

Bilardo: Simetri ve Pisagor Teoremi

Meral Tosun

30 Ağustos 2015

Bilardo, uzunluğu genişliğinin iki katı olan masalarda en az 3 top ile oynanır. Oyundaki toplam top sayısına ve vuruş kurallarına göre değişik isimler alır: Amerikan bilardosu, 9 top bilardosu, 3 bant bilardosu, snooker,...vs. Matematikçi bakışıyla, iyi bir oyun çıkarmak, “eğimi iyi hesaplanmış doğrular çizmeyi” ve “simetri”yi bilmeye bağlıdır. Bilardo oyununu bu kavramları kullanarak formularize etmeden önce kareli bir defter ve farklı renkte kalemler hazırlamanızı öneririz.

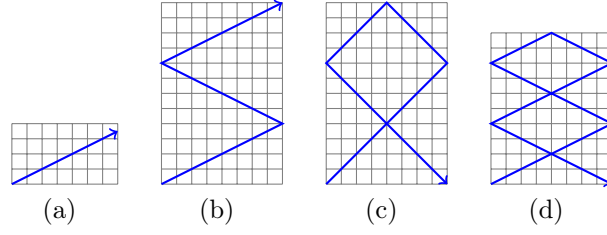
Şimdilik tamamen keyfi boyutlarda yapılmış dikdörtgen ya da kare şeklinde bir masada problemlerimizi anlamaya çalışalım. Anlatımı kolaylaştırmak için masanın kenarlarındaki deliklerin olmadığını sadece dört köşedeki deliklerin olduğunu ve topa hep masanın sol alt köşesinden vurduğumuzu düşünelim.

Uzunluğu 7 birim genişliği 4 birim olan (7×4 birim boyutlu) bir masadaki bilardo topuna sol alt köşeden vuralım ve topun vuruş anından itibaren geçtiği noktalardan oluşan doğrunun eğimi $1/2$ olsun (yani top $\tan \alpha = 1/2$ olmak üzere α° lik açıyla sol alt köşeden ayrılınsın). Öyleyse topumuz, her 2 birim sağa doğru hareket ettiğinde 1 birim yukarı doğru hareket edecektir. Topun çıkışını ve izleyeceği yolu Şekil 1a'daki gibi resmedebiliriz.

Eğer top, masadaki dört delikten birine girmeden önce masanın kenarlarında bir noktaya çarparsa, her çarpışında topun yine başlangıçta çıktığı açıyla kenardan ayrıldığını kabul edelim. Örnek olarak, 12×8 birim boyutlu bir masada $\tan \alpha = 1/2$ olacak şekilde α° lik açıyla sol alt köşeden ayrılan top, masanın sırasıyla sağ ve sol kenarlarına çarpacak ve her seferinde α° lik açıyla ayrıldıktan sonra sağ üst köşeye ulaşacaktır (bkz. Şekil 1b).

12×8 birim boyutlu masada topumuz 45° lik açıyla (yani eğimi 1 olan doğru üzerinde) köşeden ayrılırsa izleyeceği yol Şekil 1b' deki gibi olacak ve sağ alt köşeye ulaşacaktır.

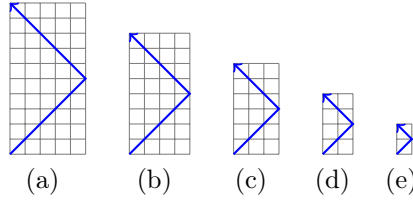
Alıştırma 1. (i) 10×6 birim boyutlu bir masada, 45° lik açı yapacak şekilde vurulan topun izleyeceği yolu ve en son varacağı köşeyi belirleyiniz. (ii) Aynı



Şekil 1

vuruşu, 6×3 , 9×3 , 12×3 , 9×6 ve 7×3 birim boyutlu masalarda yaparsanız topun alacağı yol ve varacağı köşe hangisi olur?

Şimdi değişik boyutlu masalarda 45° lik açı yapacak şekilde çıkan topun izleyeceği yolları karşılaştıralım:



Şekil 2

Masanın boyutlarının değil, uzunluğu ile genişliği arasındaki oranın önemli olduğunu farketmiş mi? Masalarımız $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ eşitliklerini sağlıyor. Bu durumda, yukardaki alıştırmada bulduğunuz yollarla aynı türden yolları veren değişik masa boyutları söyleyebilir misiniz?

Alıştırma 2. Sol alt köşesinden vurulan bir topun (i) sağ üst köşeye (ii) sol üst köşeye (iii) sağ alt köşeye varabilmesi için değişik masa boyutları ve topun bu masalardan çıkış açısını veriniz. Bunun için belirli bir kural bulunabilir mi?

Yukardaki çizimlerde topun aldığı yolların düşey bir doğruya ya da yatay bir doğruya göre simetrik olduğuna dikkat edelim.

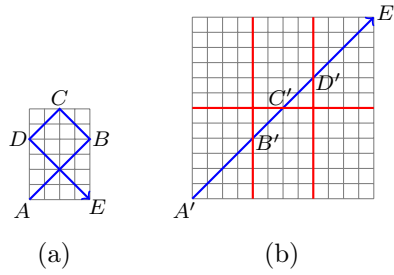
Farklı Açılar. Şekil 2'de verilen her bir boyuttaki masada, izleyeceği doğruyun eğimi sırasıyla $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 2 olacak şekilde topa vuralım. Elde edilecek yollar arasında bir ilişki var mı? Örnek olarak, 8×10 birim boyutlu bir masada $\frac{1}{2}$ eğimli doğru boyunca hareket eden topun izleyeceği yol Şekil 1d'deki ile aynıdır. Öyleyse masa boyutu ve topun çıkış açısı ayarlanarak farklı masalarda farklı açılar için aynı türden yollar bulunabilir.

Alıştırma 3. (i) 6×3 birim boyutlu bir masada eğimi $\frac{1}{3}$ olacak şekilde köşeden ayrılan bir topun izleyeceği yolu çiziniz. (ii) Eğimi $\frac{1}{2}$ olan fakat (i) deki ile aynı türden bir yolu izleyen bilardo topuna hangi boyutlardaki bir

masada vurmalyız?

Yol uzunluğu Hesabı ve Katlı Masa.

Şekil 1d'deki masayı 4×6 birimlik bir masa ile değiştirdiğimizde aynı eğimle çıkan top için aynı yolu bulacağız (bkz. Şekil 3a). Başlangıç ve varış noktaları da dahil olmak üzere topun 5 çarpma noktası olan bu yolu ölçmeye ve anlamaya çalışacağız. Bunun için aynı boyutlardaki altı masayı yanyana koyalım. 12×12 birim boyutlu kare bir masamız oldu ve köşeden 45° açı ile çıkan bir topun sağ üst köşeye varmak için izleyeceği yol bu karenin köşegenidir.



Şekil 3

Şimdi masayı önce yatay kırmızı doğrular boyunca sonra da dikey kırmızı doğrular boyunca katlayalım. Farklı renkte sivri uçlu bir kalemle alta izi çıkacak şekilde 6×4 birim boyuttaki masalarda aynı açı ile ayrılan topun izleyeceği yolların hepsini çizelim. Sonra tüm katları tekrar açalım. Şu benzerlikler elde edilir:

- (1) $A'B'$ doğru parçası, büyük masanın AB doğru parçası ile aynıdır.
- (2) $B'C'$ doğru parçası, CB doğru parçasına bir kırmızı dikey doğruya göre simetriktir.
- (3) $C'D'$ doğru parçası. CD doğru parçasına önce bir kırmızı dikey doğruya sonra da kırmızı yatay doğruya göre simetriktir.
- (4) $D'E'$ doğru parçası, DE doğru parçasına simetriktir.
- (5) Büyük kare masada topun izlediği yolun uzunluğu her biri 4×6 birim boyutlu masalarda topun izlediği yolların toplamına eşittir.
- (6) Topun izlediği toplam yol Pisagor teoremi'nden $12\sqrt{2}$ birimdir.

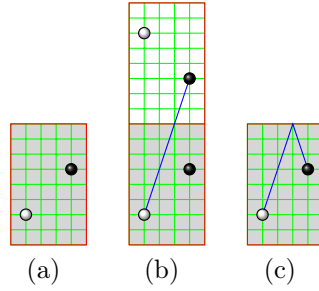
12×12 birim boyutlu masanın köşesinden vurduğumuz topun karşı köşeye gidebilmesi için, topun her iki dikey koyu renk doğrudan ve yatay koyu renk doğrudan geçmesi gerekir. Bu noktalar, başlangıç noktası ve varış noktası

olarak toplam 5 çarpma noktasına karşılık gelir. Bundan başka, topun 6×4 birim boyutlu her bir masada izlediği yolların toplamı, katlanmamış masada izlediği yolun uzunluğu ile aynıdır, yani $12\sqrt{2}$ birimdir.

Alıştırma 4. (i) 6×3 (ii) 9×3 (iii) 4×8 (d) 4×3 (e) 10×8 birim boyutlu masalarda ve bu masaların katlanmamış hallerinde 45° ile çıkan bir topun izleyeceği yolun uzunluğunu hesaplayınız. Topun izlediği yolun uzunluğu, masanın boyutları ve katlanmamış yol için bir kural yazılabilir mi?

Oyunda Uygulamalar

Katlı masa fikri, genellikle bilyardo masasında vuracağımız bir topun diğer bir topa çarpmasını sağlamak için kullanılır. Oyunun Şekil 4a'da verilen masadaki pozisyonda olduğunu düşünelim. Siyah topa çarpacak şekilde beyaz topa vuralım. Fakat oyun sırasında masada başka toplar olacak ve diğer toplara dokunmadan bu vuruşu gerçekleştirmek gerekeceği için beyaz topun masanın bir kenarına çarptıktan sonra siyah topa çarpmasını isteyelim (oyunun kuralı bu olabilir). Kenarın hangi noktasına çarpması gerektiğini katlı masaları hayal ederek bulacağız.

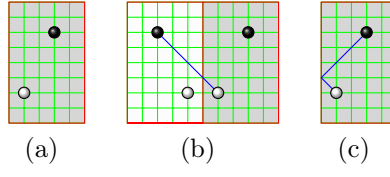


Şekil 4

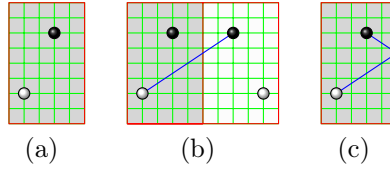
İlk masada, topların buldukları durumu görüyorsunuz. Ortadaki masada, katlı yol fikri ile masamızın simetriğini veren yeni masayı görüyorsunuz. Bu işlem ile, beyaz topun siyaha çarpmadan önce masamızın üst kenarında tam olarak hangi noktaya çarpması gerektiğini buluyoruz ve son olarak üçüncü masada topun izleyeceği yolu çiziyoruz.

Eğer birinci masada vuruş, beyaz top önce masanın sol kenarına sonra siyah topa çarpacak şekilde gerçekleştirilmek istenirse bu kez masa sol tarafa katlanır ve sol kenar üzerindeki çarpma noktası Şekil ?? deki gibi belirlenir. Aynı şekilde, beyaz topun önce sağ kenara sonra siyah topa çarpması isteniyorsa masa bu kez sağ tarafa katlanır ve simetri ile beyaz topun sağ kenar üzerindeki çarpma noktası Şekil ??'daki gibi belirlenir.

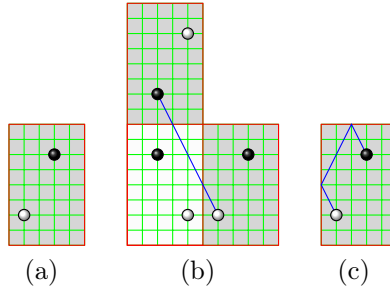
Benzer şekilde, beyaz topun masanın iki kenarına vurduktan sonra siyah topa vurması için masa önce sola sonra yukarı katlanır ve izlenecek yol Şekil ??'deki gibi belirlenir.



Şekil 5

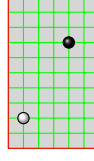


Şekil 6



Şekil 7

Alıştırma 5. Şekil ??'de verilen masadaki konuma gelmiş bir oyunda beyaz topun masanın iki kenarına vurduktan sonra siyah topa vurması için olası tüm yolları belirleyiniz.



Şekil 8

Teşekkür.. Bu yazıdaki şekillerin çizimine yardımları için Celal Cem Sarıoğlu'na teşekkür ederim.

Kaynaklar

- [1] Harold R. Jacobs, *Mathematics: A Human Endeavor*. W.H.Freeman, New York, 1994.
- [2] Serge Tabachnikov, *Billiards*. Societe Math. De France, Marseille, 1995.
- [3] L.C. Kinsey ve T.E. Moore, *Symmetry, Shape and Space*. Springer, 2001.

Meral Tosun
Galatasaray Üniversitesi
Matematik Bölümü