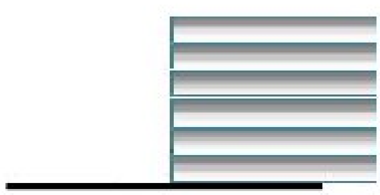
Eğik Kule

1983 yılında Leslie Scott oyunlar dünyamıza Jenga adıyla yeni bir oyun kazandırdı. Jenga, genişlikleri, uzunlukları ve yükseklikleri birbirinin aynı olan n tane tahta parçası ile oynanır. Parçalar, her bir katta aynı şekilde yanyana dizilmiş 3 Jenga parçası ve her kattaki 3'lü yığın bir alt kattaki 3'lü yığına dik olacak şekilde bir kule gibi dizilir (n sayısının 3 ile bölünebilmesi gerektiğine dikkat edelim!). Oyuncular sırasıyla 1 parça çeker ve çektiği parçayı kulenin en üstüne istediği şekilde yerleştirir. Yanlış parçayı çekerek ya da doğru çektiği bir parçayı yanlış yere koyarak kuleyi deviren oyuncu oyunu kaybeder.

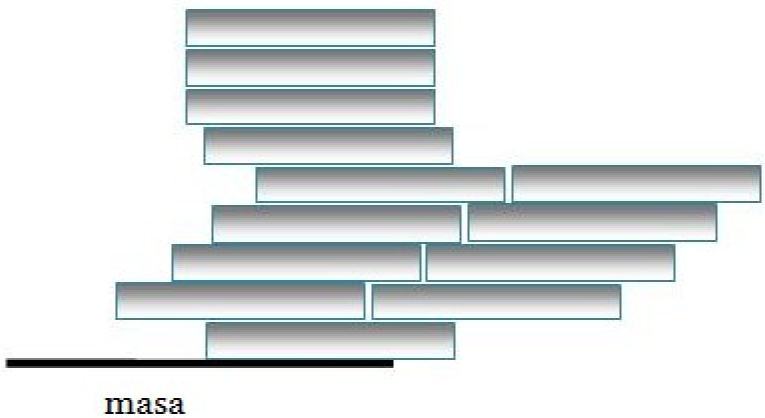
Bu tür oyunlarda, parçaların boyutları ve diziliş şekli bir fizik problemi ve oyunu kimin kazanacağı bir matematik problemidir. Her bir Jenga parçasının aynı boyutlarda olmasının önemli bir veri olduğunu hatırlatalım ve Jenga parçaları ile oynayacağımız sıradaki "oyun"umuza geçelim: Bir masanın kenarına, masaya ve herbiri diğerine çıkıntı yapacak şekilde ama masadan düşmeyecek şekilde kaç tane Jenga parçasını üst üste dizebiliriz? Bu şekilde oluşturabileceğimiz en uzun çıkıntının uç noktasının, masaya uzaklığı ne olabilir? En az sayıda parça kullanarak en uzun çıkıntıyı bulan oyuncu oyunu kazanır. Bu "oyun", "Eğilmiş Para Kulesi" olarak bilinen ünlü bir "problem"dir. Bu "problem"in ilk olarak 19. Yüzyılın başlarında yayınlanan bir makalede ele alındığını söyleyip çalışmanın günümüze kadar olan gelişimini yazımızın sonuna bırakalım.

"Oyun"umuzun, halen çalışılan bilimsel bir "problem" olduğunu düşünerek Jenga parçalarımızı daha ciddi parçalarla mesela standart büyüklüklere sahip kitaplar ile değiştirelim. Bu kadar çok ve aynı boyutlardaki kitabı nereden mi edineceğiz? Elbette MD dergilerimizi kullanacağız…

Kitaplarımız ile masadan çıkıntı yapacak en basit kuleyi, kulenin her katına sadece bir kitap koyacak şekilde birkaç kitabı üstüste koyup masanın kenarından mümkün olduğunca taşırarak elde ederiz. En büyük çıkıntı masadan itibaren elde ettiğimiz uzunluktur.

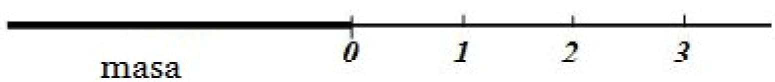


Kurallara uyarak bu yolla, keyfi yükseklikte bir kule ile en büyük çıkıntıyı elde edebiliriz. Daha büyük bir çıkıntı elde etmek için aşağıdaki gibi "karşıt-ağırlıklar" yöntemini de kullanabiliriz:



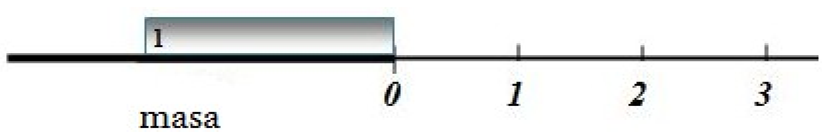
Bu yöntemle gerçekten daha büyük bir çıkıntı üretebiliriz. Fakat karmaşık görünen bu problemi daha sonraya bırakıp problemimizi en basit hali ile anlamaya çalışalım. Yani, **kısıtlama**mız şu olsun: Kulenin her katına sadece bir kitap koyulabilir.

"Oyun"umuzun matematik modelini oluşturmak için, 0 noktası masanın tam sağ kenarında olan ve masanın sağına doğru uzanan bir sayı doğrusu hayal edelim.

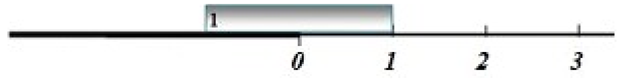


Bir kitabın eninin 2 birim ve kütlesinin 1 birim olduğunu ve n-kitaplı kulenin ağırlık merkezi 0 dan küçük olduğu durumlarda masanın kenarında dengede kalacağını kabul edelim (sıfır noktasında da hala dengededir).

1. **adım:** Masaya ilk kitabı öyle yerleştirelim ki sağ kenarı sıfırda olsun. Böylece kitabın ağırlık merkezi -1 de olacaktır.

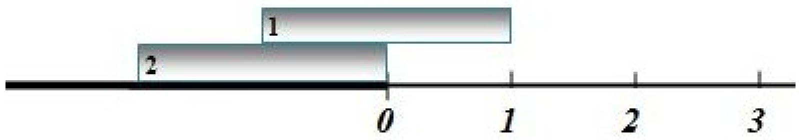


Ağırlık merkezi, -1'den 0'a gelinceye kadar kitabı sağa kaydıralım. Kitabın 0 noktasında dengede olduğunu hatırlayalım. Kitabın eni 2 birim ve ağırlık merkezi -1 de olduğu için kitabı düşürmemek için sadece eninin yarısı kadar (1 birim) sağa kaydırabildik.

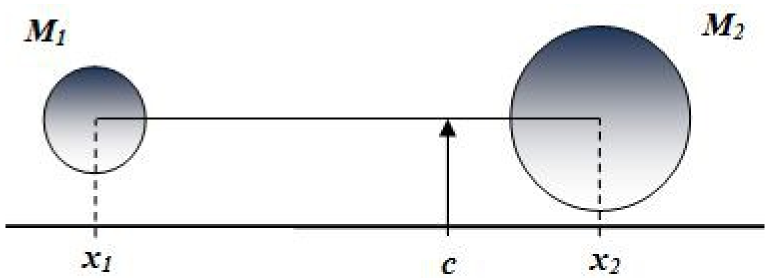


Bu 1-kitaplı kulenin ağırlık merkezi 0 noktasında ve verdiği çıkıntı $Ç_1$= 1 birimdir.

2. **Adım:** İkinci kitabı yine masanın üzerine ve sağ kenarı sıfır noktasında olacak şekilde koyalım. Üzerine önceki adımda elde ettiğimiz 1-kitaplı kuleyi koyalım.Yeni kule de dengede kalacaktır.



Hatırlatma: *Herhangi iki noktaya, x_1 ve x_2 diyelim, yerleştirilen ve kütleleri M_1 ve M_2 olan iki cismin* c *ağırlık merkezi*



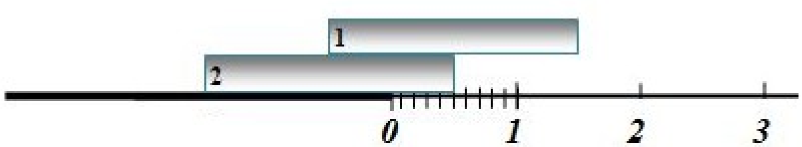
$$c = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2}{M_1 + M_2}$$

formulü ile bulunur.

Öyleyse, 2-kitaplı kulenin ağırlık merkezi

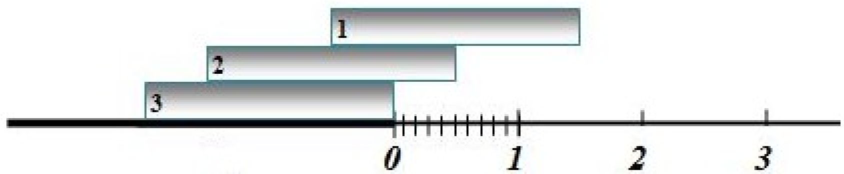
$$c = \frac{x_2 M_2 + c_1 M_1}{M_2 + M_1} = \frac{(-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

noktasıdır. Kuleyi, ağırlık merkezi 0'a gelinceye kadar sağa kaydıralım. Kulemizin dengede kalabilmesi için kuleyi sadece 1/2 birim sağa kaydırdık.



Böylece, 2-kitaplı kulenin kütlesi M_2= 2, ağırlık merkezi c_2=0 ve elde edeceğimiz çıkıntı $Ç_2$= 1+ 1/2 olur.

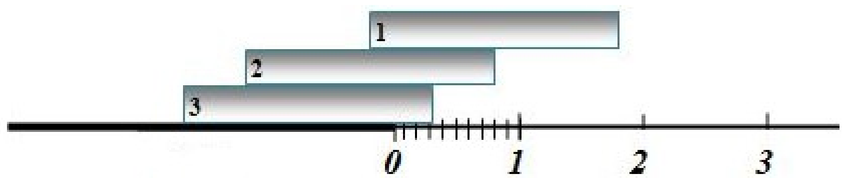
3. **Adım:** Kulemizi bir basamak daha yükseltelim. Üçüncü bir kitabı yine masanın üzerine sağ kenarı sıfırda olacak şekilde koyalım ve 2-kitaplı kuleyi de üzerine koyalım. Yeni kule de dengede kalacaktır.



3-kitaplı kulenin ağırlık merkezi:

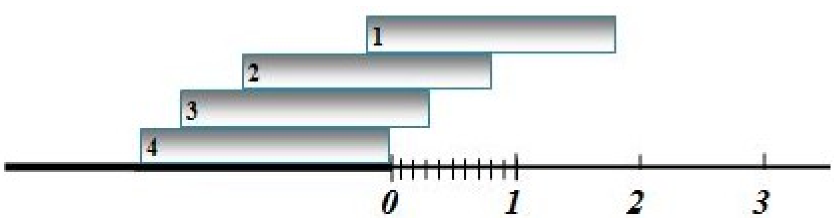
$$c = \frac{x_3 M_3 + c_2 M_2}{M_3 + M_2} = \frac{(-1)\cdot 1 + 0\cdot 2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

noktasıdır. Kuleyi, ağırlık merkezi 0’a gelinceye kadar sağa kaydıralım. 3-kitaplı kulenin dengede kalabilmesi için kuleyi sadece 1/3 birim sağa kaydırdık.



Böylece, 3-kitaplı kulenin kütlesi $M_3=3$, ağırlık merkezi $c_3= 0$ ve elde edilen çıkıntı $Ç_3= 1+1/2+1/3$ olur.

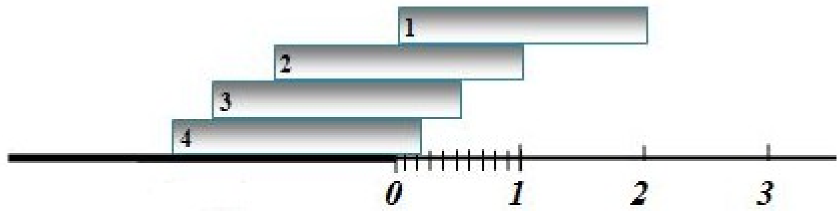
4.adım: Kuleyi bir basamak daha yükseltmek için yine sağ kenarı sıfırda olacak şekilde yeni bir kitabı masaya koyalım ve üzerine de yukardaki 3-kitaplı kulemizi koyalım. Kule yine dengededir.



4-kitaplı kulenin ağırlık merkezi:

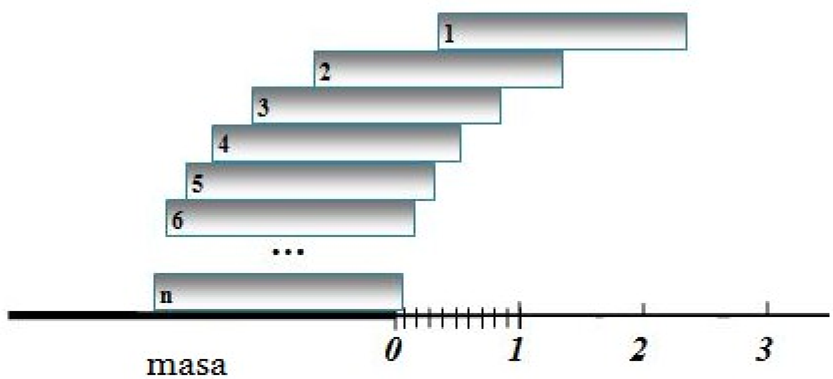
$$c = \frac{x_4 M_4 + c_3 M_3}{M_4 + M_3} = \frac{(-1)\cdot 1 + 0\cdot 3}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

noktasıdır. Ağırlık merkezi 0 noktasına gelinceye kadar kuleyi sağa kaydıralım. 4-kitaplı kulenin dengede kalabilmesi için kuleyi sadece 1/4 birim sağa kaydırdık.



Böylece, kütlesi $M_4=4$, ağırlık merkezi $c_4=0$ ve elde edilen çıkıntı $Ç_4= 1+1/2+1/3+1/4$ olur.

n. adım: Yukardaki şekilde devam edersek n-kitaplı bir kule elde ederiz:



Bu kulenin kütlesi $M_n=n$, ağırlık merkezi $c_n=0$ ve vereceği çıkıntı da $Ç_n = 1+{}^1/_2+\ldots+{}^1/_n$ olacaktır.

Şimdi masanın üzerine tekrar sağ kenarı sıfırda olan yeni bir kitap ve üzerine de yukardaki n-kitaplı kuleyi koyalım. Elde edeceğimiz (n+1)-kitaplı yeni kulenin ağırlık merkezi

$$c = \frac{x_{n+1}M_{n+1} + c_n M_n}{M_{n+1} + M_n} = \frac{(-1)\cdot 1 + 0 \cdot n}{1+n} = -\frac{1}{n+1}$$

olur. Kuleyi, ağırlık merkezi sıfırda olacak şekilde sağa doğru kaydırdığımızda

$Ç_{n+1} = 1 + +{}^1/_2 + \ldots + +{}^1/_{n+1}$

çıkıntısı oluşur.

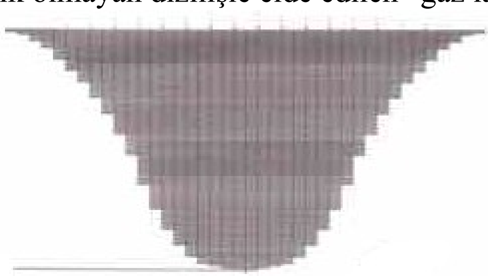
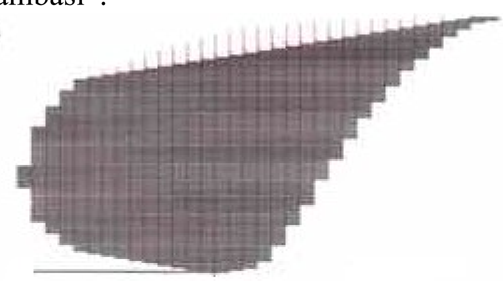
Böylece, tümevarımla masanın kenarında dengede duran ve $Ç_n$ birim çıkıntısı bulunan N-kitaplı bir kule oluşturduğumuza ve elde edilen çıkıntının

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

harmonik ıraksak dizi verdiğine dikkat edelim. Bu küçük “oyun” ile aşağıdaki gibi zengin bir tabloyu kolayca oluşturabiliriz:

Arzulanan çıkıntı	İhtiyaç duyulan kitap sayısı (n)
2	n = 4
4	n= 31
10	n= 12,367
22	n= 2,012,783,315
40	n = 132,159,290,357,566,703

İlk olarak, J.G.Coffin 1923 yılında, "Paranın Kulesine Eğilmek" adlı bu ”basit oyun”u problem olarak ortaya koyar fakat problemin çözümü üzerine ilk çalışmalar 1955 yılında P.B.Johnson ile başlar. Yukarıda koyduğumuz kısıtlamayı kaldırarak elde edebileceğimiz en uzun çıkıntının ne olduğu ve uzunlukları ve ağırlıkları farklı parçalar kullanılarak elde edilecek en uzun çıkıntının ne olduğu halen çalışılmakta olan problemlerdir. Bu çalışmaların ayrıntılarını merak edenler için aşağıdaki kaynak listesini verelim ve araştırmaların geldiği son noktada elde edilen en düşük toplam ağırlıklı ve en uzun çıkıntıyı veren iki dizilişle yazımızı bitirelim: Simetrik dizilişle elde edilen “abajur” ve simetrik olmayan dizilişle elde edilen “gaz lambası”:

Kaynaklar:

- J.G.Coffin (NewYork City), “*Problem 3009*”, American Math. Monthly 30(2) 1923 p.76.
- Johnson, Paul B. “*Leaning Tower of Lire*” Amer. J. Physics. 23 (4) 1955 p.240.
- M.Paterson and U.Zwick, “Overhang” Amer. Math. Monthly 116 (1) 2009 p.19.