha(z)) s^z dz \Big)$$

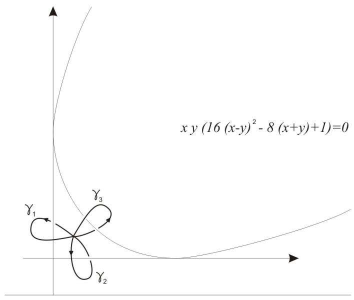
burada $\mathcal{L}_\alpha(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$'ye bağlı bir doğrusal fonksiyondur. Bu aslında Gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$'nin kutupları yüzünden oluşan yarı-grup yapısı (semigroup structure) ile birlikte integrand fonksiyonunun C kutupları boyunca bir çoklu residü (residue). Prensipte her periyot integrali farklı integral devirleri C üzerinde alınan bu tip fonksiyonların doğrusal kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadenin büyük avantajı çeşitli α indeksleri için, yok olan devirlerinin topolojisi üzerinde temel bilgiler taşıyan, $\mathcal{L}_\alpha(z)$ doğrusal fonksiyonlarının cebirsel X_s varyetesinin tanımlama fonksiyonunun Newton çokyüzlüsünün verisini kullanarak kombinatorik bir ifadesi olması gerçeğine dayanır.
Periyot integralinin Mellin-Barnes integralli sunumu [BH]'de homolojik ayna simetrisinin bazı özelliklerini kanıtlamak için başarıyla uygulandı. [BH]'nin esas katkısı periyot integrallerinin analitik uzanımlarının kesin bir tanımını içermesi ve X_s'nin ayna karşılığı (mirror counterpart) olan Y'nin kohomolojisi üzerinde bazı karakteristik sınıflarının etkisiyle uygunluğudur.
X_s varyetesinin bir tam kesişim olarak tanımlandığı durumda, yani çeşitli polinomların sıfır mahalli olarak verildiğinde, bu polinomların Newton çokyüzlülerinden başlayarak temel Gama çarpanını da, $\Gamma(\mathcal{L}_\alpha(z))$, hesaplayabiliriz. Bu metod Cayley yöntemi adıyla bilinir. Bu yöntemin önemi şunlardır: n-boyutlu çevre uzayda (ambient space) $f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0$ tarafından tanımlanan $n-k$ boyutlu bir tam kesişim varyetesinin kohomolojisini çalışmak, $n+k$ değişkenli bir $F(x, y) := y_1 f_1(x) + \ldots + y_k f_k(x)$ polinomu tarafından tanımlanan $n+k-1$ boyutlu bir hiperyüzeyi düşünmek. Her iki varyete üzerinde bağımsız tanımlanmış iki karışık Hodge yapıları ilişkilidir, ve hatta bazen izomorfturlar. Bu nedenle, bir hiperdüzlem için tanımlananların yardımıyla birlikte tam kesişim varyeteleri için periyot integrallerinin monodromi sunumunun oluşturulması için bir umut var.
Bu programın gerçeklenebilir ilk test durumu olarak, çoklu-ağırlıklandırılmış homojen izdüşüm uzayında (multiply weighted homogeneous projective space)tanımlı bir jenerik Y Calabi-Yau tam kesişimine bir ayna simetri karşılığı olan bir X_s tam kesişimi için periyot integrali ile ilgileneceğiz. Yukarıda bahsedilen $I_C(s)$ gibi dallanma fonksiyonunun monodromi çalışması olarakta uygulanabilen Y'nin yok olan devirlerinin monodromisini çalışmakta önemlidir.



Şekil 1: Bir diskriminant mahallerinin amipi



Şekil 2: Bir Calabi-Yau varyetesinin periyot integrallin Mellin-Barnes integrallerin kutuplar (C kutuplar)



Şekil 3: Bir diskriminant mahallerinin tümleyenin temel grubunun tanımlanması

Tam kesişim varyetelerinin bir sınıfının somut monodromi hesabı periyot integrallerinin Pochhammer HGF cinsinden ifade edildiği durum için [TaU13]'de yapıldı. Tor etkisi vasıtasıyla, varyetenin moduli uzayı bir boyutlu karmaşık varyeteye indirgenir, böylece Pochhammer HGF temsili periyot integrallerinin mümkün olan tüm durumlarını kapsar. [TaU13]'deki temel argüman global monodromi üzerinde Levelt teoreminin ([BeH]'de açıklanan) indirgenebilir temsil durumlarına bir genellemesidir. Temsilin çok değişkenli HGF durumuna genellemesi üzerinde çalışacağız.
Özel olarak, Kontsevich'in homolojik ayna simetrisi konjektürünün doğrulama sürecinde monodromi hesabının önemine vurgu yapacağız, özellikle tor varyetelerinde Calabi-Yau tam kesişim varyeteleri durumuna. Kontsevich, 94'te Zürihte [Konts] ICM'de yaptığı önerisi nasıl homolojik ayna simetrisi konjektüründeki kategorilerin iki tip otomorfizma gruplarının tanımlaması anlamına geldiğini belirtti. Burada bahsedilen iki tip kategorinin otomorfizması 1) yok olan devirlerin (vanishing cycles) monodromisi, yani bir tam kesişim varyetesi X_s'in periyot integrallerinin monodromisi ve 2) Calabi-Yau varyetesi Y üzerindeki tutarlı demetlerinin $D(Y)$ sınırlı türevli kategorisi (bounded derived category of coherent sheaves) üzerinde kohomoloji etkisinin cebirsel-geometrik hesaplamaları. 2)'deki kohomoloji etkisi tutarlı demetleri üzerinde mevcut olan bilgi ile hesaplanabilirken 1)'deki monodromi grubu esasen analitik karakterler taşır, bu nedenle transandant cebirsel geometri alanında veri olarak düşünülecek. Bizim projemiz konjektürün doğrulanmasında monodromi grup hesabını doğrudan içeriyor.

Konu E. Periyot integralleri'nin küresel monodromi grubunun aritmetikliği

.
[Ta04]'te (sırasıyla [TaU13]), Batyrev-Borisov'un [BB]'deki yorumundan sonra izdüşüm uzaylarına (sırasıyla ağırlıklandırılmış izdüşüm uzayında jenerik Calabi-Yau) ayna karşılığı (mirror counterpart) olan afin tor tam kesişim varyetelerinin periyot integrallerinin global monodromi gruplarını somut olarak hesapladık. Bu grup varyetelerin yok olan devirlerinin monodromi grubuna izomorf olarak bilinir ve böylece ayna simetri çiftinin simplektik kısmı üzerinde Lagrange'ların otomorfizmasının bir tanımlaması olarak verilebilir. Aslında bu monodromi gruplarının her biri simetrik ya da anti-simetrik kuadratik form tarafından tanımlanan gerçel bir Lie grubu içinde birer ayrık gruptur. Dikkat edilirse bu kuadratik formun karşılık gelen varyetenin yok olan devirlerinin kesişim matris formu ile çakıştığı görülür. Şimdi soru şu: acaba bu monodromi grupları aritmetik mi, yani Lie grubunun tam katsayı kısmı (tanım gereği ayrık bir grup) monodromi grubumuzu sonlu indeksli bir altgrup olarak kapsar mı? Bu yüksek genus cebirsel eğri için periyot integraline karşılık gelen Lauricella HGF için Deligne-Mostow [DM] tarafından sorulan soruya benzer bir sorudur.
Bizim monodromi grubumuz tek değişkenli Pochhammer HGF için tanımlanmıştır, fakat bu HGF civarındaki kombinatorikler, Lauricella HGF'den çok daha fazla karmaşıktır. Bu yüzden, monodromi grubunun Lie grubu içine nasıl gömülü olduğunu çözmek çok zordur ve onun ayrık altgrubu [DM] tarafından işlenen ayrık grubudan daha karşık olabilir. Bu hem cebirsel geometri hem de ayrık gruplar teorisinin (Fuchs gruplarının genellemesi) her ikisinde de ilgi çekici bir problem olabilir.
Tıkız olmayan bağlantılı yarı-basit (semi-simple) bir cebirsel Lie grubu G için, eğer ayrık altgrubu Γ'nun sonlu eşhacimi (covolume) varsa ($vol(\Gamma\backslash G) < \infty$), bu durumda bu altgrup Γ Zariski topolojisine göre Lie grubu G'da yoğundur. Böyle ayrık altgruplar çevreleyen Lie grubunun **kafesi (lattice)** olarak adlandırılır. Bu teoremi cebirsel geometriden gelen tıkız olmayan belirli cebirsel Lie gruplarına uygulamak için, ayrık altgrubun eşhacminin sonlu olduğunu göstermek (daha basit bir şekilde gösterilen Lie grubunun yarı-basitliğinin yanında) gerekir. Aslında Zariski topolojisine göre bağlantılı olan ve bir karakteri olmayan rasyonel sayılar cismi üzerinde tanımlı tıkız olmayan bağlantılı yarı-basit bir cebirsel Lie grubu için, aritmetik altgrubunun sonlu bir eşhacimi vardır. Bu sonuç [BHC] etkili makalesinde kuruldu.
[SV] makalesinde bir çifte karaketeristik polinomlar ile ilgili Pochhammer HG monodromi grubunun aritmetik olmak için yeterli bir koşul bulunmuştur. Ancak bu koşul [Ta04], [TaU13]'te hesap edildiği durumların çokluğuna uygulanmaz.
Şunu belirtmek gerekir ki $Sp(4, \mathbf{R})$'de Zariski yoğun ayrık gruplar olmasına rağmen $Sp(4, \mathbf{Z})$'de gerçel rankı 2 olan aritmetik olmayan $GL(4, \mathbf{Z})$ grubunun ([Tan04]'de elde edilen de dahil) bir kaç indirgenemeyen monodromi altgruplarının (HG grupları) varlığı yakın zamadaki bir sonuçta [BT] doğrulandı. Modern literatürde bu tip aritmetik olmayan gruplar **ince** (thin) monodromi grupları olarak adlandırılır ve uzmanlar arasında günden güne daha fazla ilgi çekmeye başlıyor. [TaU13]'te elde edilen ler arasında ince monodromi gruplarının tam sınıfını bulabilme ihtimalimiz de olasılıklar dahilindedir.

TÜBİTAK

Konu F. Periyot integrallerinin dinamik sistemlere uygulaması, hiperbolik Cauchy problemi, dalga yüzünün topolojisi

F1 Bir dizi makalede (bkz. [Tan02C]), polinom bir Hamiltoniyen'e ilişkin periyot integrallerin sıfırlarının adedini değer biçmek için denemeler yapılmışştır (sözkonusu polinom A_μ izole tekilliğinin versal deformasyonundan gelmektedir). Bir başka deyişle dağıtık Hamiltoniyen sisteminin sınır döngüleri hakkındaki Hilbert'in XVIıncı problemine makul bir cevap getirmek amaçlanmıştır. Aslında periyot integraller (μ değişkenli) hipergeometrik fonksiyonun polinom zarfı şeklinde ifade edilir. Paramaterlerin özel değerlerinde periyot integral bir Pochhammer HGF'una dönüşür. Böylece, Pochhammer HGF yardımıyla periyot integralin sıfırlarının adedini hesaplama imkanımız vardır. Lauricella HGF'nin görüntüsü Schwarz tasviri şeklinde bir yorumu ve monodromisi [DM] tarafından verilmiştir (aslında A_μ tekilliğine ilişkin Abelyen integraller, Lauricella HGFunun Viète tasviriyle ileri-itilmesidir). F. Klein'in (ve A. Hurwitz ile VanVleck'in) Gauss HGF için tanımlı Schwarz tasvirinin görüntüsünün örtü mertebesini sayan yöntemi genellenebilir mi? Bu konuda başarılı olursak sıfırlar için ideal bir kestirim elde edebileceğiz. Schwarz tasviri'nin alt/üst yarı sahadaki görüntüsü küre üçgenlemesi üretir ve sıfırların adedi sorusu bu üçgenleme/dörtgenlemenin (muhtemel örtüşmelerle) örtü mertebesiyle ilgilidir. Böylelikle, bir asırdan beri ciddi bir şekilde incelenmeyen bu kayda değer yöntemi çok değişkenli HGF'lere genelleme işini üstleniyoruz.

F2 Dalga yüzü (wave front) genel olarak kendi kendini kesen (self-intersection) ve topuk (cusp) tipi ya da kırlangıcın kuyruğu (swallow tail) tekillikleriyle birlikte bir tekil cebirsel varyetedir. Topolojisi genel olarak çok karışıktır ve türevli geometri teknikleri yardımı ile çalışılmıştır. [Ta99]'da, Proje Yürtücüsü cebirsel varyetelerin deformasyonu bakış açısı ile dalga yüzünü çalışmak için yeni bir metod önerdi. Şöyle ki dalga yüzü bir tam kesişim varyetesiyle ilişkili diskriminant mahallerin bir alt katman (sub-stratum) olarak tanımlandı. İzole bir hiperyüzey/tam kesişim tekilliğinin versal deformasyonunun diskriminant mahalleri "serbest bölen" (free divisor) olurlar, yani bölenin dışındaki analitik uzanımdan sonra teğet vektör alanları bir serbest modül (free module) oluşturan bir bölen. İzole tekilliklerin deformasyon uzayının çalışmasında serbest bölenlerinin (free divisors) önemi 1980'de K.Saito ve E.Looijenga tarafından kabul gördü. Bu projede dalga yüzünün topolojisini çalışmayı öneriyoruz. Problem dalga yüzü üzerinde olabilecek tekil katman (singular strata) çeşitlerini belirlemek. Serbest bölen (free divisor) taban teğet vektörlerinin (K.Saito kriteri [KSai80]) determinantı olarak verildiğinde, bölenin çalışması bu vektör alanlarının hesabına indirgenmiştir. Proje Yürtücüsü bir tam kesişim izole tekilliğinin diskriminantına teğet olan vektör alanlarını çalıştı ([Ta07],[Go]) ve bu tip tekilliklerle ilişkili Gauss-Manin sisteminin (periyot integralleri tarafından gerçeklenen doğrusal kısmi türevli denklem) tanımlanmasındaki rollerini aydınlattı.

4. ÖZGÜN DEĞER:

Konu A. Periyot integralleri modülündeki karışık Hodge yapısı.
[DS] makalelerinde Newton süzümü ve Newton çokyüzlülerine göre bozulmamış bir Laurent çokterimlisine ilişik Brieskorn kafesindeki Kashiwara-Malgrange süzümü arasındaki güzel bir ilişkinin saptanmasına rağmen, bu makaleler konunun yok olan devirler (veya salıngaç integralleri için Stokes fenomeni) ile ilgili olan monodromi grubu hakkında bilgi vermemektedir. Ağırlık süzümü (weight filtration) kavramı da bu makalelerde eksiktir. Kashiwara-Malgrange süzümünün Batyrev [Baty] tarafından açıklanan, bir afin varyetenin kohomolojisindeki Hodge süzümü aracılığı ile betimlenebilmesi oldukça muhtemeldir. Bu yaklaşım temelde ayrı kabul edilen çeşitli süzümler arasındaki ilişkiyi berraklaştıracak ve karışık Hodge yapısının asimptotik davranış ve periyot integrallerinin monodromisi üzerindeki etkiye ışık tutacaktır.

Konu B. Salıngaç integralleri ve Stokes matrisi.
Salıngaç integrali periyot integralinin Laplace-Fourier dönüşümü olarak düşünülebilir. Bu yüzden periyot integrallerinin monodromisi belli durumlardaki salıngaç integralleri için Stokes matrisinin hesaplanmasına yarar. Yok olan devirlerin monodromi temsili ve Stokes matrisi arasındaki örtüşmeyi incelemek sadece Karmaşık Analiz'de değil Cebirsel Geometri'de de önemli bir problemdir.
Bu örtüşmeye ilişkin araştırmaların bir uygulaması olarak Dubrovin sanısını bazı önemli durumlar icin doğrulamak istiyoruz. Bir Fano varyetesinin (V. Iskovskikh tarafından tasvir edilen 17 adet üç boyutlu Fano varyetesi), Y, kuantum kohomolojisinin Stokes matrisi, Y üzerindeki tutarlı demetler (coherent sheaves) ailesinin Gram matrisi ile aynı olmalıdır.

Konu C. Afin (veya torsal) varyetelerin bir deformasyon ailesinde tanımlanan tekillik mahalleri'nin (kritik değer kümeleri, diskriminant kümeler) topolojik calışılması.
Önemli olmasına karşın, afin/torsal varyetelerin bir düzgün deformasyon ailesi için tanımlanan mahallerinin temel grubu göreceli olarak az çalışılmıştır. [DL] ve [Lö] makalelerini bu araştırma istikametindeki ender makalelere örnek olarak zikredebiliriz. Temel grubu çalışmak üzere Horn-Karpanov uniformizasyonu ile tekillik mahallerinin örtülmesini (covering) göz önünde bulundurmak Proje Yürtücüsü tarafından sunulan yeni bir öneridir, ve şu ana kadar bu yöntemin bir kaydına matematik literatüründe rastlanmamıştır.
Amipler [PST] yardımı ile tekillik mahallerinin ayrıntılı olarak çalışılması ve kohomolojinin (bakınız Konu A) karmaşık Hodge yapısı ile ilgili sonuçlar da, [STa 16] ve [STs] gibi amipler yardımı ile belirlenmiş asimptotik yapıya sahip olan Horn HGF'lerin çözümlerinin boyutlarını saptayan yeni makaleler ışığında, dikkate değer önemdedir.

Konu D. Periyot integrallerin monodromi grubunun çalışılması.
Periyot integralleri veya eşit bir şekilde yok olan devirleri çalışmak Tekillik Teorisi'ndeki ve Cebirsel Geometri'deki merkezi sorulardan biridir. Konu C'de örgü grubu temsilinin temel grup yardımı ile çalışılmasının önemi gösterilmiştir. Bu projede monodromi grubuna yeni bir teknik yaklaşım öneriyoruz.
Mellin-Barnes integralinin analitik uzanımını kullanma denemesi oldukça yenidir ve neredeyse Proje Yürtücüsü [STa16] ve R. P. Horja [BH] isimli yazarlardan başka kimse bu yöntemi monodromi grubunun çalışılmasına uygulamamıştır.
Bunun bir uygulaması olarak, Kontsevich tarafından önerilen Calabi-Yau varyeteleri arasındaki homolojik ayna simetrisinin önemli durumlarını doğrulamayı amaçlıyoruz. Özgün hipotezdeki ifadeye iki farklı Calabi-Yau varyetesinin oluşturduğu çiftin ayna simetrisi (homological mirror symmetry) olarak bakılmalıdır. Yakın tarihli [TaU13] makalesinde [BB] tarafından inşa edilen ve Calabi-Yau ayna karşıtı olan bir Calabi-Yau varyetesi ile ilgili durumların benzer simetri çesitlerini saptadık. [TaU13]'te türetilmiş tutarlı demetler kategorisi ($D(Y)$) (derived category of coherent sheaves) ve $H_n(X, \mathbf{Z})$'de bulunan yok olan devirlere etki eden otomorfizmaların üreteçlerinin denk gelmesi (coincidence) çalışılırken, [BB]'de $h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(Y)$ Hodge sayılarının denk gelme düzeyinde iki X, Y varyetesinin arasındaki ayna simetrisi çalışılmıştir.
[TaU13]'te bulunan ana sonuçların kanıtı bir değişkene bağlı periyot integrallerin monodromi temsiline dayanır. Bu durumda, bu tip bir araştırmayı çok değişkene bağlı periyot integralleri ile ilgili hipergeometrik fonksiyonlara genelleştirmemiz gerekir. Bu gereklilik super-sicim kuramında (super-string theory) çalışılan ağırlıklı izdüşümsel uzayların (weighted projective space) bir çarpımında tanımlanan Calabi-Yau varyetelerini göz önünde bulundurduğumuzda ortaya çıkar.
Bu yüzden periyot integrallerin global monodromi grubu üzerindeki araştırma sadece teknik gelişim açsından değil, homolojik ayna simetrileri uygulamaları açısından da önem taşır.

Konu E. HGF'nin global monodromi grubunun aritmetikliği.
[Ta04] ve [Ta13]'te elde edilen hipergeometrik grup bir değişkenli Pochhammer HGF'si için tanımlanmıştır, ama bu HGF çevresindeki kombinatorik [DM]'de çalışılan Lauricella HGF'sinden çok daha karışıktır. Bu yüzden monodromi grubunun gerçel bir Lie grubuna nasıl gömülü olduğunu çözmek [DM]'de yapılandan zor bir iştir. [BT] örneğinde olduğu gibi, global monodrominin aritmetikliği sorusu her geçen gün geometricilerden daha fazla ilgi görmektedir. Bu cebirsel geometride ve (Fuchsyan gruplar teorisinin genelleştirilmiş hali olan) ayrık gruplar teorisinde zorlu bir soru olabilir.
Bu araştırma istikameti cebirsel geometri (kohomolojinin karışık Hodge yapısı, yok olan devirlerin monodromisi, diskriminant mahallerinin topolojisi) ve temsil teorisi ve Lie grupları teorisindeki değişik sorular arasında bir köprü oluşturabilir.
Konu F1. Periyot integrallerin sıfırlarının sayısı için keskin bir değer biçme.
Bir Abelyen integralin (özel bir periyot integrali) sıfırlarının sayısının kestirme bozulmuş (perturbed) bir Hamiltoniyen dinamik sistemdeki limit devrelerinin sayısını değer biçmek için gereklidir. Genelleştirilmis bir HGF'nin yardımı ile bir Abelyen integralin sıfırlarının sayısını hesaplamanın yeni bir yolunu öneriyoruz. Bir Lauricella HGF'nin - aslında A_μ 'ye ilişik Abelyen integrallerin tekilliği Lauricella HGF'nin Viète tasviri tarafından ilerletme (push forward) görüntüsüdür- Schwarz tasviri altındaki görüntüsünü betimlemeyi ve bunun [DM]'de verilen monodromisine kullanmayı deneyeceğiz. Eğer F. Klein'e (biraz sonra ya da A. Hurwitz, VanVleck) ait, Gauss HGF'si için tanımlanan Schwarz tasvirinin görüntüsünün örtme mertebesini (covering degree) sayan yöntemi genelleştirmeyi başarırsak sıfırların ideal bir kestirimini elde etmiş olacağız.
Önemli bir dinamik sistemler problemi için kullanılan bu hipergeometrik yaklaşım ilk olarak Proje Yürütücü [Ta02C] tarafından başlatılmıştır ve projede bu yaklaşım takip edilecektir.
Konu F2. Dalga yüzünün topolojisi ve hiperbolik Cauchy Problemi. Dalga yüzünün topolojisinin çalışılması ile ilgili tekillik teoresi (singularity theory) açısından yaklaşımda çok sayıda yazarlar (V. Zakalyukin, V. Vasiliev) bir tekil katmanın komşuluğundaki normal formlara indirgemeyi kullanmıştır. Bu yöntem özünde yerel karakterlidir. Dalga yüzde bulunan tekil katmanı (singular strata) belirlemeye yarayan başka bir global yaklaşımı takip etmeyi düşünüyoruz. [Ta99]'da Proje Yürtücüsü dalga yüzünü cebirsel varyetelerin deformasyonu açısından çalışabileceğimiz yeni bir yöntem önerdi. Bu makalede dalga yüzü bir tam kesişim varyeteye ait diskriminant mahallerinin altkatmanı olarak tasvir edilmiştir. Bu yöntemi diğer yerel yöntemler ile geliştireceğiz.
Periyot integralleri cinsinden verilen hiperbolik Cauchy probleminin çözümlerinin ifadesini de sınayabiliriz. Bu ifade dalga yüzünün tekil katmanının bir komşuluğundaki çözümlerin asimptotik davranışını tam olarak tasvir etmemizi sağlar. Periyot integralini Gauss-Manin sisteminin (tekil mahalleri boyunca düzenli tekillikleri (regular singular) olan çok değiskenli bir doğrusal kısmi türevsel denklem) bir çözümü olarak çalışan yöntemimiz eş zamanlı olarak hem dalga yüzdeki topolojik bilgiyi, hem de dalga yüzünün yakınında bulunan analitik bilgiyi elde etmemizi sağlar.

5. YÖNTEM:

Araştırma Çerçevesini Oluşturacak Yöntemler:

1. Kaynak taraması: Ele aldığımız problemin kökeni 19. yüzyıla kadar uzandığından, konu hakkında yoğun bir kaynak taraması, süren çalışmaların takibi, tüm proje süresince dikkatli bir şekilde yapılmalıdır. Bu konuda, yüksek lisans ve doktora öğrencilerinin çalışmalarını öngörmekteyiz. İlgili makalelerin okunmasının ciddiyetle yapılması için yüksek lisans tezinde çalışacak başarılı öğrencilerle çalışmak istemekteyiz. Halihazırda bir doktora bursiyeri adayı konu hakkında kaynak okuması yapmaktadır.
2. Konunun uzmanları ile iletişim: Yurtdışında bulunan uzmanlarla ortak seminer ve/veya çalıştaylar düzenlemek, halihazırdaki seminerlere katılmak. Doktora öğrencisinin yurtdışından (Rusya, Japonya, ABD gibi) bir uzmanla da çalışmasını sağlamak.
3. Çalışma grupları/Dersler: Yüksek Lisans, doktora öğrencileriyle çalışma grupları oluşturmak, mümkün olduğu takdirde, bunları ders formunda yapmak. Bu noktada düşündüğümüz bir ders Hodge kuramı ile ilgili konulardan başlayıp, monodromi grubu ile ilgili teoremleri anlayacak kadar cebirsel geometri bilgisi içeren derstir.

Bilimsel Araştırmada Kullanılacak Matematiksel Yöntemler:

Araştırma metotlarının taslağı aşağıdaki diagramdaki gibi çizilebilir.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{B}: \text{Salıngaç integralleri} & \longrightarrow & \mathrm{B}: \text{Stokes matrisi} & & \\
\uparrow & & & & \\
\mathrm{A}: \text{Karışık Hodge yapısı}(\mathrm{KHY}) & \longrightarrow & \mathrm{C}: \text{Genelleştirilmiş HG Denklemi} & \longrightarrow & \mathrm{C}: \text{Genel. HGF} \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{A}: \text{Periyot integrallerinin KHY} & & \mathrm{C}: \text{Tekil mahallerinin topolojisi} & \longrightarrow & \mathrm{D}: \text{Küresel monodromi temsili} \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \mathrm{E}: \text{Monodromisi'nin aritmetikliği}
\end{array}$$

Konu A. Periyot integrallerin modülündeki karışık Hodge yapısı. (1) Bir hiperyüzeyin veya simitteki bir tam kesişimin kohomoloji grubundaki Newton ve ağrlık (weight) süzümlerinin somut bir betimlemesini yapmak. Ehrhart polinom gibi kombinatorik araçlar kullanilabilir.

(2) $I_\omega(s)$ periyot integralinin davranışı ve $[\omega] \in H^{n-1}(X_s, \mathbf{C})$ formundaki süzüm arasındaki ilşkiyi saptamak; X_s afin bir hiperyüzey olduğunda. Buna denk olarak, $H^{n-1}(X_s, \mathbf{C})$ kohomolojisinin karışık Hodge yapısının periyot integralin asimptotik yapısı üzerinde ne şekilde etkili olduğunu açıklığa kavuşturmak. Periyot integralin Mellin-Barnes integral temsili bu betimlemede kullanılabilir.[BH]'taki Levelt tipi teorem uygulanabilir.

(3) $I_\omega(s)$ periyot integralinin davranışı ve $[\omega] \in H^{n-1}(X_s, \mathbf{C})$ formundaki süzüm arasındaki ilşkiyi saptamak; X_s afin tam kesişim olduğunda. Periyot integralin Mellin-Barnes integral temsili bu betimlemede kullanılabilir.

Konu B. Salıngaç integralleri ve Stokes matrisi

(1) Örgü grubu etkisini uyumlu bir şekilde betimlemeye yarayacak Lefschetz yüksüklerinin (thimble) uygun bir tabanını seçmek.

(2) Analitik uzam tarafindan desteklenen salıngaç integrallerindeki Örgü grubu etkisini çalışmak.

(3) Stokes matrisinin bileşenlerini Lefschetz yüksüklerinin kesişim sayısı ile kıyaslamak.

(4) Elde ettiğimiz (3) Stokes matrisi ile bir Fano veya Calabi-Yau varyetesindeki tutarlı demetlerin (coherent sheaves) Gram matrisini Dubrovin sanısının doğrulanması çcerçevesinde karşılaştırmak.

Konu C. Afin (veya torsal) varyetelerin bir deformasyon ailesinde tanımlanan singular mahallerinin topolojisi.

(1) Diskriminant mahallerinin polinom denklemlerinin uniformizasyon kullanarak elde edilmesi (Horn-Kapranov uniformizasyon denklemi) (2) Diskriminant mahallerinin hiperdüzlem düzenlemesi haline gelen örtüsünü ele almak ve tümleyeninin temel grubunun bir temsilinin hesaplanması. Bir taban uzayla örtüsünün temel gruplarını ilişkilendiren Reidemeister-Schreier yönteminin ele alınması. (3) Diskriminant mahallerinin indirgenemez bileşenlerinin etrafındaki bariz olmayan ilmeklerinin ele alınması. Sağladıkları bağıntıların bulunması. Bu bize diskriminant mahallerinin topolojisini hiperdüzlem düzenlemesi yardımıyla anlamanın bir yolunu verir.

Konu D. Periyot integrallerin monodromi grubu.
(1) HGF olarak periyot integralinin Mellin-Barnes integrali şeklinde ifade edilmesi. (2) HGF olarak periyot integralerinin tekillik mahallerinin bir indirgenemez böleni civarında Gauss-Manin sisteminin çözümleri için uygun bir yerel çözüm tabanın bulunması. (3) Mellin-Barnes integralinin analitik uzanımlarının [BH], ve [STa16]'da önerilen kontur üzerinde hesaplanması. (4) Analitik uzanımlarını diskriminant mahallinin (2)dekinden farklı bir indirgenemez böleni civarındaki başka bir yerel çözüm tabanı cinsinden ifade etmek. Böylece bağlantı matrisleri ve global monodromi sunumu bulunması. (5) Konu C'deki temel grup hakkındaki neticeyi kullanırken, (4)te bulunan monodromi sunumunun gerçekten diskriminant mahallinin indirgenemez böleni etrafındaki ilmeklerin sağladığı bariz olmayan bağıntıları sağladığının doğrulanması. Bu doğrultudaki sonuçların ayna simetrisi sanısıyle bağlantılı birçok önemli neticeleri olabilir.
Konu E HGF'nin global monodromi grubunun aritmetikliği (1) Konu D'de elde edilen monodromi grubunun Hermitian kuadratik formunu bulmak ve monodromi grubunun hangi Lie grubunun içinde gömülü altgrubu olduğunun belirlenmesi. (2) Monodromi grubunun (1)'deki Lie grubunda sonlu eşhacimli olup olmadığına karar verilmesi. (3) Şayet (2)'nin cevabı olumluysa, Borel ve Harish-Chandra teoremini veya Singh ve Venkataramana metodunu kullanarak monodromi grubununun aritmetikliğini ispatla. Cevap olumsuzsa, Mostow ve Vinberg'in kullandığı yöntemlerin uygulanması. İnce grubu (Thin group) olmasını tetkik etmek için Brav ve Thomas'ın kullandığı yöntemlerin uygulanması.
Konu F1. Periyot integrallerin sıfırlarının sayısı. (1) Tek değişkenli Pochhammer HGF'nin sıfırlarının değer biçmesi. (2) Bu sonucun, Abelyen integrallerin Pochhammer HGF ile ifade edildiği duruma uygulanması. (3) Lauricella HGF durumu için, Abelyen integrallerin sıfırlarının adedinin Schwarz tasvirinin örtü mertebesi olarak hesaplanması. (4) Abelyen integrallerin sıfırlarının adedinin, en az bası durumlar için, Hamiltoniyenin ve dağıtma terimlerinin mertebesi cinsinden doğrusal arttığını gösterebilmeyi umuyoruz. Bugüne dek bilinen kestirim, Hamiltoniyenin ve dağıtma terimlerinin mertebesi cinsinden sadece çift üstelli (exp (exp n)) bir büyüme vermektedir.
Konu F2. Dalga yüzünün topolojisi (1) Iki çok terimlinin tam kesişiminin diskriminant mahallerini betimlemek: faz fonksiyonu çokterimlisinin ve önsel dalga yüzünün tanım denklemi. Bu tam kesişimin tekilliklerine ilişik Milnor halkası diskriminant mahallerine teğet vektör alanlarının hesaplanmasında temel teşkil edecektir.
(2) Dalga yüzünü elde ederek diskriminant mahallerinin bölümünü göz önüne alarak dalga yüzdeki tekil mahallerinin katmanı somut olarak betimlemek. Bu katmanın (strata) tekilliğini belirlemek.
(3) (1)'deki tam kesişime ilişik olan Gauss-Manin sistemini hesaplamak. Bu kısmi diferansiyel denklemin çözümlerini periyot integrali cinsinden yazmak. Kısmi diferansiyel denklemin çözümlerinin asimptotik davranışını kohomolojinin karışık Hodge yapısı ve periyot integralinin asimptotik davranışının anlatıldığı Konu A'daki sonuçlar yardımı ile betimlemek.

6. PROJE YÖNETİMİ, EKİP ve ARAŞTIRMA OLANAKLARI:

6.1.1. YÖNETIM DÜZENİ(İş Paketleri (İP), Görev Dağılımı ve Süreleri)

İŞ-ZAMAN ÇİZELGESİ(*)

İP No	İş Paketi, Adı	Kim(ler) Ta	AYLAR																																			
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
A	Hodge Yapısı inceleme	PY, D, DS	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*																								
B	Salıngaç integral ve Stokes matrisi	PY, D, DS	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*												
C	Diskriminant mahallerinin topolojisi	PY, D, YL, YA, DS					*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
D	Periyot integrallerin küresel monodromi grubu	PY, D, DS, YA												*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
E	Küresel monodromi grubunun aritmetiği	PY, D, YA, DS	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
F	Periyot integrallerinin dinamik sistemlere ve KTD'e uygulaması	PY, D, YL, DS										*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
G	Doktora öğrencisinin bir tez hazırlanması	PY, D, YA,DS	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Kısaltmalar: DS= Doktora sonrası araştırmacı, YL= Yüksek lisans bursiyeri, D= Doktora bursiyeri, PY= Proje Yürtücüsü, YA= Yardımcı Araştırmacı.

TÜBİTAK

6.1.1.Ek : İŞ AYRINTILARI

Bursiyerlerin projedeki görevleri: Post-doktora kapsamında gelmesi düşünülen genç araştırmacı, doktora çalışmasının doğal devamı olan nitelikte sorularla ilgilenmenin (örneğin, cebirsel geometri, tekillik teorisi, çok değişkenli karmaşık analiz, örgü grubu ile alakalı topolojisi) yanı sıra, konuda tecrübe kazanmış olduğundan, ekibe yeni katılacak doktora ve yüksek lisans öğencilerinin konuya hazırlanmasında da yardımcı olacaktır. Tam bursiyer statüsündeki doktora öğrencisine temel kuramsal sorunlardan (örneğin, afin bir varyete'nin karışık Hodge yapısı'nın kombinatorik tanımları, periyot integrallerinin çoklu residünün (multiple residues) açısından incelenmesi, indirgenemez Pochhammer hipergeometrik denkleminin monodromiyi belirlemesi) biri verilecektir. Yüksek lisans öğrencisine hesap ağırlıklı bir konu önermeyi düşünmekteyiz (örneğin, 3 veya 4 boyutlu bir uzayındaki ayrık monodromi grubu etkilerini belirlemek).

Bu bursiyer kadrolarının proje başlar başlamaz doldurulaması pek kolay değildir, iyi bir seçim yapmak biraz zaman alacaktır. Bu sebeple bursiyerler kaleminde kesintiye gidilmemesi önem taşımaktadır. Yine doktora sonrası araştırmacının tüm proje süresi olan üç sene boyunca bu statüde kalmasını arzulamayız, en iyisi bu esnada kendisine uygun bir kalıcı statüde kadroya geçmesidir.Bu durumda onun yerine bir başkadoktora sonrası araştırmacını istihdam edebilmeyi arzuluyoruz. Bu, aynı zamanda proje boyunca biriken bilimsel artı değerin kaybolup gitmemesi ve genç meslektaşalara aktarılması açısından önemlidir, çünkü projenin kalıcı bir etki bırakmasını sağlayacak olan bu bursiyerlerdir.

6.1.2. BAŞARI ÖLÇÜTLERİ VE RİSK YÖNETİMİ:

BAŞARI ÖLÇÜTLERİ TABLOSU(*)

İP No	İş Paketi Hedefi	Başarı Ölçütü (%, sayı, ifade, vb.)	Projenin Başarısındaki Önemi (%)**
A	Cebirsel varyetenin karışık Hodge yapısının periyot integrallerinin asimptitik davranış ile münasebetlerini ortaya çıkarmak	Ayrı kabul edilen çeşitli süzümler arasındaki ilişkiyi berraklaştırmak ve kohomolojisinin karışık Hodge yapısının periyot integrallerinin monodromisi üzerindeki etkiyi betimlemek	10/100
B	Salıngaç integralleri üzerindeki örgü grubu etkilerini incelemek	Yok olan devirlerin monodromi temsili ve Stokes matrisi arasındaki örtüşmeyi aydınlatmak. Dubrovin sanısını bazı önemli durumlar icin doğrulamak.	15/100
C	Diskriminant mahallerinin topolojik çalışması	Cebirsel geometri veya super-sicim teorisi açısından önemli cebirsel varyetelerin diskriminant mahallerinin tümleyeninin temel grubunun temsilini hesaplamak	15/100
D	Periyot integrallerinin global monodromi grubunun tanımlanması	C'de elde edilen temel grup için periyot integralerin küresel monodromi sunumunun bulunması. Uygulama olarak homolojik ayna simetrisinin önemli durumlarını doğrulamak	20/100
E	Küresel monodromi grubunun aritmetiği	D'de elde edilen monodromi grubunun aritmetikliğini ispatlamak. Aksi takdirde onun ince grubu olduğunu göstermek.	10/100
F	Periyot integrallerinin dinamik sistemlere ve KTD'e uygulaması	Abelyen integrallerin sıfırlarının adedinin, en az bazı durumlar için, Hamiltoniyenin ve dağıtma terimlerinin mertebesi cinsinden doğrusal arttığını göstermek. Dalga yüzdeki tekil mahal katmanının tekilliğini belirlemek.	10/100
G	Doktora öğrencisinin, yaklaşık 2 makaleye tekabul edecek içerikte, bir tez hazırlanması	80/100	20/100

(*) Tablodaki satırlar gerektiği kadar genişletilebilir ve çoğaltılabilir.

(**) Sütun toplamı 100 olmalıdır.

RİSK YÖNETİMİ TABLOSU(*)

İP No	En Önemli Riskler	B Planı
A	Bir tam kesişimle ilişkili çok değişkenli periyot integrallerinin karışık Hodge yapısı kombinatorik tarifinde zorluklara sebep olabilir.	Kendimizi periyot integralinin tek değişkenli hipergeometrik fonksiyon olarak tarif edilebileceği hiperyüzey durumuna kısıtlayacağız.
B	Salıngaç integralleri üzerinde küresel örgü grubu etkisi açıklamak için çok karmaşık hale gelebilir.	Örgü grubu etkilerinin sistematik tanımı olan salıngaç integrallerinin uygun daha küçük bir sınıfını bulacağız. Salıngaç integrallerini içeren yerel karakterlerin derin sorularını çalışabiliriz (örneğin Brieskorn kafes yapıları).
C	Genel olarak diskriminant mahallerin tümleyenin bir temel grubunun ilmikleri tarafından sağlanan **tüm ilişkileri** belirlemek zordur.	İlgimizi diskriminant mahallerin örtüsü olarak elde edilen hiperdüzlem aranjmanlarının topolojisine yoğunlaştıracağız. Hiperdüzlem aranjmanları teknik olarak ulaşılabilirdir.
D	Periyot integrallerinin her tip analitik uzanımı hakkında tam bilgi sahibi olamayız. Bir monodromi grubunun tam tanımlamasını kurmak çok kolay olmayabilir.	Periyot integrallerinin analitik uzanımları hakkında bazı kısmî bilgiler homolojik ayna simetrisinin önemli unsurlarını kurmak için yeterli olacaktır.
E	Ayrık bir grubun aritmetikliğini kurmak için çok fazla yöntem bilinmiyor.	Kombinasyon grup teorisindeki ping-pong lemması gibi bilinen tekniklerin uygulanabildiği somut monodromi gruplarına yoğunlaşacağız.
F	Bu konularda çalışabilen uygun çalışma arkadaşlarına sahip olmayabiliriz.	Kendi çalışma grubumuzun dışında bu konularda çalışmaya hazır olan çalışma arkadaşları bulma ihtimaline bakacağız. Aksi halde, çabalarımızı A-E konuları üzerine yoğunlaştıracağız. Bir periyot integralinin sıfırlarının tahmini, monodromi grubunun tam tarifindense onun dallanmaları hakkında çok daha az bilgi gerektirdiği için, bu konunun kendisi D konusu için bir B planı olabilir.
G	Doktora öğrencisinin incelemesi greken kaynakça ve konunun kapsamı, doktora tezinin 3 yılda bitmesine el veremeyebilir.	Doktora öğrencisi bir yandan kaynak taraması yaparken, ders alırken, diğer yandan hemen projenin başından itibaren basit sorularla uğraşmaya başlayacaktır. Bu şekilde doktora tezi 3 yılda bitmese bile elinde en az bir makalelik malzeme olacak.

(*) Tablodaki satırlar gerektiği kadar genişletilebilir ve çoğaltılabilir.

6.2 PROJE EKİBİ:

6.2.1. PROJE YÜRÜTÜCÜSÜNÜN DİĞER PROJELERİ VE GÜNCEL YAYINLARI:

PROJE YÜRÜTÜCÜSÜNÜN TÜBİTAK DESTEKLİ PROJELERİ(*)

Proje No	Projedeki Görevi	Proje Adı	Başlama/Bitiş Tarihi	Destek Miktarı (TL)

(*) Tablodaki satırlar gerektiği kadar genişletilebilir ve çoğaltılabilir.

PROJE YÜRÜTÜCÜSÜNÜN DİĞER PROJELERİ (DPT, BAP, FP6-7,vb.)(*)

Proje No	Projedeki Görevi	Proje Adı	Başlama/Bitiş Tarihi	Destek Miktarı (TL)

(*) Tablodaki satırlar gerektiği kadar genişletilebilir ve çoğaltılabilir.

PROJE YÜRÜTÜCÜSÜNÜN SON 5 YILDA YAPMIŞ OLDUĞU YAYINLAR(*)

Yazar(lar)	Makale Başlığı	Dergi	Cilt/Sayı/Sayfa	Tarih
S.Tanabé, K.Ueda	Invariants of hypergeometric groups for Calabi-Yau complete intersections in weighted projective spaces	Communications in Number Theory and Physics	7/3/327-359	2013
T.Sadykov , S.Tanabé	Maximally reducible monodromy of bivariate hypergeometric systems	Izvestia Ross Akad. Nauk Ser. Math.	80/1/235-280	2016
L. R. G. Dias, S.Tanabé, Mihai Tibăr	Toward Effective Detection of the Bifurcation Locus of Real Polynomial Maps	Foundations of Computational Mathematics	DOI 10.1007/s10208-016-9303-2	2016

(*) Tablodaki satırlar gerektiği kadar genişletilebilir ve çoğaltılabilir.

PROJE EKİBİNİN ÖNERİLEN PROJE KONUSU İLE İLGİLİ DİĞER PROJELERİ

Adı Soyadı	Projedeki Görevi	Proje Adı	Başlama/Bitiş Tarihi	Önerilen Projeden Farkı
Susumu Tanabé	Danışman	Hipergeometrik Galois Etkileri 110T690	2011-2014	Önerilen projenin konusu karmaşık analiz ve türevli denklemler ağırlıklıdır. Önceki projenin konusu ise sayılar teorisi ve türevli geometri ağırlıklıydı.
Susumu Tanabé	Yardımcı Araştırmacısı	Karmaşık Yüzey Tekilliklerinin Topolojisi 113F007	2013-2014	Önerilen projenin konusu karmaşık analiz ve türevli denklemler ağırlıklıdır. Önceki projenin konusu ise polinom tasviri ile ilgili topolojiydi.
Susumu Tanabé	Yardımcı Araştırmacısı	Çok değişkenli Hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili topoloji ve aritmetik (hakemde)	2016(?)	Önerilen projede cebirsel geometri ile ilgili problemleri (karışık Hodge yapısı, Kontsevich'in homolojik ayna simetrisi sanısı, Dubrovin sanısı) ağırlıklıdır. Öteki projenin konusunda yüksek boyutlu cebirsel varyeteler ile ilgili problemler adeta bulunmamaktır.

(*) Tablodaki satırlar gerektiği kadar genişletilebilir ve çoğaltılabilir.

6.3 ARAŞTIRMA OLANAKLARI

MEVCUT ARAŞTIRMA OLANAKLARI TABLOSU(*)

Mevcut Altyapı/Ekipman Türü, Modeli (Laboratuvar, Araç, Makine-Teçhizat vb.)	**Mevcut Olduğu Kurum/Kuruluş**	**Projede Kullanım Amacı**
Derslik, Kütüphane	Galatasaray Üniversitesi	Araştırma-Eğitim-Seminer

(*) Tablodaki satırlar gerektiği kadar genişletilebilir ve çoğaltılabilir.

7. YAYGIN ETKİ

7.1. PROJEDEN BEKLENEN YAYGIN ETKİ

PROJEDEN BEKLENEN YAYGIN ETKİ TABLOSU

Yaygın Etki Türleri	**Projede Öngörülen/Beklenen Çıktı, Sonuç ve Etkiler**
Bilimsel/Akademik (Makale, Bildiri, Kitap)	Uluslarası indekslenmiş dergilerde 3 makale yayımlanmak
Ekonomik/Ticari/Sosyal (Ürün, Prototip Ürün, Patent, Faydalı Model, Üretim İzni, Çeşit Tescili, Spin-off/Start- up Şirket, Görsel/İşitsel Arşiv, Envanter/Veri Tabanı/Belgeleme Üretimi, Telife Konu Olan Eser, medyada Yer Alma, Fuar, Proje Pazarı, Çalıştay, Eğitim vb. Bilimsel Etkinlik, Proje Sonuçlarını Kullanacak Kurum/Kuruluş, vb. diğer yaygın etkiler)	Seminer, Çalıştay, 1 Uluslarası konferans
Araştırmacı Yetiştirilmesi ve Yeni Proje(ler) Oluşturma (Yüksek Lisans/Doktora Tezi, Ulusal/Uluslararası Yeni Proje)	2 yüksek lisans tezi, 1 doktora tezi, Türkiye-Romanya Matematik İşbirliği Projesi (Köstençe Üniversitesi ile.Konu: Hiperdüzlem aranjmanın tümleyenin temel grubu.), Türkiye-Rusya İşbirliği Projesi (Konu: Çok değişkenli hipergeometrik fonksyonlarla ilgili topoloji ve aritmetik).

TÜBİTAK

7.2. PROJE ÇIKTILARININ PAYLAŞIMI VE YAYILIMI

Proje faaliyetleri boyunca elde edilecek çıktıların ve ulaşılacak sonuçların ilgili paydaşlar ve potansiyel kullanıcılara ulaştırılması ve yayılmasına yönelik yapılacak toplantı, çalıştay, eğitim, web sitesi, vb. ne tür faaliyetler yapılacağı aşağıdaki tabloda belirtilmelidir.

PROJE ÇIKTILARININ PAYLAŞIMI VE YAYILIMI TABLOSU

Faaliyet Türü (Toplantı, Çalıştay, Eğitim, Web sayfası vb.)	**Paydaş / Potansiyel Kullanıcılar**	**Faaliyetin Zamanı ve Süresi**
Ders	İstanbuldaki yükseklisans/doktora öğrenciler	2017-2018 güz dönemi
Seminer	İstanbuldaki matematikçiler ve öğrenciler	Projenin 6 ayından itibaren düzenli olarak 2 haftada bir projenin sonuna kadar
Çalıştay	Uluşlararası uzmanlar ve Türkiyedeki genç araştırmacılar	2. yılın ve 3.yılın başında 1 haftalık
Final Konferansı	Uluşlararası uzmanlar ve Türkiyedeki araştirmacılar	Projenin sonunda
Web sitesi	Tum araştırmacılar	Projenin 1. yılından itibaren