T. C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ
YAYINLARI

FONKSİYONLAR TEORİSİ
VE
RİEMANN YÜZEYLERİ

Prof. Dr. Cengiz ULUÇAY

Fonksiyonlar Teorisi Kürsü Profesörü
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi

Amerika Birleşik Devletleri Meclis
Kütüphanesi Katalog Kart Numarası:
72-26 25

ANKARA ÜNİVERSİTESİ BASIMEVİ . ANKARA — 1978

ÖNSÖZ

Fonksiyonlar Teorisi eserimizin birinci baskısı bir hayli zamandan beri tükenmiş bulunuyor. Modernliğini muhafaza etmiş olmasına rağmen, Matematiğin dev adımlarla ilerlediği bir sırada, eski baskının birşey katmadan yenilenmesini pek uygun bulmadık.

Dünya matematikçilerini bir hayli meşgul eden Matematiğin en cazip ve en derin konularının, bir yandan Üniversitelerimize, ana dilimizde girmesine, öte yandan gençlerimizi teşvik bakımından, bitmez tükenmez bir hazinenin, yine kendi ana dilimizde önlerine serilmesinde yardımcı olmayı, ve nihayet, cüz'i de olsa, Türk ilmine bir katkıda bulunmayı sadece bir vicdan borcu bildik.

Bu eser hazırlanırken, konu icabı, Matematiğin çeşitli ve yepyeni branşlarını kapsadığından, bunların takdiminde gereken titizliği göstermekten kaçınmadık.

Mevzuubahis konu, Riemann yüzeyleri ve onun tâcı Riemann-Roch teoremidir.

Literatürde bu teoremin çeşitli ispatları mevcuttur. Konumuzun birinci kısmını teşkil eden Fonksiyonlar Teorisine mümkün olduğu kadar sâdık kalabilmek için, bu eserdeki ispatı, Weyl lemması adı ile bilinen, en son geliştirilen, *ortogonal izdüşümü* metoduna göre yürüttük.

Bu metod, gerek *Hilbert uzayı*, gerekse *modern integral* kavramı hakkında sağlam bilgilere ihtiyaç gösterdiğinden, bu konuları işlemekte tereddüt etmedik.

Esas konumuz olan Riemann yüzeylerinin mucidi, büyük Alman Matematikçi B. Riemann'ın genç yaşta ölümü münasebetiyle, ünlü Fransız Matematikçi, Charles Hermite Fransız İlimler Akademisinde yaptığı konuşmada Riemann Yüzeyleri hakkında şöyle diyordu: *La notion profonde des surfaces de Riemann, qui est d'un accès difficile, s'introduit sans retard et domine bientôt dans la Science pour y rester à jamais.*

Bu eser hazırlanırken, bilhassa *L. Ahlfors-L. Sario, G. Springer, J. Lehner'in* gerek araştırmalarından, gerek eserlerinden geniş ölçüde istifade ettik.

İÇİNDEKİLER

Sahife

Önsöz V
İkinci Baskıya Önsöz VII
Notasyonlar XII

BÖLÜM I

SAYI KAVRAMI

1. Reel Sayılar 1
2. Reel Sayıların Topolojik Hassaları 31

BÖLÜM II

REEL DEĞİKENLİ REEL FONKSİYONLARIN ELEMANTER TEORİSİ

1. Süreklilik 36
2. Türev kavramı 40
3. Riemann İntegrali 45
4. Sonsuz İntegral 54
5. Sayı Serisi 58
6. Fonksiyon Dizisi 62
7. Fonksiyon Serisi 68
8. Çok Değişkenli Fonksiyonlar 69
9. Katlı İntegral 73
10. Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyonlar 76
11. Düzlemde Jordan Eğrileri 78
12. Eğri ve Boyut Kavramları 83

BÖLÜM III

1. Kompleks Sayılar 86
2. Lineer Sübstitüsyonlar 92
3. Lineer Sübstitüsyonların Tasnifi 102
4. Kompleks Sayıların Topolojisi 110
5. Jordan Ayırım Teoremi 114

Sahife

BÖLÜM IV

FONKSİYONLAR TEORİSİ

1. Birtek kompleks Değişkenli Fonksiyonlar 118
2. Süreklilik 118
3. Diferansyellenebilme 120
4. Kompleks İntegral 123
5. Kompleks İntegrallere ait Eşitsizlikler 126
6. Cauchy Teoremi 127
7. Morera Teoremi 133
8. Analitik Fonksiyonlar Serisi 134
9. İntegral Yardımı ile Analitik Fonksiyonların Tarifi 152
10. Cauchy Rezidü Teoremi 157

BÖLÜM V

TAM FONKSİYON

1. Sonsuz Çarpım 172
2. Tam Fonksiyonlar-Kanonik Çarpım 174
3. Gamma Fonksiyonu 194
4. Çevre İntegrali Hesabı 198

BÖLÜM VI

ASAL SAYILARIN DAĞILIMI

1. Riemann Zeta-Fonksiyonu 218
2. Asal Sayılar Teoremi 232
3. $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log \zeta(s) \frac{x^s}{s}\, ds,\ c > 1$, integralinin hesabı 247

BÖLÜM VII

ANALİTİK TEMDİT KAVRAMI

1. Analitik Temdit 256
2. Elemanter Fonksiyonların Tarifi 259
3. Esas Grup ve Monodromi Teoremi 262

BÖLÜM VIII

KONFORM TASVİR KAVRAMI

1. Konform Tasvir 266
2. Lineer Transformasyonlar 270
3. Schlicht Fonksiyonlar 272

Sahife

BÖLÜM IX
RIEMANN YÜZEYLERİNE GİRİŞ

1. Cebirsel Fonksiyonlar 281
2. Köklerin sürekliliği ve Analitikliği 287
3. Riemann Yüzeyinin İnşası 292

BÖLÜM X
TEMEL KAVRAMLAR

1. Grup kavramı 293
2. Komütatif Grup kavramı 308
3. Hilbert Uzayı kavramı 319
4. Lebesgue Ölçüsü ve İntegrali kavramı 376
5. İdeal veya Genelleştirilmiş Fonksiyonlar 347
6. L. Schwartz'ın Teorisi – Lineer Fonksiyonel Metodu 357
7. Dağılımların Trigonometrik Serilere Açılımları 362

BÖLÜM XI
GENEL TOPOLOJİ

1. Topolojik Uzaylar 366
2. Topolojik Uzayda Sürekli Fonksiyonlar 380
3. Yüzey Teorisi 387
4. Örtme Yüzeyleri 391

BÖLÜM XII
CEBİRSEL TOPOLOJİ

1. Simpleks ve Kompleks 402
2. Altbölmeler 403
3. Homoloji Grupları 411
4. Homoloji Gruplarının İnvarientlik Hassaları 420
5. Arakesit Sayısı 434

BÖLÜM XIII
RİEMANN YÜZEYLERİ

1. Riemann Yüzeylerinin İnşası 439
2. İntegral ve Diferansyel 451
3. Diferansyellerin Hilbert Uzayı 463
4. Ortogonal İzdüşüm metodu - Weyl lemması 470
5. Schottky Diferansyelleri 480

BÖLÜM XIV
DİFERANSYEL

Sahife

1. Varlık Teoremleri 486
2. Esas Varlık Teoremi 500
3. Bilineer Bağıntı 512
4. Riemann-Roch Teoremi 516

BÖLÜM XV
SÜREKSİZ GRUPLAR

1. Üniformizasyon 530
2. Fuchs Grupları ve Esas Bölge 546

BÖLÜM XVI
ÇOK DEĞİŞKENLİ HOLOMORF FONKSYONLAR

1. Cauchy Formülü 568
2. Analitik Temdit ve Holomorfi Bölgeleri 591
3. Holomorf Fonksiyonların Sıfırları 610
4. Kuvvet Serileri Halkaları 617
5. Demet Teorisi 625
6. Cebirsel Yapılı Demetler 635
7. Kompleks Manifold 648
8. Kohomoloji Teorisi 655

BÖLÜM XVII
HOMOTOPİ TEORİSİ

1. Kategori ve Funktorlar 667
2. Eğrilerin Homotopisi 671
3. Esas Grup 675
4. Homotopi Grupları 683
5. Topolojik Çift 685

Ek I 696
Ek II 705
Ek III 721
Literatür 725
İndeks 729
Yanlış-Doğru Cetveli 737

NOTASYONLAR

		Sahife
$\in$, ε	ait	1
$f : M \to M'$	tasvir	1
$M \times N$	M ve N nin kartezyen çarpımı	1
$A \subset B$	B, A yı ihtiva ediyor	2
aRb	eşdeğerlik bağıntısı	2
$\hat{I}$	Pozitif tam sayılar cümlesi	2
a^+	a dan hemen sonra gelen tam sayı	3
$\Rightarrow$	intaç	
$\Leftrightarrow$, yy.	yalnız ve yalnız	
$\leftrightarrow$	Birebir tekabül	8
$\lvert\ \rvert$	Nümerik veya Mutlak değer, Modül	
$\exists$	vardır	
$\ni$, $\ni$	öyleki	
$\in$, ε	keyfi pozitif sayı	
$\backsim \approx$	eşdeğerlik sembolü, homoloji	
ω_0	Tabii sayılar cümlesinin kuvveti veya bu cümleye birebir tekabül eden cümlelerin, kardinal sayısı	27
c	Reel sayılar cümlesinin kuvveti, kardinal sayısı	28
$\to$	Limit	
$a_n \to l$	n sonsuz için a_n nin limiti l dir.	
$\int$	integral	
Max	Maksimum	
$\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x	f nin x'e nazaran kısmi türevi	
[a, b]	kapalı aralık	
$V^f_{[a,b]}$	f nin [a, b] deki varyasyonu	
$i = \sqrt{-1}$		
$\bar{z}$	z nin konjügesi	

		Sahife
$\propto$	sonsuz, ideal eleman	
SL(2, C),	Ω	103
T, Tz	2×2 kare Matris, Lineer Sübstitüsyon	
$\int_C f(z)dz$	Kompleks İntegral	124
$\int_{z_0}^{z}$	Yalnız z ye tâbi Integral	
$\prod_{n=1}^{\infty}$	Sonsuz Çarpım	172
$P_n = \rho_n e^{i\Phi_n}$	Kısmi Çarpım	173
$D^{(h)}$	h defa z ye nazaran türev	193
$\zeta(s)$	Riemann ζ – Fonksyonu	219
$\pi(x)$	Asal sayıların Sayısı	232
$\Gamma(z)$	Gamma fonksyonu	
γ	Euler Şabiti	
B_ν	Bernouilli sayıları	
$[x]$	x yi aşmıyan en büyük tam sayı	
$E(h; u)$	Weierstrass primer faktörü	
$P(z-\alpha)$	Fonksyon eleman	
D_1D_2, $D_1 \cap D_2$	D_1 ve D_2 nin ortak kısmı	
$\simeq$, $\cong$	izomorfizm	
π_1 (G, p)	G nin p taban noktasına nazaran esas grubu	
$\forall$	her, bütün	
$\lVert\ \rVert$	Norm	
$A^\perp$	A nın ortogonal Tamamlayıcısı	
$\perp$	ortogonal	
$\cap$	arakesit, ortak kısım	
(α , β)	iç çarpım	
C	kompleks Düzlem	
C_∞	$C \cup \{\infty\}$	
$\varnothing$	Boş	
M^c	M nin dahil bulunduğu bir uzaya nazaran komplemanı.	
S^m	R^2 – düzleminde geometrik bir e^m, $m=0, 1, 2$, simpleksinin bir S yüzeyindeki topolojik görüntüsü (resmi)	
R^n	n–boyutlu Euclid Uzayı	
c^m	m–zinciri, $m = 0, 1, 2$	
∂	sınır operatörü, sınır	

		Sahife
C^m	m–zincirlerim Abel grubu	
$\partial c^m = 0$	m–deviri	
Z^m	m–devirlerin Abel gurubu	
$c^m = \partial c^{m+1}$	sınırlıyan m–devir	
B^m	sınırlıyan m–devirlerin Abel grubu.	
$H^m = Z^m/B^m$	Homoloji Grubu	
χ	Euler karakteristiği	431
g	Bir yüzeyin cinsi	434
$x \times y$	x ve y devirlerinin arakesit sayısı	434
S^*_∞	Üniversel Örtme Yüzeyi	397
$\mathcal{J}$	İdeal sınır	388
β	$\mathcal{J}$ nin tahakkuku	407
(W, Φ)	Riemann Yüzeyi	439
$g_2 \circ g_1$	g_1 ve g_2 fonksyonların kompozisyonu, g_1 in değer bölgesi g_2 nin tarif bölgesinin içinde olması halinde.	440
ω	1. mertebeden diferansyel	454
C^n	n defa sürekli diferansyellenebilir fonksyonların sınıfı.	452
Ω	2. mertebeden diferansyel	455
$\omega_1 \wedge \omega_2$	dış çarpımı	455
$*\omega$	konjüge diferansyel	
D	bölen	516
N_j	Normal cümle	560
$\bar{\partial}$	konjüge diferansyel operatörü	568
C^n	n boyutlu kompleks düzlem	570
$C_B(z^0)$	z^0 ın B deki komponenti	571
P	polidisk	573
T	tor (mümtaz sınır)	573
C(f)	Cauchy integrali	577
(P, H)	Euclid Hartogs şekli	592
$(\tilde{P}, \tilde{H})$	Genel Hartogs şekli	593
B	Formel Serilerin Banach Cebiri	611
ω	Weierstrass polinomu	617
R–modül		623
$\vee$	Ayrık cümle toplamı.	623
$\mathcal{O}_{z^0}$	z^0 da yakınsak kuvvet serilerin C – Cebiri: sap...	626

		Sahife
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}_{z^0}$ ların, bütün $z^0 \in C^n$ ler için, ayrık cümle toplamı Demet	626
(S, π)	demet	627
S_x	x üzerindeki sap	627
s	kesit, $s: W \to S$ sürekli tasvir.	627
$\Gamma(W, S)$	kesitlerin tamamı	627
$\{X, M_w, \gamma_{w'v}\}$	öndemet	629
$\gamma_{w'v}$	Tahdit edici tasvir	629
$\varinjlim M_i$	indüktif limit	630
γs		632
$S_1 \oplus .. \oplus S_l$	Witney toplamı	634
$\mathcal{O}$ – modül		635
I_x	S_x nin 1 elemanı	635
I	1 kesiti: $I = x \to I_x$	635
O_x	S_x nin sıfır elemanı	636
O	Sıfır kesiti: $O = x \to O_x$	636
$\mathcal{A}$	demet	636
$\mathcal{O}^q$	q defa $\mathcal{O}$ (Kartezyen çarpım)	638
$\mathcal{J}$	ideal	638
O	O_z lerin cümle toplamı: $O = \bigvee_{z \in B} \{O_z\}$	640
Im φ, Ker φ		641
(X, H)		649
δ – operatörü		656
$C^p(U, S)$		656
$Z^p(U, S)$		656
$B^p(U, S)$		657
$\mathcal{M}/\mathcal{O}$		660
$\mathcal{D}$		660
χ^p		666
hom (X, Y)		667
$\pi_1(Y, y_0)$		679

BÖLÜM I

SAYI KAVRAMI

1. Reel Sayılar.

1.1.1. **Cümle.** *Elemanları* $a,b,c,\ldots$ olan bir M cümlesi

$$M = \{a, b, c, \ldots\}$$

sembolü ile gösterilir. Şayet $a, b, c, \ldots$ elemanları bir sıraya tâbi iseler

$$M = (a, b, c, \ldots)$$

yazılır. Bir elemanın bir cümleye *ait* oluşu ε sembolü ile ifade edilir. Meselâ, $a \varepsilon M$ gibi.

TARİF 1. $M = \{a, b, c, \ldots\}$, $M' = \{a', b', c', \ldots\}$ iki cümle olsun. M den M' *ye bir f fonksiyonu* diye, M nin herbir a elemanına M' nün belli bir a' elemanını *tekabül* ettiren kaideye denir. a' ye f nin a daki değeri, M ye f nin *tarif bölgesi* ve M' ye de f nin *değer bölgesi* denir.

Bir f fonksiyonu aşağıdaki sembollerden biri ile gösterilebilir.

$$a' = f(a)$$

veya

$$M \xrightarrow{f} M', \; f : M \to M',$$

veya

$$a \xrightarrow{f} a'.$$

Bazen f fonksiyonu yerine f *transformasyonu veya tasviri* tâbiri de kullanılabilir. Bu taktirde $f(a)$, a nın *resmi* olmuş olur.

TARİF 2. M ve N verilmiş iki cümle olsun. M nin herhangi bir elemanını x ve N nin herhangibir elemanını y ile gösterelim. (x, y) çiftlerinin bütününe *çarpım cümle* denir ve $M \times N$ notasyonu ile gösterilir.

M' de değer alan M de iki değişkenli bir fonksiyon, $M \times M$ den M' ye bir f fonksiyonu olarak tarif edilir.

TARİF 3. $M \times M$ den M ye bir f fonksiyonuna *Operasyon* denir.

Misal $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tam sayılar cümlesi üzerinde toplam ve çarpım, tarifimizce birer operasyondur.

TARİF 4. A ve B iki cümle olsun. Şayet A nın herbir elemanı B nin bir elamanı ise A ya B nin bir *alt cümlesi* denir. Bu tarif, B, A yı ihtiva ediyor veya A, B tarafından ihtiva ediliyor manasına gelir ve

$$A \subset B$$

sembolü ile gösterilir.

Notasyonlar için eserin sonunda bulunan fihriste bakınız.

1.1.2. **Eşdeğerlik Bağıntısı.**

TARİF 5. Bir $M = \{a, b, c, \ldots\}$ cümlesini göz önüne alalım. $M \times M$ den $M' = \{$doğru, yanlış$\}$ ye bir f fonksiyonuna, M üzerinde iki eleman arasında bir R *bağıntısı* tarif ediyor denir. Şayet $R(a, b) =$ doğru ise

$$a \; R \; b$$

yazılır. Şayet $R(a, b) =$ yanlış ise

$$a \; R' \; b$$

yazılır.

TARİF 6. M üzerinde iki eleman arasındaki bir R bağıntısına *eşdeğerlik bağıntısı* denir şayet aşağıdaki aksiyomlar sağlanmış ise

(i) Her $a \varepsilon M$ için $a \; R \; a$ dır *(Refleksif)*

(ii) $a \; R \; b \rightarrow b \; R \; a$ *(Simetrik)*

(iii) $a \; R \; b$ ve $b \; R \; c \rightarrow a \; R \; c$ *(Tranzitif)*

Teorem 1.1.2.1. M cümlesi üzerinde tarif edilen bir R eşdeğerlik bağıntısı M yi M_a sınıflarına böler öyleki a yı ihtiva eden M_a sınıfı yalnız ve yalnız a ya eşdeğer $x \varepsilon M$ elemanlarını ihtiva eder. Karşıt olarak M nin bir bölünmesi M üzerinde bir R eşdeğerlik bağıntısı tarif eder öyleki $a \; R \; b$ dir yalnız ve yalnız a ve b aynı sınıftan iseler.

İspat. (i) den dolayı, $a \varepsilon M_a$. Binaenaleyh her eleman en az bir sınıfa aittir. Diğer taraftan farzedelim ki c hem M_a ya hem de M_b ye aittir. Yani $c \; R \; a$, $c \; R \; b$ dir. (ii) den dolayı meselâ $b \; R \; c$. Binaenaleyh $b \; R \; a$, $b \varepsilon M_a$. Şimdi $y \varepsilon M_b$ herhangi bir eleman olsun. Bu taktirde $y \; R \; b$. Dolayısıyle $y \; R \; a$, $y \varepsilon M_a$, $M_b \subset M_a$. Aynı şekilde $M_b \supset M_a$ elde edilir. Dolayısiyle $M_a = M_b$. Karşıt iddiaya gelince açık olarak (i), (ii), (iii) şartları sağlanmış bulunuyor.

1.1.3. **Pozitif Tam Sayılar.** Matematiğin temelini teşkil eden

$$\dot{I} = (1, 2, 3, \ldots)$$

pozitif tam sayılar veya aynı manaya gelen *tabii sayılar Peano*[1] tarafından aşağıda yazılı aksiyomları ile karakterize edilmiştir.

(1) Yusuf Has Hacib, Kudatgubilig eserinde, Tanrıyı benzer şekilde, karakterize etmişti. Bundan ötürü bu aksiyomlara, Has-Peano aksiyomları demek daha uygun olacaktır.

P_1. 1 ile gösterilen bir pozitif tam sayı mevcuttur.

P_2. Her pozitif a tam sayısından *sonra* bir a^+ tam sayısı gelir. Tarif olarak a ya a^+ den *evvel* geliyor denir.

P_3. 1 den evvel hiç bir tam sayı gelmiyor.

P_4. $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$

P_5. Bir pozitif tam sayılar cümlesi, 1 *i*, ve bu cümleye ait herhangibir sayının sonra gelenini ihtiva ediyorsa *bütün* pozitif tam sayıları ihtiva eder[2].

P_5 aksiyomu, matematik indüksiyon ile yapılan bütün ispatların temelidir. Burada *pozitif tam sayı* 1 ve *sonra* bağıntısı ilk kavram olarak kabul ediliyor. Diğerleri ise bu kavramların yardımı ile tesis edilir.

Şimdi $\dot{I}$ pozitif tam sayılar cümlesi üzerinde iki operasyon tarif edeceğiz.

1. Toplama. Her iki a, b pozitif tam sayıların $a+b$ *toplamı*

$$a + 1 = a^+; \; a + b^+ = (a + b)^+ \qquad (1.1.3.1)$$

şartlarını sağlar.

$+$ operasyonu aşağıdaki hassaları haizdir.

A_1. $+$ operasyonu $\dot{I} \times \dot{I}$ den $\dot{I}$ ye bir fonksiyondur. Yani her $a \varepsilon \dot{I}$, $b \varepsilon \dot{I}$ için $a + b \varepsilon \dot{I}$ dir ve birtek olarak belirlidir. Yani $+$ operasyonu birtek olarak mevcuttur.

Evvelâ mevcut olduğunu farzederek birtek olduğunu gösterelim. Farzedelim ki (1.1.3.1) şartlarını sağlıyan iki operasyon mevcuttur. Bu iki operasyonu $+$ ve $\oplus$ ile gösterelim. $a \varepsilon \dot{I}$ sabit için

$$a + m = a \oplus m$$

şartını sağlıyan bütün m lerin $\dot{I}_o$ cümlesini gözönüne alalım.

(i) $1 \varepsilon \dot{I}_o$ dır. Filhakika, (1.1.3.1) deki birinci şart gözönünde tutulursa

$$a + 1 = a^+ = a \oplus 1$$

Binaenaleyh $1 \varepsilon \dot{I}_o$

(ii) $m \varepsilon \dot{I}_o$ ise $m^+ \varepsilon \dot{I}_o$ dır. Filhakika (1.1.3.1) deki ikinci şart gözönünde tutulursa

$$a + m^+ = (a + m)^+ = (a \oplus m)^+ = a \oplus m^+$$

yani (ii) sağlanmıştır. Binnetice $\dot{I}_o$, P_5 i sağlıyor. Binaenaleyh $I_o = \dot{I}$ dir.

(2) Bu aksiyomun doğru tatbik edilmesine yardımcı olmak üzere şu misali veriyoruz: meselâ, $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$ öşdeşliğinin indüksiyon metodu ile ispatı şöyledir. Bu eşitliğin doğru olduğu pozitif tam sayılar cümlesine M diyelim. Görülüyor ki $1 \varepsilon M$. Farzedelim ki $n \varepsilon M$. Göstermek istiyoruz ki $n+1 \varepsilon M$. Filhakika, $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Şu halde P_5 ten dolayı $M = \dot{I}$. Yani özdeşlik bütün pozitif tam sayılar için doğrudur. Metinde buna benzer daha bir çok misaller vardır.

Şimdi (1.1.3.1) hassasını haiz bir + operasyonunun mevcut olduğunu göstermek için aşağıdaki şartları sağlıyan bir + operasyonunu haiz bütün p elemanlarının $\dot{I}_1$ cümlesini gözönüne alalım.

$$p + 1 = p^+ \qquad (1.1.3.3)$$

ve her m için

$$p + m^+ = (p + m)^+ \qquad (1.1.3.4)$$

(i) $1 \varepsilon \dot{I}_1$ dir. Filhakika, $1 + m = m^+ \rightarrow 1 + m^+ = (m^+)^+ = (1+m)^+$. (1.1.3.4) gözönünde tutulursa $1 + m^+ = (1 + m)^+ \rightarrow 1 \varepsilon \dot{I}_1$

(ii) $p \varepsilon \dot{I}_1$ ise $p^+ \varepsilon \dot{I}_1$ dir. Filhakika, $m + p^+ = (m + p)^+ \rightarrow 1 + p^+ = (1 + p)^+$. (1.1.3.3) den dolayı $1 + p^+ = (p^+)^+$. Sonra (1.1.3.4) gözönünde tutulursa $p^+ + m^+ = (m^+ + p)^+ = ((p + m)^+)^+$. Binaenaleyh p^+, (1.1.3.3) ve (1.1.3.4) ü sağladığından (ii) doğrudur.

A_2 . Toplama *asosyatiftir*. Yani

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (1.1.3.5)$$

Bu hassayı, a *ve* b yi sabit tutup c üzerinde indüksiyon yaparak gösterebiliriz. Filhakika, $c = 1$ için (1.1.3.1) den dolayı

$$(a + b) + 1 = (a + b)^+ = a + b^+ = a + (b + 1)$$

Yani (1.1.3.5) doğrudur . Şimdi c için doğru olduğunu kabul ederek c^+ için doğru olduğunu gösterelim.

$$(a+b) + c^+ = [(a+b)+c]^+ = [a+(b+c)]^+ = a+(b+c)^+ = a+(b+c^+)$$

A_3. Toplama *Komütatiftir* (yer değiştirebilir). Yani

$$a + b = b + a \qquad (1.1.3.6)$$

Önce $b = 1$ farzedelim ve a üzerinde indüksiyon yaparak

$$a + 1 = 1 + a$$

olduğunu gösterelim. $a = 1$ için aşikârdır. a için doğru olduğunu kabul ederek a^+ için ispat edelim.

$$a^+ + 1 = (a + 1) + 1 = (1 + a) + 1 = 1 + (a + 1) = 1 + a^+$$

Binaenaleyh a ne olursa olsun $b = 1$ için (1.1.3.6) doğrudur, b için doğruluğunu kabul ederek b^+ için ispat edelim.

$$a + b^+ = a + (b + 1) = (a+b) + 1 = 1 + (a + b) = 1 + (b + a) = (1 + b) + a = (b + 1) + a = b^+ + a$$

A_4. Kısaltma caridir. Yani $a + b = a + c$ ise $b = c$ dir.

Evvelâ $a = 1$ farzedelim. $1 + b = 1 + c$ ise A_3 den dolayı

$$b + 1 = c + 1$$

yani

$$b^+ = c^+$$

P_4 den dolayı da

$$b = c$$

Şimdi teoremi a için kabul ederek a^+ için doğru olduğunu gösterelim. Farzedelim ki

$$a^+ + b = a^+ + c$$

A_3 ve A_2 den dolayı

$$(a + 1) + b = (a + 1) + c$$
$$\Rightarrow \quad (1 + a) + b = (1 + a) + c$$
$$\Rightarrow \quad 1 + (a + b) = 1 + (a + c)$$
$$\Rightarrow \quad a + b = a + c$$

İndüksiyon hipotezinden dolayı

$$b = c$$

2. **Çarpma.** Her iki a, b pozitif tam sayıların $a.b$ *çarpımı*

$$a.1 = a; \quad a.b^+ = ab + a \qquad (1.1.3.7)$$

şartlarını sağlar.

.Operasyonu aşağıdaki hassaları haizdir.

M_1. .Operasyonu birtek olarak mevcuttur.

M_2. Çarpma, toplamaya nazaran *sol-distribütiftir*.

$$a(b + c) = ab + ac \qquad (1.1.3.8)$$

a, b sabit tutularak c üzerinde indüksiyon ile ispat edilebilir.

Filhakika, $c = 1$ için

$$a\,(b + 1) = ab^+$$

Diğer taraftan (1.1.3.7) nin ikinci denkleminden dolayı

$$ab + a = ab^+$$

Şimdi (1.1.3.8) i c için kabul edip c^+ için ispat edelim.

$$a(b + c^+) = a(b + c)^+ = a(b + c) + a,$$

indüksiyon hipotezini kullanırsak son ifade $(ab + ac) + a$ dır. Diğer taraftan

$$(ab + ac) + a = ab + (ac + a) = ab + ac^+$$

M_3. $\quad 1.a = a$ ve $b^+.a = ba + a$

(1.1.3.7) nin birinci denkleminden dolayı $a = 1$ için $1.a = a$ doğrudur. Şimdi a üzerinde indüksiyon yapılırsa

$$1.a^+ = 1.\,(a + 1) = 1.a + 1.1 = 1.a + 1$$

indüksiyon hipotezinden dolayı $1.a + 1 = a + 1 = a^+$.

$b^+.a = ba+a$ nın ispatına gelince, $a = 1$ için bu doğrudur. Zira

$$b^+.1 = b^+ = b + 1 = b.1 + 1$$

Şimdi a üzerinde indüksiyon yaparak

$$b^+.a^+ = b^+ (a+1) = b^+a+b^+ = ba+a+b+1 = ba + b + a + 1 = ba^+ + a^+.$$

M_4. Çarpma *asosyatiftir*: $ab.c = a.bc$.

İspat. $c = 1$ için

$$(ab)\ 1 = ab = a(b1).$$

c üzerinde indüksiyon ile, (1.1.3.7) den dolayı

$$ab.c^+ = ab.c + ab = a.bc + ab = a\ (bc + b) = a(bc^+)$$

M_5. Çarpma *Komütatiftir*: $ab = ba$

$b = 1$ alalım. $a.1 = a = 1.a$ (M_3 den dolayı)

Şimdi indüksiyon ile (1.1.3.7) ile M_3 gözönünde tutulursa

$$ab^+ = ab + a = ba + a = b^+a$$

M_6. Çarpma, Toplamaya nazaran *sağ-distribütiftir*:

$$(b + c)a = ba + ca$$

İspat. $(b + c)a = a(b + c) = ab + ac = ba + ca$.

M_7. Kısaltma caridir. Yani $ac = bc$ ise $a = b$ dir.

1.1.4. **Sıra kavramı** $a \varepsilon \dot{I}$, $b \varepsilon \dot{I}$ iki pozitif tam sayı olsun. a, b den *küçüktür* denir ve

$$a < b$$

yazılır, şayet $\exists\ c \varepsilon \dot{I} \ni$

$$a + c = b$$

Aşağıdaki hassalar kolaylıkla gösterilebilir.

TARİF 7. $a < b$ ise $b > a$ (b büyüktür a okunur).

O_1. Herhangi a, b iki pozitif tam sayı için

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

bağıntılarından yalnız ve yalnız birisi doğrudur.

O_2. $<$ *transitiftir*. Yani

$$a < b, \quad b < c \Rightarrow a < c$$

O_3 $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O_4. $a < b \Rightarrow ac < bc$

1.1.5. Çıkarma. Aşağıdaki

$$x + b = a \qquad (1.1.5.1)$$

denkleminin çözümüne (şayet varsa) a ile b nin farkı denir ve $a - b$ ile gösterilir. a ile b den $a - b$ yi yi teşkil etme oprerasyonuna *çıkarma* denir.

Şayet $a \leq b$ ise (1.1.5.1) denkleminin İ de çözümü yoktur. Olmasını istiyorsak, İ sayı sistemini yeni elemanların ithali ile genişletmemiz icab eder.

1.1.6. Bölme. Aşağıdaki

$$bx = a \qquad (1.1.6.1)$$

denkleminin çözümüne (şayet varsa) a nın b ile bölümü denir ve meselâ $\frac{a}{b}$ ile gösterilir. a ile b den $\frac{a}{b}$ yi teşkil etme operasyonuna *bölme* denir.

Şayet a, b nin bir katı değilse (1.1.6.1) denkleminin İ de çözümü yoktur. Olmasını istiyorsak, yukarda işaret ettiğimiz gibi İ sistemini yeni elemanların ithali ile genişletmemiz icab eder.

1.1.7. **Tam Sayılar.** Pozitif, negatif tam sayıları ve sıfırı pozitif tam sayı çiftleri ile tarif edeceğiz. a, b sırasında olan (a, b) pozitif tam sayı çiftlerinin bütünlüğünü göz önüne alalım.

TARİF 8. (a, b), (c, d) ye *eşittir* diyor ve

$$(a, b) = (c, d)$$

yazıyoruz, şayet

$$a + d = c + b$$

ise.

Teorem. 1.1.7.1. $(a, b) = (c, d)$ eşitliği bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. $a + b = a + b \Rightarrow (a, b) = (a, b)$

$a + d = c + b \Rightarrow c + b = a + d \Rightarrow (a, b) = (c, d)$ ise $(c, d) = (a, b)$ dir.

$$(a,b) = (c,d) \text{ ve } (c, d) = (e,f) \Rightarrow (a, b) = (e, f)$$

Filhakika, farzedelim ki

$$a + d = c + b, \quad c + f = d + e$$

Bu taktirde

$$a + d + f = c + b + f = b + d + e$$

A_4. gözönünde tutulursa $a + d + f = b + d + e \Rightarrow a + f = b + e$ yani

$$(a, b) = (e, f)$$

TARİF 9. Toplama. (a, b) ve (c, d) çiftlerinin toplamı

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

olarak tarif edilir.

TARİF 10. Çarpma. *(a, b) ve (c, d)* çiftlerinin *çarpımı*

$$(a, b).(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

Teorem 1.1.7.2. Toplama ve çarpma *asosyatif* ve *komütatiftir* ve çarpma toplama nazaran *distribütiftir.*

İspat. Bu hassalar, pozitif sayıların haiz oldukları aynı hassaların birer neticesidir. Misâl olarak asosyatif hassasını gösterelim.

$$[\ (a, b) + (c, d)\ ] + (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$$

Aynı şekilde

$$(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a + c + e, b + d + f)$$

İzomorfizm. $\{a, b, \ldots\}$ ve $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ iki sayı cümlesi verilmiş olsun. $\{a, b, \ldots\}$ de tarif edilen toplama ve çarpma operasyonlarını $+, .$, $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ de ise $\oplus, \odot$ ile gösterelim. $\{a, b, \ldots\}$ ve $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ cümlelerinin elemanları arasında toplama ve çarpmaya nazaran bir *izomorfizm* tarif edilmiştir denir şayet aşağıdaki şartlar sağlanmış ise

(i) elemanlar arasında bir birebir tekabül vardır. Yani

$$a \leftrightarrow \alpha,\ b \leftrightarrow \beta, \ldots$$

(ii) bu tekabülde operasyonlar muhafaza edilmiştir. Yani

$$a + b \leftrightarrow \alpha \oplus \beta,\ ab \leftrightarrow \alpha \odot \beta$$

Teorem. 1.1.7.3. *(a,b)* çiftlerinin cümlesi, öyleki $a > b$, pozitif tam sayılar cümlesine izomorftır.

İspat. § 1.1.4 den dolayı $a > b \Rightarrow a = n + b$. Diğer taraftan $(n + b, b)$ b ye tâbi değildir. Zira

$$(n + b, b) = (n + c, c)$$

dir. Şu halde

$$(n + b, b) \leftrightarrow n.$$

dir.

(ii) yi tahkik edelim.

$$(n + b, b) = (m + c, c) \Rightarrow n + b + c = b + m + c \Rightarrow m = n$$

sonra

$$(n + b, b) \leftrightarrow n, \quad (m + c, c) \leftrightarrow m$$

$\Rightarrow$

$$(n + b, b) + (m + c, c) = (m + n + b + c, b + c) \leftrightarrow m + n$$

$$(n + b, b) \cdot (m + c, c) = (mn + nc + mb + bc + bc,$$
$$nc + mb + bc + bc) \leftrightarrow mn.$$

Bu izomorfizmden dolayı $(n + b, b)$ çifti yerine n notasyonunu kullanacağız ve diyeceğiz ki pozitif sayılar tam sayıların bir alt cümlesidir (hakikatte pozitif sayılara izomorf bir cümle tam sayıların bir alt cümlesidir).

TARİF 11. Eşitliğin tarifinden dolayı (a, a) sayısı a ya tâbi değildir. Bu sayıya sıfır diyeceğiz ve 0 ile göstereceğiz.

Teorem 1.1.7.4. Her (a, b) sayı çifti için

$$(a, b) + 0 = (a, b),\ (a, b).0 = 0$$

İspat. $(a, b) + (c, c) = (a + c, b + c) = (a, b)$

$$(a, b) \cdot (c, c) = (ac + bc, ac + bc) = (c, c)$$

§ 1.1.4. den dolayı her (a, b) sayı çifti için

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

bağıntılarından yalnız birisi doğrudur. İki sonuncuyu incelemiş bulunuyoruz. $a < b$ tipinde (a, b) sayı çiftine gelince, $(a, a + n)$ şeklinde yazılabilir. Bu ise gösteriyor ki a ya tâbi değildir.

Açık olarak

$$(n + b, b) + (a, a + n) = 0$$

TARİF 12. $(a, a + n)$ sayı çiftini $-n$ sembolü ile göstereceğiz ve bu gibi sayılara *negatif* sayı diyeceğiz. Göstermiş oluyoruz ki

Teorem 1.1.7.5. $\quad n + (-n) = 0$

Hülâsa olmak üzere, § 1.1.7 de tarifi verilen eşitliğe, toplam, çarpım operasyonlarına tâbi (a, b) sayı çiftleri *tam sayılar* cümlesini teşkil eder. Bu tam sayılar cümlesi, *pozitif* ve *negatif* sayılar ile *sıfırı* ihtiva eder.

Teorem 1.1.7.6. Tam sayılar cümlesinde

$$x + b = a \tag{1.1.7.1}$$

denkleminin bir ve birtek çözümü vardır.

İspat. $(a + (-b)) + b = a + ((-b) + b) = a + 0 = a$. yani $a + (-b)$ (1.1.7.1) i sağlıyor. (1.1.7.1) in birtek çözümü vardır. İki çözümü olduğunu kabul edelim. Bu çözümleri x_1, x_2 ile gösterirsek

$$x_1 + b = x_2 + b$$

yani $x_1 = x_2$ (teorem 1.1.7.5).

§ 1.1.5 göz önünde tutulursa $a + (-b)$ sadece $a - b$ yazılır.

TARİF 13. $a - b < 0$ ise $a < b$ yazılır.

Genel olarak tam sayılar sisteminde *sıra* şu şekilde tarif edilir.

$$(a, b) \gtreqless (c, d)$$

şayet

$$a + d \gtreqless b + c$$

ise.

Tam sayıların diğer mühim hassalarını aşağıda kaydediyoruz.

1. Şayet $a.b = 0$ ise ya a, ya b veya ikisi birden sıfırdır.
2. Her a için ya $a = 0$ ya $a < 0$ ya $a > 0$ dir.
3. Şayet $a > 0$ ve $b > 0$ ise $a + b > 0$ ve $a.b > 0$ dır.

İspatları aşikârdır.

TARİF 14. $a \neq 0$ bir tam sayı olduğuna göre biliyoruz ki a pozitif veya negatiftir. Şu halde herhangibir $a \neq 0$ tam sayısı

$$a = \pm a_0$$

olarak yazılabilir. Burada a_0 pozitif tam sayıdır.

Tarif olarak a_0 a a nın *nümerik* veya *mutlak* değeri denir ve

$$| a | = a_0$$

diye yazılır. Bundan başka $a = 0$ için

$$| 0 | = 0$$

vazedilir.

Şu halde $| a | = a$ dır şayet $a \geq 0$ ise, $| a | = -a$ dır şayet $a < 0$ ise

Aşağıda, mutlak değer ile ilgili mühim bağıntıları kaydediyoruz.

$$|a| = | -a |$$
$$|a - b| = | b - a |$$
$$|a \pm b| \leq | a | + | b |$$
$$|a \pm b| \geq \| a | - | b \|$$
$$|ab| = | a | . | b |$$
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

Bunlar kolaylıkla ispat edilir.

Misal olmak üzere üçüncü bağıntıyı $a > 0, b < 0$ için ispat edelim. $b = -b_0$ vaz edelim. Bu taktirde $a + b = a - b_0$, $a - b = a + b_0$.

Şayet $a - b_0 \geq 0$ ise

$$| a + b | = | a - b_0 | = a - b_0 \leq a + b_0 = | a | + | b |.$$

Şayet $a - b_0 < 0$ ise

$$| a + b | = | a - b_0 | = b_0 - a \leq a + b_0 = | a | + | b | .$$

Diğer taraftan

$$| a - b | = a + b_0 = | a | + b |$$

Diğer haller aynı şekilde incelenir.

Problem. $a.a = a^2$ diye tarif edildiğine göre $\alpha^2 \geq 0$ eşitsizliğini ispat ediniz. Özel olarak $1 > 0$ dır.

1.1.8. **Rasyonel sayılar.** $\{a, b. c, \ldots\}$ tam sayılar cümlesini gözönüne alalım. Bu cümleden, elemanları a, b sırasında olan (a, b) $b \neq 0$, sayı çiftlerini teşkil edelim. Bu sayılar için toplam ve çarpım operasyonlarını tarif edelim. Her şeyden evel iki eleman arasındaki eşitliği tarif edelim.

Eşitlik. (a, b) sayısı (c, d) ye *eşittir* diyoruz ve

$$(a, b) = (c,d)$$

yazıyoruz, şayet

$$ad = bc$$

ise.

$(a, b) = (c, d)$ bağıntısının eşdeğerlik bağıntısının şartlarını sağladığı açık olarak görülüyor. Teorem 1.1.2.1. den dolayı bu bağıntı (a, b) sayı çiftlerinin M cümlesini sınıflara ayırır öyle ki her sınıf eşdeğer elemanlardan müteşekkildir. Bir sınıfa ait herhangibir eleman o sınıfı temsil eder.

(a, b) elemanları için *toplam* ve *çarpım* şu şekilde tarif edilir..

Toplam,

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

Çarpım.

$$(a, b) . (c, d) = (ac, bd), bd \neq 0$$

Sınıfların toplamı ve çarpımı, temsilci elemanların toplamı ve çarpımı yardımı ile tarif edilir.

Bu operasyonları yine $+$ ve . ile göstereceğiz.

Toplam.

$$M_{(a, b)} + M_{(c, d)} = M_{(a d + bc, \ b d)}$$

Çarpım.

$$M_{(a, b)} . M_{(c, d)} = M_{(ac, b d)}$$

Bu operasyonların, temsilci elemanlara tâbi olmadıklarını göstermek icab eder. Yani $(a, b) = (a', b')$ ve $(c, d) = (c', d')$ ise

$$(ad + bc, bd) = (a' d' + b'c', b'd') \qquad (1.1.8.1)$$

Filhakika, tariften dolayı

$$ab' = a'b, \qquad cd' = c'd$$

ve

$$ab'dd' = a'bdd', \qquad cd'bb' = c'd'bb'$$

Bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak

$$(ad + cb)\, b'd' = (a'd' + b'c')\, bd$$

Bu ise (1.1.8.1) in tarifidir.

Aynı şekilde

$$(ac, bd) = (a'c', b'd')$$

Yine kolaylıkla gösterilebilir ki, sınıflar için tarif edilen + ve . operasyonları *komütatif* ve *asosyatiftir*. Üstelik . operasyonu + operasyonuna nazaran *distribütiftir*. Misâl olmak üzere + nın komütatif olduğunu gösterelim. Yani

$$M_{(a,\,b)} + M_{(c,\,d)} = M_{(c,\,d)} + M_{(a,\,b)}$$

İspat. $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd) = (cb + da, db) = (c, d) + (a, b)$

TARİF 15. Herbir $M_{(a,\,b)}$ sınıfına *rasyonel* sayı denir. Bu deyimden, $M_{(a,\,b)}$ sınıfını temsil eden (a, b) rasyonel sayısı anlaşılmalıdır.

Teorem. 1.1.8.1. $(a, b) = (c, d).(x, y)$ denkleminin bir ve birtek çözümü vardır.

İspat. Tariften solayı

$$(a, b) = (cx, dy)$$

yani

$$ady = bcx \tag{1.1.8.2}$$

Açık olarak $x = ad$, $y = bc$ (1.1.8.2) nin bir çözümüdür. Yani (ad, bc) teoremdeki denklemin bir çözümüdür.

Birtek çözümü olduğunu göstermek için (ξ, η) nın ikinci bir çözüm olduğunu farzedelim.

$$(c, d).(x, y) = (c, d).(\xi, \eta)$$

yani

$$(cx, dy) = (c\xi, d\eta)$$

$\Rightarrow$

$$cdx\eta = cd\xi y$$

yani

$$x\eta = \xi y$$

$\Rightarrow$

$$(x, y) = (\xi, \eta)$$

TARİF 16. (x, y) ye (a, b) nin (c, d) ile bölümü denir ve $\dfrac{(a, b)}{(c, d)}$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem. 1.1.8.2. Rasyonel sayılar tam sayılara izomorf bir alt sınıf ihtiva ederler.

İspat. (cx, x) rasyonel sayısı x e tâbi değildir. Zira (cy, y) diğer bir rasyonel sayı için $(cx, x) = (cy, y)$ dir. Şu halde

$$(cx, x) \leftrightarrow c$$

dir. Bu birebir tekabülün

operasyonları muhafaza ettiği kolaylıkla tahkik edilebilir. (Teorem 1.1.7.3 ü gör)

TARİF 17. Teorem 1.1.8.2 gözönünde tutularak $(cx, x) = (c, 1) = c$ vaz edilebilir.

En son aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem. 1.1.8.3. Herbir rasyonel sayı iki tam sayının bölümüdür.

İspat, Her bir (a, b) rasyonel sayısı teorem 1.1.8.1 den dolayı

$$(a, 1) = (b, 1).(x, y)$$

denkleminin çözümüdür. Tariften solayı

$$(a, b) = \frac{(a, 1)}{(b, 1)}$$

dir. Yine tariften dolayı

$$(a, b) = \frac{a}{b}$$

dir.

Binaenaleyh bütün $\dfrac{a}{b}$ rasyonel sayılar cümlesi gözönüne alınırsa, bu sistemde

$$a = bx$$

denkleminin bir ve birtek çözümü olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi, rasyonel sayıları aksiyomatik olarak karakterize edelim.

1.1.9. **Cisim.** Üzerinde iki operasyon tarif edilen bir $F = \{a, b, \ldots\}$ cümlesine cisim denir şayet bu iki operasyon ile birlikte F cümlesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa.

1. + (Toplam) ve . (Çarpım) ile gösterilen bu iki operasyona nazaran F *kapalıdır*. Yani bu operasyonların herbiri F nin herhangi iki elemanına tatbik edildiği takdirde netice yine F ye ait bir elemandır.

2. + ve . operasyonu *asosyatif* ve *komütatif*tir. Üstelik . operasyonu + operasyonuna nazaran *distribütif*tir.

3. (i) F de 0 ile gösterilen bir *sıfır* eleman vardır öyle ki, her $a \in F$ için

$$a + 0 = a$$

(ii) Her $a \varepsilon F$ için, F de, a nın *negatifi* denilen ve $-a$ ile gösterilen bir eleman vardır öyleki

$$a + (-a) = 0$$

4. (i) F de 1 ile gösterilen bir *birim* eleman vardır öyleki, her $a \varepsilon F$ için

$$a.1 = a$$

(ii) sıfırdan farklı her $a \varepsilon F$ için, F de, a nın *tersi* denilen ve a^{-1} ile gösterilen bir eleman vardır öyleki

$$a'a^{-1} = 1$$

Problem. 3 ve 4 te tarif edilen 0,1 negatif ve ters elemanların birtek olduğunu gösteriniz.

3 ve 4 şartları şu şekilde de ifade edilebilirler.

3'. $$a + x = b$$

ve

4'. $$ax = b$$

denklemlerinin F de daima çözümü vardır. Bu çözümlerin birtek olduğu aşikârdır. Filhakika 3'. gözönüne alınır ve $y \varepsilon F$ ikinci bir çözüm farzedilirse

$$a + x = a + y$$

iki tarafa $-a$ ilâve edilirse $x = y$ dir.

4'. gösönüne alınır ve $y \varepsilon F$ ikinci bir çözüm farzedilirse

$$ax = ay$$

İki taraf a^{-1} le çarpılırsa $x = y$ dir.

Hülâsa. 2. gözönünde tutulursa cisim diye, toplama çıkarma, çarpma ve bölmeye nazaran kapalı herhangibir cümleye denir.

§ 1.1.9 a göre rasyonel sayılar bir cisim teşkil ederler. Burada sıfır eleman $(0, b)$ ve birim elamanı (a, a) dır.

TARİF 18. Bir cisim umumiyetle F, +, . notasyonu ile gösterilir.

TARİF 19. F, +, . bir cisim ve S, F nin bir alt cümlesi olsun. Farzedelim ki S, + ve . ya nazaran kapalıdır. Şayet S ve +, . operasyonları cisim aksiyomlarını sağlıyorlarsa bu taktirde S ye F nin *alt cismi* denir.

Teorem 1.1.9.1. Bir F, +, . cismi verilmiş olsun. $S \subset F$ alt cisim olması için gerek ve yeter şart S,

(i) + ve.ya nazaran kapalı olmalıdır.

(ii) 1 i ihtiva etmelidir.

(iii) kendisine ait her elemanın negatifini ve sıfırdan farklı her elemanın tersini ihtiva etmelidir.

İspat. Gerek şartın ispatı aşikârdır, çünki bir tahkikatten ibarettir. Yeter şarta gelince, S nin sıfır elemanı ihtiva ettiğini göstermek kâfidir. (ii) ve (iii) den dolayı $-1 \varepsilon S$ dir. (i) den dolayı da $1 - 1 = 0 \varepsilon S$ dir.

Bu teoreme göre tam sayılar cümlesi rasyonel sayılar cümlesinin bir alt cümlesi olmakla beraber bir alt cismi değildir.

1.1.10. **Rasyonel sayılarda sıra kavramı.** Tam sayılarda (§ 1.1.5) olduğu gibi tarif edilir. Yani

$$(a, b) \gtreqless 0$$

dır, şayet

$$ab \gtreqless 0$$

se

Bu sıra kavramı § 1.1.5, 2., 3., hassalarını haizdir. Meselâ 3. ü gösterelim. Yani

$(a, b) > 0$ ve $(c, d) > 0$ ise $(a, b) + (c, d) > 0$ dır.
Filhakika, tariften dolayı

$$ab > 0, \; cd > 0$$

dır. § 1.1.5, 3. ve § 1.1.5, problemden dolayı

$$abd^2 > 0, \quad b^2cd > 0$$

dir. Yine § 1.1.5, 3 den dolayı

$$abd^2 + b^2cd = (ad + bc)\, bd > 0$$

Halbuki

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

Binaenaleyh tariften dolayı

$$(a, b) + (c, d) > 0$$

1.1.11. **Sıra kavramı Archimed hassasını haizdir.** Bu hassayı şu şekilde ifade ediyoruz.

Teorem 1.1.11.1. $\frac{a}{b} > 0$ ve $\frac{c}{d} > 0$ sayıları verildiğine göre $\exists n > 0$, tam sayısı $\ni$

$$\frac{c}{d}\, n - \frac{a}{b} > 0$$

dır.

İspat. n yeter derecede büyük için

$$n > \frac{a}{b} \cdot d$$

Binaenaleyh

$$n.\frac{c}{d} < \frac{a}{b} .c \leq \frac{a}{b}$$

Not. Özel olarak $\frac{c}{d}$, 1 e eşit alınırsa, *Archimed* kanunu

$$n > \frac{a}{b}$$

şeklini alır.

Teorem 1.1.11.2. $\frac{c}{d}$ istenildiği kadar büyük bir rasyonel sayı ve $\frac{a}{b}$ istenildiği kadar küçük bir rasyonel sayı olsun. Bu takdirde $\exists n > 0$ tam sayısı ∋

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$$

İspat. Teorem 1.1.11.1 den dolayı $\exists n > 0$, ∋

$$n.\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Özel hal $\frac{c}{d}$, 1 e eşit alınırsa, $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$ dir.

1.1.12. **Reel Sayılar-Cantor Teorisi.** Burada yeni bir cisim, yani reel sayılar cismini inşa ederek rasyonel sayıların bir alt cisim olduğunu göstereceğiz.

TARİF 20. Bir M rasyonel sayı koleksiyonu (1) verilmiş olsun. Farzedelim ki M nin herhangi bir elemanı sabit bir a rasyonel sayısından büyük değildir. Bu taktirde M *üstten* sınırlıdır veya a, M nin bir *üst sınırıdır* denir.

M nin *alt sınırları* benzer şekilde tarif edilir. Şayet M üstten ve alttan sınırlı ise, sadece *sınırlıdır* denir.

TARİF 21. $n > 0$ tam sayısına tâbi a_n rasyonel sayılarına *rasyonel sayı dizisi* denir ve

$$a_1, a_2, \ldots$$

veya

$$(a_n)$$

notasyonu ile gösterilir.

(1) Cümle mânasına gelir.

TARİF 22. Bir (a_n) rasyonel sayı dizisine *Esas dizi* denir şayet verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ *rasyonel sayısına* karşılık bir $n = n(\varepsilon)$ pozitif tam sayısı bulunabilirse öyleki bütün $p, q > n$ için

$$| a_p - a_q | < \varepsilon$$

Teorem 1.1.12.1. Her esas dizi sınırlıdır.

İspat. Filhakika

$$a_p = a_{n+1} + (a_p - a_{n+1})$$

ve

$$|a_p| \leq | a_{n+1} | + | a_p - a_{n+1} | .$$

Esas dizinin tarifinden dolayı n yeter derecede büyük alınırsa bütün $p > n$ ler için $| a_p - a_{n+1} | < \varepsilon$. Binaenaleyh bütün $p > n$ ler için

$$| a_p | < | a_{n+1} | + \varepsilon = k_1.$$ (1)

Sonra $k_2 = \text{Max.}\ (|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$ vaz eder ve $k = \text{Max.}\ (k_1, k_2)$ alırsak

$$|a_n| < k, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Binaenaleyh (a_n) sınırlıdır.

1.1.13. Toplam. (a_n) ve (b_n) dizilerinin *toplamı* diye $(a_n + b_n)$ dizisine denir.

Çarpım. (a_n) ve (b_n) dizilerinin çarpımı diye $(a_n b_n)$ dizisine denir.

Teorem. 1.1.13.1. Esas dizilerin toplamı ve çarpımı yine esas dizidir.

İspat. Meselâ çarpmayı ele alalım. Teorem 1.1.12.1 den dolayı her n için

$$| a_n | \leq k_1, \qquad | b_n | \leq k_2$$

Esas dizinin tarifinden dolayı, verilen bir $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilir öyleki aynı zamanda

$$| a_p - a_q | < \frac{\varepsilon}{2 k_2} \quad p, q > n$$

$$| b_p - b_q | < \frac{\varepsilon}{2 k_1} \quad p, q > n.$$

Diğer taraftan

$$| a_p b_p - a_q b_q | \leq | a_p b_p - a_q b_p | + | a_q b_p - a_q b_q |$$

Halbuki

$$| a_p b_p - a_q b_p | = | b_p | \ | a_p - a_q | < \frac{\varepsilon}{2}$$

(1) § 1.1.12 ve § 1.1.13 bahsinde, aksi iddia edilmedikçe, k harfi daima bir rasyonel sayıyı gösterir.

$$| a_q b_p - a_q b_q | = | a_q | \quad | b_p - b_q | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Binaenaleyh

$$| a_p b_p - a_q b_q | < \varepsilon$$

yani $(a_n b_n)$ dizisi esas dizidir.

Şu halde aşağıdaki teoremi söyliyebiliriz.

Teorem 1.1.13.2. Esas dizilerin cümlesi toplama ve çarpma operasyonlarına nazaran kapalıdır.

Şimdi, iki esas dizinin *eşitliğini* tarif etmek için *sıfırı* tarif edelim.

TARİF 23. Bir (a_n) esas dizisine *sıfır-dizisi* denir şayet her $\varepsilon > 0$ rasyonel sayısına karşılık bir $n = n(\varepsilon)$ bulunabilirse öyleki bütün $p > n$ ler için

$$| a_p | < \varepsilon$$

Teorem 1.1.13.3. (a_n) ve (b_n) sıfır-dizileri ise $(a_n + b_n)$ de sıfır-disisidir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verildiğine göre müşterek bir n bulunabilir öyle ki $p > n$ için

$$| a_p | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad | b_p | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Diğer taraftan bütün $p > n$ için

$$| a_p + b_p | \leq | a_p | + | b_p | < \varepsilon$$

Teorem 1.1.13.4. Şayet (a_n) bir esas dizi ve (b_n) bir sıfır dizisi ise, $(a_n b_n)$ sıfır-dizisidir.

İspat. Bir yandan $| a_n | \leq k$ ve diğer taraftan da $p > n$ için $| b_p | < \frac{\varepsilon}{k}$ dır. Binaenaleyh

$$| a_p b_p | < \varepsilon$$

TARİF 24. (a_n) ve (b_n) dizilerine *eşittir* denir ve $(a_n) \sim (b_n)$ ile gösterilir şayet $(a_n - b_n)$ dizisi sıfır-dizisi ise.

Teorem 1.1.13.5. $\sim$ eşitliği bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. $(a_n - b_n)$ sıfır-dizisi olsduğundan $(a_n) \sim (a_n)$ dir.

$(a_n) \sim (b_n) \Rightarrow (a_n - b_n)$ sıfır-dizisi. Binaenaleyh $(b_n - a_n)$ sıfır dizisidir ve $\Rightarrow (b_n) \sim (a_n)$

$(a_n) \sim (b_n)$ ve $(b_n) \sim (c_n) \Rightarrow (a_n - b_n)$ ve $(b_n - c_n)$ sıfır dizisidirler. Bu iki dizinin toplamı: $(a_n - c_n)$ sıfır-dizisidir (teorem 1.1.13.3). Binaenaleyh $(a_n) \sim (c_n)$.

TARİF 25. Teorem 1.1.2.1 den dolayı esas dizilerin F bütünü sınıflara bölünür. Tarif olarak herbir sınıfa *reel sayı* denir

Sıfır-dizisini ihtiva eden sınıfa *sıfır reel sayısı* denir ve 0 ile gösterilir.

Bu sınıfların toplamı ve çarpımı şu şekilde tarif edilir.

Sınıfların toplamı. M ve N iki sınıf olsun. Farzedelim ki (a_n) esas dizisi M ye ve (b_n) esas dizisi N ye aittir. Bu taktirde M ve N nin toplamı diye $(a_n + b_n)$ esas dizisini ihtiva eden sınıfa denir. Bu toplam

$$M + N$$

ile gösterilir[1].

Sınıfların çarpımı. M ve N nin çarpımı diye $(a_n b_n)$ esas dizisini ihtiva eden sınıfa denir. Bu çarpım

$$M \,.\, N$$

ile gösterilir.

Bu operasyonların aşağıdaki hassaları kolaylıkla gösterilebilir.

1. Bu operasyonlar birtek olarak tariflidir. Yani $(a'_n) \sim (a_n)$; $(b'_n) \sim (b_n)$ ise $(a'_n + b'_n) \sim (a_n + b_n)$ ve $(a'_n b'_n) \sim (a_n b_n)$ dir.

2. Bu operasyonlar *asosyatif* ve *komütatiftir*. Üstelik . operasyonu + operasyonuna nazaran *distribütiftir*.

Teorem. 1.1.13.6. F cümlesi çıkarma ve bölmeye nazaran kapalıdır.

Meselâ sonuncuyu gösterelim. Yani ispat etmeliyiz ki

$$A.X = B \qquad (1.1.13.1)$$

denkleminin F de çözümü vardır. Önce iki lemma zikredelim.

Lemma 1. (a_n) ve (b_n) dizileri verilmiş olsun. Farzedelim ki sonlu sayıda indeksler hariç $a_n = b_n$ dir. Bu taktirde

$$(a_n) \sim (b_n)$$

İspat. $\exists N > 0$ tam sayısı $\ni n > N$ için $a_n = b_n$ dir. Yani $a_n - b_n = 0$. Binaenaleyh $(a_n - b_n)$ sıfır- dizisidir.

Lemma 2. (a_n) esas dizisi sıfır-dizisi değilse, en fazla sonlu sayıda a_n ler sıfırdır.

İspat. Esas dizinin tarifinden dolayı $\varepsilon > 0$ için $\exists n \ni p, q > n$ için

$$| a_p - a_q | < \varepsilon$$

(1) M + N deki + işaretini, $a_n + b_n$ deki + işareti ile karıştırmamak gerektir. Birincisi, ikincinin yardımı ile tarif edilmiştir.

Şayet sonsuz sayıda a_n ler sıfır olsaydı, icabında n yi daha da büyülterek bütün, meselâ a_q ler sıfır olurdu. Binaenaleyh

$$| a_p | < \varepsilon$$

yani (a_n) sıfır-dizisidir.

Netice. Şu halde A sınıfı 0 reel sayısı değilse, Lemma 1 ve Lemma 2 den dolayı A sınıfı yani A reel sayısı, bütün terimleri sıfırdan farklı olan bir (a_n) esas dizisi ile temsil edilebilir.

Gelelim (1.1.13.1) denkleminin çözümüne. Yukardaki netice göz önünde tutularak A reel sayısını temsil eden (a_n) esas dizisini o şekilde seçelim ki $a_n \neq 0$, $n = 1,2,\ldots$. (b_n), B yi temsil eden herhangi bir esas dizi olduğuna göre (1.1.13.1) denklemini çözebilmek için

$$(a_n) \cdot (x_n) = (b_n) \qquad (1.1.13.2)$$

denklemini sağlıyan bir (x_n) esas dizisini arayalım.

(1.1.13.2) denklemini, diziler üzerinde tarif edilen çarpma operasyonundan dolayı (§ 1.1.13)

$$(a_n\, x_n) = (b_n) \qquad (1.1.13.3)$$

şeklinde yazıbiliriz. Yani

$$a_n \quad x_n = b_n.$$

$a_n \neq 0$ ve rasyonel sayılar bölmeye nazaran kapalı olduğundan

$$x_n = \frac{b_n}{a_n}$$

dır. Göstermeliyiz ki (x_n) bir esas dizidir.

Filhakika, teorem 1.1.12.1 den dolayı

$$| a_n | \leq k_1, \ | b_n | \leq k_2, \left| \frac{1}{a_n} \right| \leq k_3$$

(çünki $a_n \neq 0$ olduğundan $| a_n | \geq k$ dır).

Sonra,

$$\left| \frac{b_p}{a_p} - \frac{b_q}{a_q} \right| = \left| \frac{1}{a_p a_q} \right| \ | b_p a_q - b_p a_p + b_p a_p - b_q a_p |$$

$$\leq k^2_3 \ (k_2 \ | a_q - a_p | + k_1 \ | b_p - b_q |)$$

Halbuki (a_n) ve (b_n) esas dizi olduklarından $\varepsilon > 0$ için $\exists n \ni p,q > n$ için

$$| a_q - a_p | < \frac{\varepsilon}{2k_2 k^2_3}, \ | b_p - b_q | < \frac{\varepsilon}{2k_1 k^2_3}$$

Binaenaleyh

$$\left| \frac{b_p}{a_p} - \frac{b_q}{a_q} \right| < \varepsilon.$$

(1.1.13.1) in çözümü birtek olduğu (1.1.13.3) den açık olarak görülüyor.

Netice olarak aşağıdaki teoremi elde ettik.

Teorem 1.1.13.7. F, + ,. bir cisimdir.

Teorem 1.1.13.8. Rasyonel sayılar F, + , . nın bir alt cisimidir.

İspat. a rasyonel ise $(a, a, \ldots) = a$ dizisi esas dizidir ve binaenaleyh bir reel sayı gösterir. Diğer taraftan

$$(a) \leftrightarrow a$$

birebir tekabülün bir izomorfizm olduğu aşikârdır. Şu halde denebilirki bir *izomorfizme yakın* olmak üzere rasyonel sayılar F, + ., nın bir alt cismidir.

1.1.14. **Sıra kavramı.** *TARİF* 26. A bir reel sayı ve (a_n), A yı temsil eden bir esas dizi olsun. A *pozitiftir* denir ve $A > 0$ ile gösterilir şayet belli bir sıradan itibaren $a_n > 0$ ise. Yani bir $\varepsilon > 0$ rasyonel sayısı vardır öyle ki bütün $p > n(\varepsilon)$ ler için $a_p > \varepsilon$.

Teorem 1.1.14.1. Bu tarif A yı temsil eden (a_n) dizisine tâbi değildir. Yani

$$(b_n) \sim (a_n)$$

ise, bu takdirde $\exists \varepsilon_1 > 0$, $n_1 \ni$ bütün $p > n_1$ ler için $b_p > \varepsilon_1$.

İspat. Hipotezden dolayı $\exists \ \varepsilon > 0, \ n \ni$

$$a_p > \varepsilon, \quad p > n$$

Şimdi sıfır dizisinin tarifinden dolayı aynı $\varepsilon > 0$ e karşılık n' bulunabilir öyleki

$$| b_p - a_p | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad p > n',$$

veyahut

$$-\frac{\varepsilon}{2} < b_p - a_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

Binaenaleyh $p > n_1 = \text{Max}\ (n, n')$ için

$$b_p = a_p + (b_p - a_p) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_1$$

Teorem 1.1.14.2. Aynı zamanda $A \leq 0$, $-A \leq 0$ ise $A = 0$ dır.

İspat. (a_n), A yı ve $(-a_n)$, $-$ A yı temsil etsin, ne A ve ne $-$ A pozitif olmadığına göre her $\varepsilon > 0$ ve her n için r, s tam sayıları bulunabilir öyleki

$$a_r \leq \frac{\varepsilon}{2} - a_r \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad r, s > n$$

Halbuki $\varepsilon > 0$ verildiğine göre bir n bulunabilir öyleki

$$| a_p - a_q | < \frac{\varepsilon}{2} \qquad p, q > n$$

Yani

$$-\frac{\varepsilon}{2} > a_q - a_p < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Bu takdirde bütün $p > n$ ler için

$$a_p = (a_p - a_r) + a_q < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ve

$$-a_p = (a_s - a_p) - a_s < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

O halde bütün $p > n$ ler için

$$| a_p | < \varepsilon$$

Yani (a_n) sıfır-dizisidir. Veya $A = 0$.

Teorem 1.1.14.3. $A > 0$ ve $B > 0$ ise $A + B > 0$ dır.

İspat. $A > 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon_1, n_1 \ni p > n_1$ için $a_p > \varepsilon_1$

$B > 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon_2, n_2 \ni p > n_2$ için $b_p > \varepsilon_2$

Binaenaleyh $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ve $n = \operatorname{Max}(n_1, n_2)$ için

$$a_p > \frac{\varepsilon}{2}, \; b_p > \frac{\varepsilon}{2} \qquad p > n$$

Şu halde bütün $p > n$ ler için

$$a_p + b_p > \varepsilon$$

Ayni şekilde $A.B > 0$.

1.1.15. **Teorem.** 1.1.15.1. Reel sayılar Archimed hassasını haizdir. Yani her A reel sayısı için bir $m > 0$ tam sayısı mevcuttur öyleki $m > A$.

İspat. Teorem 1.1.12.1 den dolayı $\exists\, k > 0$ rasyonel, $\ni$ bütün n ler için

$$| a_n | < k$$

Rasyonel sayılar için Archimed kanunundan dolayı (§ 1.1.11) $\exists\, m > 0$ tam $\ni$

$$m > k,$$

Şu halde

$$a_n < m,$$

yani

$$(m - a_n) > 0$$

Binaenaleyh

$$m > A.$$

1.1.16. **Üst sınır ve Alt sınır.** *TARİF* 27. Üstten sınırlı bir M reel sayı cümlesini gözönüne alalım. Bir L sayısına (M ye ait olmıyabilir) M nin en *küçük üst sınırı* (veya sadece üst sınırı) denir şayet aşağıdaki hassaları haiz ise

1. $A \in M$ ise $A \leq L$

2. Bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı verildiğine göre $\exists A \in M, \ni A < L - \varepsilon$. Alttan sınırlı bir cümle için, *alt sınır* benzer şekilde tarif edilir.

Teorem 1.1.16.1 M, üstten sınırlı bir reel sayı cümlesi ise, M nin en küçük üst sınırı vardır. Bu üst sınır birtektir ve reel bir sayıdır.

İspat. Farzelim ki S, M nin bir üst sınırıdır. Archimed hassasından dolayı $\exists\, m$ tam, $\ni m > S$. Şu halde M nin bir üst sınırı olarak m yi alabiliriz. $p > 0$ bir tam sayı ve k bir tam sayı olmak üzere $\frac{k}{2^p}$ rasyonel sayılarını teşkil edelim öyleki

$$\frac{k}{2^p} \leq m$$

Her p için k yı o şekilde seçelim ki $a_p = \frac{k}{2^p}$ M nin bir üst sınırı olsun fakat $\frac{k-1}{2^p}$ bir üst sınır olmasın. Bu şekilde tarif edilen (a_n) dizisi *büyümeyen* veya *artmayan* bir dizidir[1]. Binaenaleyh $q > p$ ise

$$\frac{k-1}{2^p} < a_q \leq a_p$$

veya

$$a_p - 2^{-p} < a_q \leq a_p$$

(1) Farzedelim ki bir p için $a_{p+1} > a_p$. k ların tarifinden dolayı $k_1 > 2k$ ve $k_1 - 1 < 2k$. Yani $k_1 - 1 < 2k < k_1$. k lar tam olduğundan bu imkânsızdır. Binaenaleyh her p için $a_{p+1} \leq a_p$.

Şu halde

$$a_p - a_q < 2^{-p}$$

ve $p > n$ (dolayısıyle $q > p$) için

$$a_p - a_q < 2^{-n}$$

Binaenaleyh $\varepsilon > 0$ rasyonel sayısı verildiğine göre Archimed hassasından dolayı $\exists m$ tam sayısı $\ni m > \varepsilon^{-1}$ (teorem 1.1.11.2). Şimdi n yeter derecede büyük için $2^n > m$. Şu halde $2^{-n} < \varepsilon$. Binaenaleyh (a_n) bir esas dizidir. (a_n) nin tarif ettiği reel sayıya A diyelim. Diyorum ki A istenilen en küçük üst sınırdır. Bunun için § 1.1.16 daki 1. ve 2. şartlarının sağlandığını tahkik edelim.

1. $X \varepsilon M$ ise $A \geq X$. Filhakika $X > A$ ise, Archimed kanunundan dolayı $\exists\, 2^p$ tam sayısı $\ni 2^p > (X-A)^{-1}$. Yani $2^{-p} < X - A$. Fakat a_n nin tarifinden dolayı her n için

$$a_n - 2^{-n} < A \leq a_n$$

Şu halde $a_p - 2^{-p} < A$ ile $2^{-p} < X - A$ karşılaştırılırsa $a_p < X$. Bu ise a_p nin tarifine aykırıdır.

2. Farzedelim ki bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için bütün $X \varepsilon M$ ler için $X \leq A - \varepsilon$. Yukarda görmüştük ki n yeter derecede büyük için $2^{-n} < \varepsilon$. Binaenaleyh $X < A - 2^{-n}$. a_n nin tarifinden dolayı $\exists X, \ni X < a_n - 2^{-n}$. $X < A - 2^{-n}$ ile karşılaştırılırsa $a_n < A$ dır. Bu ise olamaz.

Üst sınırın mevcudiyetini gösterdik, şimdi birtek olduğunu gösterelim. B ikinci bir en küçük üst sınır olsun. Farzedelim ki $B > A$. $\varepsilon = B - A > 0$ vazedelim. 2. den dolayı $\exists\, X \varepsilon M \ni X > A$. Fakat A üst sınır olduğundan bu olamaz. Binaenaleyh $B - A \leq 0$. Aynı şekilde $A - B \leq 0$. O halde (teorem 1.1.14.2) $A = B$.

Teorem. 1.1.16.2. M alttan sınırlı bir reel sayı cümlesi ise, M nin en büyük alt sınırı vardır.

TARİF 28. Rasyonel olmıyan bir reel sayıya *irasyonel* denir.

Teorem. 1.1.16.3. İrasyonel sayı mevcuttur.

İspat. $X^2 = 2$ denklemini ele alalım.

1. Diyorum ki bu denklemin rasyonel sayılar cisminde hiç bir çözümü yoktur. Filhakika $\frac{p}{q}$ gibi bir çözümü olsaydı $p^2 = 2q^2$, $p > 0$, $q > 0$, denkleminin tam sayılardan çözümü olurdu. Bunların içinde p si en küçük olanı ele alalım. Yani $p^2_m = 2q^2$ dir. p^2_m çift olduğuna göre p_m çifttir, yani $p_m = 2p'$. Binaenaleyh $4p'^2 = 2q^2$. Yani $2p'^2 = q^2$. Yine, q^2 çift olduğundan q çifttir ve $q = 2q'$ vaz edilirse $p'^2 = 2q'^2$ bulunur. Bu ise p_m nin tarifine aykırıdır.

2. Şimdi gösterelim ki $X^2 = 2$ nin reel sayılar cisminde çözümü vardır.

$X^2 \leq 2$ eşitsizliğini sağlıyan bütün X reel sayılarının cümlesine M diyelim. Bu takdirde M, üstten sınırlıdır. Filhakika, meselâ $X > 3$ alırsak $X^2 > 2$ dir. Dolayısıyle 3, M için bir üst sınır olabilir. Teorem 1.1.16.1 den dolayı, en küçük üst sınırı vardır. Bu en küçük üst sınıra A diyelim. İspat etmek istiyoruz ki $A^2 = 2$ dir.

(i) Farzedelim ki $A^2 < 2$. Yani $A^2 - 2 = \varepsilon$. En küçük üst sınırın hassasından dolayı $\exists X \varepsilon M \ni A - X < \frac{\varepsilon}{8}$. Halbuki $X < 4$, $A < 4$ olduğundan $A + X < 8$ dir. Bu eşitsizliği $A - X < \frac{\varepsilon}{8}$ ile taraf tarafa çarparsak $A^2 - X^2 < \varepsilon$. Yani $A^2 - X^2 < A^2 - 2 \Rightarrow X^2 > 2 \Rightarrow A^2 \leq 2$.

(ii) Şimdi farzedelim ki $A^2 < 2$. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim öyle ki $\varepsilon < 1$, $\varepsilon < 2 - A^2$ olsun. Şimdi A dan büyük bir X sayısı ele alalım. $X = A + \frac{\varepsilon}{4A}$ vazedelim, $X^2 = A^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16A^2}$. $A \geq 1$ (çünki $1 \varepsilon M$ ve A üst sınırdır) ve $\varepsilon^2 < \varepsilon$ (çünki $\varepsilon < 1$) eşitsizlikleri gözönünde tutulursa $X^2 < A^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{16} < A^2 + \varepsilon < 2$. Yani $X \varepsilon M$. Halbuki $X > A$ idi. Bu demektir ki A M nin en küçük üst sınırı değildir. Bu tezat $\Rightarrow A^2 \geq 2$. Binnetice (i) ve (ii) $\Rightarrow A^2 = 2$. A reel olup rasyonel olmadığına göre tariften dolayı irasyoneldir, ve $A = \sqrt{2}$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.13.8 de görmüştük ki rasyonel sayılar F, +,. nın bir alt cismidir. Bu teorem ile göstermiş oluyoruz ki rasyonel sayılar *hakiki* bir alt cisimdir, yani reel sayılar cismi daha *geniş* bir cisimdir.

Problem. I. İki rasyonel sayı arasında bir irasyonel sayı vardır.

Problem II. İki irasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır.

1.1.17. **Sonsuz Desimal Gösterimi.** Farzedelim ki c, sıfır ile bir arasında $0 < c < 1$, reel bir sayıdır. b_{-1} en büyük tam sayı olsun öyleki

$$\frac{b_{-1}}{10} < c$$

Binaenaleyh, $0 \leq b_{-1} < 10$, ve $c \leq \frac{b_{-1} + 1}{10}$. Şu halde

$$\frac{b_{-1}}{10} < c \leq \frac{b_{-1}+1}{10}$$

$\frac{b_{-1}}{10} = c_1$ vaz edersek bu eşitsizlik

$$c_1 < c \leq c_1 + 10^{-1}$$

şeklinde yazılır.

Benzer şekilde, $b_{-2}, b_{-3}, \ldots, b_{-r}$ yi tarif edelim. O halde genel olarak

$$c_r = b_{-1}\, 10^{-1} + \ldots + b_{-r}\, 10^{-r}$$

vaz edilirse

$$c_r < c \leq c_r + 10^{-r} \qquad (1.1.17.1)$$

Teorem 1.1.17.1. (c_n) dizisi bir esas dizidir ve c yi temsil eder.

İspat. Tarif harfi harfine tatbik edilirse (c_n) nin esas dizi olduğu açık olarak görülür. Sonra (10^{-r}) nin sıfır-dizisi olduğu gözönünde tutulursa (1.1.17.1) den dolayı aynı zamanda

$$(c_n) \geq c, \ (c_n) \leq c$$

dir. Binaenaleyh $(c_n) = c$ dir.

Teorem 1.1.17.2. Herhangi bir $0.\ b_{-1}\, b_{-2} \ldots, 0 \leq b_{-i} < 10.\ b_{-1} \neq 9$, sonsuz desimal 0 ile 1 arasında bir reel sayı gösterir.

İspat. $0.b_{-1}$, $0.b_{-1}\, b_{-2}, \ldots,$ 0 ile 1 arasında rasyonel sayı dizisidir, ve $c_n = b_{-1}\, 10^{-1} + \ldots + b_{-n}\, 10^{-n}$ şeklinde yazıldığı taktirde (c_n) nin bir esas dizi olduğu derhal anlaşılır.

Not. 1. Yukarda verilen tarife göre $\frac{1}{2} = .5$ gibi sonlu bir desimal

$$\tfrac{1}{2} = .499999\ldots$$

şeklinde sonsuz desimal olarak yazılabilir. Binaenaleyh

$$\tfrac{1}{2} = .5000\ldots$$

gibi bir desimal daima sonlu olarak kabul edilir.

Şu halde 0 ile 1 arasındaki herbir reel sayı birtek olarak sonsuz desimal ile gösterilebilir.

2. Yukarda tarifi verilen sonsuz desimaller 10 tabanına göre tarif edilmiştir. Hakikatte bu tarif herhangi bir tabana teşmil edilebilir. Bu paragraftan sonra gelecek paragrafta 2 tabanına göre yazılı desimallere ait misal görülecektir.

1.1.18. **Cümle Teorisi.** Bu bahiste *cümle* ve *tekabül* ilk kavram olarak kabul edilebilir. Bu kavramlar yardımı ile tabii sayılar şu şekilde tarif edilebilir.

TARİF 29. Boş cümleyi 0 ile gösterelim(1). Yegâne elemanı 0 olan cümleyi (0) ile gösterelim. Sonra yegâne elemanı (0) olan cümleyi ((0)) ile gösterelim, v.s. Bu şekilde

$$C = (0, (0), ((0)), \ldots)$$

cümlesini teşkil etmiş oluruz. C nin elemanları *tabii sayıları* veya *sonlu kardinal*leri tarif ediyor denir.

TARİF 30. Şayet M cümlesi ile tabii sayılar cümlesi arasında *birebir* tekabül(2) tesis edilebilirse M cümlesine *sayılabilir* denir.

TARİF 31. İki cümle arasında bir birebir tekabül tesis edilebiliyorsa, bu cümleler aynı *kuvvet*tedir denir.

TARİF 32. Bir sonlu cümle diğer bir cümlenin yalnız bir *parçası* ile (alt cümle) birebir tekabül ediyorsa, ikinci cümlenin kuvveti birinci cümlenin kuvvetinden daha *büyüktür* denir.

Bu tarife göre tabii sayılar büyüklük sırasına göre sıralanabilirler.

TARİF 33. Bir cümleye *sonsuzdur* denir şayet bu cümlenin kuvveti bir parçasının kuvvetine eşit ise.

TARİF 34. Bir cümle *sonlu*dur denir şayet bu cümlenin kuvveti herhangi bir parçasının kuvvetinden farklı ise.

Bu tarife göre tabii sayılar cümlesi sonsuzdur. Tabii sayılar cümlesinin kuvvetini ω_0 ile gösterelim. Teşmil bakımdan ω_0 da bir kardinaldir. Bu kardinale *transfini sayı* denir. ω_0 sayısı herhangi bir tabii sayıdan daha büyüktür. Çünki bir tabii sayı sonlu bir cümlenin kuvvetidir.

Teorem. 1.1.18.1. Pozitif rasyonel sayılar cümlesinin kuvveti ω_0 dır.

İspat. p/q herhangi bir rasyonel sayıyı göstersin. Pay ve paydanın toplamı $p + q = n$, $n = 2,3,\ldots$, olan kesirleri, meselâ, paydalarının büyüklük sırasına göre yazalım. Sonra da n nin büyüklük sırasına göre yazalım. Bu sıralamada $p = q = 1$ hariç $p = q$ ye tekabül eden bütün kesirleri sarfınazar edelim. Binnetice verilen kanuna göre rasyonel sayılar aşağıdaki dizi şeklinde yazılabilir.

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{1}, \frac{1}{3}; \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}; \ldots$$

Bu demektir ki pozitif rasyonel sayılar sayılabilir. Yani rasyonel sayılar cümlesinin kuvveti ω_0 dır.

Şimdi ω_0 dan daha büyük bir transfini sayının mevcut olduğunu göstermek için aşağıdaki teoremi ispat edelim.

(1) Notasyon bakımdan kolaylık olmak üzere, bu paragrafta *boş cümle* 0 ile gösterilmiştir.
(2) Tabii, cümlelerin elemanları arasındaki birebir tekabüllü kastediyoruz.

Teorem 1.1.18.2. Reel sayılar sayılamaz.

İspat. Farzedelim ki sayılabilir. O halde özel olarak 0 ile 1 arasındaki bütün reel sayılar sayılabilir. Yani bir dizi şeklinde yazılabilir.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1.1.18.1)$$

Farzedelim ki herbir x_i, $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$ sonsuz desimal olarak yazılıdır.

$$\begin{aligned} x_1 &= .\ b_{-1,1}\ b_{-2,1} \ldots \\ x_2 &= .\ b_{-1,2}\ b_{-2,2} \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= .\ b_{-1,n}\ b_{-2,n} \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Şimdi

$$c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, \ldots, c_{-n}, \ldots$$

pozitif tam sayı dizisini şu şekilde seçelim. c_{-1}, sıfır, 9 ve $b_{-1,1}$ den farklı bir sayı olsun. c_{-2}, sıfır ve $b_{-1,1}$ den farklı olsun, genel olarak c_{-n}, sıfır ve $b_{-n,n}$ den farklı olsun. v.s. Binnetice $.c_{-1}\, c_{-2} \ldots c_{-n} \ldots$ sonsuz desimalı 0 ile 1 arasından bir reel sayı gösterir (teorem 1.1.17.2) ve (1.1.18.1) dizisinde mevcut değildir. Mevcut olmuş olsaydı bir sırası olacaktı, meselâ n diyelim. Bu takdirde $x_n = .\ c_{-1}\, c_{-2} \ldots c_{-n} \ldots$ Halbuki inşa bakımından en az $c_{-n} \neq b_{-n,n}$ dir. Diğer taraftan 0 ile 1 arasındaki reel sayıların bir parçası meselâ rasyonel sayılar, sayılabilir. Binaenaleyh 0 ile 1 arasındaki reel sayıların kuvveti ω_0 dan büyüktür.

TARİF 35. Sıfır ile 1 arasındaki reel sayıların cümlesine *kontinium* denir ve c ile gösterilir.

Şu halde $c > \omega_0$.

1.1.19. **Kontinium problemi.** Problem şudur: ω_0 ile c arasında bir kuvvet mevcut mudur? Yani ω_0 dan hemen sonra gelen kuvveti ω_1 ile gösterirsek $\omega_1 = c$ midir? Bugüne kadar bu suale cevab verilmiş değildir.

1.1.20. **Transfini sayılar üzerinde operasyon.** Yukarda iki transfini sayı elde ettik: ω_0, c. Bunların üzerinde, sonlu sayılarda olduğu gibi işlem yapılabilir mi? Bunu birkaç misâl ele alarak tetkik edeceğiz. Evvelâ iki cümlenin *toplamını* tarif edelim.

TARİF 36. A ve B cümlelerinin *toplamı* diye bu iki cümleye ait elemanların bütününe denir, ve A+B veya A ∪ B ile gösterilir.

1. Sayılabilir sonsuzlukta bir D cümlesini gözönüne alalım. Gördük ki D nin kuvveti ω_0 dir. Şimdi buna kuvveti n olan sonlu bir cümle ilâve edelim. Açık olarak bu iki cümlenin elemanları ile teşkil edilen cümlenin kudreti yine ω_0 dır. Yani

$$n + \omega_0 = \omega_0$$

2. D_2 ve D_1 iki sayılabilir sonsuz cümle olsun. Diyorum ki $D_1 + D_2$ nin kuvveti yine ω_0 dır. Filhakika, D_1 tek sayılarla D_2 de çift sayılarla tekabül ettirilirse $D_1 + D_2$, tam sayılarla tekabül ettirilmiş olur. Binaenaleyh

$$\omega_0 + \omega_0 = \omega_0$$

Veya

$$2\ \omega_0 = \omega_0.$$

Aynı şekilde

$$n\ \omega_0 = \omega_0$$

gösterilebilir.

3. $\omega_0^2 = \omega_0$ dır. Filhakika, Teorem 1.1.18.1 de elde edilen rasyonel sayıların dizisi aşağıdaki tablo şeklinde gösterilebilir.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots & \frac{n}{1} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots & \frac{n}{2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \frac{4}{n} & \cdots & \frac{n}{n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Burada görülüyor ki sayılabilir sonsuzlukta sıra vardır ve herbir sıra sayılabilir sonsuzluktadır. Şu halde rasyonel sayıların sayısı $\omega_0 . \omega_0$ dır. Halbuki rasyonel sayılar sayılabilir olduğundan (teorem 1.1.18.1) $\omega_0 . \omega_0 = \omega_0$

4. c kuvvetinde olan bir cümleye n eleman ilâve edersek yine c kuvvetinde bir cümle elde ederiz. Yani $c + n = c$.

Filhakika C kontiniumunu göz önüne alalım. D, C ye ait sayılabilir bir cümle olsun (meselâ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$). C′, geriye kalan cümle ise

$$C = C' + D$$

Şimdi N, n elemanı olan bir cümle olsun.

$$C + N = C' + D + N$$

1. den dolayı $D + N = D'$ sayılabilir bir cümledir. Şu halde

$$C + N = C' + D'$$

$C' + D'$ ile $C' + D$ cümlelerinde C′ ye ait herbir elemanı kendisine ve D′ ye ait herbir elemanı aynı sıra numarası taşıyan D nin elemanına tekabül ettirirsek bu cümleler arasında bir birebir tekabül tesis etmiş oluruz Halbuki $C=C' + D$ ve $C + N = C' + D'$ olduğundan teorem ispatlanmıştır.

Özel hal C ye 0 ile 1 ilâve edersek toplam cümlelenin kuvveti yine c dir. Bu son cümleye (yani [0,1] kapalı aralığına) bazen *kontinü* denir.

Aynı şekilde $c + \omega_0 = c$ bağıntısı gösterilebilir.

5. $10^{\omega_0} = c$. Bunu ispat etmek için 1 den küçük ve birtek desimal ile yazılabilen kesirleri gözönüne alalım.

$$.0, .1, .2, \ldots, .9;$$

bunların sayısı 10 dur. Bu kesirlerin herbiri ile iki desimalli 10 kesir yazabiliriz.

$$00,\ .01,\ .02,\ .03,\ \ldots,\ .09\ ;\ \ldots\ ;\ .90,\ \ldots,\ .99\ ;$$

bu iki desimalli kesirlerin sayısı $10 \times 10 = 10^2$ dir. Üç desimalli kesirlerin sayısı 10^3 ve umumiyetle sonsuz desimalli (sayılabilir sonsuz) sayıların sayısı 10^{ω_0} dır. Halbuki bu şekilde elde edilen sonsuz desimaller

(i) 0 ile 1 i ihtiva eder

(ii) 0 ile 1 arasındaki bütün sonlu desimalli kesirleri ihtiva eder.

(iii) 0 ile 1 arasındaki bütün sonlu (§ 1.1.17 Not. 1) ve sonsuz desimalleri ihtiva eder.

Binnetice

$$10^{\omega_0} = 2 + 2^{\omega_0} + c$$

Yani $10^{\omega_0} = c$.

Not. 10 bazı yerine meselâ 2 bazını kullanmak istersek, 0 ile 1 arasındaki bir x sayısı

$$x = \frac{c_{-1}}{2} + \frac{c_{-2}}{2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{2} + \ldots$$

şeklinde yazılır. Burada $0 \leq c_{-n} < 2$ dir ve § 1.1.17 de b_{-n} için istenilen şartları haizdir. Şu halde x sonsuz desimal olarak

$$x = .\ c_{-1}\ c_{-2}\ \ldots\ c_{-n}\ \ldots$$

şeklinde yazılır öyle ki burada c_{-n}, $n = 1, 2, \ldots$, ya 0 ya 1 dir. Meselâ,

$$\tfrac{1}{3} = .\ 010\ldots.$$

Yukardaki usul tatbik edilirse görülür ki 0 ile 1 arasında birtek desimal ile yazılı kesirler.

$$.0, .1$$

dir. Dolayısiyle bunların sayısı 2 dir. İki desimal ile yazılı kesirlerin sayısı 2^2 dir.

$$.00,\ .01,\ .10,\ .11.$$

Umumiyetle sonsuz desimal ile yazılı sayıların sayısı 2^{ω_0} dır. Binaenaleyh aynı muhakeme ile $2^{\omega_0} = c$ olduğu anlaşılır.

Umumiyetle $c = n^{\omega_0}$ $(2 \leq n < \omega_0)$ dır.

2. Reel Sayıların Topolojik Hassaları.

1.2.1. **Limit karamı.** *TARİF* 37. $M = \{a, b, \ldots\}$, $M' = \{a', b', \ldots\}$ iki cümle olsun M den M' ye bir f transformasyonuna bir *topolojik transformasyon* denir şayet f *birebir sürekli* ve f^{-1} *sürekli* ise.

TARİF 38. *Topolojik hassa* diye topolojik transformasyonlara nazaran *invarient* olan hassalara denir.

Şu halde topolojik hassa bakımından *limit*, *aralık*, *açık cümle*, *kapalı cümle* ve *süreklilik* kavramlarını tetkik etmemiz gerekir.

TARİF. 39. Bir (a_n) reel sayı dizisine *l limitine yakınsak*tır veya limiti l dir veya l limitine yaklaşıyor denir, şayet verilen herhangibir $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n tam sayısı bulunabilirse öyle ki bütün $p > n$ ler için

$$|\ a_p - l\ | < \varepsilon.$$

Notasyon. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$ veya sadece $a_n \to l$ yazılır.

Yakınsak olmıyan bir diziye *ıraksak* denir.

Şayet $a_n \to \infty$ ise (a_n) dizisi sonsuza ıraksıyor denir.

Teorem 1.2.1.1. (a_n) dizisinin limiti varsa birtektir.

İspat. İki limiti olduğunu farzedelim: l_1, l_2. Bu takdirde her reel $\varepsilon > 0$ için $\exists\ n$, $\ni$ bütün $p > n$ ler için

$$|\ l_1 - l_2\ | \leq |\ l_1 - a_p\ | + |\ a_p - l_2\ | < 2\varepsilon$$

ε, keyfi olduğundan ve l_1, l_2 ε na tâbi olmadığından $l_2 = l_1$ dir.

TARİF 40. Sonsuz sayıda sayı ihtiva eden sınırlı bir M cümlesi verilmiş olsun. M cümlesine nazaran pozitif ve negatif bütün reel sayıları iki sınıfa ayırabiliriz: A, B. Bir x reel sayısı A sınıfına aittir denir şayet M cümlesinde *sonsuz sayıda* sayılar x den büyük ise. Aksi halde x B ye aittir denir. M cümlesi sınırlı ve sonsuz olduğundan A, B boş değildir ve A ya ait herhangi bir sayı B ye ait herhangi bir sayıdan küçüktür. Bu takdirde A ve B bir L sayısı tarif eder. İşte bu L sayısına M cümlesinin *en büyük* veya *üst limiti* denir.

Şimdi $\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. L nin tarifinden dolayı $L+\varepsilon$, B ye ve $L-\varepsilon$, A ya aittir. Binaenaleyh $L-\varepsilon$ ile $L+\varepsilon$ arasında M nin sonsuz sayıda sayıları vardır. Fakat $L+\varepsilon$ den büyük M nin yalnız sonlu veya sıfır sayıda sayısı vardır.

En küçük veya *alt limit* aynı şekilde tarif edilir.

Teorem 1.2.1.2. *Cauchy yakınsaklık kriteri.* Bir (a_n) reel sayı dizisi l limitine yakınsak olması için gerek ve yeter şart, herhangi bir $\varepsilon > 0$ reel sayısına karşılık bir n bulunabilir öyleki bütün $p,q > n$ ler için

$$| a_p - a_q | < \varepsilon$$

İspat. Gerek şart. Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists n \ni p > n$ için

$$| a_p - l | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Binaenaleyh $p, q > n$ için $| a_p - a_q | \leq | a_p - l | + | l - a_q |$ $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Yeter şart. Hipotezden dolayı (a_n) dizisi sınırlıdır (teorem 1.1.12.1).

İkinci bir ispat da şöyledir. (a_n) sınırlı olmasaydı her p için bir $q>p$ bulunabilirdi öyle ki $| a_q | > | a_p | + 1 \parallel a_q | - | a_p \parallel > 1 \Rightarrow$ $|a_q - a_p| > 1$. Bu ise $\varepsilon=1$ alınırsa hipoteze aykırıdır. Şu halde üst limitin tarifinden dolayı $\exists\, l \ni$ sonsuz sayıda a_q ler $l+\varepsilon$ ile $l-\varepsilon$ arasındadır. Yani $|a_q - l| < \varepsilon$. q yü sabit fakat yeter derecede büyük alalım öyleki $q > n$, şimdi $p > n$ herhangi bir tam sayı olsun. Bu takdirde

$$| a_p - l | \leq | a_p - a_q | + | a_q - l | < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$$

TARİF 41. (a_n) *küçülmeyen* veya *azalmayan* bir dizidir şayet n ne olursa olsun

$$a_{n+1} \geqq a_n$$

ise. (a_n) *büyümeyen* veya *artmayan* bir dizidir şayet n ne olursa olsun

$$a_{n+1} \leq a_n$$

ise.

Teorem 1.2.1.2. *Sınırlı* küçülmeyen bir dizi yakınsaktır.

İspat. (a_n) dizisinin en küçük üst sınırı l olsun. En küçük üst sınırın tarifinden dolayı $\varepsilon>0$ verildiğine göre $\exists\, a_n \in (a_n) \ni a_n < l - \varepsilon$. Binaenaleyh $p > n$ için $a_p > l - \varepsilon$. Yani $| a_p - l | < \varepsilon$.

Teorem 1.2.1.3. *Sınırlı* büyümeyen bir dizi yakınsaktır.

İspat. Aynıdır.

Teorem 1.2.1.4. $a_n \to l$ ve $b_n \to l'$ ise

(i) $a_n + b_n \to l + l'$

(ii) $a_n . b_n \to l.l'$

(iii) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{l'}$, $b_n \neq 0$, $l' \neq 0$

İspat. Aynen esas dizilerdeki gibidir.

1.2.2. *TARİF* 42. Bir *doğru* gözönüne alalım. Bu doğru üzerinde bir O noktası seçelim ve bu noktaya *başlangıç noktası* diyelim. Bir başlangıç noktası ve bir yönü haiz olan doğrulara *x-ekseni* denir. Bu eksenin herbir X noktasına bir x reel sayısı *tekabül* ettirelim, öyle ki O başlangıç noktasına sıfır tekabül etsin. Bu takdirde $|x|$, OX doğru parçasının uzunluğudur ve x reel sayısına X noktasının *apsisi* denir. Şayet $x > 0$ ise X noktası O başlangıç noktasının sağındadır (işaret edilen yön). Böylelikle reel sayılarla bir x ekseninin noktaları arasında bir birebir tekabül tesis etmiş oluyoruz. Üstelik reel sayılar için tarif edilen sıra kavramı otomatik olarak x – ekseni üzerindeki noktalara nakledilmiş bulunuyor. Bu anlaşıldıktan sonra noktalarla sayılar arasında hiç bir fark gözetmiyerek ikisi için de aynı harfi kullanacağız.

TARİF 43. a ve b gibi iki nokta gözönüne alalım. Farzedelim ki $a < b$, bu takdirde $a \leq x \leq b$ eşitsizliğini sağlıyan bütün x – noktalarının koleksiyonuna a ve b ile belirtilen *kapalı aralık* denir ve $[a, b]$ ile gösterilir.

Benzer şekilde $a < x < b$ eşitsizliğini sağlıyan bütün x – noktalarının koleksiyonuna a ve b ile belirtilen *açık aralık* denir ve (a, b) ile gösterilir.

TARİF 44. a ve b ile belirtilen aralığın uzunluğu diye $b-a$ sayısına denir.

TARİF 45. a bir nokta ve $\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı ise $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ açık aralığına a nın bir civarı denir. Veyahut a *nın* bir ε – *civarı* denir.

TARİF 46. M bir nokta cümlesi olsun. a noktasına M nin bir *yığılma noktası* denir şayet a nın herhangi bir ε – civarında a dan farklı M ye ait bir nokta var ise.(1)

Görülüyor ki a nın herhangi bir ε – civarında M ye ait sonsuz sayıda noktalar vardır.

Problem. M, irasyonel sayıların cümlesi olsun. Gösteriniz ki herhangi bir a rasyonel sayısı M nin bir yığılma noktasıdır.

(1) Bu paragrafta, daima x–ekseninde ait M nokta cümleleri bahis konularıdır. x-ekseni ise 1–boyutlu (§ 2.12.2) Euclid-uzayıdır, yani *ayrılabilir metrik topolojik Hausdorff uzayıdır* (Konform Tasvir § 1.06) öyle ki herbir noktaya tekabül ettirilen ve o naktayı ihtiva eden *açık cümleler*, açık aralıklardır yani ε-cıvarlarıdır.

Problem. M, rasyonel sayıların cümlesi olsun. Gösteriniz ki herhangi bir a irasyonel sayısı M nin bir yığılma noktasıdır.

TARİF 47. Bir M cümlesine *açıktır* denir şayet $a \varepsilon M$ herhangi bir nokta ise a nın bir ε – civarı vardır öyle ki bu civarın *bütün* noktaları M ye aittir.

Misal. Pozitif sayılar açık bir cümledir.

Problem. Açık bir aralığın açık bir cümle olduğunu gösteriniz.

TARİF 48. Bir M cümlesine *kapalıdır* denir, şayet a M nin herhangi bir yığılma noktası ise $a \varepsilon M$ dir.

Misal 1. $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ dizisi kapalıdır.

Misal 2. İrasyonel sayılar cümlesi ne kapalı ne de açıktır.

Aynı şekilde rasyonel sayılar cümlesi ne kapalı ne de açıktır.

Misal 3. Reel sayılar cümlesi hem açık hem kapalıdır.

Aşağıda çok mühim üç teorem veriyoruz.

Teorem (*Cantor*) 1.2.1.5. $[a_n, b_n]$, $n = 1,2,\ldots$, aşağıdaki iki şartı sağlayan bir *kapalı* aralık dizisi olsun.

(i) Herbir aralık kendisinden sonra geleni ihtiva ediyor (yani bu aralıklar iç içedir).

(ii) $[a_n, b_n]$ aralıklarının uzunluğu, n sonsuz için sıfırdır.

Bu tadirde bütün $[a_n, b_n]$ aralıklarına ait bir ve birtek nokta vardır.

İspat. (a_n) dizisi sınırlı ve küçülmeyen bir dizidir. Binaenaleyh $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Şimdi diyorum ki x bütün aralıklara aittir. Bunu göstermek için aksini kabul edelim. Meselâ farzedelim ki $x \notin [a_r, b_r]$. Şu halde ya $x < a_r$ veya $x > b_r$. Birinci halde $a_r - x = 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, vaz edebiliriz. (a_n) yakınsak olduğundan $\exists p > r \ni |x - a_p| < \varepsilon$. Binaenaleyh

$$2\varepsilon = a_r - x \leq a_p - x < \varepsilon.$$

Bu ise imkânsızdır. İkinci halde $x - b_r = \varepsilon$ vaz edelim $\varepsilon > 0$. Yine $\exists p < r \ni |x - a_p| < \varepsilon$. Bu takdirde $a_p - b_r = a_p - x + x - b_r > -\varepsilon + \varepsilon = 0$ yani $a_p > b_r$. Binaenaleyh $[a_r, b_r]$, $[a_p, b_p]$ yi ihtiva etmiyor. Bu ise yine olamaz. Binnetice x bütün aralıklara aittir. Bu hassayı haiz olan nokta birtektir. Bu hassayı haiz ikinci bir y noktasının mevcut olduğunu farzedelim. Binaenaleyh $|x - y| = \varepsilon > 0$ dır. Halbuki n yeter derecede büyük alınırsa $[a_n, b_n]$ nin uzunluğu ε dan küçük yapılabilir. Bu tezat teoremin ikinci kısmını ispatlar.

Teorem (*Bolzano-Weirstrass*) 1.2.1.6. Her *sınırlı sonsuz* bir M cümlesinin en az bir yığılma noktası vardır.

İspat. M sınırlı olduğundan bir $[a, b]$ kapalı aralığının içine alınabilir. $[a, b]$ yi ikiye bölelim, elde edilen iki kapalı aralıktan en az birinde M nin sonsuz sayıda noktası vardır. v.s. Binaenaleyh bu *yarılama* usulü ile iç içe olan sonsuz sayıda $[a_n, b_n]$ aralıklarını elde ederiz öyle ki bu aralıkların herbirinde M nin sonsuz sayıda noktası vardır. $[a_n, b_n]$ aralıkları Cantor teoreminin bütün şartlarını sağlıyor. Şu halde $\exists x, \ni$ bütün n ler için $x \varepsilon [a_n, b_n]$ dir. Açık olarak x, M nin bir yığılma noktasıdır.

Teorem (*Heine-Borel*) 1.2.1.7 — *Örtme* teoremi. M, *kapalı* ve *sınırlı* bir nokta cümlesi olsun. Herbir $x \varepsilon$ M noktasına bu noktayı ihtiva eden bir I_x açık aralığını tekabül ettirelim. Bu takdirde (I_x) koleksiyonunun bir (I_{x_i}), $i = 1,2,\ldots n$, sonlu *alt koleksiyonu* M yi tamamiyle örter. Yani herhangi bir $x \varepsilon$ M, I_{x_i} aralıklarının en az birisine aittir.

İspat. Farzedelim ki teoremin şartlarını haiz bir M cümlesi mevcuttur. öyle ki teoremin neticesi bu M için doğru değildir. M sınırlı olduğundan M yi bir $[a,b]$ aralığınının içine alabiliriz. $[a, b]$ yi ikiye bölelim. Bu şekilde elde edilen kapalı alt aralıklara ait M nin herbir alt cümlesi sınırlı ve kapalıdır. Yapılan kabulden dolayı bu alt cümlelelerin I_x açık aralıkları ile örtülmelerinde en az birisi için sonsuz sayıda I_x aralıklarına ihtiyaç vardır v.s. Bu yarılama usulü ile iç içe olan sonsuz sayıda $[a_n, b_n]$ aralıkları elde edilir öyle ki herbirindeki alt cümle sınırlı ve kapalıdır ve sonsuz sayıda I_x aralıkları ile örtülmektedir. $[a, b_n]$ aralıkları *Cantor* teoreminin bütün şartlarını sağlıyor. Şu halde $\exists x \ni$ bütün n ler için $x \varepsilon [a_n, b_n]$ dir. M kapalı olduğundan $x \varepsilon$ M dir. Binaenaleyh x e x i ihtiva eden bir $I_x \varepsilon (I_x)$ tekabül eder. n yeter derecede büyük alınırsa $[a_n, b_n] \subset I_x$ dir. Yani $[a_n, b_n]$ aralığına ait M nin M_n alt cümlesi bir tek I_x aralığı ile örtülüyor. Halbuki M_n yi örtmek için sonlu sayıda aralıkların kâfi gelmediğini kabul etmiştik. Bu tezat teoremi ispatlar.

BÖLÜM II

REEL DEĞİŞKENLİ REEL FONKSİYONLARIN ELEMANTER TEORİSİ

1. Süreklilik.

2.1.1. *TARİF* 1. Farzedelim ki bir $y = f(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasında tarif edilmiştir. Şayet herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğine göre bir $\delta > 0$ bulunabilirse öyle ki $|h| < \delta$ için

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dır, bu takdirde $f(x)$, x_0 noktasında *süreklidir* denir.

Not. $f(x)$, x_0 da tariflidir demek $f(x)$ in x_0 da değeri verilmiştir demektir. Bu değer $f(x_0)$ ile gösterilir. Bu takdirde sürekliliğin tarifli şu şekilde tefsir edilebilir. $x \to x_0$ için $f(x)$ in limiti mevcuttur ve $f(x_0)$ a eşittir.

Notasyon $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

TARİF 2. $f(x)$, bir (a, b) aralığında tarifli ve her bir noktada sürekli ise (a, b) aralığında süreklidir denir.

TARİF 3. Şayet bir $f(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasında sürekli değilse, x_0 da *süreksiz*dir denir.

Misal. Şöyle bir fonksiyon tarif edelim. $x > 0$ için

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x = 0$ için $f(x) = 0$. Bu fonksiyon $x = 0$ hariç süreklidir.

Teorem 2.1.1.1.. $f(x)$ ve $g(x)$ x_0 da sürekli ise

(i) $f(x) + g(x)$ x_0 da süreklidir.

(ii) $f(x) \cdot g(x)$ x_0 da süreklidir.

(iii) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x_0) \neq 0$, x_0 da süreklidir.

İspat. Sürekliliğin tarifi şu şekilde tefsir edilirse (§ 2.1.1.. Not)

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$$

bu takdirde teorem 2.1.1.1., teorem 1.2.1.4 ün neticesidir.

Problem 1. Teorem 2.1.1.1. i doğrudan doğruya ε larla ispat ediniz.

Problem 2. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinomunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Bunun için $g(x) = x$ ve $h(x) =$ *sabit* in sürekli olduğu gösterilebilir ve sonra teorem 2.1.1.1 (i) ve (ii) den faydalanılabilir.

TARİF 4. Farzedelim ki $f(x)$ bir M cümlesi üzerinde tariflidir. Şayet bir k sayısı mevcut ise öyle ki bütün $x \in M$ ler için $f(x) \leq k$ dır, bu takdirde $f(x)$ *üstten sınırlı* dır denir. *Alttan sınırlı* kavramı aynı şekilde tarif edilir.

$f(x)$ hem alttan hem üstten sınırlı ise sadece *sınırlı* dır denir.

Teorem 2.1.1.2. Bir M cümlesi üzerinde tarifli bir $f(x)$ fonksiyonunun sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\exists k > 0 \ni$ bütün $x \in M$ ler için

$$|f(x)| \leq k$$

İspat. Gerek şart. $f(x)$ sınırlı ise $\exists k_1, k_2 \ni k_2 \leq f(x) \leq k_1$ dir.
$k = \text{Max}\,(|k_2|, |k_1|)$ vazedilirse $|f(x)| \leq k$ dır.

Yeter şart. $|f(x)| \leq k \Rightarrow -k \leq f(x) \leq k$. Yani $f(x)$ sınırlıdır.

Misal. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, (0,1) aralığında sınırlı değildir. Filhakika $A > 0$ sayısı keyfi olarak verilmiş olsun $x < A$ için $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{A}$. Yani $f(x)$ sınırsızdır.

Teorem 2.1.1.3. $f(x)$, $[a, b]$ kapalı aralığında tarifli ve sürekli ise $[a, b]$ de sınırlıdır.

İspat. Farzedelim ki $f(x)$ $[a, b]$ üzerinde sınırsızdır. $[a, b]$ yi ikiye bölelim. Elde edilen iki kapalı aralıkta $f(x)$ süreklidir ve en az birinde sınırsızdır. v.s. Böylece yarılama usulü ile iç içe olan sonsuz sayıda $[a_n, b_n]$ aralıklarını elde ederiz öyle ki bu aralıkların her birinde $f(x)$ sürekli fakat sınırsızdır. $[a_n, b_n]$ aralıkları Cantor teoreminin bütün şartlarını sağlıyor. Şu halde $\exists\, x \ni$ bütün n ler için $x \in [a_n, b_n]$ dir. $[a, b]$ kapalı olduğundan $x \in [a, b]$ dir. Hipotezden dolayı $f(x)$ x noktasında tarifli ve sürekli olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0 \ni |h| < \delta$ için

$$| f(x + h) - f(x) | < \varepsilon$$

Yani $f(x)$, $(x - \delta, x + \delta)$ aralığında sınırlıdır. Halbuki n yeter derecede büyük alınırsa

$$[a_n, b_n] \subset (x - \delta, x + \delta)$$

Fakat $f(x)$ $[a_n, b_n]$ de sınırsız kabul edilmişti. Bu tezat teoremi ispatlar.

Teorem (*Weierstrass*) 2.1.1.4. Farzedelim ki $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tarifli ve süreklidir. M, $f(x)$ in $[a, b]$ de en küçük üst sınırı ve m en büyük alt sınırı olsun. Bu takdirde en az bir $\xi \varepsilon [a, b]$ naktasında $f(\xi) = m$ ve en az bir Ξ noktasında $f(\Xi) = M$ dir.

İspat. $\exists (x_n) \subset [a, b] \ni \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. (x_n) sınırlı olduğundan Bolzano-Weirstrass teoreminden dolayı (x_n) dizisinin en az bir Ξ yığılma noktası vardır. $[a, b]$ kapalı olduğundan $\Xi \varepsilon [a,b]$. Şimdi, $f(x)$, Ξ de tarifli ve sürekli olduğundan $\exists (x_{n_p}) \subset (x_n) \ni$

$$\lim_{x_{n_p}\to\Xi} f(x_{n_p}) = f(\Xi)$$

Fakat

$$\lim_{x_{n_p}\to\Xi} f(x_{n_p}) = M$$

Binaenaleyh

$$f(\Xi) = M$$

üstelik buradan M nin sonlu olduğu görülür.

m için ispat aynıdır.

Teorem 2.1.1 5. $f(x)$ $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve δ, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında herhangi bir sayı ise bu takdirde $\exists a < \xi < b \ni \eta = f(\xi)$

Kısaca teorem şu şekilde ifade edilebilir: $f(x)$ fonksiyonu $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki bütün değerleri alır.

İspat. Meselâ $f(a) < \eta < f(b)$ farzedelim. $[a, b]$ yi ikiye bölelim. $[a, b]$ yi ikiye bölen $\frac{a + b}{2}$ noktasında şayet $f\left(\frac{a + b}{2}\right) = \eta$ ise teorem ispatlanmıştır. Aksi halde $\left[a, \frac{a + b}{2}\right]$, $\left[\frac{a + b}{2}, b\right]$ aralıklarından en az birisinde $f(x)$, η dan hem büyük hem de küçük değerler alır. v.s. Böylece yarılama usulü ile iç içe sonsuz sayıda $[a_n, b_n]$ aralıklarını elde ederiz öyle ki bu aralıkların her birinde $f(x)$ süreklidir ve η dan hem büyük hem de küçük değerler alır. $[a_n, b_n]$ aralıkları Cantor teoreminin bütün şartlarını sağlıyor. Şu halde $\exists \xi \ni$ bütün n ler için $\xi \varepsilon [a_n, b_n]$ dir. $[a, b]$ kapalı olduğundan $\xi \varepsilon [a, b]$ dir. $f(\xi) = \eta$ ise teorem ispatlanmıştır. Aksi halde $f(\xi) < \eta$ veya $f(\xi) > \eta$. Farzedelim ki $f(\xi) > \eta$. $f(x)$ ξ de sürekli olduğundan ξ yi ihtiva eden küçük bir aralıkta $f(x) > \eta$. Halbuki n yeter derecede büyük alınırsa $[a_n, b_n]$ bu küçük aralığın içine alınabilir. Fakat $[a_n, b_n]$ aralığında $f(x)$ η den hem küçük hem de büyük değerler alıyor. Binaenaleyh en az bir $x \varepsilon [a_n, b_n]$ noktasında $f(x) < \eta$. Bu tezat teoremi ispatlar.

2.1.2. **Üniform süreklilik.** *TARİF* 5. Farzedelim ki $f(x)$ verilen bir aralıkta tarifli ve süreklidir. Şayet verilen bir $\varepsilon > 0$ a karşılık bir $\delta > 0$ bulunabilirse öyle ki bütün x ler için aynı zamanda

$$| f(x + h) - f(x) | < \varepsilon, \ | h | < \delta$$

dır, bu takdirde $f(x)$ verilen aralıkta *üniform sürekli* dir denir.

Not. Süreklilikle üniform süreklilik arasındaki fark birinde δ gözönüne alınan her x noktasına tâbidir, diğerinde ise tâbi değildir.

Teorem 2.1.2.1. $f(x)$ bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise o aralıkta üniform süreklidir.

İspat. Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre her x için $\exists \mu_x > 0 \ni$ $| h | < \mu_x$ için

$$| f(x + h) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Şimdi her $x \varepsilon [a, b]$ noktasına bu noktayı ihtiva eden

$I_x = \left(x - \frac{\mu_x}{2}, x + \frac{\mu_x}{2}\right)$ aralığını tekabül ettirelim. Heine-Borel teoreminden dolayı sonlu sayıda I_{x_i}, $i = 1,2,\ldots, n$, aralıkları $[a, b]$ yi örter. Yani x keyfi için $\exists i \ni x \varepsilon I_{x_i}$.

$$\delta = \min\left(\frac{\mu x_1}{2}, \frac{\mu x_2}{2}, \ldots, \frac{\mu x_n}{2}\right)$$

vazedelim Bu takdirde x keyfi ve $| h | < \delta$ için

$$| f(x + h) - f(x) | \leq | f(x+h) - f(x_i) | + | f(x_i) - f(x) |$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

zira

$$| x - x_i | < \frac{\mu x_i}{2} < \mu x_i$$

ve

$$| x + h - x_i | \leq | h | + | x - x_i | < \delta + \frac{\mu_{x_i}}{2} < \mu_{x_i}$$

TARİF 6. Bir aralıkta tarif edilen bir $f(x)$ fonksiyonu $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise $f(x)$ o aralıkta *küçülmüyor* denir. Şayet $f(x_1) < f(x_2)$ ise $f(x)$ o aralıkta *büyüyor* denir. Büyümeyen veya küçülen fonksiyonların tarifi aynıdır.

TARİF 7. Bir $f(x)$ fonksiyonu bir aralıkta büyümüyor veya küçülmüyorsa o fonksiyona o aralıkta *monoton* denir.

Teorem 2.1.1.2. $f(x)$ bir $[a, b]$ aralığında sürekli ve orada aynı değeri iki defa almıyorsa $f(x)$ büyüyen veya küçülen bir fonksiyondur.

İspat. Farzedelim ki $f(a) < f(b)$. Göstermek istiyoruz ki $f(x)$ $[a, b]$ de büyüyor. $a < x_1 < b$ bir nokta olsun. Diyorum ki $f(x_1) < f(b)$. Aksini kabul edersek, yani $f(x_1) > f(b)$ ise bu takdirde biliyoruz ki $\exists\ \xi \in (a, b) \ni f(\xi) = f(b)$; bu ise teoremin hipotezine aykırıdır (Aynı değeri iki defa alamaz). Aynı şekilde $f(a) < f(x_1)$ gösterilir. Şimdi ikinci bir x_2, $x_1 < x_2 < b$, noktasını gözönüne alalım. Yukardaki neticeden dolayı $f(x_1) < f(b)$. Binaenaleyh aynı muhakeme $[x_1, b]$ aralığına tatbik edilirse: $f(x_1) < f(x_2)$ neticesi elde edilir. $x_1 < x_2$, $[a, b]$ de lalettayin iki nokta olduğundan teorem ispatlanmıştır.

2. Türev Kavramı

2.2.1. *TARİF* 8. $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında *türevi* vardır veya *diferensyellenebilir* denir; şayet $\exists d$ sayısı $\ni$ her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir $\ni$ $0 < |h| < \delta$ için

$$\left| \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - d \right| < \varepsilon$$

$f(x)$ in x_0 da türevi var ise, d bir kaç şekilde yazılabilir:

$$\left(\frac{d f(x)}{dx}\right)_{x=x_0}, \quad (f'(x))_{x=x_0}, \quad f'(x_0)$$

x_0 da *sağ türev* ve *sol türev* aynı şekilde tarif edilir. Birincide h yalnız pozitif değerler alır. İkincide ise h yalnız negatif değerler alır. Meselâ $[a, b]$ de tarifli bir $f(x)$ fonksiyonunun a da türevi vardır demek sağ türevi vardır demektir. Bir fonksiyonun bir x_0 noktasında hem sağ hem de sol türevi olabilir. Bununla beraber fonksiyonunun x_0 da türevi olmıyabilir.

Misal. $f(x) = | x |$ fonksiyonunun $x = 0$ da hem sağ hem de sol türevi vardır. Bununla beraber $x=0$ da türevi yoktur.

Teorem 2.2.1.1. $f(x)$ in x_0 da türevi var ise x_0 da süreklidir.

İspat. Hipotezden dolayı verilen bir $\varepsilon > 0$ e karşılık bir $\delta > 0$ bulunabilir öyle ki $0 < | h | < \delta$ için

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - d \right| < \varepsilon$$

Buradan

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| < \varepsilon + | d |$$

dir. Binaenaleyh

$$| f(x_0 + h) - f(x_0) | < | h | (\varepsilon + | d |)$$

dir. Binnetice

$$| h | < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + | d |}$$

seçilirse

$$| f(x_0 + h) - f(x_0) | < \varepsilon$$

dır.

Bu teoremin tersi umumiyetle doğru değildir.

Misal. $f(x) = | x |$, $x=0$ da süreklidir fakat $x = 0$ da türevi haiz değildir.

Şayet $y = f(x)$ her x noktasında diferansyellenebilir ise bu takdirde yeni bir $f'(x)$ ($y' = f'(x)$ olarak ta yazılabilir) fonksiyonu tarif edilmiş olur.

Teorem 2.2.1.2. Şayet $f(x)$, $g(x)$ diferansyellenebilirse $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ ve $f(g(x))$ fonksiyonları da diferansyellenebilir. Üstelik

a) $$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

b) $$\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx} + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

c) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{(g(x))^2}$$

d) $$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dg} f(g) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

İspatları analizde gösterildiği gibidir.

Problem 1. $\frac{dC}{dx} = 0$, C sabit

Problem 2. $\frac{dx}{dx} = 1$

Problem 3. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$, meselâ $n > 0$ tam sayı.

Problem 4. Herhangi bir $f(x)$ polinomu diferansyellenebilir.

Problem 5. Bir rasyonel fonksiyon: $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, (f, g polinom), differansyellenebilir.

TARİF 9. x_0 $f(x)$ in tarif aralığında bir iç nokta olsun. Şayet bir $\delta > 0$ var ise öyleki bütün $|h| < \delta$ lar için $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, bu takdirde $f(x)$ in x_0 da bir *maksimumu* (relatif maksimum) vardır denir. Minimum (relatif minimun) aynı şekilde tarif edilir.

Misal. $f(x) = x^2$ nin $x = 0$ da bir minimumu vardır. $f(x) = C$ nin her noktada bir minimumu ve bir maksimumu vardır.

Teorem 2.2.1.3. $f(x)$, $[a, b]$ de diferansyellenebilir ve $x_0 \varepsilon [a, b]$ de maksimum veya minimumu var ise $f'(x_0) = 0$ dır.

İspat. Farzedelim ki $f(x)$ in bir maksimumu vardır. Tariften dolayı $|h| < \delta$ için $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$. O halde $u = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h > 0$ için $u \leq 0$ ve $h < 0$ ile $u \geq 0$. $f(x)$ diferansyellenebilir farzedildiğinden, $0 < |h| < \delta$ için

$$|u - f'(x_0)| < \varepsilon.$$

Binaenaleyh $h > 0$ için

$$f'(x_0) \leq f'(x_0) - u < \varepsilon$$

ve $h < 0$ için

$$f'(x_0) \geq f'(x_0) - u > -\varepsilon$$

Binaenaleyh

$$|f'(x_0)| < \varepsilon$$

$f'(x_0)$ sabit ve ε istenildiği kadar küçük alınabildiğinden

$$f'(x) = 0$$

Minimum hal için ispat ve netice aynıdır.

Teorem (*Rolle*) 2.2.1.4 Farzedelim ki $f(x)$ $[a, b]$ de diferansyellenebilir ve $f(a) = f(b) = C$. Bu takdirde $\exists X$, $a < X < b \ni f'(X) = 0$.

İspat. $f(x)$ $[a, b]$ de diferansyellenebildiğinden $[a, b]$ de süreklidir. *Weierstrass* teoreminden dolayı $f(x)$ $[a, b]$ de M maksimum ve m minimum değerlerini alır Yani $\exists X_1 \varepsilon [a, b]$, $X_2 \varepsilon [a, b] \ni f(X_1) = M$, $f(X_2) = m$. Burada $M \geq C$, $m \leq C$ dir. Şayet bu değerlerden en az birisi, meselâ $M \neq C$ ise, $X_1 \neq a, b$ dir ve $f(X) = 0$. Aksi halde $M = m = C$ dir ve dolayısiyle $[a, b]$ de $f(x) = C$ ve teorem aşikârdır.

Teorem 2. 2. 1. 5. *Ortalama değer teoremi.* $f(x)$ $[a, b]$ de diferansyellenebilirse $\exists X$, $a < X < b$, $\ni f(b) - f(a) = (b - a) f(X)$.

İspat. $$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyon Rolle teoreminin bütün şartlarını sağlıyor ($C = 0$). Binaenaleyh $\exists X$, $a < X < b$, $\ni \Phi'(X) = 0$

Buradan netice elde edilir.

Teorem 2.2.1.6. $f(x)$ $[a, b]$ de diferansyellenebilir ve $f'(x) = 0$ ise $f(x) =$ *sabit* dir.

İspat. $x \varepsilon [a, b]$ keyfi olsun. $[a, x]$ aralığına ortalama değer teoremi tatbik edilirse $\exists X$, $a < X < x \ni$

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(X)$$

Binaenaleyh

$$f(x) = f(a)$$

Teorem 2.2.1.7. $[a, b]$ de $f'(x) > 0$ ise $f(x)$ büyür, $f'(x) < 0$ ise $f(x)$ küçülür.

İspat. $x_1 < x_2$ için $f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1) f'(X)$, $x_1 < X < x_2$

$f'(X) > 0$ ise $f(x_2) > f(x_1)$. Binaenaleyh $f(x)$ büyüyor.

$f'(X) < 0$ ise $f(x_2) < f(x_1)$. Binaenaleyh $f(x)$ küçülüyor.

Teorem 2.2.1.8. $[a, b]$ de $f'(x) \geq 0$ ise $f(x)$ küçülmez, $f'(x) \leq 0$ ise $f(x)$ büyümez.

İspat. Aynı

Teorem 2.2.1.9. $f(x)$ $[a, b]$ de diferansyellenebilir ve küçülmez ise $f'(x) \geq 0$ dır. v.s.

İspat. $x_1 < x_2$ için $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(X)$ $x_1 < X < x_2$; $f(x_2) \leq f(x_1)$ olduğundan $f'(X) \geq 0$, x_1, x_2 keyfi olduğundan $f'(X) \geq 0$ v.s.

Problem 1. $h > 0$ ise $x^n - h = 0$ denkleminin birtek pozitif kökü vardır. En az bir pozitif kökü olduğunu gösteriniz. Sonra da iki pozitif kökü olamaz olduğunu gösteriniz.

Problem 2. Derecesi tek olan her polinomun bir reel kökü vardır.

Bu bahsi kapatmadan evvel aşağıdaki iki teoremi ispat edelim.

Teorem. 2.2.1.10. [0, 1] aralığında tarif edilen reel fonksiyonların bütününün kuvveti c den büyüktür.

İspat. Bu bütünü E: $\{f(x)\}$ ile gösterelim. Farzedelim ki herhangi bir kanun vasıtasiyle 0 ile 1 arasındaki noktalar ile E nin elemanları arasında bir birebir tekabül tesis edildi. Bu takdirde 0 ile 1 arasındaki a noktasına tekabül eden elemanı $f_a(x)$ ile gösterelim. Diğer taraftan a noktasına tekabül eden $(a, f_a(a))$ noktasına *karakteristik* nokta dersek [0,1] aralığında şu şekilde bir fonksiyon tarif edebiliriz. Her a noktasına bir $F(a)$ noktası tekabül ettirelim öyle ki $(a, F(a))$ noktası $(a, f_a(a))$ karakteristik noktasından farklı olsun. Aşikârdır ki $F(x) \notin D$. Zira aksi halde $F(x)$ 0 ile 1 arasında bir p noktasına tekabül etmiş olacaktı ve $(p, F(p))$ bir karakteristik nokta olacaktı. Bu ise olamaz. Çünki $F(x)$ hiçbir karakteristik noktadan geçmiyor. Diğer taraftan (0,0) noktası ile $(a, 1)$ noktasının belirttiği doğrular ile a noktaları arasında birebir tekabül vardır. Bu doğrular E nin bir alt sınıfını teşkil ederler ve binaenalayh teorem ispatlanmıştır.

2.2.2. **Transfini Sayıların Dizisi.** Göstereceğiz ki hakikatte kuvvetlerin dizisi sonsuz olarak büyüyor. Evvelâ sonlu bir cümle gözönüne alalım. Meselâ E = (1, 2, 3). Bu cümlenin bütün alt cümlelerini teşkil edelim. (1), (2), (3), (1, 2), (1, 3), (2,3). Bunlar yeni bir P = ((1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3)) cümlesini teşkil ederler. Yani P, E nin bütün alt cümlelerinin cümlesidir. E cümlesi sonsuz ise meselâ rasyonel sayıların cümlesi gibi, bu takdirde P nin elemanları, E nin birtek elemanını ihtiva eden alt cümlelerden, sonra E nin iki elemanını ihtiva eden alt cümlelerden v.s., alt cümlelerden müteşekkildir. Pek tabii olarak P sonsuzdur.

Teorem 2.2.2.1. q kuvvetinde bir E = $\{a, b, \ldots\}$ cümlesi verilmiş olsun. Bütün alt cümleleri ihtiva eden P nin kuvveti q den büyüktür.

İspat. Bir kere E nin elemanları ile P nin bir kısmının elemanları arasında bir birebir tekabül tesis edilebilir. Meselâ her $a \varepsilon E$ ye $(a) \varepsilon P$ alt cümlesini tekabül ettirerek. Şimdi bir an için kabul edelim ki herhangibir kanun vasıtasiyle E nin elemanları ile P nin elemanları arasında bir birebir tekabül tesis edilebildi. Göstereceğiz ki bu mümkün değildir. P nin herhangibir p lemanını gözönüne alalım. p ye tekabül eden E nin elemanına e diyelim. İki şeyden biri: ya e, p alt cümlesinde mevcuttur veya değildir. Mevcut ise e ye iç eleman diyeceğiz. Değil ise e ye dış eleman diyeceğiz. E de dış elamanların mevcut olduğu aşikâr değildir. Yani "à prori" her elamanın, tekabül ettiği alt cümlede bulunmamasına hiçbir mani yoktur. Dış elamanların mevcudiyetini sağlamak için P ye meselâ $\varnothing$ cümlesi ithal edilebilir. Çünki biliyoruz ki boş cümle her cümlenin bir alt cümlesidir Şu halde E nin bir alt cümlesidir ve binaenaleyh P nin bir elemanıdır. Aşikârdır ki boş cümleye tekabül eden e elemanı bir dış elemandır. Binaenaleyh en az bir dış eleman vardır. Şimdi E nin bütün dış elemanlarını gözönüne alalım. Bu dış elemanların cümlesi E nin bir alt cümlesi olduğundan P nin bir elemanıdır. Bu elemanı p' ile gösterelim. Hipotezden dolayı p' ye E de bir e' elemanı tekabül eder. Göstereceğiz ki böyle bir e' elemanı yoktur ve dolayısiyle E nin elemanlarını P nin elemanlarına birebir tekabül ettiren kanun mevcut değildir. Filhakika e' mevcut ise ya iç veya dış elemandır. İç ise p' alt cümlesindedir bu ise p' nün tarifine aykırıdır, dış ise p' alt cümlesinde değildir, bu da p' nün tarifine aykırıdır. Binaenaleyh teorem ispat edilmiştir.

TARİF 10. *Cebirsel denklem* diye, katsayıları tam olan polinomları sıfıra eşit kılarak elde edilen denklemlere denir.

TARİF 11. *Transandant* sayı diye, hiç bir cebirsel denklemin kökü olmıyan reel sayılara denir.

TARİF 12. *Cebirsel sayı* diye cebirsel denklemlerin reel köklerine denir.

Problem. Gösteriniz ki transandant sayılar cümlesinin kuvveti c dir.

İspat. Şu şekilde yapılır: Reel sayılar iki sınıfa ayrılır: transandant sayılar ve cebirsel sayılar. Cebirsel sayıların kuvveti ω_0 olduğu kolaylıkla gösterilir. Buradan netice görülür.

3. Riemann İntegrali

2.3.1. $f(x)$, $[a, b]$ de tarif edilmiş olsun. $[a, b]$ yi $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}$ noktalarının yardımı ile $[x_i, x_{i-1}]$ alt aralıklarına ayıralım.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ vazedelim. Δx_i aynı zamanda $[x_i, x_{i-1}]$ aralığını ve aralığın uzunluğunu gösterecektir. Her Δx_i aralığında x_i' noktası işaret edelim, $x_{i-1} \leq x'_i \leq x_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\,\Delta x_i = f(x'_1)\,\Delta x_1 + f(x'_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(x'_n)\,\Delta x_n$$

toplamını teşkil edelim. Bu toplama *Riemann toplamı* denir.

$\delta^* = \text{Max}\,(\Delta x_i, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ vazedelim. δ^* ya toplamın *normu* denir.

Not. Verilen bir $f(x)$ ve $[a, b]$ için Σ toplamı n ve x'_i lere tâbidir.

TARİF 13. $f(x)$ $[a, b]$ de tarif edilmiş olsun. Farzedelim ki bir I sayısı mevcuttur öyle ki her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunabilir öyle ki $\delta^* < \delta$ için

$$| I - \sum_{i=1}^{n} f(x'_i) \Delta x_i | < \varepsilon$$

Bu takdirde $f(x)$ $[a, b]$ üzerinde *Riemann integralini* haizdir (veya R-integrallenebilir) denir. I sayısına $[a, b]$ üzerinde $f(x)$ in integrali denir ve

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

olarak yazılır.

Teorem 2.3.1 1. $f(x)$ $[a, b]$ üzerinde R-integrallini haiz ise $f(x)$ $[a, b]$ üzerinde sınırlıdır.

İspat. Hipotezden dolayı $\varepsilon = 1$ e karşılık bir $\delta > 0$ bulunabilir öyle ki normu δ dan küçük herhangibir Σ, R-toplamı için

$$| I - \Sigma | < 1.$$

Bundan sonra Σ yı sabit tutalım, yani $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ve $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ değişmesin. Şimdi ikinci bir Σ' R-toplamı düşünelim öyleki burada $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$; $x_2', \ldots, x_n'$ aynıdır, yalnız x_1' yerine x_1'' alınmıştır.

$$| \Sigma - \Sigma' | = | f(x_1') - f(x_1'') | \Delta x_1 \leq | \Sigma - I | + | I - \Sigma' | < 2$$

Binaenaleyh $f(x)$ Δx_1 aralığında sınırlıdır. Aynı şekilde $f(x)$ in $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ aralıklarında sınırlı olduğu gösterilebilir. Binaenaleyh $f(x)$ $[a, b]$ de sınırlıdır.

Teorem 2.3.1.2. $f(x)$ in $[a, b]$ üzerindeki R-integrali mevcut olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0, \ni \Sigma$ ve Σ', normu δ dan küçük iki R-toplamı ise $| \Sigma - \Sigma' | < \varepsilon$.

İspat. Gerek şart $f(x)$ i integrallenebilir farzedelim. Şu halde

$$\exists\, I, \ni | \Sigma - I | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Burada Σ, normu δ dan küçük olan herhangibir R-toplamıdır. Σ' normu δ dan küçük ikinci bir R-toplamı ise

$$| \Sigma - \Sigma' | \leq | \Sigma - I | + | \Sigma' - I | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Yeter şart. Hipotezden dolayı $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \delta_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots \ni$ normu δ_n den küçük herhangi iki R-toplamı için

$$| \Sigma - \Sigma' | < \frac{1}{2^n}.$$

δ_n ler o şekilde seçilebilir ki $\delta_1 \geq \delta_1 \geq \ldots$ ve $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$. Şimdi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ dizisini seçelim öyle ki norm $\Sigma_n < \delta_n$. $p, q > n$ için $| \Sigma_p - \Sigma_q | < \frac{1}{2^n}$ olduğundan Cauchy kriterinden dolayı (Σ_n) yakınsaktır. Bu dizinin limitini I ile gösterelim. Limitin tarifinden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists n \ni p > n$ için

$$| I - \Sigma_p | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hipotezden dolayı $\exists\, \delta \ni$ normu δ dan küçük iki R-toplamı için

$$| \Sigma - \Sigma' | < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ olduğundan $n' > n$ için $\delta_n' < \delta$ seçilebilir. Binaenaleyh

$$| I - \Sigma | \leq | I - \Sigma_n' | + | \Sigma_n' - \Sigma | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teorem 2.3.1.3. Farzedelim ki $f(x)$ $[a, b]$ de integrallenebilir. $a < c < b$ bir nokta olsun. Bu takdirde $f(x)$, $[a, c]$ ve $[c, b]$ de integrallenebilir ve $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ dır. Karşıt olarak $f(x)$ $[a, c]$ ve $[c, b]$ de integrallenebilirse $[a, b]$ de integrallenebilir.

İspat. Hipotezden dolayı verilen bir $\varepsilon > 0$ e karşılık bir $\delta > 0$ bulunabilir öyle ki, normaları δ dan küçük iki R-toplamı için

$$| \Sigma_{[a,b]} - \Sigma'_{[a,b]} | < \varepsilon$$

Şimdi normları δ dan küçük olan $\Sigma_{[a,c]}, \Sigma'_{[a,c]}$ toplamlarını teşkil edelim. Son olarak normu δ dan küçük olan $\Sigma_{[c,b]}$ yi teşkil edelim. Bu takdirde $\Sigma_{[a,b]} = \Sigma_{[a,c]} + \Sigma_{[c,b]}$ ve $\Sigma'_{[a,b]} = \Sigma'_{[a,c]} + \Sigma'_{[c,b]}$ normları δ dan küçüktür. Binaenaleyh

$$| \Sigma_{[a,c]} - \Sigma'_{[a,c]} | < \varepsilon$$

Aynı şekilde $f(x)$ in $[c, b]$ de integrallenebilir olduğu gösterilebilir. Binaenaleyh

$$\left| \int_a^b - \Sigma_{[a,b]} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \int_a^c - \Sigma_{[a,c]} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \int_c^b - \Sigma_{[c,b]} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Şimdi normu δ dan küçük olan $\Sigma_{[a,c]}$, $\Sigma_{[c,b]}$ toplamlarını seçelim. Binaenaleyh $\Sigma_{[a,b]} = \Sigma_{[a,c]} + \Sigma_{[c,b]}$ nın normu δ dan küçüktür.

Binaenaleyh

$$\int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b \right) = \int_a^b - \Sigma_{[a,b]} - \left(\int_a^c - \Sigma_{[a,c]} + \int_c^b - \Sigma_{[c,b]} \right)$$

ve

$$\left| \int_a^c - \left(\int_a^c + \int_c^b \right) \right| \leq \left| \int_a^b - \Sigma_{[a,b]} \right| +$$

$$\left| \int_a^c - \Sigma_{[a,c]} \right| + \left| \int_c^b - \Sigma_{[c,b]} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Teoremin ikinci kısmına gelince Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0 \ni$ normu δ dan küçük $\Sigma_{[a,c]}$, $\Sigma_{[c,b]}$ toplamları için

$$\left| \int_a^c - \Sigma_{[a,c]} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \left| \int_c^b - \Sigma_{[a,b]} \right| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

k, $[a, b]$ de $f(x)$ in sınırı olsun δ yı yeter derecede küçük seçelim öyleki $\delta k < \frac{\varepsilon}{6}$. $\Sigma_{[a,b]}$ normu δ dan küçük olan herhangi bir toplam olduğuna göre iki hal vardır.

(i) $\Sigma_{[a,b]}$ deki Δx_i aralığının bir ucu c noktasındadır.

(ii) Aksi hal.

(i) $\Sigma_{[a,b]} = \Sigma_{[a,c]} + \Sigma_{[c,b]}$ şeklinde yazılabilir, ve

$$\left| \left(\int_a^c + \int_c^b \right) - \Sigma_{[a,b]} \right| = \left| \int_a^c - \Sigma_{[a,c]} + \int_c^b \Sigma_{[c,b]} \right|$$

$$\leq \left| \int_a^c - \Sigma_{[a,c]} \right| + \left| \int_c^b - \Sigma_{[c,b]} \right| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

(ii) $\Sigma_{[a,b]}$ toplamının teşkilinde x_i noktalarına c noktasını dahil ederek $\Sigma'_{[a,b]}$ toplamını teşkil edelim. Burada $c - x_{i-1} = \Delta x'_i$. $x_i - c = \Delta x_i''$, $x''_i \varepsilon \Delta x'_i$ ve $x'''_i \varepsilon \Delta x''_i$ dir. Binaenaleyh

$$\Sigma_{[a,b]} - \Sigma'_{[a,b]} = f(x'_i)\, \Delta x_i - f(x''_i)\, \Delta x'_i - f(x_i^m)\, \Delta x''_i$$

ve

$$\left| \Sigma_{[a,b]} - \Sigma'_{[a,b]} \right| < 2\delta k < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Şimdi

$$\int_a^c + \int_c^b - \Sigma_{[a,b]} = \int_a^c + \int_c^b - \Sigma_{[a,b]} + \Sigma'_{[a,b]} - \Sigma'_{[a,b]}$$

yazılırsa

$$\left| \int_a^c + \int_c^b - \Sigma_{[a,b]} \right| \leq \left| \int_a^c + \int_c^b - \Sigma'_{[a,b]} \right| +$$

$$\left| \Sigma_{[a,b]} - \Sigma'_{[a,b]} \right| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Binaenaleyh iki halde de

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

Teorem 2.3.1.4. $f(x)$, $[a,b]$ de integrallenebilirse, $[a,b]$ nin herhangibir $[c, d]$ alt aralığında da integrallenebilir.

İspat. Yukardaki teoreme göre $f(x)$ $[a,d]$ de integrallenebilir. Binaenaleyh $[c, d]$ de de integrallenebilir.

Teorem 2.3.1.5. Farzedelim ki $f(x)$, $[a,b]$ de integrallenebilir ve $m \leq f(x) \leq M$. Bu takdirde

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$

Aynı şekilde $[a, b]$ de $|f(x)| \leq k$ ise

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx < k\,(b-a)$$

İspat. Herhangibir Σ toplamı için

$$m(b-a) \leq \Sigma m \Delta x_i \leq \Sigma f(x'_i)\, \Delta x_i \leq \Sigma\, M\, \Delta x_i \leq M\,(a-b)$$

Diğer taraftan

$$|\Sigma f(x'_i)\, \Delta x_i| \leq \Sigma\, |f(x'_i)|\, \Delta x_i \leq \Sigma k \Delta x_i \leq k(b-a)$$

TARİF 14. Şayet $b < a$ ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

yazılır.

Teorem 2.3.1.6. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

İspat. Herhangi bir toplamında $\Delta x_i = 0$ dır.

Yukarıdaki teoremden dolayı c, d $[a,b]$ de herhangi iki nokta olduğuna göre $f(x)$, $[a, b]$ de integrallenebilirse $\int_c^d f(x)\,dx$ in manası vardır. Sonra $[a, b]$ aralığında $a_1, a_2, \ldots, a_n$ noktaları hangi sırada olursa olsun

$$\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \ldots + \int_{a_n}^b$$

TARİF 15. Şayet $f(x)$ $[a,b]$ de integrallenebilir, $x \varepsilon [a, b]$ değişken ve $c \varepsilon [a,b]$ sabit bir nokta ise

$$\int_c^x f(x)\,dx$$

üst limitin fonksiyonudur ve

$$F(x) = \int_c^x f(u)\,du$$

yazılır. $\int_c^x f(u)\,du$ ya *belirsiz integral* denir.

Teorem 2.3.1.7. $f(x)$ $[a,b]$ de integrallenebilirse

$F(x) = \int_c^x f(u)\,du$ $[a,b]$ de süreklidir.

İspat. $f(x)$ $[a, b]$ de integrallenebildiğinden $|f(x)| \leq k$. Şu halde

$$\left| \int_a^{x+h} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du \right| = \left| \int_x^{x+h} f(u)du \right| \leq k\,|h|$$

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $|h| < \delta$ ve $\delta < \frac{\varepsilon}{k}$ için $k\,|h| < k\delta < \varepsilon$.

Teorem 2.3.1.8. Şayet $f(x)$ ve $g(x)$ $[a, b]$ de integrallenebilirse $f(x) + g(x)$ de integrallenebilir ve

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

İspat. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \delta > 0 \ni$ Norm $\Sigma_f, \Sigma_g < \delta$ için

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \Sigma_f \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left| \int_a^b g(x)\,dx - \Sigma_g \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Normu δ dan küçük herhangibir Σ_{f+g} yi gözönüne alalım.

$$\Sigma_{f+g} = \Sigma_f + \Sigma_g$$

ve

$$\left| \int_a^b f + \int_a^b g - \Sigma_{f+g} \right| \leq \left| \int_a^b f - \Sigma_f \right| + \left| \int_a^b g - \Sigma_g \right| < \varepsilon$$

Binaenaleyh $\int_a^b (f+g)\,dx$ mevcuttur ve $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ e eşittir.

Teorem 2.3.1.9. $f(x)$ $[a, b]$ de sürekli ise $[a, b]$ de integrallenebilir.

İspat. $f(x)$ $[a, b]$ de üniform süreklidir. Binaenaleyh $\varepsilon > 0 \Rightarrow \delta > 0$, ($x$ e tâbi değil) $\ni$ $|h| < \delta$ için

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Σ_1, Σ_2 normu δ dan küçük olan iki R–toplamı olsun Bir üçüncü Σ_3 R–toplamını teşkil edelim öyleki Σ_3 deki Δx_i lerin uçları Σ_1 ve Σ_2 deki Δx_i lerin uçlarıdır. Şimdi $\Sigma_3 = \Sigma f(x')\,\Delta x_i$ yazalım. Farzedelim ki, $\Sigma_1 = \Sigma f(\xi'_i)\,\Delta\xi_i$ dir. Kolaylıkla görülür ki $\Sigma_1 = \Sigma f(x''_i)\,\Delta x_i$ olarak yazılabilir. Burada $\Sigma f(x''_i)\,\Delta x_i$ R-toplamı değildir (meselâ $\Delta\xi_1 = \Delta x_1 + \Delta x_2$ ise $f(\xi'_1)\,\Delta\xi_1 = f(\xi'_1)\,\Delta x_1 + f(\xi'_1)\,\Delta x_2$ ve ξ'_1 her iki aralıkta birden olmıyabilir).

$$\Sigma_1 - \Sigma_3 | = |\Sigma[f(x''_i) - f(x'_i)]\,\Delta x_i| \leq \Sigma\,|f(x''_i) - f(x'_i)|\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

Çünki $|x''_i - x'_i| < \delta$

Aynı şekilde

$$|\Sigma_2 - \Sigma_3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Binaenaleyh

$$| \Sigma_1 - \Sigma_2 | < \varepsilon.$$

Yani $f(x)$ $[a, b]$ de integrallenebilir.

Teorem 2.3.1.10. C sabit olsun. Bu takdirde $\int_a^b C dx = C(b-a)$

İspat. Riemann toplamı teşkil edilerek görülür.

Teorem 2.3.1.11. Şayet $f(x)$ $[a, b]$ de integrallenebilir ve x_0 da sürekli ise, bu takdirde $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ x_0 da diferansiyellenebilir ve

$$\left[\frac{d}{dx} F(x)\right]_{x=x_0} = f(x_0)$$

dır.

İspat. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \delta > 0 \ni | x - x_1 | < \delta$ için $| f(x) - f(x_1) | < \varepsilon$
Şimdi $0 < | h | < \delta$ için

$$\left| \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} - \int_a^{x_0} \right] - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(x)-f(x_0)]dx \right| < \varepsilon$$

Teorem 2.3.1.12. Sonlu sayıda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktaları hariç $f(x)$ $[a, b]$ de sürekli olup $[a, b]$ nin bütününde sınırlı ise $f(x)$ $[a, b]$ de integrallenebilir.

İspat. $f(x)$ in herhangibir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında integrallenebildiğini göstermek kâfidir, $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n$ farzediliyor. Bunun için göstermeliyiz ki $f(x)$, d hariç $[c, d]$ de sürekli ise $f(x)$ $[c, d]$ de integrallenebilir. Hipotezden dolayı $[c, d]$ de $| f(x) | \leq k$ dır. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $t > 0$ sayısını o şekilde seçelim ki $t < \frac{a}{12\,k}$. $\delta > 0$ i o şekilde seçelim ki $\delta < t$ ve $[c, d-t]$ için teşkil edilen ve normu δ dan küçük olan herhangi bir $\Sigma_{[c,d-t]}$ R-toplamı için

$$\left| \int_c^{d-t} - \Sigma_{[c,d-t]} \right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Σ_1 normu δ dan küçük ve $[c, d]$ de tarif olunan herhangibir R-toplamı olsun, Şayet $d-t$ Σ_1 de uç noktası olarak görünmüyor ise Σ'_1 R-toplamını teşkil ederiz. Σ'_1, Σ_1 in aynıdır, yalnız Σ'_1 de $d-t$ bir uç noktadır. Meselâ Σ_1 toplamında, $d-t$ noktası Δx_s aralığının bir iç noktası ise bu takdirde $\Delta x_{s_1} + \Delta x_{s_2} = \Delta x_s$ aralıkları Σ'_1 in teşkilinde mevcuttur.

$$| \Sigma_1 - \Sigma'_1 | = | f(x'_s) \Delta x_s - [f(x''_{s_1}) \Delta x_{s_1} + f(x'''_{s_2}) \Delta x_{s_2}] |$$

$$\leq k(\Delta x_s + \Delta x_{s_1} + \Delta x_{s_2}) = 2k\Delta x_s < 2k\delta < 2kt < \frac{\varepsilon}{6}$$

Şimdi Σ' i ikiye bölelim. $\Sigma'_1 = T_1 + V_1$. Burada T_1, $[c, d-t]$ için teşkil edilen kismî toplamdır. V_1 ise, $| V_1 | < kt < \frac{\varepsilon}{12}$.

Şayet Σ_2, $[c, d]$ de tarifli ve normu δ dan küçük olan diğer bir R-toplamı ise, aynı şekilde Σ'_2 yi teşkil ederiz. Bu takdirde

$$| \Sigma_2 - \Sigma'_2 | < \frac{\varepsilon}{6}, \qquad \Sigma'_2 = T_2 + V_2, \qquad | V_2 | < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Binaenaleyh

$$| \Sigma_1 - \Sigma_2 | \leq | \Sigma_1 - \Sigma'_1 | + | \Sigma'_1 - \Sigma'_2 | + | \Sigma'_2 - \Sigma_2 | < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + | \Sigma'_1 - \Sigma'_2 |$$

ve

$$| \Sigma'_1 - \Sigma'_2 | = | T_1 + V_1 - T_2 - V_2 | \leq | T_1 - T_2 | + | V_1 | + | V_2 |$$

ve

$$| T_1 - T_2 | = \left| T_1 - \int_c^{d-t} + \int_c^{d-t} - T_2 \right| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{2\varepsilon}{6}.$$

Binaenaleyh

$$| \Sigma'_1 - \Sigma'_2 | < \frac{2\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} = \frac{3\varepsilon}{6}.$$

Dolayısıyla

$$| \Sigma_1 - \Sigma_2 | < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{3\varepsilon}{6} = \frac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon$$

Dolayısiyle $f(x)$ $[c, d]$ de integrallenebilir.

Teorem 2.3.1.13. $f(x)$ $[a, b]$ de sürekli ve $F(x)$, türevi $f(x)$ olan herhangibir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

İspat. $f(x)$ $[a, b]$ de sürekli olduğundan $[a,b]$ de integrallenebilir. Binaenaleyh Teorem 2.3.1.11 den dolayı $G(x) = \int_a^b f(u)\, du$ diferansyellene-

bilir ve $\frac{d}{dx} G(x) = f(x)$. Diğer taraftan hipoteze göre $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

O halde

$$G(x) = F(x) + C \ (C = \text{sabit}). \text{ Yani } \int_a f(u)\, du = F(x) + C.$$

Şimdi $x = a$ vaz edersek $F(a) + C = 0$. Binaenaleyh $C = -F(a)$.

Sonra $x = b$ vazedersek $\int_a^b f(u)\, du = F(b) + C$. Binaenaleyh

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

Teorem 2.3.1.14. $f(x)$ $[a, b]$ de sürekli ise $\exists$ X, $a < X < b$, $\ni$

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\, f(X)$$

İspat. $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ vazedelim. Teoreom 2.3.1.11 den dolayı $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Binaenaleyh F (x) (a,b) de diferansyellenebildiğinden

$$F(b) - F(a) = (b-a)\, F'(X), \quad a < X < b.$$

Binaenaleyh

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(X)$$

4. Sonsuz İntegral

2.4.1. **Yakınsaklık kriteri.** Riemann integralinin tarifinde a, b yi sonlu ve $f(x)$ i $[a, b]$ de sınırlı farzettik. Şimdi, meselâ, b yi sonsuz veya $f(x)$ in $[a, b]$ nin bir noktasında sonsuz olduğunu farzedeceğiz. Bu gibi integrallere *sonsuz integral* denir ve aşağıda da görüleceği gibi yalnız bir hali tetkik etmek kâfidir.

Farzedelim ki her X için $f(x)$ $[a, X]$ de R-integrallenebilir.

Şayet

$$\lim_{X \to \infty} \int_a^X f(x)dx = l < \infty$$

ise bu takdirde $\int_a^\infty f(x)dx$ *mevcut* veya *yakınsaktır* denir.

Teorem 2.4.1.1. $\int_a^\infty f(x)\, dx$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, x, \ni$ bütün X, X' $> x$ için

$$\left| \int_X^{X'} f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

Yani,

$$\lim_{\substack{X \to \infty \\ X' \to \infty}} \int_X^{X'} f(x)\, dx = 0$$

İspat. Cauchy kriterinin bir neticesidir (teorem 1.2.1.2).

TARİF 16. $\int_a^\infty f(x)\, dx$ integraline *mutlak yakınsaktır* denir şayet

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx$$

yakınsak ise

2.4.2. **Mutlak Yakınsaklık Kriteri.**

(i) Farzedelim ki belli bir x ten itibaren

$$|f(x)| \leq |g(x)|$$

Bu takdirde $\int_a^\infty g(x)dx$ mutlak yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ de mutlak yakınsaktır.

Filhakika, $\int_a^\infty |g(x)|\, dx$ sonlu ise $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ de sonludur, binaenaleyh yakınsaktır.

(ii) Şayet $g(x)$ işaret değiştirmiyor ve

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

ise $\int_a^\infty f(x)\, dx$ ve $\int_a^\infty g(x)dx$ aynı zamanda mutlak yakınsak, veya ıraksaktır.

İspat. x in çok büyük değerleri için

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon .$$

Yani

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - l < \varepsilon$$

$g(x) > 0$ için

$$(l - \varepsilon)\, g(x) < f(x) < (l + \varepsilon)\, g(x)$$

$g(x) < 0$ için

$$(l - \varepsilon)\, g(x) > f(x) < (l + \varepsilon)\, g(x)$$

Bu ise teoremi ispatlar.

(iii) Farzedelim ki

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} f(x) = l \neq 0$$

Bu takdirde $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ in mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\alpha > 1$

İspat. (ii) nin özel halidir.

2.4.3. **f(x) in [a, b] de sınırlı olmadığı hal.** Farzedelim ki her $X < b$ için $f(x)$, $[a, X]$ de R-integrallenebilir. Şayet

$$\lim_{X \to b} \int_a^X f(x) dx = l$$

ise bu takdirde $\int_a^b f(x)\, dx$ *mevcut* veya *yakınsaktır* denir.

Teorem 2.4.3.1. $\int_a^b f(x)\, dx$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{\substack{X' \to b \\ X \to b}} \int_X^{X'} f(x)\, dx = 0$$

Mutlak yakınsaklık kriteri aynı § 2.4.2, (iii) de olduğu gibidir.

Meselâ farzedelim ki,

$$\lim_{x \to b} (b - x)^{\alpha} f(x) = l \neq 0,$$

Bu takdirde $\alpha < 1$ için $\int_a^b f(x)\, dx$ mutlak yakınsaktır.

2.4.4. **Üniform yakınsaklık.** y parametresine tâbi bir $f(x, y)$, fonksiyonunu gözönüne alalım. Farzedelim ki $f(x, y)$ her $\alpha \leq y \leq \beta$ için $a \leq x \leq b$ aralığında bütün b ler için R-integrallenebilir. En son farzedelim ki her $y \varepsilon [\alpha, \beta]$ için

$$F(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx \qquad (2.4.4.1)$$

yakınsaktır. Bu takdirde bu integral için *üniform yakınsaktır* denir şayet $\varepsilon > 0$ verildiğine göre bir x bulunabilirse öyle ki $X > x$ için

$$\left| F(y) - \int_a^X f(x,y)\, dx \right| < \varepsilon \qquad (2.4.4.2)$$

Burada x yalnız ε na tâbi olup y ye tâbi değildir. Cauchy teoreminden dolayı (2.4.4.2) şartı gerek ve yeter şart şeklinde yazılabilir. Yani

$$\left| \int_{X'}^{X} f(x,y)\, dx \right| < \varepsilon$$

(2.4.4.1) tipinde bir integralin üniform yakınsak olup olmadığı şu kriter ile karara bağlanabilir.

Teorem 2.4.3.2. Üniform Yakınsaklık Kriteri. $M(x)$ y ye tâbi olmıyan pozitif bir fonksiyon olsun. Farzedelim ki bütün x ve y değerleri için

$$| f(x,y) | \leq M(x).$$

Şayet

$$\int_a^{\infty} M(x)\, dx$$

yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$ üniform yakınsaktır.

İspat. Aşikar olarak

$$\left| \int_{X'}^{\infty} f(x,y)\, dx \right| \leq \int_{X'}^{\infty} M(x)\, dx$$

Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, x \ni X' > x$ için

$$\int_{X'}^{\infty} M(x)\, dx < \varepsilon$$

Bu ise teoremi ispatlar.

Misal. x reel için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

integralinin yakınsaklığını tetkik edelim. Bunun için

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

yazalım. Sonuncu integrale § 2.4.2. (i) kriterini tatbik edelim. t nin büyük değerleri için

$$e^{-t}\, t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$$

Birinci integrale gelince

$$\lim_{t\to 0} t^{1-x} f(t) = 1.\ f(t) = e^{-t}\, t^{x-1}$$

Binaenaleyh § 2.4.3 ten dolayı $\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$, $1-x < 1$ yani $x > 0$ için yakınsaktır. Şimdi diyorum ki integral herhangibir $a \leq x \leq b$, $a > 0$ kapalı aralıkta üniform yakınsaktır. Bunun için

$$\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \text{ yi } \int_0^1 t^{a-1}\, dt \text{ ile, ve}$$

$$\int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \text{ yi } \int_1^\infty e^{-t}\, t^{a-1}\, dt \text{ ile}$$

karşılaştırarak üniform yakınsaklık kriterini tatbik etmek kâfidir.

5. Sayı Serisi

2.5.1. *TARİF.* 17. (a_n) sonsuz dizisini ele alalım. Bu dizi

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \ldots$$

şeklinde yazılırsa diziye *seri* denir.

Misal. (n) dizisi, yani

$$(n) = 1, 2, 3, \ldots$$

$1 + 1 + 1 + \ldots$ serisi şeklinde yazılabilir. Aynı şekilde karşıt olarak

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

serisi

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ldots,\ a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

dizisi şeklinde yazılabilir.

Umumiyetle $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ serisi $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ olarak veya $s_1 = b_1$, $s_2 = b_1 + b_2, \ldots, s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n, \ldots$ sonsuz dizi şeklinde yazılır. Burada s_n ye serinin kısmî *toplamı* denir. Aynı seri için bazen Σ, Σ_i Σ_1^∞ notasyonlarını da kullanacağız.

Meselâ, $\Sigma_1^\infty \frac{1}{n}$ serisi, (s_n) dizisi demektir. Burada

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}$$

Teorem 2.5.1.1. $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, n \ni p,q > n\ (p<q)$ için

$$|\, b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_q \,| < \varepsilon$$

İspat. $\Sigma\, b_i$ yerine (s_n) dizisini gözönüne alalım. Cauchy kriterinden dolayı

$$|\, s_q - s_p \,| < \varepsilon,\ p,q > n \Rightarrow |\, b_{p+1} + \ldots + b_p \,| < \varepsilon$$

Not. Cauchy kriteri $|\, s - s_{n+r} \,| < \varepsilon$ şeklinde yazılacak olursa o zaman seriler için Cauchy kriteri

$$|\, b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+r} \,| < \varepsilon$$

dır.

TARİF. 18. $s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ vazedelim. Şayet (s_n) b ye yakınsak ise

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = b$$

yazıyoruz. Bu takdirde

$$r_n = b - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

ye serinin *kalanı* denir.

Teorem 2.5.1.2. $b_1, b_2, \ldots,$ bir pozitif sayı dizisi olsun öyle ki

(i) $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Bu takdirde $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i b_i$ yakınsaktır.

İspat. $s_{2n} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_{2n-1} - b_{2n})$

$$s_{2n+1} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \ldots - (b_{2n} - b_{2n+1})$$

vazedelim. Sonra.

$$s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1} \qquad (b_{2n+1} > 0) \qquad (2.5.1.1.)$$

(s_{2n}) büyüyor ve pozitiftir. (s_{2n+1}) büyüyor ve (2.5.1.1) den dolayı $s_{2n} < s_{2n+1}$ ve

$$0 < s_{2n} < s_{2n+1} < b_1$$

Şu halde $n \to \infty$ için $s_{2n} \to s'$ ve $s_{2n+1} \to s'' \ni 0 < s' < b_1$, $0 < s'' < b_1$. Diyorum ki $s' = s'' = s$. Filhakika,

$$\lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$$

Binaenaleyh

$$\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}.$$

Yani

$$s' = s''$$

TARİF 19. Şayet $\Sigma_i |b_i|$ yakınsak ise $\Sigma_i b_i$ ye *mutlak yakınsak* denir.

Teorem 2.5.1.3. $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart (s_n), $s_n = \sum_{i=1}^{n} |b_i|$, sınırlı olmalıdır.

İspat. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ dır. Biliyoruz ki bu dizinin yakınsak olması için $\exists k \ni s_n < k$.

TARİF 20. s_n yakınsak olduğu zaman $\Sigma_i |b_i| < \infty$ yazacağız. Bu tarife göre $\Sigma_i c_i < \infty \Rightarrow c_i \geq 0 . \Sigma_i |b_i|$ ıraksak ise bazen $\Sigma |b_i| = \infty$ diye yazılır.

Teorem 2.5.1.4. Bir seri mutlak yakınsak ise yakınsaktır.

İspat. $|b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_p| \leq |b_{p+1}| + |b_{p+2}| + \ldots + |b_p| < \varepsilon$

Not. Mutlak seri ıraksak olduğu halde seri yakınsak olabilir.

Misal. $\Sigma_1^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksaktır, halbuki $\Sigma_1^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)$ yakınsaktır (teorem 2.5.1.2).

Teorem 2.5.1.5. Farzedelim ki $\Sigma_i b_i$ mutlak yakınsaktır. Terimlerin yerlerini değiştirerek $\Sigma_i c_i$ yi elde etmiş olalım. Bu taktirde $\Sigma_i c_i$ yakınsaktır. Şayet $b = \Sigma_i b_i$ ve $c = \Sigma_i c_i$ ise $b = c$ dir.

İspat. Hipotezden dolayı $\Sigma_i |b_i| = k$ dır. b_i lerin yerlerini değiştirerek $\Sigma_i c_i$ serisini yazalım. $\Sigma_i |b_i|$ nin terimleri ≥ 0 olduğundan $\Sigma_i |c_i| = k$ dır.

Binaenaleyh Σc_i yakınsaktır. Şimdi teoremin ikinci kısmına geçelim. Bir kere biliyoruz ki $\Sigma_i (b_i - c_i)$ yakınsaktır. Diyorum ki $\Sigma_i (b_i - c_i) = 0$. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Buna karşılık bir n bulunabilir $\ni$

$$|b_{p+1}| + |b_{p+2}| + \ldots + |b_p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$|c_{p+1}| + |c_{p+2}| + \ldots + |c_p| < \frac{\varepsilon}{2}, \; q > p, \; p \geq n$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ terimleri için $b_1 = c_{i_1}, b_2 = c_{i_2}, \ldots, b_n = c_{i_n}$. n' yi öyle seçelim ki $n' > n$, $n' > i_1$, $n' > i_2, \ldots, n' > i_n$ olsun. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ terimlerine gelince $c_1 = b_{j_1}$, $c_2 = b_{j_2}, \ldots, c_n = b_{j_n}$ dir. n'' yi öyle seçelim ki $n'' > n$, $n'' > j_1$, $n'' > j_2, \ldots, n'' > j_n$, $N = \text{Max}\,(n', n'')$ olsun. Bu takdirde $p > N$ için

$$\left| \sum_{i=N+1}^{p} (b_i - c_i) \right| \leq \left| \sum_{i=N+1}^{p} b_i \right| + \left| \sum_{i=N+1}^{p} c_i \right| \leq \sum_{i=N+1}^{p} |b_i| +$$

$$\sum_{i=N+1}^{p} |c_i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Binaenaleyh

$$\Sigma_i (b_i - c_i) = 0$$

Teorem 2.5.1.6. $\Sigma_i a_i = a$ $\Sigma_i b_i = b$ mutlak yakınsak iki seri olsun. Herhangibir sırada yazılı $a_r b_s$ terimlerinden müteşekkil $\Sigma_i c_i$ serisi mutlak yakınsaktır ve $a.b$ ye eşittir.

İspat. $t_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ yi gözönüne alalım. Şu halde t_n de $\mu = \text{Max}\,(r, s)$ ise

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| \leq \sum_{i=1}^{\mu} |a_i| \, . \sum_{i=1}^{\mu} |b_i| < \infty$$

Binaenaleyh $\Sigma_i c_i$ mutlak yakınsaktır. Dolayısıyle $\Sigma_i c_i$ de terimlerin yeri istenildiği gibi değiştirilebilir. Binaenaleyh evvelâ $t'_n . t''_n = (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n)$ yi teşkil edelim. Sonra $t'_{n+1} . t''_{n+1}$ yi teşkil ederek artan terimleri $t'_n . t''_n$ ye ilâve edelim. v.s. Bu usulde yazılan seri bütün $a_r b_s$ terimlerini ihtiva edecektir. Ve bu şekilde teşkil edilen (t_n) dizisi $a.b$ ye yakınsaktır. Çünki (t_n) yakınsaktır ve binaenaleyh herhangibir alt dizisi ve özel olarak $(t'_n . t''_n)$ aynı limite yakınsaktır. Halbuki $\lim\limits_{n\to\infty} t'_n . t''_n = a.b$ dir.

6. Fonksiyon Dizisi

2.6.1. *TARİF* 21. Verilen bir aralıkta tarifli $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ fonksiyonlarına *fonksiyon dizisi* denir ve $(f_n(x))$ ile gösterilir.

TARİF 22. $(f_n(x))$ dizisi her x için yakınsak ise $f_n(x)$ in $f(x)$ limiti x in bir fonksiyonudur ve

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

diye yazılır.

Misal. $[0,1]$ aralığında (x^n) dizisi tariflidir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = f(x)$ öyle ki $0 \leq x < 1$ için $f(x) = 0$ ve $x = 1$ için $f(x) = 1$ dir.

Bu misâl şu bakımdan faydalıdır: Her x^n $[0,1]$ de sürekli olduğu halde $f(x)$ $[0,1]$ de sürekli değildir. Şu halde şöyle bir suale cevap vermemiz istenir. Hangi şartlar altında verilen bir kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlardan müteşekkil bir yakınsak dizinin limiti aynı aralıkta süreklidir?

TARİF 23. Verilen bir aralıkta $(f_n(x))$ dizisi $f(x)$ e yakınsak ise, $(f_n(x))$ e o aralıkta $f(x)$ e *üniform yakınsaktır* denir şayet her $\varepsilon > 0$ karşılık bir n tam sayısı bulunabilirse (x e tâbi değil) öyleki bütün $p > n$ ve bütün x ler için

$$| f(x) - f_p(x) | < \varepsilon$$

Misal. (x^n) dizisi $[0,1]$ de üniform yakınsak değildir. Filhakika $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alınırsa, her n için $\exists\, \eta > 0 \ni x = 1-\eta$ ve η yeter derecede küçük için $|0-x^n| = 1-n\eta > \frac{1}{2}$

Problem 1. Bir sürekli fonksiyon dizisi misali bulunuz öyleki bu dizi üniform olmayarak bir sürekli fonksiyona yakınsak olsun. $[0,1]$ aralığını

gözönüne alalım. Bu aralıkta $(f_n(x))$ dizisini şu şekilde tarif edelim.

(i) $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n}$ için $f_n(x) = 2nx$

(ii) $\dfrac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ için $f_n(x) = 2n\left(\frac{1}{n} - x\right)$

(iii) $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ için $f_n(x) = 0$

$f_n(x)$ $[0,1]$ de süreklidir. Şimdi diyorum ki $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ 0 \leq x \leq 1$. $x = 0$ için aşikârdır. Her $x > 0$ için, n yeter derecede büyük alınırsa $\frac{1}{n} < x$. Binaenaleyh (iii) den dolayı $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Şu halde $[0, 1]$ de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Diğer taraftan $(f_n(x))$ üniform yakınsak değildir. $\varepsilon = 1$ verilmiş olsun. $| 0 - f_p(x) | = f_p(x)$ dir. $x = \dfrac{1}{2n}$ alırsak n ne olursa olsun $p > n$ için (i) den dolayı $f_p\left(\dfrac{1}{2p}\right) = 1$. Bu ise $\varepsilon = 1$ den küçük değildir.

Problem 2. Bir üniform yakınsak fonksiyon disisi gösteriniz. $[0,1]$ de tarifli $x^2 - x,\ x^2 - \dfrac{x}{2}, \ldots, x^2 - \dfrac{x}{n}, \ldots$ fonksiyon dizisini gözönüne alalım.

$$\lim_{n\to\infty} x^2 - \frac{x}{n} = x^2$$

Şimdi $x \in [0, 1]$ için $| f(x) - f_p(x) | = \dfrac{x}{p} \leq \dfrac{1}{p}$. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. n yeter derecede büyük seçilirse $\frac{1}{n} < \varepsilon$ dır. Binaenaleyh $p > n$ için $\dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ dır.

Teorem 2.6.1.1. $(f_n(x))$ dizisi $f(x)$ limitine üniform yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, n, \ni p,q > n$ ve bütün x ler için

$$| f_p(x) - f_q(x) | < \varepsilon$$

İspat. Farzedelim ki $(f_n(x))$ üniform olarak $f(x)$ e yakınsaktır. Bu takdirde $\varepsilon > 0$ verildiğine göre bir n bulunabilir $\ni p,q > n$ ve bütün x ler için

$$| f(x) - f_p(x) | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad | f(x) - f_q(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Binaenaleyh

$$| f_p(x) - f_q(x) | < \varepsilon$$

Şimdi farzedelim ki $| f_p(x) - f_p(x) | < \varepsilon$, ε, n, p, q ler yukardaki gibidir. Binaenaleyh her x için Cauchy kriterinden dolayı dizi yakınsaktır. $f_n(x)$ in limitine $f(x)$ diyelim. Şimdi göstermeliyiz ki dizi limitine üniform olarak yaklaşıyor. x keyfi fakat sabit olsun p yeter derecede büyük alınırsa $f_p(x)$ $f(x)$ ile değiştirilebilir. Şu halde

$$| f_p(x) - f_p(x) | = | f_q(a) | < \varepsilon, \; q > n$$

x keyfi olduğundan yakınsaklık uniformdur.

Teorem 2.6.1.2. Farzedelim ki her n için $f_n(x)$ süreklidir ve $(f_n(x))$ üniform olarak $f(x)$ e yakınsaktır. Bu takdirde $f(x)$ süreklidir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\exists\, n \ni$ bütün x ler için $| f(x) - f_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3}$.

Süreklilikten dolayı x_0 keyfi fakat sabit için $\exists\, \delta > 0 \ni | h | < \delta$ için

$$| f_n(x_0 + h) - f_n(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

Bu takdirde

$$| f(x_0 + h) - f(x_0) | \leq | f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h) | +$$

$$| f_n(x_0 + h) - f_n(x_0) | + | f_n(x_0) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Teorem 2.6.1.3. $[a, b]$ de $(f_n(x))$ tarifli ve $f(x)$ e üniform olarak yakınsak olsun. Farzedelim ki her n için $f_n(x)$ $[a,b]$ de integrallenebilir. Bu takdirde

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0 \Rightarrow n \ni p,q > n$ için

$$| f_p(x) - f_q(x) | < \frac{\varepsilon}{b-a}, \; (b>a).$$

Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f_p(a)dx - \int_a^b f_q(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b [f_p(x) - f_q(x)]\, dx \right| \leq$$

$$\int_a^b | f_p(x) - f_q(x) | \, dx < \varepsilon$$

Binaenaleyh $\left(\int_a^b f_n(x)dx \right)$ sayı dizisi yakınsaktır. Limitini I ile gösterelim.

Şimdi $f(x)$ in integrallenebilir ve değerinin I olduğunu göstermeliyiz. Yani $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0 \ni \Sigma_f$ normu δ dan küçük olan herhangi bir Riemann toplamı için $| I - \Sigma | < \varepsilon$. $\varepsilon > 0 \Rightarrow n \ni$ bütün $p > n$ ler için

$$\left| I - \int_a^b f_p(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sonra öyle bir p seçebiliriz ki

$$| f(x) - f_p(x) | < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Yine hipotezden dolayı $\exists \delta > 0 \ni \Sigma_p$, $f_p(x)$ için teşkil edilen normu δ dan küçük olan herhangi bir R-toplamı ise

$$\left| \int_a^b f_p(x)\, dx - \Sigma_p \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Σ, $f(x)$ için teşkil edilen normu δ dan küçük olan herhangi bir R-toplamı olsun. Yani $\Sigma = \Sigma f(x'_i)\, \Delta x_i$. Şimdi Σ_p yi öyle seçelim ki $\Sigma_p = \Sigma f_p(x'_i)\, \Delta x_i$. Bu takdirde

$$| \Sigma_p - \Sigma | = | \Sigma\, [f_p(x'_i) - f(x'_i)]\, \Delta_i | < \frac{\varepsilon}{3}$$

Diğer taraftan

$$| I - \Sigma | \leq \left| I - \int_a^b f_p(x)\, dx \right| + \left| \int_a^b f_p(x)\, dx - \Sigma_p \right| + |\Sigma_p - \Sigma| < \varepsilon$$

Binaenaleyh

$$\int_a^b f(x)\, dx = I$$

Problem 1. $f(x)$ e üniform olmıyarak yakınsak bir $(f_n(x))$ dizisi bulunuz öyle ki $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ mevcuttur, $f(x)$ integrallenebilir fakat

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \neq \int_a^b f(x)\, dx.$$

$[0,1]$ aralığında $f_n(x)$ fonksiyonlarını şu şekilde tarif edelim.

Binaenaleyh

$$| f_p(x) - f_q(x) | < \varepsilon$$

Şimdi farzedelim ki $| f_p(x) - f_p(x) | < \varepsilon$, ε, n, p, q ler yukardaki gibidir. Binaenaleyh her x için Cauchy kriterinden dolayı dizi yakınsaktır. $f_n(x)$ in limitine $f(x)$ diyelim. Şimdi göstermeliyiz ki dizi limitine üniform olarak yaklaşıyor. x keyfi fakat sabit olsun p yeter derecede büyük alınırsa $f_p(x)$ $f(x)$ ile değiştirilebilir. Şu halde

$$| f_p(x) - f_p(x) | = | f_q(a) | < \varepsilon, \; q > n$$

x keyfi olduğundan yakınsaklık uniformdur.

Teorem 2.6.1.2. Farzedelim ki her n için $f_n(x)$ süreklidir ve $(f_n(x))$ üniform olarak $f(x)$ e yakınsaktır. Bu takdirde $f(x)$ süreklidir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\exists\, n \ni$ bütün x ler için $| f(x) - f_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3}$.

Süreklilikten dolayı x_0 keyfi fakat sabit için $\exists\, \delta > 0 \ni | h | < \delta$ için

$$| f_n(x_0 + h) - f_n(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

Bu takdirde

$$| f(x_0 + h) - f(x_0) | \leq | f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h) | +$$

$$| f_n(x_0 + h) - f_n(x_0) | + | f_n(x_0) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Teorem 2.6.1.3. $[a, b]$ de $(f_n(x))$ tarifli ve $f(x)$ e üniform olarak yakınsak olsun. Farzedelim ki her n için $f_n(x)$ $[a,b]$ de integrallenebilir. Bu takdirde

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0 \Rightarrow n \ni p,q > n$ için

$$| f_p(x) - f_q(x) | < \frac{\varepsilon}{b-a}, \; (b>a).$$

Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f_p(a)dx - \int_a^b f_q(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b [f_p(x) - f_q(x)]\, dx \right| \leq$$

$$\int_a^b | f_p(x) - f_q(x) | \, dx < \varepsilon$$

Binaenaleyh $\left(\int_a^b f_n(x)dx \right)$ sayı dizisi yakınsaktır. Limitini I ile gösterelim.

Şimdi $f(x)$ in integrallenebilir ve değerinin I olduğunu göstermeliyiz. Yani $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0 \ni \Sigma_f$ normu δ dan küçük olan herhangi bir Riemann toplamı için $| I - \Sigma | < \varepsilon$. $\varepsilon > 0 \Rightarrow n \ni$ bütün $p > n$ ler için

$$\left| I - \int_a^b f_p(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sonra öyle bir p seçebiliriz ki

$$| f(x) - f_p(x) | < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Yine hipotezden dolayı $\exists \delta > 0 \ni \Sigma_p$, $f_p(x)$ için teşkil edilen normu δ dan küçük olan herhangi bir R-toplamı ise

$$\left| \int_a^b f_p(x)\, dx - \Sigma_p \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Σ, $f(x)$ için teşkil edilen normu δ dan küçük olan herhangi bir R-toplamı olsun. Yani $\Sigma = \Sigma f(x'_i)\, \Delta x_i$. Şimdi Σ_p yi öyle seçelim ki $\Sigma_p = \Sigma f_p(x'_i)\, \Delta x_i$. Bu takdirde

$$| \Sigma_p - \Sigma | = | \Sigma\, [f_p(x'_i) - f(x'_i)]\, \Delta_i | < \frac{\varepsilon}{3}$$

Diğer taraftan

$$| I - \Sigma | \leq \left| I - \int_a^b f_p(x)\, dx \right| + \left| \int_a^b f_p(x)\, dx - \Sigma_p \right| + |\Sigma_p - \Sigma| < \varepsilon$$

Binaenaleyh

$$\int_a^b f(x)\, dx = I$$

Problem 1. $f(x)$ e üniform olmıyarak yakınsak bir $(f_n(x))$ dizisi bulunuz öyle ki $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ mevcuttur, $f(x)$ integrallenebilir fakat

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \neq \int_a^b f(x)\, dx.$$

$[0,1]$ aralığında $f_n(x)$ fonksiyonlarını şu şekilde tarif edelim.

$$f_n(x) = 2n^2x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$$

$$f_n(x) = 2n^2\left(\frac{1}{n} - x\right), \quad \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}$$

$$f_n(x) = 0, \qquad \frac{1}{n} \leq x \leq 1$$

Şu halde her $x \in [0,1]$ için $f(x) = 0$ dır. Binaenaleyh

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

Sonra aşikâr olarak görülüyor ki her n için $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$

Şu halde $f_n(x)$ in integrallerinin limiti, $f(x)$ limitinin integraline eşit değildir.

Problem 2. Teoremin şartlarını sağlayan bir misal gösteriniz.

$f_n(x) = x^2 - \frac{x}{n}$ fonksiyonları üniform olarak x^2 ye yakınsaktır, $0 \leq x \leq 1$ (§ 2.6.1. Problem 2).

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x}{n}\right) dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{3}.$$

Diğer taraftan $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$

Teorem 2.6.1.4. Bir $(f_n(x))$ dizisi verilmiş olsun öyle ki

(i) $[a, b]$ de $f'_n(x)$ mevcuttur.

(ii) $[a, b]$ de $(f_n(x))$ $f(x)$ e yakınsaktır.

(iii) $[a, b]$ de $(f'_n(x))$ üniform olarak $g(x)$ e yakınsaktır.

Bu takdirde

1. $(f_n(x))$ üniform olarak $f(x)$ e yakınsaktır.
2. $f(x)$ $[a, b]$ de diferensiyellenebilir.
3. $f'(x) = g(x)$

İspat. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (ii) den dolayı $\exists n \ni p,q > n$ için

$$| f_p(a) - f_q(a) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Aynı zamanda (iii) den dolayı n yi yeter derecede büyük seçebiliriz, öyle ki

$$| f'_p(x) - f'_q(x) | < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Ortalama değer teoreminden dolayı

$$[f_p(x) - f_q(x)] - [f_p(a) - f_q(a)] = [f'_p(X) - f'_q(X)]\,(x-a), \quad a < X < x$$

Burada X, p ve q ye tâbidir. Binaenaleyh

$$| f_p(x) - f_q(x) | \leq | f_p(a) - f_q(a) | + | f'_p(X) - f'_q(X) | \,(x-a)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) < \varepsilon$$

Bu ise 1. yi ispatlar.

Şimdi şöyle yazalım.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f_p(x+h) - f_p(x)}{h} + \frac{[f(x+h) - f_p(x+h)] - [f(x) - f_p(x)]}{h} \qquad (2.6.1.1)$$

$\varepsilon > 0$ verildiğine göre n yi o şekilde seçelim ki

$$| f'_q(x) - f'_p(x) | < \varepsilon, \quad p,q > n \qquad (2.6.1.2)$$

Diyorum ki bütün x ve h $(\neq 0)$ için

$$\left| \frac{[f(x+h) - f_p(x+h)] - [f(x) - f_p(x)]}{h} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Aksi halde belli bir x ve h için $\exists q, \ni$

$$\left| \frac{[f_q(x+h) - f_p(x+h)] - [f_q(x) - f_p(x)]}{h} \right| > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Fakat ortalama değer teoreminden dolayı yukarıdaki ifade

$$| f'_q(X) - f'_p(X) | \quad x < X < x + h,$$

ye eşittir. Bu ise (2.6.1.2) den dolayı $< \frac{\varepsilon}{4}$

Bundan sonra p yi sabit tutuyoruz. x keyfi fakat sabit olsun. Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists \delta$ (bu δ p ye tâbidir) $\ni 0 < | h | < \delta$ için

$$\left| \frac{f_p(x+h) - f_p(x)}{h} - f'_p(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2.6.3.1)$$

(2.6.1.1) ile (2.6.1.3) karşılaştırılırsa

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'_p(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(2.6.1.2) ve (iii) den dolayı bütün x ler için

$$|g(x) - f'_p(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2.6.1.5)$$

(2.6.1.4) ile (2.6.1.5) karşılaştırılırsa

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| < \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

Yani $f(x)$ diferansyellenebilir ve $f'(x) = g(x)$ dir.

7. Fonksiyon Serisi

2.7.1. Serilerle diziler arasındaki *Benzerlik Prensibi* göz önünde tutulursa diziler için söylenen bütün teoremler aynen serilere nakledilebilir. Tabii bunun tersi de doğrudur yani, *kısmi toplamları ilgilendiren*, seriler için söylenen bütün teoremler diziler için de doğrudur. Bu prensibe göre $\Sigma_i^\infty g_i(x)$ serisi için $(f_n(x))$, $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$, dizisine ait yukardaki bütün teoremleri sadece hatırlatabiliriz.

TARİF 24. $\Sigma_i g_i(x)$ serisi verilen bir aralıkta üniform olarak $f(x)$ limitine yakınsaktır denir şayet her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilirse $\ni$ bütün $p > n$ ve bütün x ler için

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{p} g_i(x) \right| < \varepsilon$$

Teorem 2.7.1.1. $\Sigma_i g_i(x)$ üniform yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilir $\ni$ bütün $p, q > n$ $(q > p)$ ve bütün x ler için

$$\left| \sum_{i=p+1}^{q} g_i(x) \right| < \varepsilon$$

Teorem 2.7.1.2. Şayet $g_i(x)$ fonksiyonları verilen bir aralıkta sürekli ve $\Sigma_i g_i(x)$ üniform olarak $f(x)$ e yakınsak ise $f(x)$ süreklidir.

Teorem 2.7.1.3. Farzedelim ki $g_i(x)$ ler $[a, b]$ de integrallenebilir ve $\Sigma_i g_i(x)$ üniform olarak $[a, b]$ de $f(x)$ e yakınsaktır. Bu takdirde

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g_1(x)\,dx + \int_a^b g_2(x) + \dots$$

Teorem 2.7.1.4. $g_i(x)$ ler $[a, b]$ de aşağıdaki şartları sağlamış olsunlar.

(i) $g'_i(x)$ mevcuttur.

(ii) $\Sigma_i g_i(x) = f(x)$

(iii) $\Sigma_i g'_i(x) = h(x)$, yakınsaklık üniformdur. Şu halde

1. $\Sigma_i g_i(x)$ üniform olarak $f(x)$ e yakınsaktır.

2. $f(x)$ $[a,b]$ de diferansyellenebilir.

3. $f'(x) = h(x)$.

Teorem 2.7.1.5. *Weierstrass M-Kriteri.* $\Sigma_1^\infty m_i = M$ bir yakınsak pozitif sayı serisi olsun. Farzedelim ki $[a,b]$ de $|g_i(x)| \leq m_i$, $i=1,2,\dots$ Bu takdirde $\Sigma g_i(x)$ serisi $[a,b]$ de mutlak ve üniform yakınsaktır.

İspat. $\left| \sum_{i=p+1}^{q} g_i(x) \right| \leq \sum_{i=p+1}^{q} \left| g_i(x) \right| \leq \sum_{i=p+1}^{q} m_i$

Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0 \to n_\varepsilon \ni p, q > n$ için $\sum_{i=p+1}^{q} m_i < \varepsilon$

8. Çok Değişkenli Fonksiyonlar.

2.8.1. **Süreklilik ve kısmî türev kavramları.** Meseleyi basitleştirmek için yalnız iki değişken nazarı itibare alacağız. Bir O noktasında kesişen, biri diğerine dik x ve y-eksenlerini gözönüne alalım.

TARİF 25. *Genel kapalı aralık* diye $x\varepsilon[a,,b]$, $y\varepsilon[c,d]$ çiftinin belirtmiş olduğu *kapalı dörtgene* denir. $x\varepsilon(a, b)$, $y\varepsilon(c, d)$ ise, (x, y) çifti *genel açık*

aralığı tarif eder. Bu son halde *açık dikdörtgenden bahsedilir.* (x, y) çiftlerinin bütününe *düzlem* denir(1). Her çifte bir *nokta* denir.

TARİF 26. (x_0, y_0) noktasının bir ε – civarı diye $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ açık aralıklarının belirttiği açık kareye denir.

TARİF 27. Düzlemde bir nokta cümlesine *açıktır* denir şayet (x, y) bu cümleye ait herhangi bir nokta ise bu noktanın bir civarı da bu cümleye aittir.

TARİF 28. Bir (x, y) noktasına cümlenin bir *yığılma* noktasıdır denir şayet (x, y) noktasının herbir civarı, cümleye ait ve (x, y) den farklı en az bir nokta ihtiva ediyorsa.

TARİF 29. Düzlemde bir nokta cümlesine *kapalıdır* denir şayet bu cümle bütün yığılma noktalarını ihtiva ediyorsa.

TARİF 30. Bir cümleye *sınırlıdır* denir şayet bu cümle bir kare içine alınabilirse.

Teorem. *(Bolzano- Weierstrass)* 2.8.1.1. Her sınırlı sonsuz cümlenin en az bir yığılma noktası vardır.(2)

İspat. Teorem 1.2.1.6. yı gör.

TARİF 31. N bir nokta cümlesi ve R bir civar koleksiyonu olsun öyle ki N ye ait herbir nokta R nin bir civarına aittir. Bu takdirde diyeceğiz ki R, N yi *örtüyor.*

Teorem. (*Heine-Borel*) 2.8.1.2.. N sınırlı ve kapalı bir nokta cümlesi ve R, N yi örten bir civar koleksiyonu olsun. Bu takdirde R ye ait bir koleksiyon N yi örter.

İspat. Teorem 1.2.1.7. yi gör.

TARİF 32. Farzedelim ki $f(x, y)$, (x_0, y_0) noktasında tarifli, ve her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir $\delta > 0$ bulunabilir öyle ki $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ için

$$| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) | < \varepsilon$$

Bu takdirde $f(x, y)$ ye (x_0, y_0) da *sürekli*dir denir.

(1) § 1.1.1. deki tarife göre *düzlem*, nokta cümleleri olarak tasavvur edilen x ve y-eksenlerinin *(karteziyen)* çarpımıdır.

(2) Genel olarak *Bolzano-Weierstrass* teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Bunun için evvelâ birkaç tarif hatırlatalım: (i) Bir X uzayına (veya cümlesine) *kompakt'tır* denir şayet X de her sonsuz alt-cümlenin X de en az bir *yığılma noktası* varsa. (ii) bir X uzayına *lokal kompakt*tır denir şayet her $x \varepsilon X$ noktasının bir *civarının kapanışı* (yığılma noktaları dahil) *kompakt* ise. Bu tariflere göre, meselâ, reel sayılar cümlesi (x-ekseni) kompakt değildir, zira pozitif tam sayılar cümlesinin reel sayılar cümlesinde yığılma noktası yoktur. Buna mukabil *(Bolzano-Weierstrass* teoremi) reel sayılar cümlesi *lokal kompaktır*, yani bir $[a, b]$ kapalı aralığına ait herhangi bir sonsuz cümlenin $[a, b]$ de en az bir yığılma noktası vardır.

TARİF 33. Farzedelim ki $f(x, y)$, (x_0, y_0) da tarifli ve $\exists\ d \ni$ her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir $\delta > 0$ bulunabilir öyle ki $0 < |h| < \delta$ için

$$\left| \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - d \right| < \varepsilon$$

Bu takdirde diyoruz ki $f(x,y)$ nin (x_0, y_0) da x e nazaran *kısmî türevi* vardır.

Notasyon. Umumiyetle d,

$$f_x(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$$

sembollerinden biri ile gösterilir. Öteyandan,

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f(x_0, y_0) \text{ veya } f_{xy}\ (x_0, y_0)$$

notasyonu (evvelâ x e nazaran sonra da y *ye* nazaran) ikinci mertebeden kısmî türevi gösterir.

Teorem 2.8.1.3. $f(x,y)$, birinci ve ikinci mertebeden kısmî türevleri ile birlikte, (x_0, y_0) ın bir civarında sürekli olduklarını farzedelim. Bu takdirde

$$f_{xy}\ (x_0, y_0) = f_{yx}\ (x_0, y_0)$$

İspat. $A = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 y_0)$ ifadesini gözönüne alalım.

$\Phi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$ vaz edelim. Bu takdirde

$$A = \Phi\ (y_0 + k) - \Phi\ (y_0)$$

Ortalama değer teoremi tatbik edilirse

$$A = k\Phi'\,(Y),\ y_0 < Y < y_0 + k$$

$Y = y_0 + \theta_1 k$, $0 < \theta_1 < 1$, vaz edersek $A = k\ \Phi_y\ (y_0 + \theta_1 k)$ yazılabilir. Sonra

$\Phi_{y_0} = f_y(x_0 + h, y_0) - f_y\ (x_0, y_0) = hf_{yx}\ (x_0 + \theta h, y_0)$, $0 < \theta < 1$. Binaenaleyh

$$A = khf_{yx}\ (x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k)$$

Şimdi, $\Psi(x) = -f(x, y_0) + f(x, y_0 + k)$ vaz edelim. Bu takdirde

$$A = \Psi(x_0 + h) - \Psi\ (x_0) = h\Psi_x\ (x_2 + \theta_2 h),\ 0 < \theta_2 < 1.$$

Sonra,

$$\Psi_{x_0} = -f_x\ (x_0, y_0) + f_x\ (x_0, y_0 + k) = kf_{xy}\ (x_0, y_0 + \theta' k),\ 0 < \theta' < 1.$$

Binaenaleyh

$$A = hk\ f_{xy}\ (x_0 + \theta_2\ h, y_0 + \theta' k)$$

Binaenaleyh

$$f_{xy}\,(x_0 + \theta_2 h,\, y_0 + \theta' k) = f_{yx}\,(x_0 + \theta h,\, y_0 + \theta_1 k)$$

f_{xy} ve f_{yx} sürekli olduğundan $h, k \to 0$ için

$$f_{xy} = f_{yx}$$

2.8.2. **Üniform süreklilik.** *TARİF* 34. Bir genel aralıkta tarifli bir $f(x,y)$ fonksiyonuna *üniform sürekli*dir denir şayet verilen bir $\varepsilon > 0$ e karşılık bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilirse öyleki $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ için

$$|f(x + h,\, y + k) - f(x, y)| < \varepsilon$$

Burada δ, (x, y) noktasına tâbi değildir.

Teorem 2.8.2.1. Bir kapalı genel aralıkta sürekli bir $f(x,y)$ fonksiyonu aynı aralıkta üniform süreklidir.

İspat. Aynen § 2.1.2 deki gibidir.

Teorem 2.8.2.2. $f(x, y)$, $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$, genel kapalı aralığında sürekli ise, bu takdirde

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

$[\alpha, \beta]$ da süreklidir.

İspat. Filhakika,

$$F(y + k) - F(y) = \int_a^b [f(x, y + k) - f(x, y)]\, dx$$

$\varepsilon > 0$ verildiğine göre x ve y ye tâbi olmıyan bir $\delta > 0$ bulabiliriz öyle ki $|k| < \delta$ için

$$|f(x, y + k) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}$$

Binaenaleyh

$$|F(y + k) - F(y)| < \varepsilon.$$

Bu teorem sonsuz integrallere teşmil edilebilir. Gerçekten,

Teorem 2.8.2.3. $f(x, y)$, bütün X ler için $a \leq x \leq X$, $\alpha \leq y \leq \beta$ genel kapalı aralığında sürekli ve

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

y ye nazaran $[\alpha, \beta]$ da üniform yakınsak ise, bu takdirde $F(y)$, $[\alpha, \beta]$ da süreklidir.

İspat. Filhakika

$$|F(y+k) - F(y)| = \left| \int_a^\infty [f(x, y + k) - f(x, y)]\, dx \right|$$

$$\leq \left| \int_a^X [(x,y+k) - f(x,y)]\, dx \right| + \left| \int_X^\infty f(x,y+k)dx \right| + \left| \int_X^\infty f(x,y)dx \right|$$

Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, x \ni X > x$ ve bütün y ve k lar için

$$\left| \int_X^\infty f(x,y+k)\, dx \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_X^\infty f(x,y)\, dx \right| < \varepsilon$$

Şimdi X keyfi olup sabit tutulursa teorem 2.8.2.2 den dolayı birinci terim de ε dan küçüktür. Şu halde teorem ispatlanmıştır.

9. Katlı İntegral

2.9.1. **İntegrallerin Yer Değiştirmeleri.** Bu paragraftaki gayemiz katlı integrallerin tek-integrallerle ifadelerinde integrallerin ne gibi şartlar altında yer değiştirebilmelerini göstermek olacaktır.

Teorem 2.9.1.1. $f(x,y)$ $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$ genel kapalı aralığında sürekli ise bu takdirde

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)dx$$

İspat. Teorem 2.8.2.2 den dolayı

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$$

$[\alpha, \beta]$ da süreklidir. Şu halde

$$\int_\alpha^\beta F(y)\, dy$$

mevcuttur. Aynı şekilde sol taraftaki katlı integral de mevcuttur.

Şimdi bu iki integralin eşit olduğunu gösterelim.

$f(x, y)$ üniform sürekli olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0 \ni$ $|x - x'| < \delta$ ve $|y - y'| < \delta$ için

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

$[\alpha, \beta]$ aralığını Δy_i aralıklarına bölerek, normları δ dan küçük olan

$$\Sigma_j f(x, y_j)\ \Delta y_j,\ \Sigma_j F(y_j)\ \Delta y_j$$

Riemann toplamlarını teşkil edelim.

Sonra $[a, b]$ yi Δx_i aralıklarına bölerek her j için normu δ dan küçük olan

$$\Sigma_i f(x_i, y_j)\ \Delta y_j\ \Delta x_i$$

Riemann toplamını teşkil edelim. Bu takdirde

$$\left| \Sigma_j\Sigma_i f(x_i,y_j)\ \Delta x_i\ \Delta y_j - \Sigma_j \int_a^b f(x, y_j)\ dx\ \Delta y_j \right|$$

$$= \left| \Sigma_j\Sigma_i \int_{\Delta x_i} [f(x_i,y_j) - f(x, y_j)]\ dx\ \Delta y_j \right|$$

$$\leq \varepsilon\ (b - a)\ (\beta - \alpha)$$

Aynı şekilde x ve y in rolleri değiştirilirse

$$\left| \Sigma_i\Sigma_j f(x_i,y_j)\ \Delta x_i\ \Delta y_j - \Sigma_i \int_\alpha^\beta f(x_i, y)\ dy\ \Delta x_i \right| \leq \varepsilon(b - a)\ (\beta-\alpha)$$

Binaenaleyh,

$$\left| \Sigma_j \int_a^b f(x,y_i)\ dx\ \Delta y_j - \Sigma_i \int_\alpha^\beta f(x_i,y)\ dy\ \Delta x_i \right| \leq 2\ \varepsilon\ (b - a)\ (\beta - \alpha).$$

Bu ise teoremi ispatlar.

Şimdi sonsuz integrallere geçelim.

Teorem 2.9.1.2. Farzedelim ki bütün $X > a$ için

$$\int_a^X dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\ dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^X f(x, y)\ dx$$

ve

$$\int_a^\infty f(x, y)\ dx$$

$[\alpha, \beta]$ aralığında *üniform* yakınsaktır. Bu takdirde

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\ dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y)\ dx$$

İspat. Filhakika

$$s_n(y) = \int_a^n fx, y)\ dx$$

dizisi $[\alpha, \beta]$ da üniform olarak $s(y)$ ye yakınsaktır.

Diğer taraftan Teorem 2.9.1.1 den dolayı her n için

$$\int_a^n dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\ dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^n f(x,y)\ dx = \int_\alpha^\beta s_n(y)\ dy$$

Diziler için Teorem 2.6.1.3 tatbik edilirse

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta s_n(y)\ dy \int_\alpha^\beta s(y)\ dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y)\ dx$$

2.9.2. **İntegral içinde türev alabilme.** Yukarda yapılan inceleme bize integral içinde integral alabilme şartlarını verdi. Filhakika, y yi parametre olarak alır ve $f(x, y)$ fonksiyonunu $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$ genel kapalı aralıkta sürekli farzedersek

$$F(y) = \int_a^n f(x, y)\ dx$$

$[\alpha, \beta]$ da süreklidir ve binaenaleyh

$$\int_\alpha^\beta F(y)\ dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\ dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\ dy$$

Şimdi Leibnitz kaidesi denilen şu teoremi söyleyebiliriz.

Teorem 2.9.2.1. Farzedelim ki $f(x, y)$ $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$ aralığında süreklidir. Farzedelim ki $f_y\ (x, y)$ aynı aralıkta mevcut ve süreklidir. Bu takdirde

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\ dx$$

in türevi, sadece integral içinde türev alınarak elde edilir. Yani

$$F'(y) = \int_a^b f_y\ (x, y)\ dx$$

İspat. $y \varepsilon\ (\alpha, \beta)$ herhangi bir nokta olsun. $f_y\ (x,y)$ verilen genel kapalı aralıkta sürekli olduğundan integral içinde integral alınabilir.

$$\int_a^y dy \int_a^b f_y(x,y)\ dx = \int_a^b [f(x,y) - f(x,\alpha)]\ dx = F(y) - F(\alpha) \qquad (2.9.2.1)$$

Şimdi $\int_a^b f_y\ (x,y)\ dx$ sürekli olduğundan $\int_a^y dy \int_a^b f_y\ (x,y)\ dx$ in y ye nazaran türevi teorem 2.3.11.1 den dolayı $\int_a^b f_y\ (x, y)\ dx$ dir.

Binaenaleyh (2.9.2.1) in taraf tarafa türevi alınırsa

$$\int_a^b f_y\ (x,\ y)\ dx = F'\ (y)$$

Not. $\int_a^\infty f(x,\ y)\ dx$, $[\alpha,\ \beta]$ aralığında üniform yakınsak ise, Leibnitz kaidesi yine kabili tatbiktir.

10. Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyonlar.

2.10.1. Farzedelim ki $y=f(x)$ $[a,\ b]$ de tariflidir. (x_i): $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$ nokta sistemi ile $[a,\ b]$ yi kısımlara bölelim.

$$W = \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid$$

Toplamını teşkil edelim. Her (x_i) sistemine tamamiyle belirli bir W değeri tekabül eder. (x_i) sistemi değiştiği zaman W değişir. Bütün (x_i) sistemleri gözönüne alınırsa olabilir ki tekabül eden W değerleri sınırlıdır. Bu takdirde diyoruz ki $f(x)$ $[a,\ b]$ de *sınırlı varyasyonludur*. W değerlerinin en küçük üst sınırına $f(x)$ in $[a,\ b]$ deki *varyasyonu* denir ve $V^f_{[a,b]}$ veya sadece $V_{[a,b]}$ ile gösterilir. Şayet $f(x)$ $[a,\ b]$ de sınırlı varyasyonlu değilse bu takdirde *sınırsız varyasyonludur* diyoruz ve $V^f_{[a,b]} = \infty$ ile ifade ediyoruz.

Teorem 2.10.1.1. $f(x)$ $[a,\ b]$ de sınırlı varyasyonlu ise $[a,\ c]$ ve $[c,b]$ $a<c<b$, de de sınırlı varyasyonludur ve

$$V_{[a,b]} = V_{[a,c]} + V_{[c,b]}$$

İspat. $W_{[a,c]}$ $[a,\ c]$ için teşkil edilen herhangibir varyasyon toplamı olsun. $f(x)$ $[a,\ b]$ de sınırlı varyasyonlu olduğundan

$$W_{[a,c]} + \mid f(b) - f(c) \mid \leq V_{[a,b]}$$

Binaenaleyh $f(x)$ $[a,\ c]$ de sınırlı varyasyonludur.

Aynı şekilde $[c,\ b]$ de sınırlı varyasyonludur.

Şimdi herhangibir $W_{[a,c]}$, $W_{[c,b]}$ gözönüne alalım. Bunların toplamı bir $W_{[a,b]}$ dir ve

$$W_{[a,c]} + W_{[c,b]} = W_{[a,b]} \leq V_{[a,b]}$$

Binaenaleyh

$$V_{[a,c]} + V_{[c,b]} \leq V_{[a,b]}$$

$\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists \overline{W}_{[a,b]} \ni \overline{W}_{[a,b]} > V_{[a,b]} - \varepsilon$ (en küçük üst sınırın ta-

rifi) $\overline{W}_{[a,b]}$ nin teşkilinde (x_i) sistemine c noktası ilâve edilirse, yeni $((x'_i)$ sistemine tekabül eden

$$W_{[a,b]} \geq \overline{W}_{[a,b]}$$

Fakat

$$W_{[a,b]} = W_{[a,c]} + W_{[c,b]} \leq V_{[a,c]} + V_{[c,b]}$$

Binaenaleyh

$$V_{[a,b]} - \varepsilon < \overline{W}_{[a,b]} \leq W_{[a,b]} \leq V_{[a,c]} + V_{[c,b]}$$

Binaenaleyh ε istenildiği kadar küçük alınabildiğinden

$$V_{[a,b]} \leq V_{[a,c]} + V_{[c,b]}$$

Teorem 2.10.1.2. $y = f(x)$ $[a,\ b]$ de sınırlı varyasyonlu ise $x \in [a,b]$ için $V_{[a,x]}$ monoton küçülmeyen bir fonksiyondur.

İspat. $x_2 > x_1$ $[a,\ b]$ de herhangi iki nokta ve $V_{[a,x_2]}$, $V_{[a,x_1]}$, $V_{[x_1,x_2]}$ $f(x)$ in $[a,\ x_1]$, $[a,\ x_2]$, $[x_1,\ x_2]$ deki varyasyonları olsun. Bu takdirde $V_{[x_1,x_2]} \geq 0$ olduğundan

$$V_{[a,x_2]} = V_{[a,x_1]} + V_{[x_1,x_2]} \geq V_{[a,x_1]}$$

TARİF 35. $u < x$ için $V^f_{[a,u]} = V\ (u)$ değerlerinin en küçük üst sınırına $V\ (x-0)$ diyeceğiz. $V\ (x+0)$ aynı şekilde tarif edilir. $V\ (x-0)$ ın tarifinden ve yukarıki teoremden dolayı $V\ (x-0) \leq V\ (x)$

Teorem 2.10.1.3. $y = f(x)$ $[a,\ b]$ de sürekli ve sınırlı varyasyonlu ise $V_{[a,x]} = V(x)$ $[a,\ b]$ de süreklidir. Yani $x_0 \in [a,\ b]$ de $V\ (x_0 - 0) = V(x_0) = V\ (x_0 + 0)$ dır.

İspat. $x_0 \in [a,\ b]$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\exists\ \delta > 0 \ni \mid x - x_0 \mid < \delta$ için

$$\mid f(x) - f(x_0) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

$[a,\ x_0]$ için bir (t_i) sistemi bulalım öyleki

$$V(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{n} \mid f(t_i) - f(t_{i-1}) \mid = \sum_{i=1}^{n-1} \mid f(t_i) - f(t_{i-1}) \mid + \mid f(x_0) - f(t_{n-1}) \mid$$

ve

$$\mid x_0 - t_{n-1} \mid < \delta$$

Bu takdirde

$$\mid f(x_0) - f(t_{n-1}) \mid < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Diğer taraftan

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mid f(t_i) - f(t_{i-1}) \mid \leq V_{[a,t_{n-1}]} \leq V(x_0 - 0)$$

Binaenaleyh

$$V(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < V(x_0 - 0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Yani

$$V(x_0) < V(x_0 - 0) + \varepsilon.$$

ε istenildiği kadar küçük olabildiğinden

$$V(x_0) = V(x_0 - 0).$$

Aynı şekilde $V(x_0) = V(x_0 + 0)$ dır. Binaenaleyh $V(x)$ in x_0 da sürekliliği temin edilmiştir.

Problem. Sınırlı varyasyonlu fonksiyonların toplama, çıkarma ve çarpmaya nazaran kapalı olduğunu gösteriniz.

Teorem 2.10.1.4. Sınırlı varyasyonlu herhangibir fonksiyon iki monoton küçülmeyen fonksiyonun farkına eşittir.

İspat. Bir kere biliyoruz ki $V(x)$ monoton küçülmeyen bir fonksiyondur. Diyorum ki $V(x) - f(x)$ monoton küçülmeyen bir fonksiyondur. Filhakika $x_2 > x_1$ ise

$$[V(x_2) - f(x_2)] - [V(x_1) - f(x_1)] = V_{[x_1,x_2]} - [f(x_2) - f(x_1)]$$
$$\geq V_{[x_1,x_2]} - | f(x_2) - f(x_1) | \geq 0$$

Diğer taraftan,

$$f(x) = V(x) - [V(x) - f(x)]$$

olduğuna göre teorem ispatlanmıştır.

Not. Üstelik $f(x)$ sürekli ise o zaman monoton küçülmeyen fonksiyonlar da süreklidir.

11. Düzlemde Jordan Eğrileri

2.11.1. **Ölçülebilir Eğriler.** *TARİF.* 36 $x=f(t)$, $y=g(t)$ olarak tarif edilen (x,y) noktalarını gözönüne alalım. Farzedelim ki $f(t)$ ve $g(t)$ $[0,1]$ de *süreklidirler* ve $f(t_1) = f(t_2)$, $g(t_1) = g(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$. Bu takdirde (x, y) noktaları bir *basit Jordan Eğrisi* tarif ediyor denir. Bundan sonra, aksi iddia edilmedikçe, *eğriden* basit Jordan eğrisini kastedeceğiz.

TARİF 37. (x_0, y_0), $t = 0$ değerine ve (x_1, y_1), $t = 1$ değerine tekabül eden nokta olsun. Bu takdirde (x_0, y_0), (x_1, y_1) noktalarına eğrinin *uç* noktaları denir.

TARİF 38. Şayet üstelik $f(t_1) = f(t_2)$, $g(t_1) = g(t_2)$ denklemleri yalnız ve yalnız $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ için sağlanıyor ise, bu takdirde basit Jortan eğrisine *basit kapalı Jordan Eğrisi* denir. Bundan sonra bu gibi eğrilere sadece *kapalı eğri* denecektir.

TARİF 39. C: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $0 \leq t \leq 1$ bir basit Jordan eğrisi olsun.

$$(t_i) : 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{i-1} \leq t_i \leq \dots \leq t_n = 1$$

sistemini göz önüne alalım. $x_i = f(t_i)$, $y_i = g(t_i)$ vaz ederek

$$U = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

toplamını teşkil edelim. (t_i) değiştiği zaman U lar değişir. U değerlerinin cümlesine N diyelim. Şayet N sınırlı ise diyeceğiz ki C eğrisi *ölçülebilir*. L, N nin en küçük üst sınırı ise L ye C eğrisinin *uzunluğu* denir.

Teorem 2.11.1.1.. Bir C Jordan eğrisi ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart, C yi tarif eden $x = f(t)$, $y = g(t)$ fonksiyonları sınırlı varyasyonlu olmalıdır.

İspat. Farzedelim ki C ölçülebilir ve L, C nin uzunluğudur.

$$\sum_{i=1}^{n} | f(t_i) - f(t_{i-1}) | - \sum_{i=1}^{n} | x_i - x_{i-1} | \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \leq L$$

Binaenaleyh $f(t)$ sınırlı varyasyonludur. Aynı şekilde $g(t)$ nin sınırlı varyasyonlu olduğu gösterilebilir. Şimdi farzedelim ki $f(t)$, $g(t)$ sınırlı varyasyonludur.

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \leq \sum_{i=1}^{n} | f(t_i) - f(t_{i-1}) | +$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g(t_i) - g(t_{i-1}) | \leq V_f + V_g.$$

Binaenaleyh C ölçülebilir.

Not. C yi *parametrik* olarak tarif eden $x = f(t)$, $y = g(t)$ fonksiyonları birtek değildir.

Misâl. $x = t$, $y = 0$

ve $x = t^2$, $y = 0$

$[0,1]$ aralığında ayni C eğrisini tarif ederler.

TARİF 40. Farzedelim ki C eğrisi $x = f(t)$, $y = g(t)$ ile tarif edilmiştir. $t_2 > t_1$ ise $P_{t_2} > P_{t_1}$ veya $P_{t_2} < P_{t_1}$ yazacağız. Burada P_t, t ye tekabül eden C üzerinde bir noktadır, $P_{t_2} > P_{t_1}$ ise P_{t_2}, P_{t_1} noktasından *sonra* geliyor diyeceğiz. Binaenaleyh görülüyor ki t parametresi ile tarif edilen C de aynı zamanda bir yön tarif edilmiş oluyor. t yerine $t' = 1 - t$, $0 \leq t' \leq 1$, para-

metresi vaz edilirse görülüyor ki C değişmez fakat yön değişir. Yani t ve t' C de iki aksi yön tarif eder. Şayet birisine pozitif denirse diğeri negatiftir. Göstereceğiz ki bir eğride yalnız iki yön mevcuttur. Yani bir parametrizasyonda C nin A, B,..., F noktaları A > B > ... > F sırasında iseler diğer bir parametrizasyonda bu noktalar ya aynı sırada veyahut A < B <...< F sırasındadırlar.

Teorem 2.11.1.2. $x = f(t)$, $y = g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $x = \Phi(u)$, $y = \Psi(u)$, $0 \leq u \leq 1$ aynı C eğrisini tarif etmeleri için gerek ve yeter şart $\exists\ \xi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, sürekli ve monoton büyüyen (veya küçülen), $\ni$

$$\xi(0) = 0 \text{ (veya 1)}, \qquad \xi(1) = 1 \text{ (veya 0)}$$

ve $u = \xi(t)$.

İspat. Farzedelim ki $x = f(t)$, $y = g(t)$ C nin bir parametrizasyonudur; $x = \Phi(u)$, $y = \Psi(u)$ sistemini göz önüne alalım öyle ki teoremdeki bütün şartlar sağlansın bu takdirde aşikâr olarak $x = \Phi(u)$, $y = \Psi(u)$ aynı C yi tarif eder. Şimdi farzedelim ki C nin iki parametrizasyonu vardır. Bu takdirde her t ye C de bir P_t noktası tekabül eder ve P_t ye birtek u tekabül eder. Binaenaleyh t ile u arasında birebir tekabül vardır. $u = \xi(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Diyorum ki $u = \xi(t)$ süreklidir. Filhakika farzedelim ki $t_1, t_2, \ldots$ t ye yakınsak bir dizidir. Süreklilikten dolayı $P_{t_1}, P_{t_2}, \ldots$ P_t ye yakınsaktır. $P_{t_1}, P_{t_2}, \ldots$ noktalarına [0,1] de $u_1, u_2, \ldots$ noktaları tekabül eder. Bolzano-Weierstrass teoreminden dolayı (u_n) nin en az bir yığılma noktası vardır ve [0,1] e aittir. u' (u_n) nin herhangibir yığılma noktası olsun. Binaenaleyh $\exists u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots \subset (u_n) \ni \lim u_{n_i} = u'$. Binaenaleyh $P_{u_{n_i}} \to P_{n'}$ Fakat $P_{u_{n_i}} \to P_t$ Binaenaleyh $P_t = P_{u'}$. O halde yukarıdaki neticeden (birebir) dolayı $u' = u = \xi(t)$. Binaenaleyh $u_1, u_2, \ldots$ nın herhangibir yığılma noktası u olmalıdır. Yani $u_1, u_2, \ldots$ dizisi u ya yakınsaktır. Binaenaleyh $t_n \to t$ ise $(u_n) = (t_n) \to u = \xi(t)$. Yani $\xi(t)$ süreklidir. Diğer taraftan tekabül birebir olduğundan, yani $\xi(t)$ her u değerini $[0, 1]_t$ de yalnız bir yerde aldığından $\xi(t)$ monoton büyüyen veya küçülen bir fonksiyondur.

Teorem 2.11.1.3. C eğrisi üzerinde yalnız iki yön mevcuttur.

İspat. t ve u C yi tarif eden iki parametre olsun. O halde $u = \xi(t)$ monoton büyüyen bir fonksiyon ise $t_1 < t_2$ için $u_1 < u_2$ dir ve t nin C de tarif ettiği yön u nun C de tarif ettiği yön ile aynıdır. Diğer taraftan $\xi(t)$ monoton küçülen bir fonksiyon ise $t_1 < t_2$ için $u_1 > u_2$ dir ve t nin C de tarif ettiği yön u nun C de tarif ettiği yönün tersidir.

Teorem 2.11.1.4. Bir C Jordan eğrisi bir parametrizasyona göre ölçülebilirse diğer herhangibir parametrizasyona göre de ölçülebilir ve C nin uzunluğu iki parametrizasyonda da aynıdır.

İspat. Farzedelim ki C yi tarif eden parametrik gösterimler

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$x = \Phi(u) \quad y = \Psi(u) \quad 0 \leq u \leq 1$$

dir. t ye tekabül eden uzunluk L_t olsun; Bir (u_i): $u_0 = 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n = 1$ sistemini gözönüne alalım. (u_i) ye C de $Pu_i = (x_i, y_i)$ noktaları tekabül eder. (x_i, y_i) noktasına birtek $t = t_i$ noktası tekabül eder öyle ki $x_i = f(t_i)$, $y_i = g(t_i)$ $i = 1, 2, \ldots n$. Gösterdik ki ya $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = 1$ veya $0 = t_n \leq t_{n-1} \leq \ldots \leq t_0 = 1$. Her iki halde de,

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})]^2 + [\Psi(u_i) - \Psi(u_{i-1})]^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - f(t_{i-1})]^2} \leq L_t$$

Binaenaleyh C u parametrizasyonuna göre ölçülebilir ve $L_u \leq L_t$ Aynı şekilde $L_t \leq L_u$ dur. Binaenaleyh $L_t = L_u$ dur.

Not. C bir Jordan eğrisi ise, bu eğrinin herhangi bir yay parçası da Jordan eğrisidir. Bunu gösterebilmek için şunu göstermek kâfidir. Pt_1 C üzerinde herhangibir nokta olsun $0 \leq t \leq t_1 < 1$ noktalarına tekabül eden C_1 yayı Jordan eğrisidir. Filhakika C_1 i tarif eden denklemler $x = f(u)$, $y = g(u)$ dur.

Burada $u = \dfrac{t}{t_1}$.

Şimdi, C_2 $t_1 \leq t \leq 1$ e tekabül eden yay olduğuna göre C, C_1 ve C_2 den müteşekkildir. Tarif olarak C, C_1 ve C_2 nin *toplamıdır* denir. C ölçülebilir ise C_1, C_2 de ölçülebilir ve $L = L_1 + L_2$ (ispat ediniz).

$t = 0$ dan t ye tekabül eden s yay uzunluğu t nin bir fonksiyonudur: $s = s(t)$.

Teorem 2.11.1.5. C, $x = f(t)$, $y = g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ile tarif edilmiş olsun. Farzedelim ki $f'(t)$, $g'(t)$ mevcut ve süreklidir. Bu taktirde C ölçülebilir ve uzunluğu

$$L = \int_0^1 \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

dir.

İspat. $f'(t)$, $g'(t)$, [0, 1] de sürekli olduklarından $\exists\ k_1, k_2 \ni |f'(t)| \leq k_1$, $|g'(t)| \leq k_2$. $K = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ vaz edelim ve herhangibir (t_i): $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = 1$ sistemini göz önüne alalım. Ortalama değer teoremine göre

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t'_i)]^2 + [g'(t''_i)]^2}\, \Delta t_i \leq k \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = K$$

$$t_{i-1} < t'_i < t_i, \qquad t_{i-1} < t''_i < t_i$$

Binaenaleyh C ölçülebilir.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun, $\exists\, (t_i) \ni$,

$$L - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

Şimdi $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyon sürekli olduğundan integrallenebilir. Binaenaleyh $\exists\, \delta_1 > 0 \ni$ normu δ_1 den küçük olan herhangibir Riemann toplamı için

$$\left| \int_0^1 \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t'_i)]^2 + [g'(t''_i)]^2}\, \Delta t_i \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Farzediyoruz ki R–toplamının teşkilindeki (t_i) sistemi yukardaki sistemin inceltilmişidir.

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2_i + \Delta y^2_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t'_i)]^2 + [g'(t''_i)]^2}\, \Delta t_i$$

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t'_i)]^2 + [g'(t'_i)]^2}\, \Delta t_i$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

vaz edelim.

$$| L - I | \leq | L - A | + | A - \Sigma | + | \Sigma - I |$$

$u = [f'(t'_i)]^2 + [g'(t'_i)]^2$ vaz edelim $g'(t)$ sürekli olduğundan (t_i) yeter derecede ince seçilerek $[f'(t'_i)]^2 + [g'(t''_i)]^2 = u + h \ni | h | < \eta$ ve $| \sqrt{u+h} - \sqrt{u} | < \frac{\varepsilon}{3}$. Binaenaleyh

$$| L - I | < \varepsilon$$

Teorem 2.11.1.6. Farzedelim ki C ölçülebilir bir Jordan eğrisidir. Bu takdirde $s = s(t)$ t nin sürekli monoton büyüyen bir fonksiyonudur.

İspat. $s(t)$ nin monoton büyüyen bir fonksiyon oluşu açıktır. Şimdi, C ölçülebilir olduğundan, $x = f(t)$, $y = g(t)$ sınırlı varyasyonludur. Binaenaleyh $V^f_{[0,\,t]}$ ve $V^g_{[0,\,t]}$ süreklidirler. Dolayısiyle $V^f_{[0,\,t]} + V^g_{[0,\,t]}$ süreklidir. Binaenaleyh $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0 \ni | t - t_0 | < \delta$ için (meselâ $t > t_0$ için)

$$(V^f_{[0,\,t]} + V^g_{[0,\,t]}) - (V^f_{[0,\,t_0]} + V^g_{[0,\,t_0]}) = V^f_{[t_0,\,t]} + V^g_{[t_0,\,t]} < \varepsilon$$

Fakat

$$s(t) - s(t_0) \leq V^f_{[t_0,\,t]} + V^g_{[t_0,\,t]} < \varepsilon.$$

$t < t_0$ alınırsa

$$s(t_0) - s(t) < \varepsilon$$

Binaenaleyh

$$| s(t) - s(t_0) | < \varepsilon$$

12. Eğri ve Boyut Kavramları

2.12.1. **Eğri kavramı.** Konu dışı olmakla beraber topolojik ehemmiyeti haiz olmaları dolayısıyle eğri kavramı ve bu kavramla çok ilgili olan boyut kavramı üzerinde biraz durmak istiyoruz. Basit Jordan eğrisinin tarifinden anlaşılıyor ki, bu eğri [0,1] kapalı aralığının bir *birebir sürekli (topolojik)* resimidir. Halbuki [0,1] aralığının *boyutu* 1 olup bu kavram topolojik transformasyonlara nazaran *invarient* olduğundan[1], basit Jordan eğrisinin boyutu 1 dir. Binaenaleyh [0,1] aralığı, 1–*boyutlu ayrılabilir bir metrik uzay* olduğu gözönünde tutulursa, eğrinin *topolojik invarient* bir tarifi şöyle olabilir. *Eğri* diye, her noktasında boyutu 1 olan, ayrılabilir bir metrik uzaya denir. (Yeni tabirler için, § 2.12.2 ve meselâ müellifin Konform Tasvir kitabına bakılabilir).

Yakın bir zamana kadar, eğrinin tarifinde, boyut nazarı itibare alınmamıştı. Sadece [0, 1] aralığının *sürekli resmine* deniyordu. Halbuki boyut umumiyetle *sürekli transformasyonlara* nazaran *invarient* değildir. Bunu ilk defa olarak Peano, [0,1] aralığını sürekli olarak bir kapalı kareye (kapalı bölge) tasvir ederek gösterdi. Binaenaleyh eski tarife göre bir bölge de eğri olabiliyordu. Böyle bir tasvir hakkında bir fikir edinebilmek için *Polyayı* takiben [0, 1] aralığını meselâ bir kapalı üçgene tasvir etmeye çalışalım. Bir ABC dik üçgeni verilmiş olsun. En büyük kenarı BC ile gösterelim. En son farzedelim ki AB > AC. Şimdi $t_0 : 0 \leq t_0 \leq 1$, herhangibir değer olsun. t_0 *ı diadik kesir* (2 bazında desimal) olarak yazalım: $t_0 = 0 \,.\, a_1\, a_2 \ldots,\ a_i = 0$ veya 1 dir. A dan BC kenarına bir dik çizelim. Bu dikin BC yi kestiği noktaya H_0 diyelim. $a_1 = 0$ ise H_0 dan AC kenarına bir dik indirerek bu dikin AC yi kestiği noktaya H'_1 diyelim; aksi halde yani $a_1 = 1$ ise AC yerine AB ve H'_1 yerine H'_2 gözönüne alınır. Bu noktaların herhangi birine H_1 diyelim. Aynı

(1) S. Stoïlow, Leçons sur les Principes Topologiques, Paris, 1938, sahife 26–29.

usul ABC yerine AH_0C veya AH_0B ye tatbik edilerek, neticede t_0 yardımı ile, (H_i) $i = 1,2,\ldots$ dizisi elde edilir. Bu dizinin limitine P_0 diyelim (P_0, iç içe kapalı üçgenlerin yegâne ortak noktasıdır). Görülüyor ki, herbir t_0 noktasına, ABC kapalı üçgeninde birtek P_0 noktası tekabül ediyor. Bu tekabülü $P = f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ile gösterelim. $f(t)$ $[0,1]$ de sürekli olduğu ve üçgenin herbir P noktası $P = f(t)$ ile elde edildiği aşikârdır. Bu misal, eğrinin tarifinde *süreklilik* kâfi gelmediği gibi, yine yakın bir zamana kadar kabul edilen boyut kavramının tarifinde de sürekliliğin kâfi gelmediğini göstermektedir. Filhakika, bir nokta cümlesinin *boyutu* diye, o cümleye ait bir noktanın tesbiti için lazım gelen sürekli parametrelerin asgari sayısına deniyordu. Halbuki yukardaki misalde de görüldüğü gibi, bu sayı, bir sürekli transformasyonda değişebilir. O halde aynen eğride olduğu gibi burada da bir topolojik invarient tarife ihtiyaç vardır.

2.12.2. **Boyut kavramı.** Önce 0-*boyutu* tarif edelim. Bahis konusu uzaylar daima *ayrılabilir metrik uzaylar* farzedilecektir.

TARİF. 41. Bir X uzayının bir $p \varepsilon X$ noktasında *boyutu* 0 dır, $d_p[X] = 0$ yazılır, şayet p nin istenildiği kadar küçük civarlarının kenar cümleleri (sınırları) boş ise. Yani, p nin her U civarı için p nin bir V civarı bulunabilir, öyleki

$$V \subset U$$

ve

$$\text{sınır } V = \varnothing$$

Boş olmıyan bir X uzayının boyutu 0 dır denir, $d[X] = 0$ yazılır, şayet her bir $p \varepsilon X$ için $d_p[X] = 0$ ise

Misal 1. $\dot{I}$ irasyonel reel sayılar cümlesini göstermiş olsun. Bu takdirde $d[\dot{I}] = 0$. Filhakika, herhangibir irasyonel p sayısının herhangibir U civarı (aralığı) verildiğine göre, $\exists\, \rho, \sigma$ rasyonel sayıları $\ni \rho < p < \sigma$, ve ρ ile σ arasındaki bütün irasyonel sayıların V cümlesini U aralığı ihtiva ediyor. $\dot{I}$ uzayında[1] V açıktır ve aynı zamanda da kapalıdır, zira, V nin bir yığılma noktası olan herbir irasyonel nokta ρ ile σ arasında olduğundan V ye aittir. Şu halde V hem açık hem de kapalı olduğundan sınır $V = \varnothing$.

Misal 2. Boş olmıyan herbir sonlu veya sayılabilir sonsuz X uzayının boyutu 0 dır. Filhakika, herhangibir $p \varepsilon X$ noktasının herhangibir U civarı verilmiş olsun. $\varepsilon > 0$, reel, verilmiş olsun öyleki p nin ε-civarı, U tarafından ihtiva edilsin. $X = (x_1, x_2, \ldots)$ olarak yazıldığını farzedelim ve p nin x_i, $i = 1, 2, \ldots$, noktalarına olan uzaklıklarını $d(p, x_i)$ ile gösterelim. $\exists\, 0 < \varepsilon' < \varepsilon$,

(1) R Reel sayılar topolojisinde yığılma noktalarının tarifi, aşağıdaki şekilde $\dot{I} \subset R$ alt cümlesine nakledilmekle $\dot{I}$, bir topolojik uzay olmuş olur: $\dot{I}$ ye ait bir p noktası, bir $P \subset \dot{I}$ cümlesinin $\dot{I}$ de yığılma noktasıdır şayet p, P nin R de bir yığılma noktası (R için kabul edilen tarife göre) olup $p \varepsilon \dot{I}$ ise.

$\varepsilon' \neq d(p, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots \ni$ U, p nin ε' civarını ihtiva ediyor ve ε'-civarının sınırı boştur.

n-boyutun tarifi. Rekürsif olarak tarif edilir. Kaba olarak diyebiliriz ki bir uzayın boyutu $\leq n$, şayet uzaya ait herbir noktanın bu noktayı ihtiva eden uzaya ait istenildiği kadar küçük bir parçanın *kenar (sınır)* alt cümlelerinin boyutları $\leq n - 1$ ise

Kesin olarak ise,

TARİF. 42 Yalnız ve yalnız boş cümlenin boyutu -1 e eşittir: $d[\varnothing] = -1$. X bir uzay ve $p \varepsilon X$ bir nokta olsun. $d_p[X] \leq n$, $(n \geq 0)$, şayet p nin istenildiği kadar küçük bir U civarı için, U nın *kenar* alt cümlelerinin boyutları $\leq n - 1$ ise

$d[X] \leq n$, şayet $d_p[X] \leq n$ ise, $p \varepsilon X$

$d_p[X] = n$, şayet $d_p[X] \leq n$ doğru, $d_p[X] \leq n-1$ yanlış ise

$d[X] = n$, şayet $d[X] \leq n$ doğru, $d[X] \leq n-1$ yanlış ise

$d[X] = \infty$, şayet her n için $d[X] \leq n$ yanlış ise.

BÖLÜM III

LİNEER SÜBSTİTÜSYON

1. Kompleks Sayılar

3.1.1. Bölüm I de gördük ki rasyonel sayılar cisminde, kat sayıları bu cisme ait olan herhangibir lineer denklem daima çözülebilir. Diğer taraftan ikinci dereceden bir denklemin umumiyetle bu cisimde çözümü olmadığını biliyoruz. Meselâ $x^2 = 2$, rasyonel sayılar cisminde çözülemez. Fakat yine gördük ki rasyonel sayılar cismini alt cisim kabul eden reel sayılar cisminde bu denklemin çözümleri vardır. Halbuki genel olarak verilmiş ikinci dereceden bir denklemin reel sayılar cisminde çözülemiyeceğini görebilmek zor değildir. Meselâ $x^2 + 1 = 0$ ın reel sayılar cisminde hiç bir çözümü yoktur. Filhakika $x^2 = -1$ yazılırsa $x^2 < 0$ dır. Halbuki reel sayılar cisminde daima $x^2 \geq 0$ dır (§ 1.1.5).

Şu halde yeni sayılar tarif ederek reel sayılar cisminin genişletilmesi yönüne gidelim.

3.1.2 *TARİF* 1. Verilen bir sırada yazılı (a,b) reel sayı çiftlerinin **C** bütününü gözönüne alalım. Bu çiftlerin üzerinde toplam ve çarpım operasyonlarını tarif edelim.

Toplam: $(a,b) + (a',b') = (a+a',\ b+b')$

Çarpım: $(a,\ b)\ .\ (a',\ b') = (aa' - bb',\ ab' + a'b)$

Üzerinde bu iki operasyonun tarif edildiği elemanların bütününe *kompleks* sayı sistemi denir.

TARİF 2. (a,b) ve (a',b') kompleks sayıları eşittir denir ve

$$(a,b) = (a',b')$$

diye yazılır şayet

$$a = a',\ b = b'$$

ise.

Teorem 3.1.2.1. Kompleks sayı sistemi bir cisimdir.

İspat. § 1.1.9 da verilen aksiyomların sağlanmış olduğunu birbir tahkik etmekten ibarettir.

Toplam operasyonu *komütatif*tir.

$$(a,b)+(a',b') = (a+a',b+b') = (a'+a,b'+b) = (a',b')+(a,b)$$

Toplam operasyonu *asosyatif*tir.

$$\begin{aligned}[(a,\ b)+(a',\ b')]+(a'',\ b'') &= ([a+a']+a'',\ \ [b+b']+b'') \\ &= (a+[a'+a''],\ b+[b'+b''])\\ &= (a,\ b)+[(a',\ b')+(a'',\ b'])\end{aligned}$$

Aynı şekilde çarpım operasyonunun *komütatif*, *asosyatif* ve toplama nazaran *distibütif* olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

En son, bu sistemin çıkarma ve bölmeye nazaran kapalı olduğunu gösterelim.

1. Çıkarma.

$$(a',\ b') + (x,\ y) = (a,\ b) \qquad (3.1.2.1)$$

denkleminin birtek çözümü olduğunu gösterelim.

Toplamın tarifinden dolayı (3. 1. 2. 1)

$$(a' + x,\ b' + y) = (a,\ b).$$

Yani, eşitliğin tarifinden dolayı

$$a' + x = a, \qquad b' + y = b'$$

Binaenaleyh

$$x = a - a', \qquad y = b - b'.$$

Sıfır elemanı

$$(a,\ b) + (x,\ y) = (a,\ b)$$

denkleminin çözümü olarak tarif edilir ve

$$(0,\ 0)$$

ile gösterilir.

2. Bölme.

$$(a',\ b') \neq (0,\ 0) \text{ ise}$$

$$(a',\ b')\ .\ (x,\ y) = (a,\ b) \qquad (3.1.2.2)$$

bir ve birtek çözümü vardır.

Çarpımın tarifinden dolayı

$$a'\ x - b'\ y = a,\ a'y + b'x = b$$

ve $(a',\ b') \neq (0,\ 0) \Rightarrow a'$ ve b' ikisi birden sıfır değildir. Şu halde

$$a'^2 + b'^2 \neq 0$$

Binaenaleyh

$$x = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}\ y = -\frac{ab' - ba'}{a'^2 + b'^2}$$

Teorem 3.1.2.2. Kompleks sayı cismi reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak ihtiva eder.

İspat. $(x, 0) \leftrightarrow x$ birebir tekabülün bir izomorfizm olduğu kolaylıkla tahkik edilebilir. Diğer taraftan $(x, 0)$ kompleks sayılarının § 1.1.9 daki gerek ve yeter şartları sağladığı açık olarak görülür.

TARİF 3. Teorem 3.1.2.2 nin neticesi olarak $(a, 0)$ kompleks sayısını sadece a diye yazacağız, yani $(a, 0) = a$

TARİF 4. $(0, 1)$ kompleks sayısını i ile göstereceğiz. Yani $(0, 1) = i$.

Teorem 3.1.2.3. Her (a, b) kompleks sayısı $a + b.\, i$ şeklinde gösterilebilir. Yani $(a, b) = a + b.\, i$

İspat. Filhakika,

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \,.\, (0, 1) = a + b.i$$

3.1.3. **Adi Kompleks Sayılar.** $a+b.i$ deki $+$ ve $.$ işaretleri daha henüz aritmetikteki $+$ ve $.$ işaretlerinin mânasını taşımıyor. Fakat $i^2 = -1$ vaz edilirse bu takdirde $+$ ve $.$ işaretleri aritmetikteki $+$ ve $.$ işaretleri olarak alınabilir. Filhakika $i^2 = -1$ göz önünde tutulur ve $(a+bi)\,(a'+b'i)$ formel olarak açılırsa

$$(a+bi)\,(a'+b'i) = aa' - bb' + i(ab'+ba') = (a,b)\,.\,(a',\, b') = (aa' - bb',\, ab'+ba'),$$

üstelik görülüyor ki

$$0 + i\,1 = i$$

kompleks sayısı

$$x^2 + 1 = 0$$

denklemini sağlıyor.

3.1.4. Herhangi ikinci dereceden bir denklemin çözümleri $a + bi$, a, b reel, şeklinde olduğundan görülüyor ki ikinci dereceden denklemlerin kompleks sayılar cisminde daima çözümü vardır ve hatta bütün çözümleri bu cisme ait elemanlardır.

Genel olarak cebirin esas teoremine göre (§ 4.10.1) n. dereceden bir denklemin, reel veya imajiner tam n kökü vardır. Şu halde kompleks sayılar cismi daha fazla genişletilemez, yani tamdır (cebirsel kapalıdır).

3.1.5 *TARİF* 5. $a + bi$ kompleks sayısının *modülü* veya *mutlak değeri* diye $\sqrt{a^2+b^2}$ (≥ 0) reel sayısına denir ve $|\, a + bi \,|$ ile gösterilir. Şu halde

$$|\, a + bi \,| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorem (Schwarz eşitsizliği) 3.1.5.1. x_i, y_i, $i=1,2,\ldots, n$, herhangi reel sayılar için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x^2_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y^2_i\right)$$

İspat. a, b, c reel sayıları için $a > 0$ ve bütün λ lar için

$$\mu = a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geq 0$$

ise

$$b^2 - ac \leq 0 \qquad (3.1.5.1)$$

dır. Filhakika μ nün en küçük değeri

$$\mu_m = \frac{ac - b^2}{a}$$

olduğuna göre netice bellidir.

Şayet $\sum_{i=1}^{n} y^2_i = 0$ ise teorem aşikârdır. Zira bu takdirde her $y_i = 0$ dır.

Şu halde $\sum_{i=i}^{n} y^2_i > 0$ farzedilebilir.

$$\mu = \lambda^2\left(\sum_{i=1}^{n} y^2_i\right) + 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) + \sum_{i=1}^{n} x^2_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda y_i + x_i)^2 \geq 0$$

Buradan (3.1.5.1) göz önünde tutulursa Schwarz eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.5.2. $|\, a + bi \,| = 0$ dır yalnız ve yalnız $a + bi = 0$ ise.

İspat. $|\, a + bi \,| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Rightarrow a = 0,\, b = 0 \Rightarrow a + bi = 0$

Teorem 3.1.5.3. İki kompleks sayının çarpımının modülü, modüllerin çarpımına eşittir.

$$|\, (a + bi)\,(c + di) \,| = |\, a + bi \,|\;|\, c + di \,|$$

İspat. $|\, (a + bi)\,(c + di) \,| = |\, (ac - bd) + (ad + bc)\, i \,|$

$$= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = |\, a + bi \,|\,|c + di|$$

Teorem 3.1.5.4. *Üçgen eşitsizliği.*

$$|\, (a + bi) + (c + di) \,| \leq |\, a + bi \,| + |\, c + di \,|$$

İspat. Schwarz eşitsizliğinden dolayı

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2)$$

Tarif olarak negatif olmıyan reel sayıların kare kökü pozitif olduğundan

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$$

veyahut

$$(a+c)^2+(b+d)^2 \leq (\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})$$

Yani

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Buradan istenilen neticeye varılır.

3.1.6. Farzedelim ki $a+bi \neq 0$. Bu taktirde

$$a+bi = |a+bi| \left(\frac{a}{|a+bi|}+\frac{bi}{|a+bi|}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Görülüyor ki

$$\left(\frac{a}{|a+bi|}\right)^2+\left(\frac{b}{|a+bi|}\right)^2 = 1$$

Şimdi

$$a = |a+bi| \cos\theta \qquad b = |a+bi| \sin\theta \tag{3.1.6.1}$$

vazedilirse bu takdirde

$$a+bi = |a+bi| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

TARİF 6. (3.1.6.1) denklemlerinin tarif ettiği θ açısına $a+bi$ kompleks sayısının *argümenti* denir ve

$$\arg (a+bi) = \theta$$

yazılır.

Sıfırdan farklı bir kompleks sayısının argümenti sonsuz sayıda değerler alır. θ, $\arg (a+bi)$ nin bir değeri ise, diğerleri $\theta + 2n\pi$, n tam sayı, dır.

TARİF 7. $\arg (a+bi)$ nin *esas değeri* diye $-\pi$ ile π (dahil) arasındaki değere denir.

$$-\pi < \arg (a+bi) \leq \pi$$

Teorem 3.1.6.1. $(a+bi)$ ve $(c+di)$ kompleks sayılarının çarpımının argümenti, $\arg (a+bi)$ ve $\arg (c+di)$ nin θ_1, θ_2 esas değerlerinin toplamına eşittir.

$$\arg (a+bi)(c+di) = \theta_1+\theta_2$$

İspat. Derhal görülüyor ki

$$(a+bi)(c+di) = |a+bi|\,|c+di|\,[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

Binaenaleyh

$$\arg (a+bi)(c+di) = \theta_1+\theta_2$$

3.1.7. **Notasyon.** Umumiyetle $x+iy$ kompleks sayısı z ile gösterilir, yani

$$z = x+iy$$

x e z nin *reel kısmı* denir ve

$$x = \operatorname{Re} z$$

ile gösterilir.

y ye z nin *imajiner kısmı* denir ve

$$y = \operatorname{Im} z$$

ile gösterilir.

3.1.8. **Konjüge Kompleks Sayılar.** *TARİF* 8. $z = x+iy$ sayısının *konjügesi* diye $x-iy$ sayısına denir ve $\bar{z}$ ile gösterilir.

Açık olarak $\bar{z}$ in konjügesi z dir. Diğer taraftan kolaylıkla görülür ki

$$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$$

ve

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$$

sonra,

$$|z|^2 = z\bar{z}, \qquad 2\operatorname{Re} z = z+\bar{z}, \qquad 2i\operatorname{Im} z = z-\bar{z}$$

Kompleks sayılar hakkındaki birçok teoremler konjüge kompleks sayılarla çok kolay ispat edilebilir. Meselâ teorem 3.1.5.3 konjüge kompleks sayılarla şöyle ispat edilebilir.

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1z_2} = z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2|z_2|^2$$

Yani

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

Ayni şekilde

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2+2|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \end{aligned}$$

ve

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |z_1-z_2|^2 &= |z_1|^2-2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2 \\ &\geq |z_1|^2-2|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2 = (|z_1|-|z_2|)^2 \end{aligned}$$

ve

$$|z_1-z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|.$$

Umumiyetle,

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1|+|z_2| \quad \text{ve} \quad |z_1 \pm z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|.$$

3.1.9. **Kompleks sayıların Geometrik Gösterimi.** $x+iy$ kompleks sayısı, Euclid düzleminde dik koordinatları x, y olan bir *nokta* ile gösterilir.

Bu bakımdan bir kompleks sayıya *nokta* da denir. Diğer taraftan z komleks sayısına vektör de denir. Çünki iki noktanın *toplamı* "Paralel kenar" usulüne göre icra edilir.

$|z|$, O başlangıç noktasını z ye birleştiren vektörün uzunluğudur veya sadece z nin O ya olan uzaklığıdır (vektörler daima O dan z ye doğru yönelmiştir). arg z nin θ esas değeri pozitif reel eksenden z vektörüne doğru olan açıdır.

Aynı şekilde z_1 ve z_2 noktaları arasındaki uzaklık $|z_1 - z_2|$ olarak tarif edilir.

2. Lineer Sübstitüsyonlar.

3.2.1. **Lineer Sübstitüsyonlar ve çarpımları.** *Lineer sübstitüsyon* veya *dönüşüm* veya *transformasyon* diye, sabit olmıyan

$$w(z) = w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0 \qquad (3.2.1.1)$$

dönüşümlerine veya transformasyonlarına denir. Burada a, b, c, d kompleks sayılar, ve z kompleks değişkendir.

Bu transformasyon z düzleminde $-d/c$ den farklı herbir z noktasına w-düzleminde bir w noktası tekabül ettirir. Tarif olarak (3.2.1.1) sübstitüsyonu $-d/c$, $c \neq 0$, noktasına w-düzleminde ∞ ile gösterilen *sonsuz noktasını* tekabül ettiriyor diyeceğiz. Şu halde kompleks düzleme *sonsuz* diye değerlendirilen bir *ideal* nokta ilâve etmiş oluyoruz. $c = 0$, ise $d \neq 0$ dır. Teamüle uyularak $d/c = \infty$ vazedilir. Üstelik,

$$w(\infty) = \lim_{z\to\infty} w(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{a + b/z}{c + d/z} = \frac{a}{c}, \; c \neq 0.$$

Şayet $c = 0$ ise,

$$a \neq 0,\; d \neq 0 \text{ ve } w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$$

TARİF 9. Sonlu düzleme ideal noktanın ilâvesi ile meydana gelen düzleme *genişletilmiş* düzlem denir.

Genişletilmiş düzlem geometrik olarak şu şekilde canlandırılabilir. Kompleks düzleme teğet olan bir küre göz önüne alalım. Teğet noktasını kürenin güney kutup noktası, ve bu noktadan geçen çapın diğer N ucunu da kürenin kuzey kutup noktası olarak tarif edelim. N den geçen bir doğru küreyi Z ve düzlemi z noktasında kat eder. Binaenaleyh z ile Z noktaları arasında birebir tekabül olduğu açıktır. Z noktasına z noktasının *stereografik projeksiyonu* denir. Şimdi z-düzlemindeki ideal noktaya N noktasını tekabül ettirirsek görülür ki genişletilmiş düzlemin herbir noktasına kürede birtek nokta tekabül eder ve bu tekabül birebirdir. Bu sebepten dolayı genişletilmiş düzleme *kapalı kompleks düzlem* de denir, küreye ise *Riemann küresi* denir.

Binaenaleyh (3.2.1.1) sübstitüsyonu genişletilmiş z-düzleminin, istisnasız, her bir noktasına genişletilmiş w-düzleminde birtek nokta tekabül ettirir, $ad - bc \neq 0$ şartından dolayı genişletilmiş w-düzleminin herbir noktasına genişletilmiş z-düzleminde birtek nokta tekabül eder.

Ard arda tatbik edilen iki sübstitüsyonun çarpımını ifade edebilmek için (3.2.1.1) yerine $w = Tz$ veya sadece T notasyonu kullanılır. Ard arda tatbik edilen sübstitüsyonlar sıra ile T_1, T_2 ise netice sübstitüsyon T_2T_1z diye yazılır ve sağdan sola T_1 ile T_2 nin çarpımı diye okunur. Burada çarpma fonksiyonların (sübstitüsyonların) terkibini ifade eder, z ye önce T_1 ve neticeye T_2 tatbik edilir: $T_2(T_1 z) = T_2 T_1 z$.

Sübstitüsyonların çarpımı matrislerin çarpımı ile tarif edilebilir. Filhakika (3.2.1.1) sübstitüsyonunu sembolik olarak

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ile gösterebiliriz. Bu sembole *matris* denir. İki matrisin çarpımını aşağıdaki şekilde tarif edelim.

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}$$

Tarif olarak $T_2 T_1 z$, yukardaki eşitliğin sağındaki matrise tekabül eden sübstitüsyondur.

3.2.2. **Basit Sübstitüsyonlar.** *Basit sübstitüsyonlar* aşağıdaki matrislere tekabül eden sübstitüsyonlardır.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bunların tarif ettikleri sübstitüsyonlar sıra ile

$$w = z + \alpha, \quad w = kz, \quad w = \frac{1}{z}$$

Birincisine *paralel kayma* denir. İkincisine şayet $|k| = 1$ ise *dönme*, $k > 0$ ise *homotesi* denir. Üçüncüsüne *enversiyon* denir.

Görülüyorki bu basit transformasyonlar sıra ile tatbik edilirse en sonuncusu yine paralel kayma olmak şartiyle, en genel lineer transformasyon elde edilir.

3.2.3. **Çifte oran.** Genişletilmiş düzlemde z_2, z_3, z_4 gibi üç farklı nokta alalım. Bir T lineer transformasyonu vardır öyle ki bu transformasyon bu noktaları sıra ile 0,1, ∞ noktalarına dönüştürür. Filhakika,

$$w = Tz = \frac{z - z_2}{z - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$$

istenilen lineer transformasyondur.

Teorem 3.2.3.1. T birtek olarak belirlidir.

İspat. Farzedelim ki z_2, z_3, z_4 noktalarını 0,1, ∞ noktalarına dönüştüren ikinci bir S transformasyonu mevcuttur. Şu halde

$$U = TS^{-1}$$

0, 1, ∞ noktalarını sabit bırakır. Halbuki

$$U : w = \frac{az + b}{cz + d}$$

yazılır ve 0, 1, ∞ un 0, 1, ∞ a tekabül ettiği göz önünde tutulursa $U = I$ (özdeş transformasyon) olduğu anlaşılır. Binaenaleyh

$$TS^{-1} = I \quad \text{ve} \quad T = S$$

Not. U nun idantik transformasyon olduğunu gösterirken $d \neq 0$, $a \neq 0$ farzettik. Aksi halde $bc \neq 0$ ve $w = \frac{b}{cz}$ dır. Bu ise istenilen şartları sağlamıyor. Bir kere $1 \to 1 \Rightarrow c = b$ ve $w = \frac{1}{z}$ dir.

TARİF 10. $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$ ile gösterilen z_1, z_2, z_3, z_4 noktalarının *çifte oranı* diye, z_2, z_3, z_4 noktalarını 0, 1, ∞ noktalarına dönüştüren sübstitüsyonun z_1 de aldığı $w_1 = \lambda$ değerine denir.

Görülüyor ki çifte oran

$$\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.2.3.2. Verilen dört farklı noktanın çifte oranı herhangibir lineer sübstitüsyona nazaran *invarient*tir (değişmez).

İspat. z_1, z_2, z_3, z_4 dört farklı nokta olsun. z düzlemine bir S sübstitüsyonu tatbik edelim.

$$S : z_1, z_2, z_3, z_4 \to w_1, w_2, w_3, w_4$$

Diyorum ki

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Çifte oranın tarifinden dolayı $\exists T, \ni$

$$T : z_1, z_2, z_3, z_4 \to \lambda, 0, 1, \infty$$

ve

$$\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Binaenaleyh

$$TS^{-1} : w_1, w_2, w_3, w_4 \to \lambda, 0, 1, \infty$$

O halde

$$\lambda = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

Yani,

$$(w_1\ w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Teorem 3.2.3.3. Herhangibir sübstitüsyon reel ekseni bir doğruya veya bir çembere dönüştürür.

İspat. $T : w = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$, bir lineer sübstitüsyon olsun. w reel ise konjügesine eşittir ve binaenaleyh

$$\frac{az + b}{cz + d} = \overline{\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)}$$

Yani

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}$$

Veyahut

$$(a\bar{c} - c\bar{a})\,|z|^2 + (a\bar{d} - c\bar{b})\,z + (b\bar{c} - d\bar{a})\,\bar{z} + b\bar{d} - d\bar{b} = 0$$

Şayet $a\bar{c} - c\bar{a} = 0$ ise bu bir doğrunun denklemidir, zira $ad - bc \neq 0$ dan dolayı hem a hem c sıfır değildir ve dolayısıyle meselâ

$$a = \frac{c\bar{a}}{\bar{c}}$$

z nin kat sayısında bu değer yerine konulursa $\frac{c}{\bar{c}}\,(\bar{a}\,\bar{d} - \bar{c}\,\bar{b})$ dır.

Bunun modülü ise

$$\left|\frac{c}{\bar{c}}\right| \left|\bar{a}\bar{d} - \bar{c}\bar{b}\right| = |\,ad - bc\,| \neq 0$$

O halde

$$2i\ \mathrm{Im}\,(a\bar{d} - c\bar{b})\,z + 2i\ \mathrm{Im}\,b\bar{d} = 0.$$

Yani,

$$\mathrm{Im}\,(a\bar{d} - c\bar{b})\,z + \mathrm{Im}\,b\bar{d} = 0.$$

Bu ise bir doğrunun denklemidir.

Diğer taraftan $a\bar{c} - c\bar{a} \neq 0$ ise

$$\left| z - \frac{\bar{a}d - \bar{c}b}{\bar{a}c - \bar{c}a} \right| = \left| \frac{ad - bc}{\bar{a}c - \bar{c}a} \right|$$

Bu ise bir çemberin denklemidir.

Teorem 3.2.3.4. $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ reeldir yalnız ve yalnız bu dört nokta bir çember veya bir doğru üzerinde ise

İspat. Yukardaki teoremin neticesidir. Filhakika λ reel ise yukarıdaki teoremden dolayı z_1 noktası z_2, z_3, z_4 noktalarından geçen çember (veya doğru) üzerindedir. Tekabül birebir olduğundan karşıt teorem de doğrudur.

Binaenaleyh teorem 3.2.3.2 de göz önünde tutulursa.

Teorem 3.2.3.5. Bir lineer sübstitüsyon çemberleri çemberlere dönüştürür. Burada çember ile doğru arasında fark gözetilmiyor.

3.2.4. **Simetri.** z ile $\bar{z}$ noktaları reel eksene göre simetriktirler. Reel katsayılı bir lineer sübstitüsyon reel ekseni kendi üzerine dönüştürür. Filhakika

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

olsun. Burada a, b, c, d reel ise, görülüyor ki z reel için w reeldir. Sonra z yerine $\bar{z}$ konulursa

$$\bar{w} = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

dir. Yani reel eksene nazaran simetrik iki nokta, reel eksene nazaran simetrik iki noktaya dönüşür.

Daha genel olarak, $w = Tz$ reel ekseni bir C çemberine dönüştüren bir lineer sübstitüsyon olsun. $z, \bar{z}$ reel eksene nazaran iki simetrik nokta olduğuna göre

TARİF 11. Diyeceğiz ki $w = Tz$ ve $w^* = T\bar{z}$ noktaları C ye nazaran simetriktirler.

Bu tarif reel ekseni C ye dönüştüren T sübstitüsyonuna bağlı değildir. Filhakika S, reel ekseni C ye dönüştüren ikinci bir lineer sübstitüsyon ise $S^{-1}Tz$ reel ekseni kendi üzerine dönüştürür. Binaenaleyh $S^{-1}Tz$ reel bir sübstitüsyondur, ve dolayısıyle eksene nazaran simetrik noktalar simetrik noktalara dönüşür. Şu halde $S^{-1}Tz = S^{-1}w$ ile $S^{-1}w^*$ konjügedir ve dolayısıyle w, w^*, C ye nazaran simetriktirler. Binaenaleyh bir C çemberine nazaran simetrik iki nokta şöyle tarif edilebilir.

TARİF 12. w ve w^* noktalarına C ye nazaran simetriktir denir yalnız ve yalnız $(w^*, w_2, w_3, w_4) = \overline{(w, w_2, w_3, w_4)}$. Burada $w_2, w_3\ w_4$ C yi belirten üç farklı noktaladır. Bu tarifin çifte oranla ilgisi açıktır. Filhakika tariften dolayı (w, w_2, w_3, w_4) $w_2\ w_3, w_4$ noktalarını 0, 1, ∞ a dönüştüren bir lineer sübstitüsyonun w de aldığı λ değeridir.

$$\lambda = (w, w_2, w_3, w_4)$$

Halbuki birinci tariften dolayı, C w_2, w_3, w_4 den geçen bir çember olduğuna göre

$$\bar{\lambda} = (w^*, w_2, w_3, w_4)$$

Binaenaleyh

$$(w^*, w_2, w_3, w_4) = \overline{(w, w_2, w_3, w_4)}$$

Buradan görülüyorki λ reel ise $w = w^*$ noktaları C üzerindedir.

Şimdi tarifin geometrik mânasına geçelim. C, merkezi $w = 0$ da ve yarıçapı R olan bir çember olsun. C nin üzerinde w_2, w_3, w_4, noktalarını işaret edelim. Diyorumki

$$(w^*, w_2, w_3, w_4) = \overline{(w, w_2, w_3, w_4)}$$

eşitliğini sağlıyan w, w^* noktaları merkezden geçen yarı-doğru üzerinde olup,

$$|w|\ |w^*| = R^2, \quad w^*/w > 0$$

bağıntısını sağlarlar.

Filhakika

$$\overline{(w, w_2, w_3, w_4)} = \frac{\bar{w} - \bar{w}_2}{\bar{w} - \bar{w}_4} : \frac{\bar{w}_3 - \bar{w}_2}{\bar{w}_3 - \bar{w}_4}$$

Fakat C üzerinde $\bar{w}_i = \dfrac{R^2}{w_i}$, $i = 2, 3, 4$ olduğundan, $\bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4$ yerine $\dfrac{R^2}{w_2}, \dfrac{R^2}{w_3}, \dfrac{R^2}{w_4}$ vazedersek sol taraf değişmez ve

$$\left(\bar{w}, \frac{R^2}{w_2}, \frac{R^2}{w_3}, \frac{R^2}{w_4} \right)$$

çifte oranına eşittir. Şimde burada $w \to \dfrac{R^2}{w}$ yapılırsa çifte oran değişmediğinden (teorem 3.2.3.2)

$$\overline{(w, w_2, w_3, w_4)} = \left(\frac{R^2}{\bar{w}}, w_2, w_3, w_4 \right)$$

Binaenaleyh tariften dolayı w nın simetriği

$$w^* = \frac{R^2}{\overline{w}}$$

dir. Yani $|w^*||w| = R^2$. Diğer taraftan $w^*/w > 0$ olduğundan w, w^* aynı yarı doğru üzerindedir.

Bundan sonra lineer sübstitüsyonların açıları da muhafaza ettiklerini göstereceğiz.

3.2.5. **Yönlendirilmiş iki çemberin açısı.** *TARİF 13.* İki çember birbirine *teğettir* denir şayet birtek ortak noktası varsa. Özel olarak çemberlerden biri doğru olabilir.

Bir lineer sübstitüsyonla ortak nokta sonsuza gönderilirse çemberler (bunlardan birisi doğru olabilir) paralel doğrulara dönüşür. Karşıt olarak bir paralel doğru ailesi ters transformasyonla bir noktada teğet bir çember ailesine dönüşür.

TARİF 14. Şimdi kesişen iki çemberin açısı tarif edilebilmesi için herbiri için bir *yön* kabul edilir. Çemberleri C, C′, ortak noktaları da z_1, z_2 ile gösterelim. Meselâ z_1 noktasından geçen t,t' teğetleri, C ile C′ nün yönlerini taşıyorlarsa yönlendirilmiş C, C′ çemberlerinin z_1 noktasındaki açısı bu noktadan geçen ve aynı yönleri taşıyan, t, t' teğetlerinin açısı olarak tarif edilir. Bir çemberin yönü, üzerinde verilen ve 1, 2, 3 sırasını takip eden bir z_1, z_2, z_3 üçlüsü ile tarif edilir. Şu halde

Teorem 3.2.5.1. Yönlendirilmiş kesişen iki çemberin açısı liner sübstitüsyonlara nazaran *invarienttir* (değişmez).

İspat. Verilen çemberleri C, C′, ortak noktaları ise z_1, z_2 ile gösterelim. C nin üzerinde ve C′ nün içinde olan bir z_0 noktasını işaret edelim. Aynı şekilde z'_0 noktasını tarif edelim. Şu halde çemberlerin yönleri 1,0,2 sırasında z_1, z_0, z_2; z_1, z'_0, z_2 üçlüleri ile belirmiş olur.

Şimdi teoremi ispat edebilmek için yönlendirilmiş çemberlerin z_1 deki açısının arg (z'_0, z_1, z_0, z_2) ye eşit olduğunu göstermek kâfidir. Bir özel hali tetkik etmek üzere, farzedelim ki z_1 (veya z_2) sonsuzdur. Şu halde C ve C′, z_2 (veya z_1) de kesişen iki doğrudur ve bunların açısı açık olarak

$$\arg \frac{z'_0 - z_2}{z_0 - z_2} \left(\text{veya } \arg \frac{z'_0 - z_1}{z_0 - z_1}\right)$$

dir. Buradan ise *dejenere* olan çifte oranlar açık olarak görülmektedir.

Genel halde z_1 deki yönlendirilmiş teğetleri t ve t' ile gösterelim. Bir lineer sübstitüsyonla z_1 i sonsuza gönderelim. Bu takdirde C ve t, C′ ve t' çiftlerinin herbiri ayni yönü taşıyan iki paralel doğruya dönüşür. Bu ise bizi

özel hale göndermiş olur. Çifte oran lineer sübstitüsyona nazaran *invarient* olup, çemberlerin açısı da teğetlerin açısı olduğundan teorem ispatlanmıştır.

Hülâsa, çifte oran, simetri ve açı lineer sübstitüsyonlara nazaran *invarienttir*. Son iki hassanın birincinin neticesi olduğunu da gördük.

3.2.6. **Çember Aileleri.** z – düzleminde $z = 0$ başlangıç noktasından geçen (Γ_1) doğru ailesi ile merkezi başlangıç noktasında olan (Γ_2) çember ailesini göz önüne alalım. Görülüyor ki

(i) herbir Γ_1 doğrusu (Γ_2) çember ailesinin bütün dairelerine diktir. Karşıt olarak herbir Γ_2 çemberi (Γ_1) doğru ailesinin bütün doğrularına diktir.

(ii) z-düzleminin herbir z noktasından birtek Γ_1 ve birtek Γ_2 geçer.

(iii) herhangibir Γ_1 doğrusuna nazaran bir simetride, (Γ_1) ailesine ait bir doğru yine (Γ_1) e ait bir doğruya dönüşür. Diğer taraftan yine bu simetride (Γ_2) ye ait herhangi bir Γ_2 kendi üzerine dönüşür.

(iv) $z = 0$ ile ∞ noktaları (Γ_2) nin herhangibir Γ_2 çemberine nazaran simetriktirler. Bu noktalara (Γ_2) nin *limit noktaları* denir.

Şimdi, z-düzlemine bir lineer sübstitüsyon tatbik edelim, öyle ki $z = 0$, ∞ noktaları w-düzleminde $w = a$, b noktalarına dönüşsün. Bu transformasyonda Γ_1 doğrusu a ve b den geçen bir C_1 çemberine dönüşür, (Γ_1) ailesi ise a ve b den geçen (C_1) çember ailesine dönüşür. (Γ_2) ailesine gelince, Γ_2 çemberleri w düzleminde limit noktaları a ve b olan (C_2) çember ailesine dönüşür. (C_1), (C_2) aileleri için yukarıdaki dört hassa aynen bâki kalır.

(i) Herbir C_1, (C_2) çember ailesinin bütün çemberlerine diktir. Karşıt olarak C_2, (C_1) ailesinin bütün çemberlerine diktir.

(ii) Herbir w noktasından (C_1) ve (C_2) ailelerine ait birtek C_1 ve C_2 geçer.

(iii) Herhangibir C_1 çemberine nazaran bir simetride, (C_1) ailesine ait herhangibir C_1 yine (C_1) ailesine ait bir C_1 e dönüşür. Halbuki (C_2) ailesine ait herbir C_2 kendi üzerine dönüşür.

(iv) a ve b noktaları (C_2) nin herhangibir C_2 çemberine nazaran simetriktir. Bu noktalara (C_2) nin *limit noktaları* denir.

Analitik olarak w-düzlemini z-düzlemine dönüştüren lineer sübstitüsyon

$$z = k_1 \frac{w - a}{w - b}$$

dir.

z-düzleminde (Γ_1) ailesine ait bir Γ_1 çemberini gözönüne alalım. Γ_1 nin yarıçapı ρ ise, w düzleminde Γ_1 ye tekabül eden çemberin denklemi

$$\rho = |k_1| \left| \frac{w - a}{w - b} \right|$$

yani $|w-a| = AM$ ve $|w-b| = BM$ vaz edilirse

$$\frac{AM}{BM} = \text{Sabit}$$

Binaenaleyh (C_2) ye ait çemberlerler elemanter geometride gördüğümüz Apollonius çemberleridir.

Şimdi w-düzlemine bir lineer sübstitüsyon tatbik edelim öyle ki $a,b \to \alpha, \beta$; $(C_1), (C_2) \to (C'_1), (C'_2)$. Bu takdirde

$$\frac{w'-\alpha}{w'-\beta} = k\,\frac{w-a}{w-b} \qquad (3.2.6.1)$$

Bu transformasyon hakkında daha iyi bir fikir edinmek için α ve β yı a ve b de alalım. Bu takdirde a, b, transformasyonun sabit noktaları olmuş olur, ve görülür ki (3.2.6.1) sübstitüsyonu (C_1) i ve (C_2) yi kendi üzerine dönüştürür. Esasen (3.2.6.1) sübstitüsyonları, z düzleminde $z = 0$ noktası etrafında $z' = kz$, $|k| = 1$ dönmelerine veya $z' = kz$, $k > 0$ homotesilerine tekabül eder, ve (3.2.6.1) sübstitüsyonlarına bu basit sübstitüsyonların *transformeleridir* denir. Aslında, $z' = kz$ sübstitüsyonu şu *şemaya* göre elde edilir: (3.2.6.1) sübstitüsyonuna $w' = Tw$ diyelim; z-kompleks düzleminden w-kompleks düzlemine geçiş $w = Az$ ile gösterilirse, bu takdirde $z' = kz$ sübstitüsyonu $z' = A^{-1}\,T\,Az$ dir. Görülüyorki bu dönmelerde veya homotesilerde $z = 0$, ∞ noktaları sabittir. Dönmelerde herbir Γ_2 kendi üzerine dönüşür, homoteside ise herbir Γ_1 kendi üzerine dönüşür. w düzleminde homotesiye tekabül eden transformasyona *hiperbolik* denir. $C'_1 = C_1$ ve $k > 0$ dır. Dönmeye tekabül eden transformasyona ise *eliptik* denir, burada $C'_2 = C_2$ ve $|k| = 1$.

Şimdi son bir hali inceleyeceğiz. z-düzleminde reel eksene dik (Γ_1) paralel doğru ailesini göz önüne alalım. İmajiner eksene dik olan (Γ_2) doğru ailesi (Γ_1) e diktir. Görülüyorki burada reel eksene paralel bir kaymada Γ_2 ler aralarında değişir ve herbir Γ_1 kendi üzerine dönüşür. Bu kaymanın birtek sabit noktası vardır o da $z = \infty$ dur. İmajiner eksene paralel bir kaymada ise herbir Γ_2 sabit kalır, Γ_1 ler de aralarında değişir.

Şimdi z-düzlemine bir lineer sübstitüsyon tatbik edelim öyleki $z = \infty \to w = a$. Bu transformasyonda (Γ_1) ailesi a noktasında teğet (C_1) çember ailesine dönüşür. (Γ_2) ailesi ise yine a noktasında teğet ve (C_1) ailesine dik (C_2) çember ailesine dönüşür.

Görülüyor ki bu sübstitüsyon

$$z = \frac{b}{w-a} + c$$

dir. z-düzleminde bir kayma ise

$$z' = z + h$$

dır. Diğer taraftan yukardaki gibi

$$z' = \frac{b'}{w'-a'} + c'$$

Binaenaleyh

$$\frac{b'}{w'-a'} = \frac{b}{w-a} + d$$

Şimdi $a = a'$ yegâne sabit nokta olduğunu yazarsak, $b = b'$ dır ve

$$\frac{b}{w'-a} = \frac{b}{w-a} + d \qquad (3.2.6.2)$$

$z' = z + h$ paralel kaymaların transformesi olan (3.2.6.2) sübstitüsyonuna *parobolik* denir. Bu sübstitüsyonların birtek sabit noktası vardır.

Problem. $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ sübstitüsyonun sabit noktalarını inceleyiniz.

§ 3.2.6 daki sınıflandırmada açık olarak görülüyor ki.

(i) Herhangibir eliptik sübstitüsyon, bu sübstitüsyonun sabit noktalarından geçen iki çembere nazaran ard arda iki simetri tatbik ederek elde edilir.

(ii) Herhangibir hiperbolik sübstitüsyon, kesişmeyen iki çembere nazaran simetri alarak elde edilir.

Bu çemberler hakkında kat'i bir fikir edinebilmek için genel hal bir lineer sübstitüsyon yardımı ile z düzlemindeki özel hale getirilir. Buradan (i) ve (ii) hassaları kolayca görülebilir.

(iii) Herhangibir parabolik sübstitüsyon, bu sübstitüsyonun yegâne sabit noktasından geçen teğet iki çembere nazaran ard arda iki simetri tatbik edilerek elde edilir.

Yukardaki üç sınıftan birine girmeyen sübstitüsyonlara *loksodromik* (loxodromik) denir.

Böyle bir sübstitüsyon

$$\frac{w'-a}{w'-b} = re^{i\theta}\,\frac{w-a}{w-b}$$

$0 < r \neq 1$, $\theta \neq 2m\pi$, tipindedir.

Burada da

$$z' = \frac{w'-a}{w'-b} \qquad z = \frac{w-a}{w-b}$$

vaz edilirse

$$z' = re^{i\theta} z$$

dir. Görülüyor ki bu gibi sübstitüsyonlar bir homotesiyi müteakip bir dönmeden ibarettirler. Şu halde loksodromik sübstitüsyonlar ard arda tatbik edilen dört simetrinin neticesidirler.

Eliptik transformasyonların çok basit bir geometrik tefsiri vardır. Filhakika, z-düzleminin stereografik projeksiyonu göz önüne alınacak olursa, görülür ki $z = 0$ dan geçen doğrulara Riemann küresinde kutup noktalarından geçen büyük çemberler tekabül eder. Şu halde z-düzleminin $z = 0$ etrafındaki dönmelerine, kürenin kutuplarından geçen çap etrafındaki dönmeleri tekabül eder. Şimdi z-düzlemine bir lineer sübstitüsyon tatbik edilecek olursa, bu sübstitüsyonun aynı sabit noktalarını haiz sübstitüsyonlara Riemann küresinin bir çap etrafındaki dönmeleri tekabül eder.

Problem. Sabit noktaları a ve b olan eliptik sübstitüsyonlara tekabül eden Riemann küresinin dönmelerini bilfiil bulunuz.

3. Lineer Sübstitüsyonların Tasnifi.

3.3.1. Eşit transformasyonlar. İki lineer sübstitüsyon eşit iseler,

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}, \quad ad-bc \neq 0, \quad a'd'-b'c' \neq 0,$$

bu takdirde, aynı sıfırları ve kutupları haizdirler. O halde sıfır için

$$z = -b/a = -b'/a'$$

ve kutup için

$$z = -d/c = -d'/c'$$

yazılabilir. Birinciden

$$a'/a = b'/b = \lambda, \quad \lambda \neq 0$$

ve ikinciden

$$d'/d = c'/c = \mu, \quad \mu \neq 0$$

sağlanır. Yukardaki eşitlikte, $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $d' = \mu d$, $c' = \mu c$ vazedilirse

$$\lambda = \mu$$

bulunur. Binaenaleyh iki eşit sübstitüsyonun katsayıları aynı orantıdadırlar. Karşıt olarak iki sübstitüsyonun katsayıları aynı orantıda iseler, eşittirler. Orantı katsayısı λ ise, yani $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$, $d' = \lambda d$ ise, görülür ki

$$\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

O halde sübstitüsyonun determinantını o şekilde seçebiliriz ki, katsayıların

determinantı 1 e eşittir. Yani determinantı sıfırdan farklı bütün sübstitüsyonları

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Determinantı 1 e eşit olan bütün lineer sübstitüsyonların cümlesine $\tilde{\Omega}$ diyelim. Derhal görülür ki $\tilde{\Omega}$ çarpma operasyonuna nazaran bir gruptur. Burada çarpma operasyonu iki sübstitüsyonun ard arda tatbikidir.

Şimdi T, Tz lineer sübstitüsyonunun katsayılarının matrisini gösteriyorsa, yani

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det\mathrm{T}=1$$

ise, bu takdirde

$$\rho\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \rho a & \rho b \\ \rho c & \rho d \end{pmatrix}$$

matrisi, ρTz sübstitüsyonunu tarif eder, ve görülür ki

$$\det(\rho\mathrm{T}) = \rho^2 \det\mathrm{T}.$$

Dolayısıyla, $\det(\rho\mathrm{T}) = 1$ ve $\det \mathrm{T} = 1$ ise,

$$\rho^2 = 1, \ \rho = \pm 1.$$

Görülüyor ki, determinantı 1 e eşit olan bir lineer sübstitüsyonun katsayıları, ± 1 çarpan farkı ile belirlidir. Şu halde,

$$\mathrm{T}z = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \det\mathrm{T} = 1$$

lineer sübstitüsyonuna $\pm$ T matrisleri tekabül eder. Bütün 2×2 ünimodüler, yani determinantı 1 olan kare matrislerin cümlesine Ω diyelim. Ω bir grup teşkil eder ve bu grup umumiyetle SL (2,C) şeklinde gösterilir. Burada C, kompleks sayılar cişmini ifade eder. Kolaylık olsun diye SL (2,C) grubuna daima Ω diyeceğiz. Şimdi

$$f : \mathrm{T} \to \mathrm{T}z \text{ veya } f(\mathrm{T}) = \mathrm{T}z$$

dönüşümünü tarif edelim. $f : \mathrm{T} \to \mathrm{T}z$ dönüşümü Ω dan $\tilde{\Omega}$ üzerine bir *homomorfizm*dir. Zira $f : \mathrm{ST} \to \mathrm{ST}z$. Öte yandan, f nin *çekirdeği*, $\mathrm{I}z = z$ özdeş sübstitüsyonuna dönüşen, Ω nın elemanlarının cümlesidir. Bu elemanlar I ve $-$I matrisleridir. K = (I, $-$I) vazedilirse, biliyoruz ki

$$\Omega/\mathrm{K} \cong \tilde{\Omega}$$

Görülüyor ki, herbir T ε Ω matrisi – T ile özdeş kılınırsa, f homomorfizmi bir izomorfizmden ibaret olur. Bu sefer Ω özdeş kılınan matrislerin cümlesini gösterirse, yukardaki bağıntı

$$\Omega \cong \tilde{\Omega}$$

dan ibarettir.

3.3.2. **Lineer Sübstitüsyonların Tasnifi.** Lineer sübstitüsyonların tasnifi, bu sübstitüsyonların sabit noktalarına göre yapılır. Sabit noktalar ise

$$Tz = z$$

denkleminin çözümleridir. Yani

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0, \qquad ad - bc = 1. \qquad (3.3.2.1)$$

Hal 1. $c \neq 0$. Bu denklemin iki sonlu kökü vardır z_1, z_2

$$z_1 = \frac{a - d + (\chi^2 - 4)^{1/2}}{2c}, \quad z_2 = \frac{a - d - (\chi^2 - 4)^{1/2}}{2c}$$

burada, $\chi = a + d$, T matrisinin *izi* dir. Yani

$$b = \text{İz}(T).$$

Görülüyor ki $z_1 = z_2$ yalnız ve yalnız $\chi = \pm 2$ ise. Bu takdirde Tz sübstitüsyonuna *parabolik* denir.

Hal 2. $c = 0$. O halde

$$Tz = \frac{az + b}{d}, \quad ad = 1.$$

Görülüyor ki $T\infty = \infty$, yani ∞ böyle bir sübstitüsyonda daima bir sabit noktadır. Diğeri ise $b/(d-a)$ dır; burada $d - a \neq 0$ farzedilmiştir. $d - a = 0$ ise, ikinci sabit nokta da sonsuzdur, ve

$$Tz = z \pm b.$$

Çünki, $d = a \Rightarrow Tz = z + b/d$. Halbuki, diğer taraftan $d = a \Rightarrow d^2 = 1$, yani $d = \pm 1$. Bu transformasyonun tek sabit noktası vardır, o da sonsuzdur. Şu halde $Tz = z \pm b$ paraboliktir. Nitekim, $d = +1 \Rightarrow a = +1$, ve $d = -1 \Rightarrow a = -1$. Şu halde $\chi = \pm 2$.

Neticeyi hülâsa etmek istersek. diyeceğiz ki, *bir parabolik sübstitüsyonun sabit noktaları ∞ ise, bu sübstitüsyon bir paralel kaymadır. Karşıt olarak bir paralel kayma, sabit noktaları sonsuz olan bir parabolik sübstitüsyondur.*

Özdeş sübstitüsyondan farklı bir lineer sübstitüsyonun ikiden fazla sabit noktası olamaz. Farzedelim ki, bir Tz sübstitüsyonunun üç sabit noktası vardır z_1, z_2, z_3. Teorem 3.2.2.1. de olduğu gibi, gösterilebilir ki Tz özdeş sübstitüsyondur. Bunun neticesi olarak, görülür ki, z_1, z_2, z_3 kompleks düzlemde üç farklı nokta ise, ve Sz, Tz iki sübstitüsyon ise, öyleki $Sz_i = Tz_i$, $i=1$, 2, 3, bu takdirde

$$S \equiv T.$$

Filhakika, meselâ, $TS^{-1}z$, z_1, z_2, z_3 noktalarını sabit bırakır ve, dolayısıyle $TS^{-1}z = Iz$.

3.3.3. **Normal form ve bir lineer sübstitüsyonun çarpanı.** *(i)* Farzedelim ki, kompleks düzlemde z_1, z_2 Tz için sonlu ve farklı ($b \neq 0$, $\chi^2 \neq 4$) iki sabit noktadır. Aşağıdaki $W = W(z)$ lineer sübstitüsyonunu

$$\frac{W - z_1}{W - z_2} = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad k \neq 0,$$

teşkil edelim. Bu sübstitüsyonun sabit noktaları z_1, z_2 dir. Üstelik $W(\infty) = w(\infty)$ kabul edilirse, $W(z)$ ve $w(z)$ özdeştirler. Fakat

$$w(\infty) = a/c.$$

Yukardaki sübstitüsyon

$$\frac{W(z) - z_1}{W(z) - z_2} = k\,\frac{1 - z_1/z}{1 - z_2/z}$$

yazılır ve $z \to \infty$ yapılırsa

$$\frac{W(\infty) - z_1}{W(\infty) - z_2} = k,$$

veya $W(\infty) = a/c$ vazedilirse

$$\frac{a - cz_1}{a - cz_2} = k$$

bulunur. Burada k daima sonludur. Aksi halde $z_2 = a/c$, ve (3.3.2.1.) de yerine konulursa, $ad-bc = 0$ bulunur ki, mümkün değildir.

TARİF 15. $w = Tz$ sübstitüsyonunun,

$$\frac{w - z_2}{w - z_1} = \frac{1}{k}\,\frac{z - z_2}{z - z_1}$$

veya

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2}, \qquad k = \frac{a - cz_1}{a - cz_2}$$

şekillerine *normal form* denir. k veya $1/k$ ya, T nin *çarpanı* denir.

T nin çarpanı tek anlama gelmediğinden, T nin çarpanı diye $(k, 1/k)$ çiftine denir. Burada sıra mevzubahis değildir.

Diğer taraftan $k + k^{-1}$, z_1 ve z_2 nin simetrik bir fonksiyonu olduğundan, $z_1 + z_2$, z_1z_2 elemanter simetrik fonksiyonları cinsinden yazılabilir ve dolayı-

siyle (3.3.2.1) denkleminin katsayılarının bir rasyonel fonksiyonudur. Nitekim

$$z_1 + z_2 = (a - d)/c, \quad z_1 z_2 = -b/c$$

gözönünde tutulursa

$$k + k^{-1} = \chi^2 - 2 \qquad (3.3.3.1)$$

bulunur.

Lemma 3.3.3.1. A, singüler olmıyan, yani det A $\neq 0$, bir kare matris olsun, Bu takdirde

$$\text{İz}(T) = \text{İz}(ATA^{-1})$$

İspat. Kolaylıkla görülür ki A, B iki kare matris olduğuna göre

$$\text{İz}(AB) = \text{İz}(BA).$$

Binaenaleyh,

$$\text{Iz}(ATA^{-1}) = \text{Iz}(AA^{-1}T) = \text{Iz}(T).$$

TARİF 16. T ve ATA^{-1} matrislerine *benzer* matris denir.

Lemma 3.3.3.2 Bir T*z* lineer sübstitüsyonunun çarpanı ile ATA^{-1} benzer matrise tekabül eden $ATA^{-1}z$ lineer sübstitüsyonunun çarpanı eşittirler.

İspat. $ATA^{-1}z$ sübstitüsyonunun çarpanına k' diyelim. Lemma 3.3.3.1 den dolayı

$$k' + k'^{-1} = \chi^2 - 2$$

O halde

$$k + k^{-1} = k' + k'^{-1},$$

veya

$$(k - k')(kk' - 1) = 0$$

Binaenaleyh

$$k = k' \quad \text{veya} \quad kk' = 1.$$

Görülüyor ki $T'z = ATA^{-1}z$ sübstitüsyonunun çarpanı (k', k'^{-1}) dir, ve $(k', k'^{-1}) = (k, k^{-1})$.

(ii) Farzedelim ki, $c = 0$, $\chi^2 \neq 4$. Bu takdirde sabit noktalar yine farklıdırlar, fakat biri sonsuz, diğeri sonludur. T*z* nin normal formu.

$$w - z_2 = k(z - z_2), \quad z_2 = b/(d - a), \quad k = a/d.$$

Gerçekten

$$\frac{w(z)}{z} - \frac{z_2}{z} = k\left(1 - \frac{z_2}{z}\right)$$

yazılırsa,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{w(z)}{z} = k.$$

Halbuki

$$\frac{Tz}{z} = \frac{w(z)}{z} = \frac{a + b/z}{d}; \quad \lim_{z\to\infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{a}{d}$$

Diğer taraftan, $ad = 1$ gözönünde tutulursa

$$k + \frac{1}{k} = \frac{a}{d} + \frac{d}{a} = a^2 + d^2 = a^2 + d^2 + 2ad - 2ad = \chi^2 - 2.$$

Dolayısıyla, lemma 3.3.3.2 sağlanmıştır.

(iii) $z_1 = z_2 \neq \infty$, yani $c \neq 0$, $\chi = \pm 2$. Buradan $z_1 = z_2 = \dfrac{a - d}{2c}$ elde edilir. Şimdi

$$\frac{1}{w - z_1} = \frac{1}{z - z_1} \pm c \qquad (3.3.3.2)$$

sübstitüsyonunu gözönüne alalım. z_1 yegâne sabit noktadır. Nihayet gösterelim ki $w(\infty) = T\infty = \dfrac{a}{c}$. Gerçekten

$$\frac{1}{w(\infty) - z_1} = \pm c, \; w(\infty) = z_1 \pm \frac{1}{c} = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{c} = \frac{a - d \pm 2}{2c}$$

Fakat $\pm 2 = \chi = a + d$. O halde $w(\infty) = \dfrac{2a}{2c} = \dfrac{a}{c}$. Bu takdirde diyeceğiz ki (3.3.3.2) T*z* nin normal formudur.

(iv) $z_1 = z_2 = \infty$ ise, normal form

$$w = z + b.$$

(iii) ve (iv) hallerinde, $k = 1$ olarak tarif edilir ve görülür ki (3.3.3.1) ve Lemma 3.3.3.2 sağlanmıştır.

Son olarak aşağıdaki tasnifi yapabiliriz. $k = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, ise

$\rho = 1$	$\theta = 0$	T paraboliktir
$\rho = 1$	$\theta \neq 0$	T eliptiktir
$\rho \neq 1$	$\theta = 0$	T hiperboliktir
$\rho \neq 1$	$\theta \neq 0$	T loksodromiktir

Veya aynı zamanda (3.3.3.1) gözönünde tutulursa,

Teorem 3.3.3.1. T nin eliptik, hiperbolik, veya parabolik olması için gerek ve yeter şart, χ reel ve $|\chi| < 2$, $|\chi| > 2$, veya $|\chi| = 2$ olmalıdır. T loksodromiktir yalnız ve yalnız χ reel değilse. İnvarientlikten dolayı ATA^{-1}, T nin yukardaki hassalarını aynen taşır.

3.3.4. **Reel sübstitüsyonlar.** Hatırlatalım ki reel sübstitüsyon diye, kat sayıları reel olan lineer sübstitüsyonlara denir, ve gördük ki bu sübstitüsyonlar R-reel ekseni muhafaza ederler. Üst yarı-düzleme Z^+ diyelim. Gösterelim ki bir lineer reel sübstitüsyon Z^+ yı da muhafaza eder. Gerçekten,

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

herhangi bir reel sübstitüsyon, ve $z \varepsilon Z^+$ olsun, yani $\text{İm}\, z = y > 0$. Diyorum ki $\text{İm}\, Tz > 0$. Filhakika,

$$\text{İm}\, Tz = \frac{\text{İm}(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2} > 0$$

Üstelik reel sübstitüsyonlar bir grup teşkil ederler. Bu gruba $\tilde{\Omega}_R$ dersek, $\tilde{\Omega}_R$, $\tilde{\Omega}$ grubunun bir alt grubudur. $Tz \varepsilon \tilde{\Omega}_R$ için, $\chi = a + d =$ reeldir. Binaenaleyh $\tilde{\Omega}_R$, loksodromik sübstitüsyon ihtiva edemez. Diğer taraftan Tz sübstitüsyonu eliptik, hiperbolik veya paraboliktir şayet sırasıyla, $|\chi| < 2$, $|\chi| > 2$ veya $|\chi| = 2$ ise. Dolayısıyla, (3.3.2.1) den görülür ki, Tz eliptik ise, sabit noktalar konjüge imajinerdir, yani reel eksene nazaran simetriktirler, Tz hiperbolik ise, iki reel sabit noktası vardır, Tz parabolik ise, sabit nokta birtektir ve reeldir.

Nihayet, § 3.2.6 nın neticeleri, $\tilde{\Omega}_R$ için aşağıdaki teoremde hülasa edilebilir.

Teorem 3.3.4.1. (i) Bir reel eliptik sübstitüsyonun, sabit bıraktığı her bir çemberin içinde bu sübstitüsyonun bir ve yalnız bir sabit noktası vardır, ve aynı zamanda bu çember sabit noktalardan geçen bütün çemberlere diktir. (ii) Bir reel hiperbolik sübstitüsyonun sabit bıraktığı herbir çember bu sübstitüsyonun sabit noktalarından geçer. (iii) Bir reel parabolik sübstitüsyonun sabit bıraktığı herbir çember, sübstitüsyonun sabit noktasından geçer ve o noktada R- eksenine teğettir.

Herbir halde, reel sübstitüsyonlar, sabit kalan çemberlerin içini muhafaza ederler.

Özel olarak, yukarda da işaret edildiği gibi, $\tilde{\Omega}_R$ ye ait herbir sübstitüsyon, R eksenini sabit bırakır.

Aşağıda çok önemli bir teoremin ispatını veriyoruz.

Teorem 3.3.4.2. $\tilde{\Omega}_R$ ye ait, herbiri özdeş sübstitüsyondan farklı, iki reel sübstitüsyon ard arda tatbik edildiğinde aralarında yer değiştirir (komütatiftir) yalnız ve yalnız aynı sabit noktaları haiz iseler.

İspat. Farzedelim ki, T_1z, $T_2z \varepsilon \tilde{\Omega}_R$ aynı sabit noktaları haiz iki reel sübstitüsyondur. Sabit nokta birtek ise T_1, T_2 paraboliktir. Aksi halde ne T_1 ne de T_2 parabolik değildir.

Birinci halde, yegâne sabit noktaya α diyelim. A singüler olmıyan bir matris olsun, öyleki $A\alpha = \infty$. Bu takdirde

$$T'_i z = AT_iA^{-1}z = z + b_i, \quad i = 1, 2.$$

Görülüyor ki

$$T'_2T'_1\, z = T'_1T'_2 z,$$

ve dolayısıyla,

$$T_2\, T_1\, z = T_1\, T_2\, z.$$

İkinci halde, ortak sabit noktalar 0, ∞ a dönüştürülürse, T_i, $i = 1, 2$ sübstitüsyonları $T'_i z = k_i z$ sübstitüsyonlarına dönüşür. Binaenaleyh, $T'_2T'_1 z = T'_1T'_2\, z$, ve dolayısıyla $T_2T_1\, z = T_1T_2\, z$.

Şimdi farzedelim ki, $T_1T_2\, z = T_1T_1\, z$. Göstermeli ki T_1z ve T_2z sübstitüsyonların sabit noktaları aynıdır.

Burada iki hal tefrik edeceğiz.

Birinci hal: T_1z *paraboliktir*. α, T_1z nin sabit noktası olsun. O halde,

$$T_1\, T_2\, \alpha = T_2\, T_1\, \alpha = T_2\, \alpha$$

Bu da gösteriyor ki T_1z, $\beta = T_2\, \alpha$ noktasını sabit bırakır. Halbuki $T_1\, z$ nin birtek α sabit noktası vardır. Şu halde $\beta = \alpha$. Yani $\alpha = T_2\, \alpha$. Gösterelim ki T_2z nin başka sabit noktası yoktur. Aksini kabul ederek farzedelim ki $\beta \neq \alpha$ T_2z nin ikinci sabit noktasıdır. Yani

$$T_2\beta = \beta.$$

Dolayısıyla,

$$T_1T_2\beta = T_1\beta$$

Fakat $T_1T_2\, \beta = T_2T_1\, \beta$. Yani T_2z sübstitüsyonu $T_1\, \beta$ noktasını sabit bırakır. Halbuki T_2z nin iki sabit noktadan fazla sabit noktası olamadığından,

$$\text{ya } T_1\, \beta = \alpha \text{ veya } T_1\, \beta = \beta$$

$\beta \neq \alpha$ olduğundan ikinci ihtimal mümkün değildir. Birinci ihtimale gelince, o da olamaz, zira, T_1z birebir olduğundan α yı ancak α ya gönderebilir. Şu halde T_2z de parabolik olup yegâne sabit noktası α dır.

İkinci hal: T_1z *parabolik değildir*. Farzedelim ki $\alpha \neq \beta$ T_1z nin sabit noktalarıdır. Yani

$$T_1\alpha = \alpha, \quad T_1\beta = \beta.$$

Dolayısıyla,

$$T_2T_1\, \alpha = T_2\, \alpha \Rightarrow T_1T_2\, \alpha = T_2\, \alpha, \; T_2\, T_1\, \beta = T_2\, \beta \Rightarrow T_1T_2\, \beta = T_2\, \beta.$$

Şu halde $T_2\alpha$ ve $T_2\beta$, $T_1 z$ nin sabit noktalarıdır. Binaenaleyh,

$$\text{ya } T_2\,\alpha = \alpha \text{ veya } T_2\,\alpha = \beta, \text{ ya } T_2\,\beta = \alpha \text{ veya } T_2\,\beta = \beta.$$

Yani ya $T_2\,z$ sübstitüsyonu α ve β yı sabit bırakır, veya bu noktaları aralarında değiştirir. Birinci ihtimalde teorem ispatlanmıştır. İkinci ihtimale gelince bunun mümkün olmadığını gösterelim. Gerçekten,

$$T_2\,\alpha = \beta \Rightarrow T_2^2\,\alpha = T_2\,\beta = \alpha,\ T_2\,\beta = \alpha \Rightarrow T^2_2\,\beta = T_2\,\alpha = \beta$$

Şu halde α, β, $T_2^2\,z$ nin sabit noktalarıdır. Şimdi γ, T_2 nin sabit noktası ise $\gamma \neq \alpha$, β dır, çünkü ne α ne de β, T_1 nin sabit noktasıdır. O halde

$$T_2\,\gamma = \gamma \Rightarrow T_2^2\,\gamma = T_2\,\gamma = \gamma.$$

Yani γ da $T^2_2\,z$ nin bir sabit noktasıdır. Neticede, $T^2_2\,z$ nin üç sabit noktası vardır. Dolayısıyla, $T^2_2 z$ özdeş sübstitüsyondur. Yani,

$$T_2^2 z = Iz.$$

O halde $T_2\,z$ eliptiktir.[1] T_2 nin sabit noktaları imajiner konjüge olduğundan, γ ve $\bar{\gamma}$ dir. Burada $\gamma \varepsilon Z^+$. Diğer taraftan,

$$T_2\,\gamma = \gamma \Rightarrow T_1T_2\,\gamma = T_1\,\gamma \Rightarrow T_2T_1\,\gamma = T_1\,\gamma.$$

Yani $T_1\gamma$, T_2 nin sabit noktasıdır. Binaenaleyh

$$T_2\gamma = \gamma.$$

Halbuki, bu mümkün değildir. Zira T_1 in sabit noktaları α, β dır ve $\gamma \neq \alpha$, β dır.

Not. Gördük ki reel sübstitüsyonlar, R-reel ekseni ve Z^+ üst yarı düzlemi muhafaza ederler. Farzedelim ki bir A lineer transformasyonu R yi, Q birim çemberine, ve Z^+ yı Q nün içi K dairesine dönüştürüyor. Bu takdirde, Teorem 3.3.4.2,

$$\tilde{\Omega}_Q = A\ \tilde{\Omega}_R\ A^{-1}$$

sübstitüsyonları için de doğrudur.

4. Kompleks Sayıların Topolojisi

3.4.1. *TARİF* 17. Kompleks sayıların bütününe *Kompleks düzlem* denir.

TARİF 18. z_1, z_2 noktalarının *mesafesi* diye $|z_1 - z_2|$ ye denir. $|z_1 - z_2|$ mesafe aksiyomlarını sağlar.

(1) Bir T lineer sübstitüsyonu *periodik*tir ve *periodu n* dir, yalnız ve yalnız $n>1$, $T^n z = Iz$ olacak şekilde en küçük tam ise. Gördük ki bir elliptik sübstitüsyon için $k = e^{i\theta}$, ve bir dönüşüm ile $z=0$ etrafında $Tz = kz$ dönmelerinden ibarettir. Bu dönmeler n defa ard arda tatbik edilirse $T^n z = k^n z$. $k^n = 1$ olması için $n\theta = 2m\pi$ olmalıdır, m tam. Binaenaleyh, Tz periyodik ve periodu n dir. Yalnız ve yalnız T_z eliptik ve çarpanı $k^n = 1$ ise.

(i) $z_1 \neq z_2$ ise $|z_1 - z_2| > 0$. Yalnız ve yalnız $z_1 = z_2$ için $|z_1 - z_2| = 0$

(ii) $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$

(iii) z_1, z_2, z_3 üç nokta olduğuna göre $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$

Bu mesafe tarifi ile kompleks düzlemde bir *topoloji* tarif etmiş oluyoruz. Filhakika mesafe kavramı ile ε-civarlarını ve sonra da bu kavram yardımı ile yığılma noktalarını tarif etmek mümkün olacaktır.

TARİF 19. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. a, kompleks düzlemde herhangibir nokta olduğuna göre a nın ε-civarı diye $|z - a| < \varepsilon$ noktalarının bütününe denir.

TARİF 20. Bir M cümlesi verilmiş olsun. Bir a noktasına M nin *yığılma noktasıdır* denir şayet a nın her ε-civarında a dan farklı M ye ait bir nokta var ise.

TARİF 21. $a \varepsilon M$ noktasına *ayrık nokta* denir, şayet bir $\varepsilon > 0$ için a nın ε-civarı a dan başka M ye ait hiçbir nokta ihtiva etmiyorsa.

TARİF 22. Bir M cümlesine *açıktır* denir şayet $a \varepsilon M \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ni |z - a| < \varepsilon$ nun bütün noktaları M ye ait ise.

TARİF 23. Bir M cümlesine *kapalıdır* denir şayet M, bütün yığılma noktalarını ihtiva ediyorsa.

Not. Buradaki ε-civarları *daire içleri* dir. Halbuki Karteziyen düzlemdeki ε-civarları *kare* içleri idi. Binaenaleyh Euclid düzlemi için iki topoloji mevcuttur. Fakat bu iki topoloji aynıdır. Çünki yığılma noktası, açık cümle, kapalı cümle kavramları iki topolojide de aynıdır. Zira birindeki bir ε-civarı diğerindeki bir ε-civarını ihtiva eder.

İki topoloji aynı olduğundan, ispatsız aşağıdaki teoremler kabul edilebilir.

Teorem (*Bolzano-Weierstrass*) 3.4.1.1.

Teorem (*Heine-Borel*). *Örtme teoremi.* 3.4.1.2.

TARİF 24. $a \varepsilon M$ noktasına *iç nokta* denir şayet bir $\varepsilon > 0$ bulunabilirse öyle ki $|z - a| < \varepsilon$ civarının bütün noktaları M ye aittir. Dolayısıyle açık bir cümlenin bütün noktaları iç noktalardır.

TARİF 25. Bir M cümlesi verilmiş olsun, $a \varepsilon M$ veya $a \notin M$ bir nokta olsun a ya M nin *sınır noktasıdır* denir şayet a nın her civarı hem M ye ait hem de M ye ait olmıyan noktalar ihtiva ediyorsa.

TARİF 26. Bir M cümlesine *irtibatlıdır* denir şayet M nin herhangi iki noktası, bütün noktaları M ye ait olmak üzere, bir veya birden fazla Jordan yaylarından müteşekkil bir eğri ile birleştirilebilirse.

TARİF 27. Ortak noktası olmıyan iki cümleye *ayrıktır* denir.

Misal. Bir çemberin içi irtibatlıdır. Zira A, B daireye ait herhangi iki nokta ise A, B dairenin O merkezine birer doğru ile birleştirilebilir.

Problem. (i) Dairenin içini tarif ediniz.
(ii) Dairenin dışını tarif ediniz.
(iii) Dairenin dışı irtibatlı olduğunu gösteriniz.

TARİF 28. Bir M nokta cümlesine *bölge* denir şayet M *açık* ve *irtibatlı* ise.

TARİF 29. Bir M nokta cümlesine *kontinium* denir şayet M kapalı ve irbatlı ise.

Misal. Çemberin içi (buna daire diyoruz) bölgedir.

TARİF 30. Verilen bir M cümlesinin sınır noktalarının cümlesine M nin *sınırı* denir.

Misal. Dairenin sınırı çemberidir. M cümlesi sonlu ise, her bir noktası sınır noktasıdır. Binaenaleyh M nin sınırı kendisidir.

Teorem. 3.4.1.3. Herhangibir C basit Jordan eğrisi *kapalı sınırlı* bir cümledir.

İspat. C yi temsil eden $x = f(t), y = g(t), 0 \leq t \leq 1$ aralığında sürekli olduklarından sınırlıdırlar. Eğrinin bir kapalı cümle oluşu yine sürekliliğin bir neticesidir. Filhakika, C üzerinde farklı $P_1, P_2, \ldots$ noktalarından müteşekkil ve P noktasına yakınsak bir (P_n) dizisini gözönüne alalım. Göstermek istiyoruz ki $P \varepsilon C$. $[0, 1]$ de (P_n) ye (t_n) tekabül eder öyleki $t_1, t_2, \ldots$ farklı noktalardır. Bolzano-Weierstrass teoreminden dolayı (t_n) nin en az bir t yığılma noktası vardır ve $t \varepsilon [0, 1]$ dir. P_t, t ye tekabül eden nokta olsun. $x = f(t), y = g(t)$ sürekli olduklarından $t_{n_i} \to t \Rightarrow P_{t_{n_i}} \to P_t$. Binaenaleyh $P_t = P$ zira $(P_{t_{n_i}}) \subset (P_n)$

Teorem. 3.4.1.4 G bir bölge, ve C, bütün noktaları G ye ait olmak üzere sınırlı ve kapalı bir cümle olsun. Bu takdirde $\exists r > 0 \ni$ yarıçapı r olan ve C nin herhangibir noktasında merkezlenmiş bir daire tamamiyle G ye aittir. Yani C nin G nin sınırına olan uzaklığı (en küçük mesafe) sıfıra yaklaşık değildir.

İspat. z C nin herhangibir noktası olsun $z \varepsilon G$ dir. Binaenaleyh merkezi z de olan r_z yarıçaplı bir daire vardır öyle ki bu daire tamamiyle G ye aittir. Herbir $z \varepsilon C$ ye r_z yarıçaplı daireyi tekabül ettirelim. Heine-Borel teoreminden dolayı C, sonlu sayıda bu daireler tarafından örtülebilir. r en küçük yarıçap olsun. $r > 0$ sayısı teoremin istediği sayıdır.

TARİF 31. (z_n) dizisi z noktasına yakınsaktır denir şayet her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilirse öyleki bütün $p > n$ için $| z - z_p | < \varepsilon$

Teorem 3.4.1.5. (z_n) yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilir öyleki bütün $p, q > n$ için $| z_p - z_q | < \varepsilon$.

İspat. Gerek şart. Farzedelim ki $z_n \to z$. Yani $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun; $\exists n \ni p, q > n$ için

$$| z - z_p | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad | z - z_q | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Binaenaleyh

$$| z_p - z_q | \leq | z_p - z | + | z - z_q | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Yeter şart. $z_n = x_n + iy_n$ vazedelim. Binaenaleyh

$$| z_p - z_q | = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} < \varepsilon, \ p, q > n$$

$\Rightarrow$

$$| x_p - x_q | < \varepsilon, \ | y_p - y_q | < \varepsilon, \ p, q > n$$

Yani $x_n \to x, y_n \to y$. Bu demektir ki $\varepsilon > 0$ verildiğine göre bütün $p > n$ için

$$| x_p - x | < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad | y_p - y | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$z = x + iy$ vaz edelim. O halde

$$| z - z_p | = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} \leq | x - x_p | + | y - y_p | < \varepsilon.$$

Yani

$$z_n \to z$$

TARİF 32. $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ serisi yakınsaktır şayet $(z_n) = \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right|$ dizisi yakınsak ise. Yani $\exists z, \ni$ her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilir $\ni p > n$ için

$$| z - \sum_{i=1}^{p} \xi_i | < \varepsilon$$

Teorem 3.4.1.6. $\Sigma_i \xi_i$ serisi yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilir öyleki $q > p > n$ için

$$\left| \sum_{i=p+1}^{q} \xi_i \right| < \varepsilon$$

TARİF 33. Bir $\Sigma_i \xi_i$ serisi *mutlak yakınsaktır* denir şayet $\Sigma | \xi_i |$ serisi yakınsak ise

5. Jordan Ayırım Teoremi

3.5.1. **Bir Cümlenin Tamamlayıcısı (Komplemanı).** *TARİF* 34. Bir M cümlesi verilmiş olsun. Kompleks düzlemin M ye ait olmıyan noktaları bir cümle teşkil ederler, bu cümleye M nin tamamlayıcısı denir ve M^C ile gösterilir.

Teorem 3.5.1.1. Açık bir cümlenin tamamlayıcısı kapalıdır. Kapalı bir cümlenin tamamlayıcısı açıktır.

İspat. M yi açık farzedelim. M^C, M nin tamamlayıcısı ve z M^C nin herhangibir yığılma noktası olsun. $z \varepsilon M$ ise z in bir civarı tamamiyle M ye aittir. Binaenaleyh M de M^C ye ait noktalar vardır. Bu ise olamaz. Dolayısiyle $z \varepsilon M^C$. O halde M^C kapalıdır.

Şimdi M kapalı ve $z \varepsilon M^C$ herhangibir nokta olsun. Diyorum ki z nin bir civarı mevcuttur öyle ki bu civar tamamiyle M^C ye aittir. Aksi halde z nin her civarında M ye ait bir nokta vardır. Binaenaleyh z M nin bir yığılma noktasıdır. Neticede $z \varepsilon M$. Bu ise olamaz.

Problem. Sınır noktalarının cümlesi kapalıdır.

Teorem 3.5.1.2. Bir açık M cümlesi bir veya birden fazla ayrık bölgelerin toplam cümlesidir.

İspat. z_1, z_2 M ye ait herhangi iki nokta olsun. Şayet z_1 ve z_2 bütün noktaları M ye ait olan bir Jordan eğrisi ile birleştirilebilirse $z_1 \sim z_2$ yazacağız. $\sim$ sembölü bir *ekivalentlik (eşdeğerlik) bağıntısı* tarif eder. Filhakika z_1, tamamiyle M ye ait küçük bir çemberle z_1 e birleştirilebilir. Binaenaleyh $z_1 \sim z_1$. Açık olarak $z_1 \sim z_2 \Rightarrow z_2 \sim z_1$ ve $z_1 \sim z_2$, $z_2 \sim z_3 \Rightarrow z_1 \sim z_3$. Binaenaleyh $\sim$ bağıntısı M yi *ayrık* bölgelere parçalar: M_α, M_β, ... Filhakika herbir M_α irtibatlıdır ve $z \varepsilon M_\alpha$ ise z in bir civarı tamamiyle M_α ya aittir zira $z \varepsilon M$ dir.

Bu teoremin neticesi olarak aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz.

Teorem 3.5.1.3. C basit kapalı bir Jordan eğrisi olsun. C^C ayrık bölgelerin *toplam cümlesi*dir.

İspat. C kapalı bir cümle olduğundan C^C açıktır. Binaenaleyh yukardaki teorem C^C ye tatbik edilebilir.

Not. C sınırlı olduğundan, C bir K dairesinin içine alınabilir. K nın dışında olan noktalar bir bölge teşkil ederler ve dolayısıyle bu bölge $\subset C^C$ dir. Binaenaleyh keyfi olarak büyük alınan bir K dairesinin dışındaki bütün noktalar C^C ye aittir.

Teorem 3.5.1.4. Bir C basit kapalı Jordan eğrisi kompleks düzlemi tam iki bölgeye ayırır. C yi ihtiva eden yeter derecede büyük bir K dairesinin dı-

şındaki bütün noktaları ihtiva eden bölgeye C nin *dışı* denir. Diğer bölgeye de C nin *içi* denir. C bu iki bölgenin ortak sınırıdır.

Bu teoremin ispatı "Konform Tasvir" kitabında mevcut olduğundan burada ayrıca ispat etmeye lüzum yoktur. Yalnız, güçlüğü hakkında bir fikir edinilmesi için bu teoremin üçgen için ispatını veriyoruz.

TARİF 35. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ iki farklı nokta olsun.

$$z = tz_2 + (1 - t)\, z_1,$$

veya

$$x = tx_2 + (1-t)x_1, \qquad y = ty_2 + (1-t)y_1, \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{3.5.1.1}$$

ile temsil edilen Jordan eğrisine z_1 i z_2 ye birleştiren *doğru parçası* denir. (3.5.1.1) deki t paremetresine herhangibir reel değer verilecek olursa (3.5.1.1) z_1, z_2 noktalarından geçen *doğruyu* tarif eder. $z_3 = x_3 + iy_3$, z_1, z_2 noktalarından geçen doğru üzerinde olmıyan bir nokta olsun, bunun için gerek ve yeter şart

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \neq \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$$

(z_1z_2 ve z_1z_3 vektörlerinin paralel olmadığını yazdık). Şimdi z_1 ve z_2, z_2 ve z_3, z_1 ve z_3 doğrularla birleştirilirse o zaman bir basit kapalı Jordan eğrisi elde edilir. Bu eğriye z_1, z_2, z_3 den geçen *üçgen* denir. Aşağıdaki denklem sistemi

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\ y &= \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \\ 1 &= \alpha + \beta + \gamma \end{aligned} \tag{3.5.1.3}$$

α, β, γ ya göre çözülebilir zira

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(3.5.1.2) den dolayı sıfırdan farklıdır.

Binaenaleyh her bir $z = x + iy$ ye bir (α, β, γ) *üçlüsü* tekabül eder. Bu üçlüye z nin *üçlü koordinatı* denir. z_1 ve z_2 nin üçlü koordinatları (1, 0, 0) ve (0, 1, 0) dır. z_1 ve z_2 doğru parçasının herhangibir noktasının üçlü koordinatı $(1 - t, t, 0)$ dır. Aynı şekilde z_3 ün üçlü koordinatı (0, 0, 1) ve z_1 z_3 ile z_2z_3 doğru parçaları üzerindeki herhangibir noktanın üçlü koordinatı aynı şekilde bulunur. Yani $(1 - t, t, 0)$ ın permütasyonlarıdır.

Binaenaleyh üçgen üzerindeki noktaların üçlü koordinatlarının en az bir koordinatı sıfırdır diğerleri ise ≥ 0 dır.

TARİF 36. (α, β, γ) noktalarına, öyle ki herbir koordinatı pozitiftir, üçgenin *iç* noktaları denir. (α, β, γ) noktalarına, öyleki ne üçgen üzerindedir ne de iç noktadır, üçgenin *dış* noktaları denir.

(3.5.1.3) ün çözümü

$$\alpha = \frac{m_1x + n_1y + p_1}{D}, \quad \beta = \frac{m_2x + n_2y + p_2}{D} \quad \gamma, = \frac{m_3x + n_3y + p_3}{D},$$

şeklindedir. Binaenaleyh α, β, γ x ve y nin sürekli fonksiyonlarıdır. O halde $z = x + iy$, üçgenin bir iç noktası ise yani $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ise z in yeter derecede küçük bir civarı iç noktalardan müteşekkildir, zira bu noktalar için, süreklilikten dolayı, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ dır. Aynı şekilde $\alpha.\beta.\gamma \neq 0$ ve z bir iç nokta değilse (binaenaleyh dış noktaldır) z nin yeter derecede küçük bir civarı dış noktalardan müteşekkildir. Binaenaleyh iç noktalar ve dış noktalar birer açık cümle teşkil ederler.

Şimdi diyorum ki iç noktaların cümlesi irtibatlıdır. Filhakika $z' = x' + iy'$ ve $z'' = x'' + iy''$ iki iç nokta ve $(\alpha', \beta', \gamma')$ ve $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, z' ve z'' nün üçlü koordinatları olsun. Gösterelim ki $z'z''$ doğru parçasının bütün (α, β, γ) noktaları iç noktalardır. Filhakika α, β, γ, nın herbiri x, y nin bir lineer kombinezonu ve

$$x = tx'' + (1-t)\,x', y = ty'' + (1-t)\,y' \quad 0 \leq t \leq 1$$

olduğundan, meselâ $\alpha = At + B$ şeklindedir. $t = 0$ için $\alpha = \alpha'$ ve $t=1$ için $\alpha = \alpha''$ vaz edilirse z nin

$$(t\alpha'' + (1-t)\,\alpha', t\beta'' + (1-t)\,\beta', t\gamma'' + (1-t)\,\gamma')$$

üçlü koordinatı elde edilir. Görülüyor ki üçlü koordinatın her elemanı > 0 dır. Binaenaleyh iç noktalar bir bölge teşkil ederler.

Dış noktaların cümlesi irtibatlıdır. Herhangibir $z = x + iy$ iç noktası için

$$|x| = |\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3| \leq \alpha|x_1| + \beta|x_2| + \gamma|x_3| < |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

Aynı şekilde

$$|y| < |y_1| + |y_2| + |y_3|$$

Yani iç noktaların cümlesi sınırlıdır. Binaenaleyh *sınırlı* olmıyan bütün noktalar dış noktalardır. Bu noktalar yeter derecede büyük bir K dairesinin dış noktaları olarak tarif edilir. Halbuki gördük ki bu noktaların cümlesi irtibatlıdır. Binaenaleyh üçgenin dış noktalarının irtibatlı olduğunu göstermek için herhangibir dış noktanın K nın dışında olan bir nokta ile birleştirilebileceğini göstermek kâfidir. O halde z: (α, β, γ) bir dış nokta olsun. Farzedebiliriz ki $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Bu takdirde $(\alpha + u, \beta - u, \gamma)$, $u > 0$ için,

dış noktalardır. Bu noktaları $z_u = x_u + iy_u$ ile gösterirsek

$$x_u = (\alpha + u)\,x_1 + (\beta - u)\,x_2 + \gamma\,x_3$$
$$y_u = (\alpha + u)\,y_1 + (\beta - u)\,y_2 + \gamma y_3$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Yani

$$x_u = x + u\,(x_1 - x_2)$$
$$y_u = y + u\,(y_1 - y_2)$$

Binaenaleyh

$$\frac{y_u - y}{y_1 - y_2} = \frac{x_u - x}{x_1 - x_2}$$

Yani (x_u, y_u), (x, y) den geçen ve $z_1 z_2$ ye paralel doğruyu çizer. Binaenaleyh u yeter derecede büyük alınırsa (x_u, y_u) K nın dışında olur. Son olarak, gösterelim ki bir dış noktayı bir iç noktaya, üçgeni kat etmeden bir Jordan eğrisi ile birleştirmek mümkün değildir. A bir iç nokta, B bir dış nokta ve $x = f(t)$, $y = g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, A yı B ye birleştiren herhangibir Jordan eğrisi olsun. Farzedelim ki B nin α koordinatı < 0 dır. t sürekli olarak $[0, 1]$ de değiştiği zaman x, y sürekli olarak değişir. Binaenaleyh α, β, γ sürekli olarak değişir. Farzedelim ki $t = 0$ A ya ve $t = 1$ B ye tekabül ediyor. $t = 0$ için $\alpha > 0$ ve $t = 1$ için $\alpha < 0$ dir. Binaenaleyh bir $0 < t < 1$ için $\alpha = 0$ dır. t_1, $\alpha = 0$ a tekabül eden en küçük değer olsun. Şayet eğrinin bir noktası için $\beta = 0$ ise t_2, $\beta = 0$ a tekabül eden en küçük değer olsun. Aksi halde $t_2 = 1$ vazedilir. Aynı şeyi γ için yapmış olalım t_3, $\gamma = 0$ a tekabül eden en küçük değer olsun. Eğrinin hiçbir noktasında $\gamma = 0$ değilse $t_3 = 1$ vaz edilir. $t_0 = \min\,(t_1, t_2, t_3)$ olsun. Binaenaleyh t_0 a tekabül eden P noktasının α, β, γ koordinatlarının en az bir tanesi sıfırdır. Üstelik P için $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ dır. Binaenaleyh P üçgenin üzerindedir.

Problem. Jordan teoremini herhangibir poligon için ispat ediniz. (indüksiyon metodu tavsiye edilir).

BÖLÜM IV.

FONKSİYONLAR TEORİSİ

1. Birtek Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar.

4.1.1. *TARİF* 1. M, herhangibir nokta cümlesi ve z bu cümleye ait herhangibir nokta olsun. Burada z bir *kompleks değişken* farzediliyor. Şayet herhangibir kaide veya kanun ile herbir $z \varepsilon M$ ye birtek w sayısı tekabül ettirilebiliyorsa w ye z nin *kompleks fonksiyonu* denir ve $w = f(z)$ ile gösterilir. M, f nin *tarif bölgesi*dir ve $z \varepsilon M$ noktalarına tekabül eden w değerlerinin bütününe M üzerinde tarifli f fonksiyonunun *değer bölgesi* denir.

Bu şekilde *genel* olarak tarif edilen $w = f(z)$ fonksiyonu maksadımıza uygun değildir. Her şeyden evvel $w = f(z)$ fonksiyonunun umumiyetle bir bölgede *-irtibatlı açık cümle-* tarif edildiğini farz edeceğiz. Bazen $w = f(z)$ nin, kapalı bölgede de tarifli olduğu farzedilebilir.

2. Süreklilik

4.2.1. *TARİF* 2. Farzedelim ki $w = f(z)$ bir G bölgesinde tariflidir. $z_0 \varepsilon G$ bir nokta olsun. Şayet her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunabilirse öyleki $|h| < \delta$ için

$$| f(z_0 + h) - f(z_0) | < \varepsilon$$

dır, $f(z)$ z_0 da süreklidir denir. Burada $h = z - z_0$, $z \varepsilon$ G dir.

Not. Şayet G bölgesi *kapalı* olup z_0 noktası bir sınır noktası ise bu hali karşılamak için $f(z)$ yi, $| z - z_0 | < \delta$ eşitsizliğini sağlıyan $z \varepsilon G$ noktalarında tarifli olduğunu farzetmek kâfidir.

Not. Yukardaki tarif $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ mevcuttur ve $f(z_0)$ a eşittir manasına gelir. Yani G de z, z_0 a ne şekilde yaklaşırsa yaklaşsın $f(z)$ nin limiti daima mevcut ve $f(z_0)$ a eşittir. Şayet G kapalı bir bölge ve z_0 sınır noktası ise $f(z_0)$, z_0 da tarif edilen değer olduğuna göre $f(z)$, z_0 da süreklidir şayet $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ise. Burada z, $f(z)$ nin tarif edildiği noktalardır.

Notasyon. Bundan sonra G′, G nin sınırını ve $\overline{G}$ kapalı bölgeyi gösterecektir: $\overline{G} = G + G'$

Re $(w) = u(x, y)$, Im $(w) = v(x, y)$, $w = u(x, y) + iv(x, y)$
Burada u, v reel x, y değişkenlerinin reel fonksiyonlarıdır.

Teorem 4.2.1.1. $w = f(z)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ da sürekli olması için gerek ve yeter şart $u(x, y)$ ve $v(x, y)$, (x_0, y_0) noktasında sürekli olmalıdır.

İspat. Gerek şart. Hipotezden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0$, $\ni |h| < \delta$ için $z_0 \varepsilon G$ de $|f(z_0 + h) - f(z_0)| < \varepsilon$. $h = r + is$ vazedelim.

$$f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) \text{ ve } f(z_0 + h) = f(x_0 + r + i(y_0 + s))$$
$$= u(x_0 + r, y_0 + s) + iv(x_0 + r, y_0 + s) \text{ dir.}$$

Şayet $|r| < \delta/2$ ve $|s| < \delta/2$ ise $|h| < \delta$ dır. Çünki $|r| + |s| \geq \sqrt{r^2 + s^2} = |h|$. Halbuki

$$| u(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) | \leq | f(z_0 + h) - f(z_0) | < \varepsilon$$

Binaenaleyh $u(x, y)$, (x_0, y_0) da süreklidir. Aynı şekilde $v(x, y)$, (x_0, y_0) da süreklidir.

Yeter şart. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\exists\, \delta > 0 \ni |r| < \delta$ ve $|s| < \delta$ için

$$|u(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|v(x_0 + r, y_0 + s) - v(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Şimdi $h = r + is$ vazedelim, ve farzedelim ki $|h| < \delta$. Bu taktirde

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| \leq |u(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0)| + |v(x_0 + r, y_0 + s) - v(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Binaenaleyh $f(z)$, z_0 da süreklidir.

Teorem 4.2.2.2. $w = f(z)$ *kapalı sınırlı* bir M cümlesi üzerinde *tarifli* ve *sürekli* olsun. Bu takdirde $f(z)$ M de *üniform süreklidir.*

İspat. $z \varepsilon M$ *keyfi* fakat *sabit* bir nokta olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists \delta_z > 0 \ni |h| < \delta_z$ için $|f(z+h) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Her z noktasına merkezi bu noktada olan $\frac{1}{2}\delta_z$ yarıçaplı bir daire tekabül ettirelim. Heine-Borel *örtme* teoreminden dolayı $\exists\, z_1, z_2, \ldots, z_n \ni$ merkezleri bu noktalarda ve yarı-çapları $\frac{1}{2}\delta_{z_1}, \frac{1}{2}\delta_{z_2}, \ldots, \frac{1}{2}\delta_{z_n}$ olan daireler M yi tamamiyle örterler.

Şimdi diyorum ki $z \varepsilon M$ keyfi ve aynı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\delta = \min (\frac{1}{2} \delta_{z_i})$, $i = 1, 2, 3 \ldots, n$, ise, $|h| < \delta$ için $|f(z+h) - f(z)| < \varepsilon$. Filhakika $z \varepsilon M$ herhangibir nokta olsun. Bu nokta, meselâ merkezi z_i de ve yarıçapı $\frac{1}{2} \delta_{z_i}$ olan bir daire tarafından örtülmektedir.

$$|f(z+h) - f(z)| \leq |f(z+h) - f(z_i)| + |f(z_i) - f(z)|.$$

Halbuki,

$$|z - z_i| < \tfrac{1}{2} \delta_{z_i}$$

ve

$$|z + h - z_i| \leq |h| + |z - z_i| < \delta + \tfrac{1}{2} \delta_{z_i} < \delta_{z_i}$$

Binaenaleyh

$$|f(z+h) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. Diferansiyellenebilme

4.3.1. Daha henüz reel değişkenli reel fonksiyonlar teorisinden farklı bir şey görmedik.

TARİF 3. $w = f(z)$ bir G bölgesinde tarif edilmiş olsun. $f(z)$, $z_0 \varepsilon G$ noktasında *diferansiyellenebilir* denir şayet her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir $\delta > 0$ bulunabilirse öyleki bütün $0 < |h| < \delta$ için $\exists f'(z_0)$, $\ni$

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

$f'(z_0)$ a $f(z)$ nin z_0 noktasındaki *türevi* veyahut *diferansiyel katsayısı* denir.

Not. Türeve ait hassalar reel fonksiyonlardakinin aynıdır. Meselâ $[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z)$. v. s. Bazan z_0 noktasında türev $\frac{dw}{dz} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ veya $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ diye de tarif edilir.[1] Burada $\Delta w = f(z_0 + h) - f(z_0)$ ve $\Delta z = h$.

TARİF 4. Şayet $f(z)$ G nin her noktasında diferansiyellebilirse, $f(z)$ G de *analitiktir* (veya *regülye* veya *holomorftur*) denir.

Not. Bundan sonra istisnasız $f(z)$ fonksiyonlarını daima bir bölgede analitik farzedeceğiz. Yani $f(z)$ fonksiyonları şayet *yalnız* bir *noktada* veya bir *eğri* üzerinde diferansyellenebilirseler bu gibi fonksiyonlar bizi alakadar etmiyeceklerdir.

(1) Bu tarife göre kompleks değişkenli bir reel fonksiyonun türevi, şayet mevcut ise, sıfırdır.

Analitik fonksiyonlar hakkında esas teoremlerden biri şudur.

Teorem 4.3.1.1. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ vaz edelim. Farzedelim ki u ve v nin, tarif bölgesinde, birinci mertebeden kısmi türevleri vardır ve süreklidirler.

Bu takdirde $f(z)$, tarif bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter şart, tarif bölgesinin bütün noktalarında kısmi türevlerin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamalıdır.

İspat. Gerek şart. h yı reel farzedelim.

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0)}{r} + i \frac{v(x_0 + r, y_0) - v(x_0, y_0)}{r}$$

$f(z)$, z_0 da diferansyellenebildiğinden $r \to 0$ için sağ taraftaki reel ve imajiner kısımların limitleri vardır. Yani (x_0, y_0) noktasında $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ mevcuttur ve

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)}$$

Aynı şekilde h imajiner eksene paralel olarak sıfıra yaklaşırsa

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)}$$

Binaenaleyh her (x_0, y_0) noktasında Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmıştır.

Yeter şart. z keyfi fakat sabit olsun. Kısa olmak üzere

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x + r, y+s) + iv(x+r, y+s) - u(x, y) - iv(x, y)}{r + is}$$

vazedelim. Sonra

$$u(x + r, y+s) - u(x, y) = u(x+r, y+s) - u(x+r, y) + u(x+r, y) - u(x, y) = s \frac{\partial u}{\partial y}(x + r, y + \theta s) + r \frac{\partial u}{\partial x}(x + \theta' r, y),$$

$$0 < \theta < 1. \qquad 0 < \theta' < 1$$

Şimdi $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ sürekli farzedildiğinden $r, s \to 0$ için

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x + r, y + \theta s) \to \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x + \theta' r, y) \to \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).$$

Binaenaleyh

$$u(x+r, y+s) - u(x, y) = s\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\right) + r\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon'\right)$$

dır. Burada $r, s \to 0$ için $\varepsilon, \varepsilon' \to 0$.

Aynı şekilde,

$$v(x+r, y+s) - v(x, y) = s\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon_1\right) + r\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon'_1\right)$$

Burada $r, s \to 0$ için $\varepsilon_1, \varepsilon'_1 \to 0$

Binaenaleyh

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{s\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) + r\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\Delta z} + \frac{s(\varepsilon + i\varepsilon'_1) + r(\varepsilon' + i\varepsilon'_1)}{\Delta z}$$

Cauchy-Riemann denklemleri göz önünde tutulursa

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{s(\varepsilon + i\varepsilon_1) + r(\varepsilon' + i\varepsilon'_1)}{\Delta z}$$

dir. Diğer taraftan

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| = \frac{|s(\varepsilon + i\varepsilon_1) + r(\varepsilon' + i\varepsilon'_1)|}{|\Delta z|}$$

$$\leq \frac{|s|\,|\varepsilon + i\varepsilon_1| + |r|\,|\varepsilon' + i\varepsilon'_1|}{|\Delta z|}$$

Halbuki $|s| \leq |\Delta z|$ ve $|r| \leq |\Delta z|$ olduğundan son kısım

$$\leq |\varepsilon + i\varepsilon_1| + |\varepsilon' + i\varepsilon'_1| \leq |\varepsilon| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon'| + |\varepsilon'_1|$$

Binaenaleyh $\Delta z \to 0$ için ε lar $\to 0$ ve $\frac{\Delta w}{\Delta z} \to \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ yani $f(z)$ analitiktir.

Not. İlerde gösterilecektir ki $f(z)$ tarif bölgesinde analitikse $f(z)$ nin her mertebeden türevi vardır. Dolayısiyle u ve v nin her mertebeden kısmî türevi vardır ve bunlar süreklidirler. Bu hassa göz önünde tutulursa Cauchy-Riemann denklemleri

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

şeklini alırlar. Son denklemlere *Laplace* denklemleri denir. Laplace denklemini sağlıyan fonksiyona ise *Harmonik* denir. Şayet bir $u(x, y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlarsa bir $v(x, y)$ fonksiyonu inşa edilebilir öyleki $f(z) = u + iv$ analitiktir. v ye u nun *konjügesi* denir. v, Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığından

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\ .$$

Umumiyetle v tekdeğerli değildir. Bu bakımdan dv notasyonunu kullanmak doğru olmaz. Şu halde farkı belirtmek için dv yerine $^*du$ vazedilir ve du nun konjüge diferansiyeli denir ve $f'dz = du + i^*du$ yazılır. Fakat v tekdeğerli ise (meselâ $f(z)$ nin tarif bölgesi basit irtibatlı ise)

$$v(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + sabit.$$

4. Kompleks İntegral

4.4.1. AB bir C eğrisi, ve C yi tarif eden denklemler de $x = \Phi(t)$, $y = \Psi(t)$ olsunlar. Farzedelim ki $\Phi'(t), \Psi'(t)$ mevcut ve süreklidirler. t, 0 ile 1 arasında değiştiği zaman (x, y) noktası sürekli olarak C yi A dan B ye çizer. $f(z)$ yi C üzerinde tarifli ve sürekli farzedelim. z_0 A da, z_n de B de olmak şartiyle, $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ C üzerinde noktalar olsun Tıpkı reel fonksiyonlarda olduğu gibi,

$$\sum_{m=1}^{n} f(z_m^*)\ (z_m - z_{m-1}) \tag{4.4.1.1}$$

toplamını teşkil edelim. Burada z_m^*, z_{m-1} ile z_m arasında, C üzerinde bir noktadır. $z_m^* = x_m^* + iy_m^*$ vazedersek yukardaki toplam

$$\sum_{m=1}^{n} [u(x_m^*, y_m^*) + iv(x_m^*, y_m^*)]\ (x_m + iy_m - x_{m-1} - iy_{m-1})$$

şeklini alır. Halbuki

$$x_m - x_{m-1} = \Phi(t_m) - \Phi(t_{m-1}) = \Phi'(\tau_m)(t_m - t_{m-1}) \qquad t_{m-1} < \tau_m < t_m$$

$$y_m - y_{m-1} = \Psi(t_m) - \Psi(t_{m-1}) = \Psi'(\theta_m)(t_m - t_{m-1}) \qquad t_{m-1} < \theta_m < t_m.$$

Binaenaleyh toplam

$$\sum_{m=1}^{n} [u(x_m^*, y_m^*) + iv(x_m^*, y_m^*)]\,[\Phi'(\tau_m) + i\Psi'(\theta_m)](t_m - t_{m-1}) \quad (4.4.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi meselâ,

$$\sum_{m=1}^{n} u(x_m^*, y_m^*)\,\Phi'(\tau_m)\,(t_m - t_{m-1})$$

toplamını göz önüne alalım. Buradaki bütün fonksiyonlar üniform sürekli olduklarından, $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, \delta > 0, \ni |t_m - t_{m-1}| < \delta$ ve her m için

$$|u(x_m^*, y_m^*)\,\Phi'(\tau_m) - u(x_m, y_m)\,\Phi'(t_m)| < \varepsilon$$

Binaenaleyh $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ için, yukardaki toplamın limiti ile

$$\sum_{m=1}^{n} u(x_m, y_m)\,\Phi'(t_m)\,(t_m - t_{m-1})$$

in limiti aynıdır. Yani

$$\int_0^1 u[\Phi(t), \Psi(t)]\,\Phi'(t)\,dt$$

Aynı şekilde (4.4.1.2) nin diğer terimlerinin de limiti vardır. Neticede bütün toplamının limiti

$$\int_0^1 (u+iv)\,[\Phi'(t) + i\Psi'(t)]\,dt = \int_0^1 f(z(t))\,z'(t)\,dt \qquad (4.4.1.3)$$

dir. İşte bu (4.4.1.3) integrali $f(z)$ nin C üzerindeki kompleks integralidir ve

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 f(z(t))z'(t)\,dt$$

olarak yazılır.[1]

Reel integrallerde olduğu gibi

$$\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz,$$

k sabit için

$$\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$$

(1) Bu integralin en mühim hassası bir parametre değişimine nazaran invarient oluşudur; öyle ki $t = t(\tau)$ parametre değişimi artan bir fonksiyondur ve $[0,1]$ aralığını bir $[a,b]$ aralığına tasvir eder. En son, $t(\tau)$ sürekli diferansiyellenebilir fazrzediliyor.

dir. C üzerindeki yön B den A ya doğru ise ve bu şekilde yöneltilmiş eğri C^- ile gösterilirse

$$\int_{C^-} f(z)\,dz = -\int_{C^+} f(z)\,dz$$

Burada C^+, A dan B ye yöneltilmiş C yi gösterir.

Misaller.

(i) $f(z) = k$, ve C $z = a$, $z = b$ noktalarını birleştiren herhangi bir eğri olsun

$$\sum_{m=1}^{n} f(z_m^*)\,(z_m - z_{m-1}) = k\sum_{m=1}^{n} (z_m - z_{m-1}) = k\,(b - a).$$

Binaenaleyh

$$\int_C k\,dz = k(b - a)$$

C ye tâbi olmadığından, netice

$$\int_a^b k\,dz = k(b - a)$$

olarak ta yazılabilir.

(iii) $f(z) = z$ ve C a ile b yi birleştiren herhangibir eğri olsun. Önce $z_m^* = z_m$ vazedelim. Bu takdirde

$$\sum_{m=1}^{n} f(z_m^*)\,(z_m - z_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} z_m\,(z_m - z_{m-1})$$

sonra $z_m^* = z_{m-1}$ vazedelim. Bu takdirde

$$\sum_{m=1}^{n} f(z_m^*)\,(z_m - z_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} z_{m-1}\,(z_m - z_{m-1})$$

bu toplamların limiti aynı olduğundan

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{n} z_m(z - z_{m-1}) + \sum_{m=1}^{n} z_{m-1}\,(z_m - z_{m-1})\right] = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} (z^2{}_m - z^2{}_{m-1})$$

aynı limite yakınsaktır. Yani $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ ye yakınsaktır. Yani

$$\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

ve integral C ye tâbi değildir.

5. Kompleks İntegrallere Ait Eşitsizlikler.

4.5.1. $x=\Phi(t), y=\Psi(t), 0 \leq t \leq 1$, bir eğri olsun. Farzedelim ki $\Phi'(t), \Psi'(t)$ süreklidirler. Biliyoruz ki eğrinin uzunluğu

$$\int_0^1 \sqrt{[\Phi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2}\, dt$$

dir.

Teorem 4.5.1.1. Farzedelim ki C üzerinde $f(z)$ süreklidir, ve $|f(z)| \leq M$ ve L, C nin uzunluğudur. Bu takdirde

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML \qquad (4.5.1.1)$$

İspat. Şayet $F(t)$ bir t reel değişkeninin sürekli kompleks bir fonksiyonu ise

$$\left| \int_a^b F(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |F(t)|\, dt \qquad (4.5.1.2)$$

dir. Filhakika

$$|\Sigma F(t_m^*)\ (t_m - t_{m-1})| \leq \Sigma\ |F(t_m^*)|\ (t_m - t_{m-1})$$

dir. Limite geçilirse istenilen netice elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| = \left| \int_0^1 (u + iv)\ [\Phi'(t) + i\Psi'(t)]\, dt \right|$$

dir, ve

$$\leq \int_0^1 M \sqrt{[\Phi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2}\ dt = ML$$

Problem. $\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C |f(z)| . |dz|$ eşitsizliğini ispat ediniz.

(4.5.1.2) nin neticesidir.

TARİF 5. *Çevre* diye yukarda tarifi verilmiş olan sonlu sayıda C yaylarından müteşekkil eğriye denir. Yani her C için $\Phi'(t), \Psi'(t)$ süreklidirler. Çevreleri yine C ile göstereceğiz. C *kapalıdır* şayet iki uc noktası çakışıyorsa.

TARİF 6. Kendisini kesmiyen bir çevreye *basit çevre* denir.

Problem. C, merkezi başlangıç noktasında olan bir çember olsun. Aşağıdaki neticeleri gösteriniz.

(i) $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$. C nin yarıçapı ρ olsun. Bu takdirde C çemberinin üzerindeki bir z noktası için $z = \rho e^{i\theta}$. Binaenaleyh

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi i$$

(ii) $\int_C z^n\, dz = 0$, n, -1 den farklı tam sayıdır.

$$\int_C z^n\, dz = \int_0^{2\pi} i\rho^{1+n} e^{(n+1)i\theta}\, d\theta = \rho^{n+1} \left[\frac{e^{(n+1)i\theta}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0$$

6. Cauchy Teoremi.

4.6.1. Analitik fonksiyonlar teorisinin temelini teşkil eden teorem aşağıdadır. *Homotopi (sürekli deformasyon)* ile ilişkisi önemlidir.

Teorem. 4.6.1.1. Bir $f(z)$ fonksiyonu verilen bir basit kapalı C çevresinin içinde ve üzerinde analitik (tek değerli) ise bu takdirde $\int_C f(z)\, dz = 0$ dır.

Bu teoremin ispatı aşağıdaki lemmaya dayanmaktadır.

Lemma. Teoremdeki şartları sağlıyan bir $f(z)$ analitik fonksiyonu verilmiş olsun. z-düzlemini eksenlere paralel doğrularla karelere bölelim. Bu şebeke C nin içini E_i, $i = 1,2,3,\ldots,m$ karelerine ve D_j, $j = 1,2,3,\ldots,n$ bölgelerine ayırır. D_j nın sınırının bir kısmı C nin sınırına aittir. Karelerin köşegenlerinin uzunluğu $\delta > 0$ olsun. Diyorum ki $\varepsilon > 0$ verildiğine göre bir $\delta > 0$ bulunabilir öyleki herbir E_i veya D_j de bir $z_0 = z_0^{i,j}$ noktası vardır öyleki E_i veya D_j nin bütün z noktaları için

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \qquad (4.6.1.1)$$

İspat. Bu lemmayı Cantor iç içe kareler usülü ile ispat edeceğiz. Bir kare şebekesi verilmiş olsun. Kare köşegenlerinin uzunluğunu δ_1 ile gösterelim. $\varepsilon > 0$ verildiğine göre δ_1 için (4.6.1.1) in sağlandığı kareleri veya bölgeleri olduğu gibi bırakarak diğerlerini yarılamak usulü ile daha küçük karelere ayıralım. Bunların köşegenleri δ_2 olsun. δ_2 için (4.6.1.1) in sağlandığı kareleri veya bölgeleri olduğu gibi bırakarak diğerleri için yarılama usulüne devam edelim. Operasyon sonlu ise

$$0 < \delta_r < \delta_{r-1} < \ldots < \delta_2 < \delta_1$$

dizisi elde edilir ve burada $\delta_r > 0$ istenilen sayıdır. Operasyon sonsuz ise farzedebiliriz ki bu operasyona sonsuz olarak bir $\overline{R}_1$ karesi (veya bölgesi) için devam ediliyor. Birinci yarılamada $\overline{R}_2 \subset \overline{R}_1$ yi elde ederiz öyleki $\overline{R}_2$ aynı hassayı haizdir. Neticede $\overline{R}_1 \supset \overline{R}_2 \supset \overline{R}_3 \supset \ldots \supset \overline{R}_n \supset \ldots$ elde edilir öyleki herbiri için (4.6.1.1) mümkün değildir. Fakat biliyoruz ki $\overline{R}_n$ lerin birtek z_0 ortak noktası vardır öyleki z_0 C nin içinde veya üzerindedir ve $\delta_n \to 0$. Halbuki $f(z)$ z_0 da analitik olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğine göre bir $\delta_{z_0} > 0$ bulunabilir öyleki $0 < | z - z_0 | < \delta_{z_0}$ için (4.6.1.1) doğrudur. Diğer taraftan n yeter derecede büyük seçilirse R_n, δ_{z_0} yarıçaplı dairenin içine alınabilir. Fakat R_n ler için (4.6.1.1) doğru değildir. Bu tezat lemmayı ispatlar.

Not. Gerçekte, $f(z)$ nin *üniform diferansiyellenebilir* olduğunu gösterdik.

Teorem 4.6.1.1 in ispatı: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun, lemmadan dolayı bir kare şebekesi bulunabilir öyleki δ karelerin köşegeni ise her E_i karesinde veya D_j bölgesinde bir z_0 noktası vardır öyleki (4.6.1.1) herbir E_i veya D_j de doğrudur. Halbuki açık olarak

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{E'_i} f(z)dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{D'_j} f(z)\, dz$$

burada E'_i, D'_j ler E_i, D_j lerin çevrelerini gösterir. İntegraller ise daima pozitif yöne doğru alınmıştır. (4.6.1.1) den dolayı

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0) + \nu(z)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$| \nu(z) | < \varepsilon \, | z - z_0 |$$

dır. Binaenaleyh

$$\int_{E'_i} f(z)\, dz = \int_{E'_i} [f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)]\, dz + \int_{E'_i} \nu(z)\, dz$$

§ 4.4.1. misal (i) ve (ii) den dolayı sağ taraftaki birinci integral sıfırdır. (4.5.1.1) kompleks integral eşitsizliğinden dolayı

$$\left| \int_{E'_i} \nu(z)\, dz \right| < \varepsilon\delta . \frac{4\delta}{\sqrt{2}}$$

D_j bölgesi için

$$\left| \int_{E'_j} \nu(z)\, dz \right| < \varepsilon\delta . \left(\frac{4\delta}{\sqrt{2}} + s_j \right)$$

Burada s_j, D_j nin C ye ait sınırının uzunluğudur, öyleki D_j nin çevresinin uzunluğu $\leq \frac{4\delta}{\sqrt{2}} + s_j$

Binaenaleyh

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| < 4\sqrt{2} . \varepsilon \left(m \frac{\delta^2}{2} + n \frac{\delta^2}{2} \right) + \varepsilon \delta L = \varepsilon(4\sqrt{2}\, S + L)$$

Burada S, C yi tam ihtiva eden karelerin toplam sahasıdır, L ise C nin uzunluğudur. Sol taraf ε a tâbi olmadığından

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

Not. Dikkat edilecek olursa bu ispatta $f'(z)$ sürekli farzedilmemiştir.[1]

4.6.2. **Cauchy Teoreminin Tefsirleri.**

1. z_0, z_1 iki nokta olsun. z_0 ı z_1 e birleştiren ve bu istikamette yöneltilmiş bir eğriyi C ve diğer bir eğriyi de C′ ile gösterelim. Farzedelim ki $C + C'^{-}$ basit kapalı bir çevredir. $f(z)$, $C + C'^{-}$ nin içinde ve üzerinde analilik ise Cauchy teoreminden dolayı

$$\int_{C+C'^{-}} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_C + \int_{C'^{-}} = 0 \Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)\, dz.$$

2. C, basit kapalı bir çevre olsun C′, C nin içinde diğer bir basit kapalı çevre ise ve $f(z)$ C ile C′ nün belirttiği bölgede ve bu eğrilerin üzerinde tekdeğerli ve analitik ise

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C'} f(z)\, dz$$

3. C nin içinde birden fazla C′, C″, . . ., $C^{(n)}$ basit kapalı çevreler varsa öyle ki C′, C″, . . ., $C^{(n)}$ ayrık çevrelerdir, bu taktirde, $f(z)$ C lerin arasındaki bölgede ve C lerin üzerinde tek değerli ve analitik ise

$$\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz + \int_{C''} f(z)dz + \ldots + \int_{C^{(n)}} f(z)dz.$$

Not. Cauchy Teoremi genelleştirilebilir. Hakikatte $f(z)$ nin C nin içinde analitik ve C nin üzerinde sürekli olması kâfidir. Filhakika C′, C nin içinde bir basit kapalı çevre ise öyle ki lim C′ = C dir, gösterilebilir ki (İspatı kolay değildir, fakat Cauchy teoreminin genel şeklini hiçbir yerde kullanmıyacağımız dan bu ispatın üzerinde durmuyoruz)

$$\int_C f(z)\, dz = \lim \int_{C'} f(z)dz$$

(1) Bu ispat Goursat'nındır. Aynı ispat tarzını kullanarak Denjoy bu teoremi genelleştirmiştir. Denjoy; Le théorème de Cauchy-Goursat, C.R. 240, sahife 386–389 ve 473–476 (1955).

Halbuki C′ nün bütün vaziyetleri için $\int_{C'} f(z)dz = 0$ dır. Binaenaleyh

$$\int_C f(z)dz = 0$$

dır.

4.6.3 **Cauchy İntegrali Formülü.**

Teorem 4.6.3.1. Farzedelim ki $f(z)$ bir basit kapalı C çevresinin içinde ve üzerinde analitiktir. a, C nin içinde herhangibir nokta olsun. Bu takdirde

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

İspat. Aşağıdaki,

$$\frac{f(z)}{z-a} \qquad (4.6.3.1)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. γ, C nin içinde merkezi a da olan ρ yarıçaplı bir küçük çember olsun. (4.6.3.1) C ve γ nın belirttiği kapalı bölgede tekdeğerli ve analitiktir. Binaenaleyh Cauchy teoreminden dolayı

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

$f(z)$ sürekli olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğine göre ρ yu o şekilde seçebiliriz ki $z \varepsilon \gamma$ için

$$| f(z) - f(a) | < \varepsilon.$$

Şimdi,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z-a} + \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz$$

§ 4.5.1 Problem (i) den dolayı

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

ve

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz - 2\pi i f(a) \right| = \left| \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz \right|$$

Halbuki (4.5.1.1) den dolayı

$$\left| \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$$

ve

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz - 2\pi i f(a) \right| < 2\pi\varepsilon.$$

Sol taraf ε a tâbi olmadığından

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Bu formül gösteriyor ki C üzerinde $f(z)$ nin değerleri biliniyorsa derhal C nin içinde herhangibir noktada da değeri biliniyor.

4.6.4 **Türevler İçin Formül.**

Analitik fonksiyonların esas hassalarından biri de her mertebeden türevleri mevcut olmasıdır. Üstelik bu türevler Cauchy formülüne benzer formüllerle gösterilebilir.

Teorem 4.6.4.1. Farzedelim ki $f(z)$ bir basit kapalı çevrenin üzerinde ve içinde analitiktir. Bu takdirde C nin içinde herhangibir a noktasında

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)}\, dz.$$

İspat. γ, merkezi a da ρ yarı-çaplı küçük bir çember olsun, öyleki γ tamamiyle C nin içindedir.

$$\frac{f(z)}{(z-a)^2}$$

C ve γ nın üzerinde ve bunların belirttiği bölgede tekdeğerli ve analitiktir. Cauchy teoreminden dolayı

$$\int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^2} = \int_\gamma \frac{f(z)}{(a-a)^2}\, dz$$

Cauchy formülünden dolayı γ nın içinde herhangibir $a + h$ noktasında

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{z-a-h}$$

Şimdi,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{h} \int_\gamma \left[\frac{f(z)}{z-a-h} - \frac{f(z)}{z-a} \right] dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)\,(z-a-h)}\, dz$$

En son integralde, $h \to 0$ için integralin içindeki terimin limiti $\frac{f(z)}{(z-a)^2}$

dir. Fakat integral içinde limit alınabileceğini ayrıca göstermek lâzımdır. Filhakika

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)\,(z-a-h)}\,dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = h\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2\,(z-a-h)}\,.$$

Farzedelim ki γ nın üzerinde $|f(z)| \leq M$[1] ve $|h| < \frac{\rho}{2}$.

Binaenaleyh

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^2\,(z-a-h)}\right| \leq \frac{M}{\rho^2 \cdot \frac{\rho}{2}}\,2\,\pi\,\rho = \frac{4\,\pi\,M}{\rho^2}\,,$$

yani sınırlı, O halde

$$\lim_{|h|\to 0}\left|\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)\,(z-a-h)}\,dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right| = 0$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = f'(a)$$

Dolayısıyle

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\,.$$

İndüksiyon metodu ile genel olarak

$$f^{(n)}(a) = \frac{n\,!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

olduğu anlaşılır.

Not. $0\,! = 1$ ve $f^{(0)}(a) = f\,(a)$ olarak tarif edilir.

Problem. Cauchy birinci türev formülünü, Cauchy Teoreminin 2 nci tefsirini kullanmadan yani doğrudan doğruya Cauchy formlülüne dayanarak çıkarınız.

Teorem 4.6.4.2. $C : \xi = \xi\,(t)$, bir basit çevre ve $g(\xi)$, üzerinde tarifli ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f(z) = \int_C \frac{g(\xi)}{\xi - z}\,d\,\xi$$

C nin üzerinde olmıyan bütün noktalarda tarifli ve analitiktir.

(1) $|f(z)|$, γ nın üzerinde sürekli olduğundan orada sınırlıdır.

Üstelik

$$f'(z) = \int_C \frac{g(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^2}$$

İspat. C nin üzerinde olmıyan herhangibir z noktasına, yukardaki muhakeme tatbik edilecek olursa

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_C \frac{g(\xi)}{(\xi-z-h)\,(\xi-z)}\,d\xi = \int_C \frac{g(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^2}$$

Yani herbir z noktasında türev mevcuttur.

7. Morera Teoremi

4.7.1. *TARİF* 7. Bir G bölgesi *basit irtibatlı*dır, şayet C, bütün noktaları G ye ait herhangibir basit kapalı Jordan eğrisi ise C nin içi tamamiyle G ye ait ise.

Teorem 4.7.1.1. Bir G basit irtibatlı bölgede $w = f(z)$ bir analitik fonksiyon, z_0 bir sabit nokta ve z değişken bir nokta olsun. Farzedelim ki C, z_0 ı z ye birleştiren G de bir çevredir. Bu takdirde

$\int_C f(z)\,dz$ C ye tâbi olmayıp yalnız z ye tâbidir. Yani

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

Üstelik, $F(z)$ G de analitik, ve $F'(z) = f(z)$ dir.

İspat. Teoremin ilk kısmı, Cauchy Teoremi tefsir 1 in neticesidir. Diferansiyellenebilir olduğunu göstermek için z sabit olmak üzere yakın $z + h$ noktasını göz önüne alalım z yi $z + h$ ya G de bir doğru parçası ile birleştirelim. Bu takdirde

$$F(z+h) = \int_{z_0}^{z+h} f(\xi)\,d\xi = \int_C f(\xi)\,d\xi + \int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi = F(z) + \int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi.$$

Diğer taraftan

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} [f(\xi)-f(z)]\,d\xi$$

yi teşkil edelim.

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|h|}\cdot|h|\ \text{Max}\ |f\,(\xi) - f\,(z)\,|$$

Fakat $f(z)$ sürekli olduğundan sol taraf $h \to 0$ için sıfırdır. Yani

$$F'(z) = f(z).$$

Teorem (*Morera*) 4.7.1.2. Farzedelim ki $f(z)$ bir G basit irtibatlı bölgede süreklidir. C, G de herhangibir basit kapalı çevre olsun. Farzedelim ki $\int_C f(z)\,dz = 0$. Bu takdirde $f(z)$ G de analitiktir.

İspat. Hipotezden $\left(\int_C f(z)\,dz = 0\right)$ dolayı

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

z_0 ı z ye birleştiren çevreye tâbi değildir. Sonra $f(z)$ sürekli olduğundan teorem 4.7.1.1 in son kısmı gösteriyor ki $F'(z)$ mevcuttur ve $F'(z) = f(z)$ dir. Binaenaleyh $F(z)$ G de analitiktir ve dolayısıyle $f(z)$ G de analitiktir.

Teorem (*Liouville*) 4.7.1.3. $f(z)$ fonksiyonu bütün sonlu düzlemde analitik ve sınırlı[1] ise sabittir.

İspat. z_1, z_2 herhangi iki kompleks sayı olsun. Bu iki noktayı içine alan, merkezi başlangıç noktasında olan R yarıçaplı bir Γ çemberini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} f(z)dz$$

dir. $|f(z)| \leq M$ göz önünde tutulursa

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|\, M\, R}{(R - |z_1|)(R - |z_2|)}$$

dir. Şimdi $R \to \infty$ için (z_1, z_2 sabit tutuluyor) sağ taraf sıfıra yakınsaktır, binaenaleyh $f(z_1) = f(z_2)$. z_1, z_2 keyfi olduğundan $f(z)$ sabittir.

8. Analitik Fonksiyonlar Serisi

4.8.1. (i) **Yakınsaklık bölgesi.** Keyfi olarak verilen fonksiyonlardan müteşekkil

$$f_0(z), f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

(1) Yani $|z| \to \infty$ için $|f(z)|$ sınırlıdır.

gibi sonsuz bir diziyi göz önüne alalım. z, bütün bu fonksiyonların tarif bölgesine ait bir nokta olsun. Bu noktada

$$f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

serisi ya yakınsaktır ya değildir. Yakınsak olduğu nokta cümlesine serisinin *Yakınsaklık Bölgesi* denir.

Özel hal. $f_n(z) = a_n (z - z_0)^n$ vazederek

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (4.8.1.1)$$

serisinin yakınsaklık bölgesini tayin edeceğiz.

(ii) **Yakınsaklık Dairesi.** $z - z_0 = x$ vazedilirse (4.8.1.1) kuvvet serisi

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklini alır. Yani denebilir ki z_0 daima başlangıç noktasında alınıyor. Bu anlaşıldıktan sonra seriyi yine $\Sigma\, a_n z^n$ olarak göstereceğiz. $|z| = r$, $|a_n| = \alpha_n$ vazedelim ve aşağıdaki katsayıların dizisini göz önüne alalım.

$$\rho_0 = \alpha_0,\ \rho_1 = \alpha_1,\ \rho_2 = \sqrt{\alpha_2}, \ldots, \rho_n = \sqrt[n]{\alpha_n}, \ldots \qquad (4.8.1.2)$$

Üç hal varittir.

1. $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Binaenaleyh

$$\Sigma\, \alpha_n r^n \qquad (4.8.1.3)$$

pozitif serisi r nin bütün değerleri için yakınsaktır. Filhakika Cauchy kriterinden dolayı u_n, (4.8.1.3) serisinin genel terimi olduğuna göre r ne olursa olsun, $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{\alpha_n r^n} = \lim \rho_n r = 0$. Binaenaleyh, $\Sigma a_n z^n$ serisi z nin bütün sonlu reel veya kompleks değerleri için mutlak yakınsaktır. Bu takdirde

$$f(z) = \Sigma a_n z^n$$

fonksiyonuna *Tam Fonksiyon* denir.

2. $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$ ise $\Sigma a_n z^n$ serisi z nin sıfırdan farklı bütün değerleri için ıraksaktır. Zira genel terimin modülü, yani $\alpha_n r^n$ nin limiti sıfır değildir.

3. (4.8.1.2) dizisi üstten pozitif olarak sınırlıdır. Binaenaleyh ρ_n, n sonsuz için bir L, sonlu pozitif üst limitini haizdir. Yani $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük bir sayı olduğuna göre $n \to \infty$ için yani bir n_0 sayısından itibaren bütün n ler için daima $\rho_n < L + \varepsilon$ ve sonsuz sayıda n ler için $\rho_n > L - \varepsilon$

dur. $L = \frac{1}{R}$ vaz edelim. Diyorum ki $\Sigma\, u_n = \Sigma\, \alpha_n r^n$ pozitif serisi $r < R$ için yakınsaktır ve $r > R$ için ıraksaktır.

Filhakika, $r < R$ ise $r = \frac{1}{L + 2\,\varepsilon}$ vaz edebiliriz. Binaenaleyh

$$\sqrt[n]{u_n} = \rho_n\, r = \frac{\rho_n}{L + 2\,\varepsilon}$$

$n \to \infty$ için $\frac{\rho_n}{L + 2\,\varepsilon} < \frac{L + \varepsilon}{L + 2\,\varepsilon} < 1$. O halde Cauchy kriterinden dolayı $\Sigma\, u_n = \Sigma\, \alpha_n r^n$ serisi yakınsaktır. Diğer taraftan $r > R$ ise $r = \frac{1}{L - \varepsilon}$ vazedebiliriz. Binaenaleyh

$$\sqrt[n]{u_n} = \rho_n\, r = \frac{\rho_n}{L - \varepsilon} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1$$

Dolayısıyla $\lim u_n \neq 0$ dır. Yani seri ıraksaktır.

Binaenaleyh, $r < R$ ise $\Sigma\, a_n z^n$ serisi R yarı-çaplı dairenin içinde mutlak yakınsaktır, ve $r > R$ ise $\Sigma\, a_n\, z^n$ serisi R yarıçaplı dairerin dışında ıraksaktır.

TARİF 8. Merkezi başlangıç noktasında olan R yarı-çaplı daireye sözü geçen serinin *yakınsaklık dairesi* denir. $\Sigma a_n z^n$ serisi sözü geçen dairenin içinde mutlak yakınsaktır ve dışında ıraksaktır.

Çemberin üzerinde ise vaziyet şüphelidir. Bazı hallerde ve bazı noktalarda seri yakınsaktır, bazı hallerde de seri çember üzerinde ıraksaktır.

Yukardan da anlaşıldığı gibi $R = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{\alpha_n}} = \frac{1}{L}$ dir. Özel olarak $\sqrt[n]{\alpha_n}$ nin bir limiti varsa bu limit $\frac{1}{R}$ ye eşittir.

4.8.2. **Üniform yakınsaklık.** Aynen reel değişkenli reel fonksiyonlarda olduğu gibi tarif edilir.

TARİF 9. $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ serisi verilen bir G bölgesinde *üniform olarak* $f(z)$ limitine yakınsaktır denir şayet her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilirse ∋ bütün $p > n$ ve bütün $z \in G$ için

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{p} f_m(z) \right| < \varepsilon$$

Teorem 4.8.2.1. $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ üniform yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ e karşılık bir n bulunabilir ∋ $p,q > n$ $(q > p)$ ve bütün $z \in G$ ler için

$$\left| \sum_{m=p+1}^{q} f_m(z) \right| < \varepsilon$$

Teorem 4.8.2.2. Şayet $f_m(z)$ fonksiyonları verilen bir G bölgesinde sürekli iseler ve $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ serisi üniform olarak $f(z)$ ye yakınsak ise $f(z)$ süreklidir.

İspat. Üniform yakınsaklık tarifinden dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğine göre bir n bulunabilir öyleki bütün $z \in G$ ler için

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{n} f_m(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$z_0 \in G$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. Aynı $\varepsilon > 0$ e karşılık bir $\delta > 0$ bulunabilir öyleki bütün $|h| < \delta$ lar için

$$\left| \sum_{m=1}^{n} f_m(z_0 + h) - \sum_{m=1}^{n} f_m(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Bu takdirde

$$|f(z_0+h) - f(z_0)| \leq |f(z_0+h) - \sum_{m=1}^{n} f_m(z_0+h)| + \left| \sum_{m=1}^{n} f_m(z_0+h) - \sum_{m=1}^{n} f_m(z_0) \right| + \left| \sum_{m=1}^{n} f_m(z_0) - f(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aşağıdaki tarif pek çok ispatlarda faydalıdır.

TARİF 10. Bir $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ serisinin verilen bir G bölgesinde üniform yakınsak olması demek G nin herhangibir $\bar{D} \subset G$ sınırlı kapalı alt bölgesinde üniform yakınsak olması demektir.

Teorem (*Weierstrass M-Kriteri*) 4.8.2.3. $\sum_{m=1}^{\infty} M_m = M$ bir yakınsak pozitif sayı serisi olsun. Farzedelim ki G de $|f_m(z)| \leq M_m$, $m = 1,2,\ldots$, bu takdirde $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ serisi G de üniform yakınsaktır.

İspat. $\bar{D} \subset G$ sınırlı kapalı herhangibir bölge olsun. $z \varepsilon \bar{D}$ için

$$\left| \sum_{m=p+1}^{q} f_m(z) \right| \leq | f_{p+1}(z) | + | f_{p+2}(z) | + \ldots + | f_q(z) |$$
$$\leq M_{p+1} + M_{p+2} + \ldots + M_q$$

p yeter derecede büyük alınarak $\sum_{m=p+1}^{q} M_m$ istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Teorem (*Hardy*) 4.8.2.4. $\Sigma\, a_n(z) f_n(z)$ serisi bir sınırlı kapalı $\bar{D}$ bölgesinde üniform yakınsaktır, şayet aşağıdaki şartlar sağlanırsa.

(i) $s_n(z) = a_0(z) + a_1(z) + \ldots + a_n(z)$ kısmî toplamı $\bar{D}$ de üniform sınırlıdır.

(ii) $\Sigma(f_n(z) - f_{n+1}(z))$ serisi $\bar{D}$ de ünidorm ve mutlak yakınsaktır.

(iii) $f_n(z)$, $\bar{D}$ de üniform olarak sıfıra yakınsaktır.

İspat. $\Sigma a_n(z)\, f_n(z)$ serisinin kısmî toplamını

$$S_n(z) = a_0(z)\, f_0(z) + a_1(z)\, f_1(z) + \ldots + a_n(z)\, f_n(z)$$

ile gösterelim.

(i) den dolayı bütün $z \varepsilon \bar{D}$ ve n ler için $\exists K > 0$, K sabit, $\ni |s_n(z)| < K$. Şimdi $S_{n+p}(z) - S_n(z)$ farkını teşkil edelim

$$S_{n+p}(z) - S_n(z) = - s_n(z) f_{n+1}(z) + \sum_{m=n+1}^{n+p-1} s_m(z)(f_m(z) - f_{m+1}(z))$$
$$+ s_{n+p}(z)\, f_{n+p}(z).$$

Binaenaleyh bütün $z \varepsilon \bar{D}$ ve $p > 0$ tamlar için

$$| S_{n+p}(z) - S_n(z) | \leq K \left(| f_{n+1}(z) | + \sum_{n+1}^{n+p-1} \left| f_m(z) - f_{m+1}(z) \right| \right.$$
$$\left. + | f_{n+p}(z) | \right) < K \left(| f_{n+1}(z) | + | f_{n+p}(z) + \sum_{n+1}^{\infty} |f_m(z) - f_{m+1}(z)| \right)$$

(ii) den dolayı, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N_1(\varepsilon)$ tam sayısı bulunabilir öyle ki bütün $z \varepsilon \bar{D}$ ve $n > N_1$ için

$$\sum_{n+1}^{\infty} | f_m(z) - f_{m+1}(z) | < \frac{\varepsilon}{3K}$$

En son olarak (iii) den dolayı bir $N_2(\varepsilon)$ tam sayısı bulunabilir öyleki bütün $z \varepsilon \bar{D}$ ve $n > N_2$ için

$$| f_n(z) | < \frac{\varepsilon}{3K}$$

Şu halde $N = \text{Max}(N_1, N_2)$ ise, bütün $z \varepsilon \bar{D}$, $p > 0$ ve $n > N$ için

$$| S_{n+p}(z) - S_n(z) | < \varepsilon$$

Tatbikat. Riemann $\zeta(s)$ fonksiyonu

$$\zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} n^{-s}, \ \text{Re}\, s > 1, \ s = \sigma + it$$

serisi ile tarif edilir. Bölüm VI da gösteriliyor ki bu seri, $\sigma = 1$ hattının sağında bulunan her sınırlı kapalı $\bar{D}$ bölgesinde üniform ve mutlak yakınsaktır. Binaenaleyh $(1 - 2^{1-s})\, \zeta(s)$ serisi mutlak yakınsak olduğundan, terimlerin yerleri mevzuu bahis değildir ve dolayısiyle $\text{Re}\, s > 1$ için

$$(1 - 2^{1-s})\, \zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} n^{-s} (1 - 2^{1-s}) = \sum_{1}^{\infty} n^{-r} - 2 \sum_{1}^{\infty} (2n)^{-s}$$
$$= 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \ldots$$

yazılabilir. Bu son serinin $\sigma > 0$ yarı düzleminde bulunan herhangibir sınırlı kapalı bölgede üniform yakınsak olduğunu göstermek için teorem 4.8.2.4 ü tatbik edelim.

$$a_n(s) = (-1)^n, \ f_n(s) = (n+1)^{-s}$$

vaz edilirse görülür ki Σa_n serisinin kısmî toplamı münavebe ile 0, 1 dir. Şu halde (i) sağlanmıştır. (iii) şartı da sağlanmıştır.
Zira

$$| f_n(s) | = (n+1)^{-\sigma}.$$

(ii) şartına gelince

$$f_n(s) - f_{n+1}(s) = (n+1)^{-s} - (n+2)^{-s} = s \int_{n+1}^{n+2} t^{-\sigma-1}\, dt$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan

$$| f_n(s) - f_{n+1}(s) | \leq | s | \int_{n+1}^{n+2} |t^{-s-1}|\, dt = | s | \int_{n+1}^{n+2} t^{-\sigma-1}\, dt$$

Şimdi $\sigma > 0$ şartı $\Rightarrow \sigma \geq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Dolayısiyle

$$| f_n(s) - f_{n+1}(s) | \leq | s | \int_{n+1}^{n+2} t^{-\varepsilon-1}\, dt < | s | (n+1)^{-\varepsilon-1}$$

$| s |$, $\bar{D}$ de sınırlı olduğundan, Weierstrass M-kriterinden dolayı $\Sigma\, (f_n(s) - f_{n+1}(s))$ serisi $\bar{D}$ de üniform ve mutlak yakınsaktır.

Neticede göstermiş oluyoruz ki

$$\eta(s) = 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \ldots$$

serisi $\sigma > 0$ yarı düzleminde üniform yakınsaktır.

Teorem 4.8.2.5. Farzedelim ki $f_m(z)$ fonksiyonları verilen bir G bölgesinde sürekli ve $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ serisi $f(z)$ e üniform olarak yakınsaktır. C, G ye ait herhangibir çevre olduğuna göre

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{m=1}^{\infty} \int_C f_m(z)\, dz$$

İspat. $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $\exists\, n, \ni p > n$ için

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{p} f_m(z) \right| < \frac{\varepsilon}{l}$$

Burada l, C nin uzunluğudur. $f(z)$ ve $f_m(z)$ ler sürekli olduklarından integralleri mevcuttur. Binaenaleyh

$$\left| \int_C \left[f(z) - \sum_{m=1}^{p} f_m(z) \right] dz \right| = \left| \int_C f(z)\, dz - \sum_{m=1}^{p} \int_C f_m(z)\, dz \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon$$

Bu ise teoremi ispatlar.

Yani $\Sigma f_m(z)$ teoremdeki şartları sağlıyorsa terim terime integrallenebilir. Yani Σ ile $\int$ yer değiştirebilir.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_C f_m(z)\, dz = \int_C \sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)\, dz.$$

Teorem 4.8.2.5. $f_m(z)$ fonksiyonları *basit irtibatlı* bir G bölgesinde analitik olsunlar. Farzedelim ki $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ serisi G de $f(z)$ fonksiyonuna üniform yakınsaktır. Bu takdirde

(i) $f(z)$ G de analitiktir.

(ii) $\sum_{m=1}^{\infty} f'_m(z)$ serisi G de $f'(z)$ e üniform yakınsaktır.

İspat. G nin içinde basit kapalı bir C çevresini ele alalım. Bu takdirde

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{m=1}^{\infty} \int_C f_m(z)\, dz = 0$$

dır. $f(z)$ sürekli olduğundan Morera teoreminden dolayı $f(z)$ G de analitiktir.

z, G de sabit bir nokta olsun. C, G de z yi içine alan herhangibir basit kapalı çevre olduğuna göre, her $s > 0$ tam sayısı için

$$f^{(s)}(z) = \frac{s\,!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{s+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s\,!}{2\pi i} \int_C \frac{f_m(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{s+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(s)}(z)$$

En son göstermeliyiz ki $f^{(s)}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(s)}(z)$ G de üniform yakınsaktır.

$\bar{D} \subset$ G herhangi bir sınırlı kapalı bölge olsun.

C, G nin içinde ve $\bar{D}$ yi ihtiva eden bir basit kapalı çevre olduğuna göre herhangi bir $z \varepsilon \bar{D}$ için

$$\left| \sum_{m=p+1}^{q} f_m^{(s)}(z) \right| = \left| \frac{s\,!}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{m=p+1}^{q} f_m(\xi)}{(\xi - z)^{s+1}}\, d\xi \right| \leq \frac{s\,!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho^{s+1}} \cdot l.$$

Burada ρ, C nin $\bar{D}$ ye olan mesafesidir (minimum). Bu ise teoremi ispatlar.

Not. Bu teorem Fonksiyonlar Teoresinde çok önemlidir ve Weierstrass a aittir.

4.8.3. **Kuvvet serisi.** Fonksiyonlar teorisinde en mühim seri kuvvet serisidir. Evvelce de işaret ettiğimiz gibi bu seri, $f_m(z) = a_m z^m$ vaz ederek elde edilir, ve aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Bütün kuvvet serileri $z = 0$ için yakınsaktır. Bizi alâkadar edecek seriler $z = 0$ dan farklı en az bir noktada yakınsak olan serilerdir. *(Abel).*

Teorem 4.8.3.1. Şayet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisi $z_0 \neq 0$ noktasında yakınsak ise bu takdirde $|z| \leq R < |z_0|$ eşitsizliğini sağlıyan bütün z ler için üniform yakınsaktır. Şayet seri z_0 da ıraksak ise bu takdirde $|z| > |z_0|$ eşitsizliğini sağlıyan bütün z ler için ıraksaktır.

İspat. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ yakınsak olduğundan $\exists\, M > 0 \ni |a_n z_0^n| < M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Şimdi aşağıdaki toplamı teşkil edelim:

$$\sum_{n=p}^{q} |a_n| R^n = \sum_{n=p}^{q} |a_n| \cdot |z_0^n| \cdot \left| \frac{R}{z_0} \right|^n < \sum_{n=p}^{q} M \left| \frac{R}{z_0} \right|^n$$

$\left| \frac{R}{z_0} \right| < 1$ için sağ taraftaki geometrik seri yakınsaktır. Binaenaleyh p yeter derecede büyük seçilirse sağ taraftaki toplam istenildiği kadar küçük

yapılabilir. O halde sol taraftaki pozitif seri yakınsaktır. Weierstrass M-Kriterinden dolayı $\Sigma a_n z^n$, $|z| \leq R$ için üniform yakınsaktır.

$\Sigma a_n z^n{}_0$ ıraksak ise $|z| > |z_0|$ için $\Sigma a_n z^n$ yakınsak olamaz. Aksi halde teoremin birinci kısmından dolayı z_0 da yakınsak olurdu.

Teorem (Cauchy Eşitsizliği) 4.8.3.2. Farzedelim ki $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z + \ldots$ R yarı-çaplı çemberin içinde yakınsaktır. $r < R$ farzedelim. M, $|f(z)|$ nin $|z| = r$ üzerinde üst sınırı olduğuna göre

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

İspat. $|z| = r$ çemberini Γ ile gösterelim.

$$f(0) = a_0,\ f'(0) = a_1, \ldots, f^{(n)}(0) = n!\, a_n, \ldots$$

göz önünde tutulur ve Cauchy formülü tatbik edilirse

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

dir. Binaenaleyh

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

Weiersrass teoreminden dolayı yakınsaklık dairesinde her kuvvet serisi bir analitik fonksiyondur. Bu takdirde diyoruz ki kuvvet serisi ona eşit olan analitik fonksiyonu tarif ediyor. Diğer taraftan göstereceğiz ki farklı iki kuvvet serisi aynı analitik fonksiyonu tarif edemez.

Teorem 4.8.3.3. Farzedelim ki $\Sigma a_n z^n$ ve $\Sigma b_n z^n$ yakınsak kuvvet serileri, sıfıra yakınsak olan $z_1, z_2, \ldots$ noktalarında eşittir. Bu takdirde $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

İspat. $f(z) = \Sigma a_n z^n$, $g(z) = \Sigma b_n z^n$ vazedelim. $f(z)$, $g(z)$ sürekli ve $f(z_i) = g(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, olduğundan $f(0) = g(0)$. Yani $a_1 = b_1$. Teoremi indüksiyon ile ispat edeceğiz. Farzedelim ki $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_{r-1} = b_{r-1}$ dir. Göstermek istiyoruz ki $a_r = b_r$.

$$\frac{f(z) - (a_0 + a_1 z + \ldots + a_{r-1} r^{r-1})}{z^r} = a_r + a_{r+1} z + a_{r+2} z^2 + \ldots$$

$$\frac{g(z) - (a_0 + a_1 z + \ldots a_{r-1} z^{r-1})}{z^r} = b_r + b_{r+1} z + b_{r+2} z^2 + \ldots$$

vaz edelim.

Sol taraftaki ifadeler $z_1, z_2, \ldots$ noktalarında eşit olduklarından sağ taraftaki seriler de bu noktalarda eşittirler. Süreklilikten dolayı $z = 0$ da da eşittirler. Yani $a_r = b_r$.

4.8.4. Analitik Fonksiyonların Kuvvet Serilerine Açılımı.

Teorem 4.8.4.1. Farzedelim ki $f(z)$ G de analitiktir. z_0, G de bir nokta olsun. Bu takdirde z_0 ın bir civarında $f(z)$ e yakınsak bir kuvvet serisi mevcuttur. Yani

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

Üstelik $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ ve serinin yakınsaklık yarı-çapı, z_0 noktasının $f(z)$ nin analitik olmadığı en yakın noktaya olan uzaklığıdır.

İspat. Merkezi z_0 da ve içi tamamıyla G ye ait olan en büyük dairenin yarı-çapına r diyelim. Bu dairenin içinde z keyfi bir nokta olsun. $|z - z_0| = s < r$ çemberini çizelim. Şimdi t, $s < t < r$ eşitsizliğini sağlıyan herhangi bir sayı olsun. $\Gamma : |\zeta - z_0| = t$ çemberini de çizelim. Bu takdirde $\zeta \in \Gamma$ için

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

serisi yakınsaktır. Zira $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{s}{t} < 1$ dir, ve hatta Weierstrass M-Kriterinden dolayı Γ üzerinde ζ ya nazaran üniform yakınsaktır. Binaenaleyh $|f(\zeta)|$ Γ üzerinde sınırlı olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

serisi de Γ üzerinde üniform yakınsaktır. O halde Γ üzerinde pozitif yöne doğru terim terime integral alınabilir. Yani

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \ldots$$

TARİF 11. $f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$ serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 daki *Taylor açılımı* denir. Bu açılımı veren teoreme de Taylor teoremi denir.

Hülâsa : (i) Her yakınsak kuvvet serisi bir analitik fonksiyon tarif eder.

(ii) Farklı kuvvet serileri farklı analitik fonksiyonlar tarif ederler.

(iii) Her analitik fonksiyon bir kuvvet serisi ile tarif edilebilir.

TARİF 12. Şayet $f(z)$ bir z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına *singüler* nokta denir. Aksi halde z_0 $f(z)$ için bir *regüler* noktadır.

Teorem 4.8.4.2. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık

yarıçapı r ise $f(z)$ nin $|z-z_0| = r$ çemberi üzerinde en az bir singüler noktası vardır.

İspat. Aksi halde $f(z)$ r-çemberinin her noktasında analitiktir ve dolayısiyle bu noktaların birer ε – civarında analitiktir. Taylor teoreminden dolayı $f(z)$, merkezi z_0 da ve yarı-çapı $r_1 > r$ olan bir dairede yakınsaktır. Bu ise yakınsaklık yarı-çapının tarifine aykırıdır.

4.8.5. **Taylor Teoreminin Neticeleri.**

Teorem 4.8.5.1. $f(z)$ ve $g(z)$ bir G bölgesinde analitik iki fonksiyon olsun. Farzedelim ki $f(z)$ ve $g(z)$ limit noktası $z_0 \varepsilon G$ olan bir nokta koleksiyonunda(1) eşittir. Bu takdirde G nin her noktasında $f(z) = g(z)$ dir.

İspat. $z \varepsilon G$, z_0 dan farklı herhangibir nokta olsun. z_0 ı z ye, tamamiyle G ye ait bir Jordan eğrisi ile meselâ bir basit poligon ile birleştirelim, z_i, $i = 0,1,2, \ldots, (z_n = z)$, merkezi bu eğri üzerinde olan G ye ait en büyük dair yi düşünelim. Bu z_i leri o şekilde seçelim ki z_i, merkezi z_{i-1} de olan dairenin içinde olsun. $f(z)$ ve $g(z)$ limiti z_0 olan bir nokta koleksiyonunda eşit olduklarından bu noktadaki açılımları aynıdır (teorem 4.8.3.3). Taylor teoreminden dolayı merkezi z_0 da olan sözü geçen dairenin içinde $f(z) = g(z)$. Binaenaleyh $f(z)$ ve $g(z)$, özel olarak, limiti z_1 olan bir nokta koleksiyonunda eşittir. Aynı muhakemeden dolayı $f(z)$ ve $g(z)$ merkezi z_1 de olan en büyük dairede eşittirler. v.s. z keyfi olduğundan teorem ispatlanmıştır.

TARİF 13. $f(z) = a$ denklemini sağlıyan z köklerine *a-yerleri* denir.

Teorem 4.8.5.2. $f(z)$ G de analitik, a bir kompleks sayı ve $\bar{D} \subset G$ kapalı sınırlı bir bölge olsun. Bu takdirde $f(z) = a$ denklemini sağlıyan $\bar{D}$ bölgesindeki a-yerlerinin sayısı ya sonludur, veyahut $f(z) \equiv a$ dır.

İspat. Farzedelim ki sözü geçen nokta cümlesi sonsuzdur. Bu takdirde en az bir z_0 yığılma noktası vardır öyleki $z_0 \varepsilon \bar{D}$. Binaenaleyh $z_0 \varepsilon G$ dir. Fakat bu takdirde Teorem 4.8.5.1. den dolayı bütün G de $f(z) \equiv a$ dır.

Netice. $f(z)$ sabit olmayıp bir z_0 noktasında analitik ise, merkezi z_0 da olan bir daire bulunabilir öyleki bu dairenin z_0 dan farklı bütün noktaları için $f(z) \neq f(z_0)$ dır.

İspat. $f(z)$ in z_0 da analitik olması demek z_0 noktasını ihtiva eden bir G bölgesinde analitik olması demektir. Şu halde $f(z)$ sabit olmadığına göre teorem 4.8.5.2 den dolayı, merkezi z_0 da G ye ait kapalı bir dairenin yalnız sonlu sayıda noktalarında $f(z) = f(z_0)$ dır. Binaenaleyh merkezi z_0 da olan, bu dairenin içinde bir daire bulunabilir öyleki bu dairenin z_0 dan farklı diğer

(1) Nokta koleksiyonu diye lâlettayin bir nokta cümlesine denir: yay parçası, bölge, sayılabilir sonsuzlukta nokta cümlesi, v.s.

bütün noktalarında $f(z) \neq f(z_0)$ dır. Yani sabit olmıyan bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun a-yerleri (veya özel olarak sıfır yerleri) *ayrık* noktalardır.

Teorem 4.8.5.3. Farzedelim ki sabit olmıyan bir $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitiktir. Üstelik farzedelim ki z_0 $f(z)$ in bir 0-yeridir, yani $f(z_0) = 0$. Bu takdirde $\exists\, n > 0$ tam sayısı ve $\exists g(z)$, z_0 da analitik, ∋

$$f(z) = (z-z_0)^n\, g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

İspat. $f(z)$ in z_0 daki Taylor açılımını yazalım

$$f(z) = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \ldots$$

Burada $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ dır ($f(z)$ sabit olmadığı için en az bir a_n kat sayısı sıfırdan farklıdır). Diğer taraftan

$$f(z) = (z-z_0)^n\,(a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \ldots)$$

şeklinde yazılırsa parantezdeki seri $f(z)$ in yakınsaklık dairesinde yakınsaktır ve dolayısiyle $a_n \neq 0$ olduğundan z_0 da bir $g(z)$ analitik fonksiyonunu tarif eder öyleki $g(z_0) \neq 0$.

TARİF 14. $n > 0$ sayısına 0– yerinin *mertebesi* denir.

Not. Bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun 0-*yerleri* yerine *sıfır* ları veya *kökleri* tabiri de kullanılır.

4.8.6. **Laurent Serisi.** Kompleks düzlemde bir z_0 noktasını göz önüne alalım. Γ_1 ve Γ_2, merkezi z_0 da olan iki çember olsun. Yarı çaplarını R_1 ve R_2 ile gösterelim. Farzedelim ki $R_1 > R_2$. Γ_1 ile Γ_2 nin belirttiği bölgeye $\bar{D}$ diyelim, tarif olarak kapalı $\bar{D}$ bölgesine *halka* diyeceğiz.

Teorem 4.8.6.1. Farzedelim ki bir $f(z)$ fonksiyonu $\bar{D}$ de tarifli (binaenaleyh tekdeğerli) ve analitiktir. Bu takdirde $f(z)$, $\bar{D}$ de yakınsak $(z-z_0)$ ın pozitif ve negatif kuvvetlerine göre bir seriye açılabilir.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

İspat. D de bir z noktası alalım. Halkayı, z_0 dan geçen fakat z den geçmiyen bir doğru boyunca keselim. Bu kesitin kenarlarını $a_2\, a_1$, $a'_2\, a'_1$ ile gösterelim. Neticede pozitif yönlü $a_1\, a'_1\, a'_2\, a_2\, a_1$ çevresi elde edilir. Bu çevrenin belirttiği bölge basit irtibatlıdır ve dolayısiyle Cauchy formülü

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^+} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a'_1 a'_2} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^-} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a_2 a_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $f(z)$ D de tekdeğerli olduğu için doğru

üzerinde alınan integraller birbirini götürürler. Binaenaleyh

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^-} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

$\xi \varepsilon \Gamma_1$, $\zeta \varepsilon \Gamma_2^-$. Burada Γ_2^- negatif yönlüdür. Son olarak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

dir.

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

Bu seri Γ_1 üzerinde mutlak ve üniform olarak yakınsaktır. Binaenaleyh

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Burada

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Şimdi Γ_2 ye gelelim.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Bu seri Γ_2 üzerinde üniform yakınsaktır. Binaenaleyh

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^n\,d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Burada

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^n\,d\zeta. \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Şayet

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}, \quad n = 1, 2,\ldots$$

vazedilirse

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Not. Laurent serisine göre

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) .$$

Burada

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} .$$

Birinci seri D de yakınsak olduğundan, teorem 4.8.3.1 den dolayı Γ_1 in içinde yakınsaktır. Aynı şekilde $a_{-n} = c_n$, $(z - z_0)^{-n} = z'^n$ vaz edilirse, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ D de yani $R_2 < |z - z_0| < R_1$ de yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z'^n$ $\frac{1}{R_1} < |z'| < \frac{1}{R_2}$ de yakınsaktır. Yani $|z'| < \frac{1}{R_2}$ dairesinde yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ R_2 nin dışında yakınsaktır.

Not. Hatırlatalım ki bir z_0 noktasının civarında analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu z_0 da Laurent serisine açılabilmesi için $f(z)$ bu civarda aynı zamanda tek değerli olmalıdır. Bu bakımdan $\log z$, merkezi $z = 0$ da olan bir halkada Laurent serisine açılamaz.

Problem. Bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun Laurent açılımı mevcut ise birtek olduğunu gösteriniz.

TARİF 15. $f(z)$ nin *yakınsaklık halkası* diye $f(z)$ nin analitik olduğu maksimum D bölgesine denir. Binanaleyh maksimum D bölgesini çevreleyen herbir çemberin üzerinde $f(z)$ nin en az bir singüler noktası vardır.

4.8.7. **Ayrık Singüler Noktalar.** *TARİF* 16. Farzedelim ki bir $f(z)$ fonksiyonu z_0 ın bir civarında, z_0 noktası hariç, tekdeğerli analitiktir. Bu takdirde z_0 noktasına $f(z)$ nin *ayrık singüler noktası* denir.

Farzedelim ki $f(z)$, z_0 ın bir civarında, z_0 hariç, tarifli (tek değerli) ve analitiktir. Üç hal varittir:

(i)Bütün a_{-n} kat sayıları sıfırdır. Bu takdirde $f(z)$, $z=z_0$ hariç, $|z-z_0| < R_1$ de analitik bir $f_1(z)$ fonksiyonuna eşittir. Bu takdirde $z = z_0$ noktasına *kaldırılabilir*[1] singüler nokta denir. Aşağıdaki teorem bu gibi noktaları karakterize eder.

Teorem (*Riemann*) 4.8.7.1. $f(z)$, z_0 ın civarında, z_0 hariç, tek değerli ve analitik olsun. Farzedelim ki $f(z)$, z_0 ın civarında sınırlıdır. Bu takdirde z_0, kaldırılabilir bir singüler noktadır.

İspat. z, merkezi z_0 da olan Γ_1, Γ_2 çemberlerinin belirttiği D bölgesinde bir nokta olsun. O halde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

z nin Γ_2 ye olan uzaklığını d ile gösterelim. $|f(z)| \leq M$ olduğuna göre

$$\lim_{R_2\to 0}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \leq \lim_{R_2\to 0}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{d}\cdot 2\pi R_2 = 0.$$

Böylece bütün $z \neq z_0$ lar için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

Γ_1 in içindeki bütün z ler için

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

yazarsak, $f_1(z)$ Γ_1 in içinde analitiktir ve z_0 noktası hariç Γ_1 in içinde diğer bütün noktalarda $f(z) = f_1(z)$. Bu ise teoremi ispatlar.

(ii) Negatif kuvvetlerin serisi yalnız sonlu sayıda terimler ihtiva eder. Yani,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} a_{-n}(z-z_0)^{-n},\quad a_{-m} \neq 0$$

Bu takdirde $z = z_0$ a $f(z)$ nin *kutup noktası* denir. $m > 0$ tam sayısına da kutup noktasının *mertebesi* denir.

Şayet $f(z)$ nin m inci mertebeden bir kutup noktası varsa $(z-z_0)^m f(z)$

(1) Yani hakiki bir singüler nokta değildir. Sadece $f(z)$, o noktada tarif edilmiş değildir.

$|z - z_0| < R_1$ de analitiktir ve $z = z_0$ da sıfır değildir $(a_m \neq 0)$. O halde

$$\Phi(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m f(z)}$$

$z = z_0$ da analitiktir ve sıfır değildir. Dolayısıyla $z = z_0$, $\dfrac{1}{f(z)}$ nin m inci mertebeden bir sıfır yeridir, çünkü $\dfrac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m\Phi(z)$, $\Phi(z_0) \neq 0$.

Netice: Kutup yerleri aynen sıfır yerleri gibi *ayrık* noktalardır.

Karşıt olarak aynı muhakeme gösteriyor ki $f(z)$ in m inci mertebeden bir sıfırı $1/f(z)$ nin m inci mertebeden bir kutubudur.

TARİF 17. Laurent serisindeki negatif kuvvetlerin serisine $f(z)$ nin $z = z_0$ noktasındaki *esas kısmı* denir.

Aşağıdaki teorem kutup yerlerini karakterize eder.

Teorem 4.8.7.2. Şayet $z = z_0$ $f(z)$ için bir kutup yeri ise $z \to z_0$ için $|f(z)| \to \infty$

İspat.

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_{-n}(z-z_0)^{-n}\right| = \left|z - z_0\right|^{-m}\left|\sum_{n=1}^{m} a_{-n}(z-z_0)^{m-n}\right|$$

$$\geq \left|z - z_0\right|^{-m}\left|\,|a_{-m}| - \sum_{n=1}^{m-1}|a_{-n}|\,|z-z_0|^{m-n}\right|.$$

Şimdi $z \to z_0$ için ikinci faktör $|a_{-m}|$ ye yakınsaktır, o halde $\left|\sum_{n=1}^{m} a_{-n}(z-z_0)^{-n}\right| \to \infty$. Bu ise teoremi ispatlar.

(iii) $f(z)$ nin $(z - z_0)$ ın kuvvetlerine göre Laurent açılımında negatif kuvvetlerin serisi sonsuzdur. Yani

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{4.8.7.1}$$

dir. Bu takdirde $z = z_0$ noktası $f(z)$ için bir *ayrık esas singüler* noktadır.

Aşağıdaki teorem ayrık esas singüler noktaları karakterize eder.

Teorem (*Weierstrass*) 4.8.7.3. Farzedelim ki $z = z_0$ noktası $f(z)$ için bir ayrık esas singüler noktadır. $\varepsilon > 0$ ve bir a kompleks sayısı verilmiş olsun. Bu takdirde $\exists\, z$, $|z - z_0| < \varepsilon$, $\ni |f(z) - a| < \varepsilon$.

İspat. Aksini kabul ederek farzedelim ki bir a kompleks sayısı ve $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki bütün z, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, ler için $|f(z) - a| \geq \varepsilon$.

z_0 noktası civarında, z_0 hariç, $\dfrac{1}{f(z) - a}$ tekdeğerli, analitik ve sınırlıdır. Binaenaleyh z_0, kaldırılabilir bir singüler noktadır, Dolayısıyle bu noktanın civarında Laurent açılımı Taylor açılımından ibarettir. Yani

$$\frac{1}{f(z) - a} = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \ldots = (z - z_0)^m h(z),$$

$$a_m \neq 0,\ m \geq 0,\ h(z_0) \neq 0$$

O halde

$$f(z) - a = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} [b_0 + b_1 (z - z_0) + b_2 (z - z_0)^2 + \ldots],\ b_0 \neq 0,$$

veya

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},\ c_{-m} = b_0 \neq 0.$$

Bu ise (4.8.7.1) tipinde değildir.

Problem. (i) $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$ nin kutup noktalarını bulunuz.

(ii) Bu kutup noktalarının mertebesi nedir?

4.8.8. **Sonsuz noktası.** $z' = \dfrac{1}{z}$ transformasyonunda $z = 0$ noktasına tekabül eden noktaya sonsuz noktası denir ve ∞ ile gösterilir. Hatırlatalım ki sonlu kompleks düzlem bu birtek ∞ noktasının ithali ile kapalı kompleks düzlem olur. Bu kapalı kompleks düzleme *Riemann küresi* denir. Bazen de *genişletilmiş* düzlem denir. Binaenaleyh bir $f(z)$ fonksiyonunun sonsuzdaki durumu $f\left(\dfrac{1}{z'}\right)$ fonksiyonunun $z' = 0$ daki durumuna bağlıdır. $f(z)$ fonksiyonu ∞ noktasında analitiktir denir veya ∞ noktası $f(z)$ için bir kutup noktasıdır denir. v.s., şayet $z' = 0$ noktası $f\left(\dfrac{1}{z'}\right)$ için aynı vasıfları haiz ise.

Misal. $f(z) = z^2$ için $z = \infty$ ikinci mertebeden bir kutup noktasıdır. Çünkü $z = \dfrac{1}{z'}$ vaz edilirse $f\left(\dfrac{1}{z'}\right)$ için $z' = 0$ noktası ikinci mertebeden bir kutup noktasıdır.

Teorem 4.8.8.1 Genişletilmiş düzlemde analitik bir $f(z)$ fonksiyonu sabittir.

İspat. $f(z)$, sonlu düzlemde analitik olduğundan Laurent açılımı,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Taylor açılımından ibarettir.

$z = \dfrac{1}{z'}$ vaz edelim.

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z'^n}$$

dir. $f\left(\dfrac{1}{z'}\right)$, $z' = 0$ da analitik olduğundan $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ yani $f(z) = a_0$.

Teorem 4.8.8.2. Genişletilmiş düzlemde, kutuptan başka singüler noktası olmıyan bir fonksiyon rasyonel[1] bir fonksiyondur.

İspat. Bir kere kutup yerlerinin sayısı sonludur. Aksi halde sonlu veya sonsuzda bir yığılma noktası vardır. Bu yığılma noktasında fonksiyon analitik olamaz. Diğer taraftan bu yığılma noktası kutup noktası değildir.

Bu takdirde $f(z)$ fonksiyonunun sonlu kutup noktalarını $a, b, \ldots k$, ve mertebelerini $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ ile gösterirsek

$$g(z) = f(z)\ (z - a)^{\alpha}\ (z - b)^{\beta} \ldots (z - k)^{\varkappa}$$

sonlu düzlemde analitiktir. Binaenaleyh

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ve

$$g\left(\frac{1}{z'}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z'^n}.$$

$z' = 0$ noktası en fazla bir kutup noktası olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{z'^n}$ serisindeki terimlerin sayısı sonludur. Yani $g(z)$ bir polinomdur. Binaenaleyh, $f(z)$ iki polinomun bölümü olduğundan rasyoneldir.

Karşıt olarak bir rasyonel fonksiyonun kutuptan başka singüler noktası yoktur.

(1) İki polinomun bölümüne *rasyonel fonksiyon* denir.

9. İntegral yardımı ile Analitik Fonksiyonların tarifi.

4.9.1. **Birtek parametreye tâbi fonksiyonlar.** Kısım 8 de $f_n(z)$ fonksiyon dizisinden (veya serisinden) bahis ettik. $f_n(z)$ dizisine, n parametresine tâbi bir fonksiyon gözü ile bakılabilir. Binaenaleyh umumiyetle, $f_n(z)$ dizisi yerine birtek α parametresine (reel veya kompleks) tâbi kompleks fonksiyonlardan bahis edilebilir. Burada $n \to \infty$ yerine $\alpha \to \alpha_0$ vaz edilebilir.

z, α iki kompleks değişken olsun. Farzedelim ki z bir kapalı sınırlı $\bar{D}$ bölgesinde, α ise $|\alpha - \alpha_0| < \rho$ dairesinde değişiyor. Farzedelim ki $f(z, \alpha)$ bu iki kompleks değişkenin tekdeğerli bir kompleks fonksiyonudur.

Şayet her $z \varepsilon \bar{D}$ için $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(z,\alpha)$ mevcut (sonlu) ise bu takdirde $F(z)$ limit fonksiyonunun $\bar{D}$ nin her noktasında belli bir değeri vardır.

Bu halde bulunduğumuzu farzedelim. Bu takdirde, (tıpkı $f_n(z)$ dizisinde olduğu gibi $\varepsilon > 0$ keyfi olarak verildiğine göre bir $\delta(\varepsilon, z) > 0$ $(n_0(\varepsilon, z))$ sayısı bulunabilir öyleki $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ $(n > n_0)$ için

$$|f(z, \alpha) - F(z)| < \varepsilon$$

TARİF 18. Şayet δ, z ye tâbi değilse bu takdirde diyoruz ki $\alpha \to \alpha_0$ için $f(z,\alpha)$ $\bar{D}$ de *üniform* olarak $F(z)$ limit fonksiyonuna yakınsaktır.

Teorem 4.8.2.2 nin benzeri olarak gösterebiliriz ki, şayet her α, $|\alpha - \alpha_0| < \rho$, değeri için $f(z, \alpha)$, $z \varepsilon \bar{D}$ nin bir sürekli fonksiyonu ise ve üniform olarak $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(z, \alpha) = F(z)$ ise bu takdirde $F(z)$, $\bar{D}$ de süreklidir.

Yine aynı şekilde C, $\bar{D}$ de herhangi bir çevre ise

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_C f(z, \alpha) = \int_C F(z)\, dz$$

Son olarak analitik fonksiyon dizisi ile ilgili Weierstrass teoreminin benzeri olan aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz.

Teorem (*Weierstrass*) 4.9.1.1. $f(z, \alpha)$ fonksiyonu her α, $|\alpha - \alpha_0| < \rho$, için bir G *basit irtibatlı* bölgede analitik olsun. Farzedelim ki her $\bar{D} \subset$ G de lim $f(z, \alpha)$ üniform olarak $F(z)$ ye yakınsaktır. Bu takdirde $F(z)$ G de analitiktir ve $\bar{D}$ de üniform olarak

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\partial f(z, \alpha)}{\partial z} = F'(z)$$

4.9.2. **Belirli integrallerle tarif edilen analitik fonksiyonlar.**

TARİF 19. Basit irtibatlı bir G bölgesi ile bir $[a, b]$ kapalı aralığını göz önüne alalım. Farzedelim ki $z \varepsilon G$ ve $t \varepsilon [a, b]$ için $F(z, t)$ tariflidir. $F(z, t)$ yi

$$F(z,t) = \Phi(x, y, t) + i\,\Psi(x, y, t)$$

şeklinde yazalım. Burada Φ, Ψ; x, y, t reel değişkenlerinin reel fonksiyonlarıdır.

Şayet Φ, Ψ fonksiyonları, G, ve $[a, b]$ nin üç boyutlu uzayda belirttikleri bölgeye ait (x, y, t) noktasının sürekli fonksiyonları iseler bu takdirde diyoruz ki $F(z, t)$ z ve t nin sürekli fonksiyonudur.

Teorem 4.9.2.1. Basit irtibatlı bir G bölgesi ile $[a, b]$ aralığını göz önüne alalım. Farzedelim ki $F(z, t)$ z ve t nin sürekli bir fonksiyonudur. Şayet her t için $F(z, t)$ G de analitik ise bu takdirde

$$f(z) = \int_a^b F(z, t)\, dt$$

G de analitiktir ve

$$f^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^n F}{\partial z^n}\, dt$$

İspat. t_i noktaları vasıtasiyle $[a, b]$ yi n eşit alt aralıklara ayıralım.

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Sonra,

$$f_n(z) = \sum_{r=1}^{n} F(z, t)\,(t_r - t_{r-1}) \qquad (4.9.2.1)$$

toplamını teşkil edelim. $F(z, t)$ t nin sürekli bir fonksiyonu olduğundan Riemann integrali her z için mevcuttur. Yani

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = \int_a^b F(z, t)\, dt = f(z). \qquad (4.9.2.2)$$

Hipotezden dolayı (4.9. 2. 1) deki her $f_n(z)$ G de analitiktir. Gösterebilirsek ki (4.8.2.2) üniform yakınsaktır bu takdirde $f(z)$ nin G de analitik olduğu neticesine varmış oluruz.

Diyorum ki $n \to \infty$ için $(f_n(z))$ dizisi her sınırlı kapalı $\bar{D} \subset$ G bölgesinde üniform olarak $f(z)$ ye yakınsaktır. Filhakika, $F(z,t)$ $z \varepsilon \bar{D}$ ve $t \varepsilon [a,b]$ nin sürekli bir fonksiyonu olduğundan $[a,b]$ de üniform süreklidir. Yani $\varepsilon > 0$ verildiği takdirde yalnız ε a tâbi bir $m > 0$ tam sayısı bulunabilir öyleki $|t' - t| \leq \dfrac{b-a}{m}$ için, $z \varepsilon \bar{D}$ ne olursa olsun

$$|F(z,t) - F(z,t')| < \varepsilon.$$

Fakat

$$f_n(z) - f(z) = \sum_{r=1}^{n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} [F(z, t_r) - F(z,t)]\, dt$$

Şimdi $n \geq m$ için

$$| f_n(z) - f(z) | \leq \sum_{r=1}^{n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} | F(z, t_r) - F(z,t) | \, dt < (b-a) \, \varepsilon .$$

Binaenaleyh $f_n(z)$ dizisi üniform yakınsaktır. Herbir terimi G de analitik olduğundan Weierstrass teoreminden dolayı $f(z)$ G de analitiktir. Üstelik $n \to \infty$ için $\bar{D}$ de üniform olarak $f'_n(z) \to f'(z)$.

Filhakika,

$$f'_n(z) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F(z,t_r)}{\partial z} (t_r - t_{r-1})$$

dir. Bu ise $\Rightarrow$

$$f'(z) = \int_a^b \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} \, dt.$$

Teorem 4.9.2.2. Basit irtibatlı bir G bölgesi ile bir C çevresini göz önüne alalım. Farzedelim ki $F(z, w)$ z ve w nin sürekli bir fonksiyonudur. Burada $z \varepsilon G$, $w \varepsilon C$. Şayet her w için $F(z, w)$ G de analitik ise bu takdirde

$$f(z) = \int_C F(z, w) \, dw$$

G de analitiktir ve

$$f^{(n)}(z) = \int_C \frac{\partial^n F}{\partial z^n} \, dw$$

İspat. Γ, G nin içinde basit kapalı bir çevre ve ζ, Γ nın içinde bir nokta olsun. Bu takdirde Cauchy integral formülünden dolayı

$$F(\zeta, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z, w)}{z - \zeta} \, dz .$$

Binaenaleyh

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dw \int_\Gamma \frac{F(z, w)}{z - \zeta} \, dz .$$

Buradaki integraller yer değiştirebilirler. Bunu görebilmek için, kompleks integrasyon bahsinde olduğu gibi, herbir kompleks integral reel integrallerin toplamı şeklinde ifade edilir. Neticede

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{s_0}^{s_1} (\Phi(z, t) + i\Psi(s, t)) \, ds$$

gibi bir ifade elde edilir. Burada $t_0 \leq t \leq t_1$ ve $s_0 \leq s \leq s_1$, sırasiyle C ve Γ ya ait parametrelerdir. Üstelik Φ ve Ψ sırasiyle s ve t nin sürekli fonksiyonları olduğundan integraller yer değiştirebilirler (§ 2.9.1.).

Binaenaleyh

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - \zeta} \int_C F(z, w) \, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - \zeta} \, dz .$$

Yani $f(z)$ Cauchy integral formülünü sağlıyor. Bu ise teoremin birinci kısmını ispatlar.

Teoremin ikinci kısmına gelince, $F^{(n)}(\zeta, w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z,w) \, dz}{(z - \zeta)^{n+1}}$ formülünden hareket edilerek aynı yol ile istenilen neticeye varılır.

4.9.3. **Sonsuz integrallerle tarif edilen fonksiyonlar.** Burada b sonsuz farzediliyor. Fakat bu takdirde $\int_a^\infty F(z, t) \, dt$ integralinin her $z \varepsilon G$ için mevcut yani yakınsak olması şartı girer.

Teorem 4.9.2.2. Farzedelim ki $F(z,t)$ aşağıdaki şartları sağlıyor.

(i) $z \varepsilon G$, $a \leq t \leq T$, G basit irtibatlı bir bölge ve T herhangi bir sonlu değer olsun. Her T için $F(z, t)$, z ve t nin sürekli bir fonksiyonudur.

(ii) Her t için $F(z, t)$ G de analitiktir.

(iii) Aşağıda yazılı integral

$$f(z) = \int_a^\infty F(z, t) \, dt$$

$z \varepsilon \bar{D} \subset G$ için üniform yakınsaktır.

Bu takdirde $f(z)$ G de analitiktir ve bütün türevleri integral içerisinde türev alarak elde edilir.

İspat. Son şartın mânası, $z \varepsilon \bar{D}$ ve $T \to \infty$ için

$$\int_a^T F(z, t) \, dt$$

üniform olarak $f(z)$ ye yakınsaktır.

Şimdi $n \to \infty$ için

$$f_n(z) = \int_a^n F(z, t) \, dt$$

integralini göz önüne alalım. Teorem 4.9.2.1 den dolayı her n için $f_n(z)$ G

de analitiktir. (iii) den dolayı $z\varepsilon\bar{D}$ için $f_n(z)$, $f(z)$ ye üniform yakınsaktır. Binaenaleyh Weierstrass teoreminden dolayı $f(z)$ G de analitiktir.

Diğer taraftan, yine teorem 4.9.2.1 den dolayı

$$f_n(z) = \int_a^n \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \, dt$$

ve dolayısiyle

$$f'(z) = \int_a^\infty \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \, dt$$

Teorem 4.9.3.2. Farzedelim ki C sonsuzdan geçiyor. Yine farzedelim ki C nin herhangibir sonlu parçası için teorem 4.9.2.2. nin bütün şartları sağlanmıştır ve

$$\int_C F(z, w) \, dw$$

üniform yakınsaktır. Bu takdirde teorem 4.9.2.2 yine doğrudur.

İspat. C_n $|z| = n$ çemberinin içinde kalan kısım olsun.

$$f_n(z) = \int_{C_n} F(z, w) \, dw$$

vazedelim. Teorem 4.9.2.2 den dolayı $f_n(z)$ her n için G de analitiktir. Üstelik $n \to \infty$ için üniform olarak

$$f_n(z) \to f(z)$$

Binaenaleyh Weierstrass teoreminden dolayı $f(z)$, G de analitiktir. En son olarak ta

$$f'(z) = \lim_{n\to\infty} f'_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{\partial F}{\partial z} \, dw = \int_C \frac{\partial F}{\partial z} \, dw$$

4.9.4. **Sonsuz integraller için üniform yakınsaklık kriteri.** En basit kriter Weierstrass M-Kriterinin benzeridir.

Teorem. 4.9.4.1. $\bar{D}$ kapalı bir bölge olsun. Farzedelim ki $z\varepsilon\bar{D}$ için $F(z,t)$, $t \geq a$ nin sürekli bir fonksiyonudur öyle ki $\bar{D}$ nin her noktasında

$$|F(z, t)| \leq M(t)$$

eşitsizliği sağlanmıştır. Burada $M(t)$ z ye tâbi olmıyan pozitif bir fonksiyondur.

Bu takdirde $\int_a^\infty M(t) \, dt$ yakınsak ise $\int_a^\infty F(z, t) \, dt$ $\bar{D}$ de mutlak ve üniform yakınsaktır.

İspat. $F(z, t)$ t nin sürekli bir fonksiyonu olduğundan her $(T>0)$ ve her $z\varepsilon\bar{D}$ için $\int_a^T F(z,t) \, dt$ mevcuttur.

$\int_a^\infty M(t) \, dt$ yakınsak olduğundan, $\varepsilon > 0$ everildiğine göre bir T bulunabilir öyle ki

$$\int_T^\infty M(t) \, dt \, .$$

Fakat $T' > T$ alınırsa

$$\left| \int_T^{T'} F(z,t)dt \right| \leq \int_T^{T'} |F(z,t)| \, dt \leq \int_T^{T'} M(t) \, dt \leq \int_T^\infty M(t)dt < \varepsilon$$

Binaenaleyh $z\varepsilon\bar{D}$ için $\int_a^\infty F(z, t) \, dt$ mutlak ve üniform yakınsaktır.

10. Cauchy Rezidü Teoremi.

4.10.1. Biliyoruz ki, $f(z)$ bir z_0 ayrık singüler noktasının civarında tek değerli ve analitik ise o civarda Laurent serisine açılabilir.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

γ, merkezi z_0 da ve diğer bütün singüler noktaları dışında bırakan bir çember olduğuna göre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \, dz = a_{-1}$$

TARİF 20. a_{-1} kat sayısına $f(z)$ nin z_0 daki *rezidüsü* denir.

Not. z_0, birinci mertebeden bir kutup noktası ise bu takdirde

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z)$$

dır.

Rezidü teoremi 4.10.1.1. C bir basit kapalı çevre ve $z_1, z_2, \ldots, z_n$ içinde n nokta olsun. Bu noktalar hariç farzedelim ki $f(z)$, C nin içinde ve üzerinde tarifli (tek-değerli) ve analitiktir. Farzedelim ki $f(z)$ nin z_j noktasındaki rezidüsü a^j_{-1}, $j = 1,2,\ldots, n$, dir. Bu takdirde

$$\int_C f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} a^j_{-1}$$

İspat. Her z_j noktasını, merkezi z_j de olan γ_j çemberleri ile çevirelim. γ_j leri yeter derecede küçük farzediyoruz öyleki bu γ_j çemberleri tamamiyle C nin içinde olsun ve biri diğerini kesmesin. $f(z)$, C ve γ_j lerin belirttiği bölgede tek değerli ve analitik olduğundan Cauchy teoremini tatbik edebiliriz.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$$

Yani § 4.10.1 den dolayı

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,(a^1_{-1} + a^2_{-1} + \dots + a^n_{-1})$$

Misal. (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ olduğunu gösteriniz.

C çevresi olarak $-R$ den R ye kadar olan reel eksen parçası ile R ve $-R$ den geçen üst yarı çemberi alalım. $\dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i}\right)$ dir. $R > 1$ alınırsa C nin içinde birtek singüler nokta vardır o da $z = i$ kutup noktasıdır. Bu noktadaki rezidü $\dfrac{1}{2i}$ dir.

Binaenaleyh

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Halbuki

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2}$$

Burada Γ üst yarı çemberdir. Diğer taraftan

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \cdot \pi R$$

Şimdi $R \to \infty$ yapılırsa $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ olduğu anlaşılır.

(ii) $c > 0$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^z}{z}\,dz = \begin{cases} 1, & a > 1 \text{ ise} \\ 0, & 0 < a < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

Şayet $a > 1$, yani $\log a > 0$ ise, C çevresi olarak $c-iR$ den $c + iR$ ye kadar olan doğru parçası ile çapı bu doğru parçası olan sol yarı çember alınır.

R yeter derecede büyük alınırsa C, $z = c$ kutup noktasını ihtiva eder. $z = 0$ daki rezidü 1 olduğundan Cauchy rezidü teoreminden dolayı

$$\int_C \frac{a^z}{z}\,dz = 2\pi i$$

dir. Sonra misal (i) de olduğu gibi gösterilebilir ki $R \to \infty$ için yarı çember üzerindeki integralin limiti sıfırdır.

Şayet $0 < a < 1$, yani $\log a < 0$ ise bu sefer C, sağ yarı çember ile tamamlanır. Bu takdirde C nin içinde hiçbir singüler nokta yoktur ve neticede verilen integralin değeri sıfır olduğu anlaşılır.

Teorem 4.10.1.2. Sonlu sayıda kutup noktaları hariç, farzedelim ki $f(z)$ C çevresinin içinde ve üzerinde analitiktir (tek değerli) ve C nin üzerinde sıfır değildir. Bu takdirde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P$$

Burada N, $f(z)$ nin C içindeki sıfır yerlerinin sayısıdır (m inci mertebeden bir sıfır yeri, m sıfır yeri kadar sayılır). P ise, $f(z)$ nin C içindeki kutup yerlerinin sayısıdır (m inci mertebeden bir kutup yeri, m kutup yeri kadar sayılır).

İspat. Farzedelim ki $z = z_0$ m inci mertebeden bir sıfır yeridir. Bu takdirde $z = z_0$ ın civarında $f(z) = (z - z_0)^m\, g(z)$. Burada $g(z)$ analitiktir ve $g(z_0) \neq 0$. Binaenaleyh

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\dfrac{g'(z)}{g(z)}$, z_0 da analitiktir. $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ nin $z = z_0$ daki rezidüsü m dir, yani $f(z)$ nin z_0 daki sıfırlarının sayısıdır. Binaenaleyh, $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ nin $f(z)$ nin sıfır yerlerindeki, rezidülerinin toplamı, $f(z)$ nin sıfır yerlerinin N sayısıdır.

$f(z)$ nin kutuplarına gelince, $g(z) = f(z)(z - z_0)^m$, $g(z)$ analitiktir ve $g(z_0) \neq 0$. Binaenaleyh m.nin işareti değiştirilerek aynı şey söylenebilir. Yani $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ nin, $f(z)$ nin kutup yerlerindeki, rezidülerinin toplamı $-P$ dir.

Not. Şayet $f(z)$ C nin içinde analitikse $P = 0$ dır ve dolayısıyle

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N$$

$d \log (f(z)) = \dfrac{f'(z)}{f(z)} dz$ yazılacak olursa[1]

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Delta_c \log (f(z))$$

Burada Δ_c, $\log (f(z))$ nin C boyunca değişimini gösterir.

Diğer taraftan, $\log (f(z)) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$, ($\arg f(z)$ $2k\pi$ farkla belirlidir). $\log |f(z)|$ tekdeğerli olduğundan varyasyonu (değişimi) sıfırdır. Binaenaleyh

$$\frac{1}{2\pi i} \Delta_c \log (f(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(z) = N.$$

Bu teoreme *argument değişimi* teoremi denir.

Teorem 4.10.1.2 genelleştirilebilir. Gerçekten, farzedelim ki $h(z)$, C nin içinde ve üzerinde analitiktir. z_0, $f(z)$ nin m. mertebeden bir sıfır yeri ise, z_0 cıvarında,

$$h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m\, h(z_0)}{z - z_0} + \frac{m\, (h(z) - h(z_0))}{z - z_0} + h(z) \frac{g'(z)}{g(z)} .$$

Yani, $h(z) \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ nin z_0 daki rezidüsü $mh(z_0)$ dır. Ayni şekilde, z_0, $f(z)$ in m. mertebeden bir kutup noktası olsaydı, $h(z) \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ nin z_0 daki rezidüsü $-mh(z_0)$ olurdu.

Dolayısıyla, $f(z)$ nin C içindeki sıfır yerleri z_ν, $\nu = 1, \ldots, p$, ve kutup yerleri z'_ν, $\nu = 1, \ldots, q$, ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\nu=1}^{p} h(z_\nu) - \sum_{\nu=1}^{q} h(z'_\nu).$$

Burada m. mertebeden bir sıfır (kutup) yeri m kere tekrarlanmıştır.

Bu formül, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun incelenmesinde çok önemlidir. Gerçekten, ileride görüleceği üzere, $f(z_0) = w_0$ ve z_0, $f(z) - w_0$ ın m. mertebeden bir sıfır yeri ise, $\varepsilon > 0$ yeter derecede küçük için, bir $\delta > 0$ sayısı vardır, öyleki, $|w - w_0| < \delta$ şartını sağlayan herbir w için, $f(z) = w$ denkleminin, γ: $|z - z_0| < \varepsilon$ dairesinde tam m, $z_\nu(w)$ $\nu = 1, \ldots, m$, kökü vardır.

Yukardaki formülde $h(z) = z$ vazedilirse,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} z\, dz = \sum_{\nu=1}^{m} z_\nu (w).$$

bulunur.

(1) $\log (f(z))$ çokdeğerli olmakla beraber, türevi tekdeğerli olduğundan, d notasyonunu kullanmakta bir mahzur görmüyoruz.

Dolayısıyla, $m = 1$ için, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonu kapalı bir şekilde

$$f^{-1}(w) = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} z\, dz$$

ile gösterilebilir.

Teorem (*Rouché*) 4.10.1.3. Farzedelim ki basit kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde $f(z)$ ve $g(z)$ analitiktirler ve C üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ dir. Bu takdirde $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ C nin içindeki sıfır yerlerinin sayısı aynıdır.

İspat. Hipotezden dolayı $f(z)$ ve $f(z)+g(z)$ C nin üzerinde sıfırdan farklıdır. Filhakika birinci iddia aşikârdır, ikincisine gelince

$$\big| |g(z)| - |f(z)| \big| \leq |f(z) + g(z)|.$$

Halbuki hipotezden dolayı, $|g(z)| < |f(z)|$, sol taraf daima pozitiftir. Binaenaleyh sağ tarafın 0 olmasına imkân yoktur. O halde argument değişimi teoremi tatbik edilebilir. N, $f(z)$ nin sıfırlarının sayısı ve N', $f(z) + g(z)$ nin sıfırlarının sayısı olsun.

$$2\pi N = \Delta_c \arg f$$

$$2\pi N' = \Delta_c \arg (f + g) = \Delta_c \arg f \left(1 + \frac{g}{f}\right)$$

$$= \Delta_c \arg f + \Delta_c \arg \left(1 + \frac{g}{f}\right).$$

Gösterelim ki $\Delta_c \arg \left(1 + \dfrac{g}{f}\right) = 0$

$w = F(z) = 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}$ vazedelim. $|g| < |f|$ olduğundan $|w - 1| < 1$ dir. Yani, $w = F(z)$, merkezi $w = 1$ de ve yarıçapı 1 olan Γ dairesinin içindedir. Binaenaleyh z, C yi çizdiği zaman $F(z)$, Γ nın içinde bir kapalı L cevresini çizer. Yani $w = \rho\, e^{i\Phi}$ vazedilirse $\arg \left(1 + \dfrac{g}{f}\right) = \Phi$ ilk değerine döner. Dolayısıyla $\Delta_c \arg \left(1 + \dfrac{g}{f}\right) = 0$, zira L, Γ nın içinde bulunduğundan tamamiyle sağ düzlemde olup $w = 0$ ı dışında bırakır.

Tatbikat, Cebirin esas teoremi. n inci dereceden bir polinomun n sıfır yeri vardır. Bir kere z^n nin n sıfırı vardır. Bu sıfırların hepsi başlangıç noktasındadır. Şimdi $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, herhangi bir polinom olsun. $f(z) = a_n z^n$ ve $g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$ vaz edelim. C olarak, merkezi $z = 0$ da ve $R > 1$ yarıçaplı bir çember alalım. C üzerinde $|f(z)|$

$= |a_n| R^n$, $|g(z)| \leq |a_0| + |a_1| R + \ldots + |a_{n-1}| R^{n-1} \leq (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|) R^{n-1}$. Binaenaleyh $|g| < |f|$ olması için

$$R > \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

olmalıdır. Bu takdirde Rouché teoreminden dolayı yukardaki şartı sağlıyan bir R yarıçaplı dairenin içinde $f(z) + g(z)$ nin n sıfır yeri vardır.

Teorem (*Hurwitz*) 4.10.1.4. Basit kapalı bir C çevresi verilmiş olsun. İçini D ile gösterelim. Her bir elemanı D de analitik olan bir $(f_n(z))$ dizisi verilmiş olsun. Farzedelim ki D de üniform olarak $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, ve D de $f(z) \not\equiv 0$. Bu takdirde $z_0 \varepsilon D$ $f(z)$ nin bir sıfır yeridir yalnız ve yalnız z_0, $f_n(z)$ fonksiyonlarının sıfır yerlerinin bir limit noktası ise.

İspat. Farzedelim ki $f(z) \not\equiv 0$. Weierstrass teoreminden dolayı $f(z)$ D de analitiktir. O halde ρ nun yeter derecede küçük bir değeri için D de $\gamma : |z - z_0| = \rho$ çemberi bulunabilir, öyleki z_0 noktası hariç $f(z)$, γ nın üzerinde ve içinde sıfır değildir (§ 4.8.5.). Binaenaleyh $\exists\ m > 0 \ni \gamma$ da $|f(z)| \geq m > 0$. ρ ve m sâbit için üniform yakınsaklıktan dolayı $\exists\ n_0, \ni n > n_0$ için γ da $|f_n(z) - f(z)| < m$. Dolayısıyla

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$$

Rouché teoreminden dolayı $n > n_0$ için γ nın içinde $f_n(z)$ nin sıfır yerlerinin sayısı $f(z)$ nin sıfır yerlerinin sayısına eşittir. Dolayısıyla z_0, $f(z)$ nin bir sıfır yeri ise $f_n(z)$ nin γ nın içinde en az bir sıfırı vardır; z_0, $f(z)$ nin sıfır yeri değilse $f_n(z)$ nin hiç bir sıfırı yoktur. γ istenildiği kadar küçük alındığından teorem ispatlanmıştır.

Not. $f_n(z) = \dfrac{e^z}{n}$ misalini ele alalım. Burada $f(z) \equiv 0$ dır. Diğer taraftan her n için $\dfrac{e^z}{n}$ hiç bir yerde sıfır değildir. Bu misal $f(z) \not\equiv 0$ şartının gerek şart olduğunu gösteriyor.

Teorem (Civarların Civarlara Dönüşü) 4.10.1.5. Farzedelim ki $f(z)$ bir z_0 noktasında analitiktir. $f(z)$ nin z_0 da aldığı değeri $w_0 = f(z_0)$ ile gösterelim. Diyorum ki w_0 ın bir ε-civarı vardır öyleki $f(z)$ nin z_0 ın belli bir civarında aldığı değerler hiç olmazsa bir defa w_0 ın ε-civarını örter.

İspat. $f(z) - w_0$, z_0 da analitiktir ve o noktadaki değeri sıfırdır. Sıfır yerleri ayrık noktalar olduğundan merkezi z_0 da olan bir γ çemberi mevcuttur öyle ki $f(z) - w_0$, z_0 hariç, γ nın üzerinde ve içinde sıfırdan farklıdır. Binaenaleyh $\exists\ m > 0$ öyleki γ da $|f(z) - w_0| \geq m$. Merkezi w_0 da ve yarıçapı m olan

bir daire çizelim. w_1 bu dairenin içinde herhangibir nokta olsun. Diyorum ki γ nın içinde bir z_1 noktası vardır öyleki $f(z_1) = w_1$ dir. Yani $f(z) - w_1$ in γ nın içinde en az bir sıfır yeri vardır. Yani w bir parametre olduğuna göre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

integralinde $w = w_1$ vazedilirse bu integralin değeri en az 1 dir, zira m-dairesinin tarifinden dolayı $f(z) - w_1$ γ nın üzerinde sıfır değildir (farzedelim ki bir $\zeta \varepsilon \gamma$ için $f(\zeta) - w_1 = 0$. O halde $f(\zeta) - w_0 = w_1 - w_0$ ve $|f(\zeta) - w_1| = |w_1 - w_0| < m$. Fakat $|f(\zeta) - w_0| \geq m$).

Halbuki

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz = N,\ N \geq 1$$

Burada N, w_0 yerinin mertebesidir. İntegral, w nin sürekli bir fonksiyonu olduğu gösterilebilirse, integralin değeri daima N olduğu gösterilmiş olur. Filhakika

$$\left| \int_\gamma \frac{f'(z)\, dz}{f(z) - w'} - \int_\gamma \frac{f'(z)\, dz}{f(z) - w''} \right| = \left| \int_\gamma \frac{f'(z)\ (w' - w'')\, dz}{[f(z) - w']\ [f(z) - w'']} \right|$$

$$\leq \frac{M\ |w' - w''|}{d^2} \cdot l$$

Burada M, $|f'(z)|$ nin γ üzerindeki maksimumudur; d, w' ve w'' nün m-yarıçaplı dairenin çemberine olan uzaklıklarının en küçüğüdür. l ise γ nın uzunluğudur.

Not. Teoremin topolojik önemi hakkında. $w = f(z)$ bir analitik fonksiyon olsun. Z tarif, W değer bölgelerine birer topolojik transformasyon tatbik edildiğini farzedelim: $Z \to Z^*$, $W \to W^*$. Böylelikle f, Z^* dan W^* a sürekli bir φ fonksiyonuna dönüşür. Tarif olarak f, φ ye *topolojik ekivalent* tir denir. Diğer taraftan f nin φ lere nazaran invarient hassalarına f nin *topolojik hassa*ları denir.

Bu tariflere göre teorem 4.10.1.5. analitik fonksiyonların bir topolojik hassasını ifade etmektedir. Zira *L. E. J. Brouwer* in bir teoremine göre, *herhangi bir topolojik transformasyonda açık cümleler açık cümlelere dönüşür*[1]. Fakat f nin bu topolojik hassası φ leri karakterize etmiye kâfi değildir. Zira gösterilebilir ki $x > 0$ yarı düzleminde

(1) Stoilow, loc. cit. sahife 26–29.

$$\Psi : \begin{cases} \rho = e^{-\frac{1}{y^2}} + xy^2 \\ \theta = \dfrac{2\pi}{y} \end{cases}, \; y \neq 0$$

sürekli transformasyonu açık cümleleri açık cümlelere dönüştürür; bununla beraber Ψ, hiç bir f ye topolojik ekivalent değildir. Zira Ψ, $y = 0$ için $\rho = 0$ diye tarif edilirse, derhal görülür ki $y = 0$ yarı-doğrusu, (ρ, θ) düzleminde, $\rho = 0$ noktasına dönüşür. Bu hal, sabit olmıyan hiç bir f için varit olmadığına göre iddiamız doğrudur (teorem 4.8.5.1).

Bu misal, f lerin ikinci bir topolojik hassasını ortaya koymaktadır; yani bir analitik fonksiyon, birden fazla noktası olan bir *kontiniumu* (irtibatlı kapalı cümle) birtek noktaya dönüştüremez ve aynı hassa herhangibir topolojik transformasyon için de doğrudur.

İşte bu iki hassa f lerin esas topolojik hassalarıdır (diğerleri bunların birer neticesidirler) ve gösterilebilir ki, bu iki hassa f lere topolojik eşdeğer bütün φ lerin sınıfını tamamiyle karakterize eder. Yani bu iki hassayı haiz herbir φ, bir f ye topolojik eşdeğerdir.

Tarif olarak açık cümleleri açık cümlelere dönüştüren ve hiç bir kontiniumu birtek noktaya dönüştürmeyen sürekli φ transformasyonlarına *İç Transformasyon* denir.

İç transformasyonların önemini belirtmek üzere aşağıda *Hadamard*'ın mühim bir teoreminin ispatını veriyoruz.

a da noktalanmış küreye σ diyelim. φ, σ da sürekli ve lokal topolojik bir transformasyon olsun (σ ya ait herbir noktanın yeter derecede küçük bir civarında φ topolojiktir). φ, σ yı A da noktalanmış bir küreye topolojik olarak dönüştürmesi için gerek ve yeter şart limit noktası a olan herbir sonsuz nokta cümlesi limit noktası A olan bir sonsuz nokta cümlesine dönüşmelidir.

İspat. Gerek şart aşikârdır. Yani, φ topolojik olarak σ yı A da noktalanmış bir küreye dönüştürüyorsa açık olarak limit noktası a olan her bir sonsuz nokta cümlesi, limit noktası A olan sonsuz bir nokta cümlesine dönüşür (zira topolojik transformasyonlar iç noktaları iç noktalara dönüştürür).

Yeter şarta gelince: Önce şu ihtarı yapalım. φ, σ da sürekli lokal topolojik olup σ yı A da noktalanmış bir küreye dönüştürüyorsa, φ haliyle σ da topolojiktir. Zira bu durumda σ nın resmi basit irtibatlı olduğundan orada φ nin ters fonksiyonu φ^{-1} tekdeğerlidir.[1]

(1) İspat aynen § 7.3.1 deki *Monodromi teoreminde* olduğu gibidir. Oradaki *Fonksiyon elemanlarının yakınsaklık dairelerine* burada φ^{-1} in topolojik olduğu çember içleri tekabül eder. Bir çember içinde tarif edilen φ^{-1} in temditi bir fonksiyon elemanın analitik temditine benzer şekilde tarif edilir. Böylelikle φ^{-1} in bir *topolojik* elemanının bir eğri boyunca temditi tarif edildikten sonra monodromi teoreminin ispatı burada tekrarlanabilir.

Bu hal hariç tutulursa, $\Sigma = \varphi(\sigma)$ bölgesinin, A dan farklı en az bir B sınır noktası olması gerekir. Şimdi B′ ucu hariç tamamiyle Σ ya ait bir Γ çember yayını gözönüne alalım. Burada B′, Σ nın sınırına ait A dan farklı bir noktadır. B mevcut ise böyle bir çember yayı mevcuttur. Bunu görebilmek için A dan geçmiyen fakat B den geçen ve Σ da iç noktaları olan bir çember yayını gözönüne alalım. Bu yay üzerinde bulunan bir iç noktadan hareket ederek B ye doğru gidersek B′ ilk rast gelenin sınır noktasıdır. O halde K, Γ üzerinde ve B′ den farklı bir nokta olsun. k, K nın bir resmi olduğuna göre, $K = \varphi(k)$, tarifden dolayı φ, k nın bir civarında topolojiktir. Dolayısiyle φ^{-1}, merkezi K da olan bir C çemberi içinde topolojiktir. C, bu hassanın doğru olduğu en büyük çember olsun. Γ yayı K dan itibaren B ye doğru takip edilirse, Γ, C yi bir K_1 noktasında keser. Böylelikle $KK_1 \subset \Gamma$ çember yayının σ daki kk_1 resmi bir *basit jordan eğrisidir*. Aynı muhakeme K_1 için tekrarlanabilir. Böylelikle $K_{n-1} K_n \subset \Gamma$ yayları elde edilir öyle ki $n \to \infty$ için $K_n \to B''$. Burada B′ Σ ya ait değildir. Bu şekilde temdit edilen kk_1 Jordan eğrisi bir γ eğrisi teşkil eder öyleki γ nın resmi Γ nın bir parçasıdır. Hipotezden dolayı γ nın ucu a ya yakınsak değildir. Ne de ρ ya ait belli bir noktaya yakınsaktır. Zira öyle olsaydı, B″ noktasının ötesine temdit edilebilirdi. Binaenaleyh γ nın ucu σ da hiçbir limite yakınsamıyor. O halde, b_1'', b''_2 σ da γ nın ucunun yaklaşdığı iki farklı yığılma noktası olsun. $\varphi(b''_1) = B''$, $\varphi(b''_2) = B''$ ve φ bir iç transformasyon olduğundan[1] b''_1, b''_2 ve resmi B″ olan bu gibi noktalar ayrık noktalardır. Şu halde tamamiyle σ ya ait, merkezi b''_1 de ve b''_2 yi dışında bırakan bir π çemberi çizilebilir öyleki π, resmi B″ olan hiçbir noktadan geçmiyor. Diğer taraftan γ, π yi sonsuz defa kestiğinden kesiş noktalarının π üzerindeki yığılma noktaları, γ eğrisi ucunun birer yığılma noktasıdır. Bu ise π nin tarifine aykırıdır. Binaenaleyh Γ gibi bir çember yayının ve dolayısiyle B gibi bir noktanın mevcut olması mümkün değildir.

Teorem (*Maksimum prensibi*) 4.10.1.6. Farzedelim ki $f(z)$ G de analitiktir ve sabit değildir. Bu takdirde $f(z)$ nin $|f(z)|$ mutlak değeri G nin bir iç noktasında maksimum olamaz.

İspat. $f(z)$ nin G de aldığı değer $w_0 = f(z_0)$ ise, biliyoruz ki (teorem 4.10.1.5) $f(z)$, w_0 ın bir ε-civarına ait bütün değerleri alır. Şu halde $f(z)$ sabit değilse w_0 ın ε - civarında en az bir w_1 noktası vardır, öyleki $|w_1| > |w_0|$.

Not. $f(z)$, G de analitik ve $\bar{G}$ de sürekli ise, $|f(z)|$ $\bar{G}$ de süreklidir ve binaenaleyh Weierstrass teoreminden dolayı $\bar{G}$ nin en az bir noktasında maksimum değerini alır. Yukarıdaki teoremden dolayı, yani $f(z)$ G de anlitik olduğu için, bu maksimum değerini ancak sınırda alabilir.

(1) Sürekli lokal topolojik transformasyonların bir iç transformasyon oldukları aşikârdır. Bunun tersi doğru değildir, yani her iç transformasyon lokal topolojik değildir. Meselâ $w = z^2$ analitik fonksiyonu bir iç transformasyondur ve $z = 0$ ın hiç bir civarında topolojik değildir.

Teorem. (*Schwarz Lemması*) 4.10.1.7. Farzedelim ki $f(z)$, $|z| < 1$ de analitiktir ve (i) $f(0) = 0$, (ii) $|f(z)| \leq 1$ şartlarını sağlıyor. Bu takdirde $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$. Eşitlik yalnız ve yalnız $f(z) = wz$, $|w| = 1$, ise vardır.

İspat. $\Phi(z) = f(z)/z$, $|z| < 1$ de analitik, ve $z = 0$ da değeri $f'(0)$ dır. $\Phi(z)$ ye Maksimum prensibini tatbik edelim. Şöyleki, z_0, $|z| < 1$ dairesinde bir nokta olsun, ve bu noktayı içine alan $z=0$ merkezli ve $\rho < 1$ yarı-çaplı daire çizelim.

$$|\Phi(z_0)| < \underset{|z|=\rho}{\text{Max}} |\Phi(z)| = \underset{|z|=\rho}{\text{Max}} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{1}{\rho} \underset{|z|=\rho}{\text{Max}} |f(z)| .$$

ρ, z_0 a tâbi olmadığından, istenildiği kadar 1 e yakın alınabilir. Yani

$$|\Phi(z_0)| \leq 1.$$

z_0, keyfi olduğundan

$$|\Phi(z)| \leq 1.$$

$\Phi(z)$ sabit değilse, Maksimum prensibinden dolayı bütün iç noktalarda $|\Phi(z)| < 1$. Aksi halde, yani bir iç noktada eşitlik varsa, bütün $|z| < 1$ için $|\Phi(z)| = 1$. Yani

$$f(z) = wz.$$

Schwarz Lemmasının çok kısa bir ispatı Cauchy formülü[1] (teorem 4.6.4.1) ile dir. Filhakika (4.5.1.1) den dolayı $|f'(0)| \leq 1$ dir. 1 üst sınırı daha da küçültülemez Zira $f(z) = wz$ Lemmanın şartlarını haiz bir fonksiyondur ve $|f'(0)| = 1$ dir.

Daha genel olarak $|z| < 1$, birim dairesine $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ ayrık basit kapalı çevreleriyle belirtilen G bölgesini göz önüne alalım. Farzedelim ki (i) $z = 0$ G nin bir iç noktasıdır (ii) $f(z)$ G de tek değerli ve analitiktir. (iii) $|f(z)| \leq 1$.

Bu takdirde teorem 4.6.4.1 ve (4.5.1.1) den dolayı

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{l}{\rho^2},$$

l_i, C_i nin uzunluğu olduğuna göre $l = \Sigma_1^n l_i$, $\rho = \min |z|$, $z \varepsilon C$.

Görülüyor ki $\rho = 1$, C: $|z| = 1$ vazedilirse klasik Schwarz Lemması elde edilir.

Teorem (*Hadamard üç daire teoremi*) 4.10.1.8. Farzedelim ki $0 < r_1 < r_2 < r_3$ ve $f(z)$, $r_1 \leq |z| \leq r_3$ halkasında tek değerli ve analitiktir. M_1, M_2, M_3, $|f(z)|$ nin $|z| = r_1, r_2, r_3$ çemberleri üzerindeki maksimum değerleri olsun. Bu takdirde

$$M_2^{\log(r_3/r_1)} \leq M_1^{\log(r_3/r_2)} M_3^{\log(r_2/r_1)}$$

İspat. Bir kere $f(z)$ sabit ise yalnız eşitlik vardır. Filhakika bu sabiti M ile gösterirsek sağ taraf $M^{\log(r_3/r_2) + \log(r_2/r_1)} = M^{\log(r_3/r_1)}$ Saniyen $f(z) \not\equiv 0$ ise $M_1 M_2 M_3 > 0$ dır. Bir reel α sayısını gözönüne alalım. Genel halde z^α çok- değerli bir fonksiyondur. Fakat $|z^\alpha|$ bütün *dallar* için aynıdır. Filhakika $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, $\log z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$, k tam sayı, o halde

$$z^\alpha = e^{\alpha \log r + i\alpha(\theta + 2k\pi)}$$

ve α reel ise

$$|z^\alpha| = e^{\alpha \log r} = r^\alpha$$

Binaenaleyh $|z^\alpha f(z)|$ tek değerli ve süreklidir.

Bu takdirde $|z_1| = r_1$ in üzerinde

$$|z^\alpha f(z)| \leq r_1^\alpha M_1$$

ve $|z_3| = r_3$ ün üzerinde

$$|z^\alpha f(z)| \leq r_3^\alpha M_3$$

Yani halkanın sınırında

$$|z^\alpha f(z)| \leq \text{Max}(r_1^\alpha M_1, r_3^\alpha M_3). \qquad (4.10.1.7)$$

Şimdi halkayı merkezden geçen *ab* doğrusu boyunca keselim, (a, r_1 çemberinin, b de r_3 çemberinin üzerindedir; m, r_1 çemberinin üzerinde ve n r_3 çemberinin üzerinde noktalar olsun). Belli bir yön takip eden *amabnba* çevresi tarafından sınırlanmış basit irtibatlı bölgede $z^\alpha f(z)$ nin bütün dalları tekdeğerli ve analitiktir.

Şu halde, $|z^\alpha f(z)|$ maksimum değerini *amabnba* nın üzerinde alır. *ab* nin civarında, merkezden geçen *cd* ve *ef* doğrularını göz önüne alalım öyleki *caefbdc* nin sınırladığı bölge *ab* yi ihtiva etsin (c, e r_1 çemberi ve d, f r_3 çemberi üzerindedirler). Bu bölgede $z^\alpha f(z)$ in herbir dalı tekdeğerli ve analitiktir. Bu itibarla $|z^\alpha f(z)|$ *ab* nin üzerinde maksimum olamaz. Dolayısıyla (4.10.1.7) bütün halkada doğrudur. Özel olarak $|z| = r_2$, $r_1 < r_2 < r_3$, çemberi üzerinde

$$r_2^\alpha M_2 \leq \text{Max}(r_1^\alpha M_1, r_3^\alpha M_3)$$

veya

$$M_2 \leq \text{Max}\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\alpha M_1, \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^\alpha M_3 \right] \qquad (4.10.1.8)$$

Şimdi α yı o şekilde seçelim ki

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\alpha M_1 = \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^\alpha M_3$$

(1) Veya Cauchy eşitsizliği (teorem 4.8.3.2)

Yani

$$\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^{\alpha} = \frac{M_3}{M_1}$$

ve

$$\alpha = \log \frac{M_3}{M_1} \Big/ \log \frac{r_1}{r_3}$$

Bu takdirde (4.10.1.8) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$M_2 \leq M_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\log \frac{M_3}{M_1} / \log \frac{r_1}{r_3}} = M_1^{\log \frac{r_3}{r_2} / \log \frac{r_3}{r_1}} M_3^{\log \frac{r_2}{r_1} / \log \frac{r_3}{r_1}}$$

Not. Hadamard teoremi determinant şeklinde de yazılabilir.

$$\begin{vmatrix} \log M_1 & \log r_1 & 1 \\ \log M & \log r & 1 \\ \log M_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$$

Burada r_2 yerine r koyduk.

Bu eşitsizliğin tefsiri için aşağıdaki tarifi veriyoruz.

TARİF 21. Reel değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonuna *konveks* denir, şayet herhangi x_1 ile x_2 arasında bulunan $y = f(x)$ eğrisi daima (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarını birleştiren kirişin altında veya en çok üzerinde bulunuyorsa. Bu şart analitik olarak

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2, \qquad x_1 < x < x_2$$

ile ifade edilir.

Konvekslik şartı determinant şeklinde de yazılabilir.

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y & x & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$$

Hadamard'ın eşitsizliği konvekslik şartı ile karşılaştırılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.10.1.8*. *log* $M(r)$, *log* r nin bir konveks fonksiyonudur.

Teorem (*Phragmén-Lindelöf* 4.10.1.9. C basit kapalı bir çevre ve p C nin üzerinde bir nokta olsun. Farzedelim ki C nin içinde analitik ve p hariç C nin üzerinde sürekli bir $f(z)$ fonksiyonu vardır öyleki p hariç C nin üzerinde $|f(z)| \leq M$.

Son olarak farzedelim ki bir $\omega(z)$ fonksiyonu mevcuttur öyleki (i) $\omega(z)$ C nin içinde analitik ve sıfırdan farklıdır, (ii) p hariç C nin üzerinde sürekli ve $|\omega(z)| \leq 1$, (iii) her $\varepsilon > 0$ için bir γ_ε çemberi bulunabilir öyleki γ_ε, uç noktaları hariç tamamiyle C nin içindedir, uç noktaları ise C nin üzerinde ve p nin iki tarafındadır, ve $\varepsilon \to 0$ için $\gamma_\varepsilon \to p$, (iv) γ_ε nun üzerinde $|[\omega(z)]^\varepsilon f(z)| \leq M$ dir. Bu takdirde C nin içinde $|f(z)| \leq M$.

İspat. $F(z) = [\omega(z)]^\varepsilon f(z)$ C nin içinde analitiktir. z_0, C nin içinde herhangi bir nokta olsun. ε yeter derecede küçük alınırsa z_0, γ_ε ve C nin belirttiği küçük Δ_ε bölgesinin dışında kalır. Δ_ε^C nın sınırında $|F(z)| \leq M$ dir. Binaenaleyh

$$|F(z_0)| \leq M, \quad |f(z_0)| \leq M(z_0) \, |\omega|^{-\varepsilon}$$

$\varepsilon \to 0$ için $|f(z_0)| \leq M$. z_0 keyfi olduğundan teorem ispatlanmıştır.

Not. Phragmén-Lindelöf teoremi, p gibi, sonlu sayıda p_i, $i = 1, \ldots, m$, noktaları için de doğru olduğu aşikârdır. Bu noktalardan bir tanesi sonsuzda ise, η-yarıçaplı küçük γ_ε çemberi yerine, $\frac{1}{\eta}$ – yarıçaplı büyük bir çember alınır.

Verilen bir bölgede sınırlı bir $f(z)$ analitik fonksiyonu için Phragmén Lindelöf teoremi aşağıdaki şekli alır.

Teorem 4.10.1.9*. Farzedelim ki $f(z)$ sınırlı bir G bölgesinde sınırlı ve analitiktir. $|f(z)|$ tekdeğerli ve p_i noktaları hariç, G nin sınırında sürekli ve $|f(z)| \leq M$ ise bu takdirde bütün G de $|f(z)| \leq M$.

İspat. R, G nin en büyük yarıçapı olduğuna göre

$$\omega(z) = \frac{\prod_{i=1}^{m} (z - p_i)}{R^m}$$

fonksiyonu (i) ve (ii) şartlarını sağlar. Üstelik η yeter derecede küçük alınırsa $f(z)$ sınırlı, ve $z \varepsilon G$ için $\lim_{z \to p_i} \omega(z) = 0$ olduğundan (iv) sağlanmıştır.

Phragmen-Lindelöf teoreminin diğer bir ifade şekli de şöyledir.

Teorem 4.10.1.10. Farzedelim ki sınırlı bir G bölgesinde $f(z)$ analitik ve $|f(z)|$ tekdeğerlidir. $\varepsilon > 0$ verildiğine göre farzedelim ki her bir sınır noktasının bir *iç civarında* (cıvarın G ye ait kısmıdır) $|f(z)| < M + \varepsilon$. Bu takdirde bütün G de $|f(z)| \leq M$. Şayet bir iç noktada eşitlik varsa $f(z)$ sabittir.

İspat. G nin sınırı, sınırlı ve kapalı bir cümle olduğundan bu cümleye Heine-Borel teoremi tatbik edilebilir. Buradan istenilen netice derhal elde edilir.

Diğer bir ispat ta şöyledir: $|f(z)|$ nin G deki en küçük üst sınırına

μ diyelim. Üst sınırın tarifinden dolayı $\exists\ (z_n) \subset G \ni \lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \mu$ (μ sonsuz olabilir). (z_n) sınırlı olduğundan, *Bolzano-Weierstrass* teoreminden dolayı (z_n) dizisinin en az bir ζ yığılma noktası vardır. İki hal varittir:

(i) $\zeta \varepsilon G$; $|f(z)|$, ζ da tarifli ve sürekli olduğundan $\exists\ (z_{n_p}) \subset (z_n) \ni$

$$\lim_{z_{n_p}\to\zeta} |f(z_{n_p})| = |f(\zeta)| = \mu$$

Maksimum prensibinden dolayı $f(z)$ G de sabittir. Sabit değilse

(ii) ζ, G nin sınırındadır; bu takdirde

$$\lim_{z_{n_p}\to\zeta} |f(z_{n_p})| = \mu$$

Dolayısiyle ζ nın bir iç civarında $\mu \leq M + \varepsilon$, ε keyfi olduğundan $\mu \leq M$. Yani bütün G de $|f(z)| \leq M$. Yine maksimum prensibinden dolayı $|f(z)| < M$.

Şimdi teorem 4.10.1.9 u özel bölgelere tatbik edeceğiz.

Teorem 4.10.1.11. Farzedelim ki $f(z)$, $z = re^{i\theta}$, başlangıç noktasında kesişen ve π/α açılı iki yarıdoğru üzerinde ve içinde analitiktir. Üstelik farzedelim ki bu doğrular üzerinde $|f(z)| \leq M$ ve $r \to \infty$ için üniform olarak $|f(z)| < Ae^{r\beta}$, $A > 0$ sabit ve $\beta < \alpha$. Bu takdirde içerde de $|f(z)| \leq M$.

İspat. Sırf kolaylık olmak üzere Δ yarıdoğrularını x-eksenine nazaran simetrik alalım; Δ: $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi/\alpha$. $\beta < \gamma < \alpha$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$F(z) = e^{-\varepsilon z^\gamma} f(z)$$

vazedelim. Şu halde

$$|F(z)| = e^{-\varepsilon r^\gamma \cos\gamma\theta}\ |f(z)|\ .$$

Δ üzerinde $\cos\gamma\theta = \cos(\pm \frac{1}{2}\pi\gamma/\alpha) > 0$, çünki $\gamma/\alpha < 1$.

Binaenaleyh Δ üzerinde

$$|F(z)| \leq |f(z)| \leq M.$$

Diğer taraftan Δ yarıdoğruları arasında bulunan Γ : $|z| = R$ çember yayı üzerinde

$$|F(z)| = e^{-\varepsilon R^\gamma \cos\gamma\theta}\ |f(z)|\ ,\ |\theta| = \tfrac{1}{2}\pi/\alpha,\ z\varepsilon\Gamma$$

ve buradan

$$|F(z)| = e^{-\varepsilon R^\gamma \cos\frac{1}{2}\pi\gamma/\alpha}\ |f(z)| < Ae^{R^\beta - \varepsilon R^\gamma \cos\frac{1}{2}\pi\gamma/\alpha}.$$

elde edilir. $R \to \infty$ için

$$Ae^{R^\beta - \varepsilon R^\gamma \cos\frac{1}{2}\pi\gamma/\alpha} \to 0$$

Binaenaleyh R yeter derecede büyük alınırsa Γ üzerinde de $|F(z)| \leq M$. Maksimum prensibinden dolayı, Δ ve Γ nın teşkil etmiş olduğu sektörde de $|F(z)| \leq M$. R keyfi büyük olduğundan Δ yarıdoğruların belirtmiş olduğu açıda da $|F(z)| \leq M$. Yani

$$|f(z)| \leq Me^{\varepsilon r^\gamma}$$

ε, keyfi küçük olduğundan teorem ispatlanmıştır.

Teoremdeki açı ile $f(z)$ nin sonsuzdaki O[1] su arasındaki bağıntıya nazarı dikkati çekmek isteriz. Teorem doğru olabilmesi için, açı büyüdükçe β küçülmelidir.

Teorem 4.10.1.12. İki doğru boyunca $z \to \infty$ için $f(z) \to a$, ve $f(z)$ bu doğruların belirttiği açıda analitik ve sınırlı ise, $|f(z)| \leq M$, bu takdirde bütün açıda üniform olarak $f(z) \to a$.

İspat. Yine kolaylık olmak üzere $a = 0$, ve $z = w^k$ transformasyonunu tatbik etmek suretiyle iki doğru arasındaki açı π den küçük farzedilebilir. Dolayısiyle doğruların denklemleri $\theta = \pm\theta_0$, $\theta_0 < \frac{1}{2}\pi$, alınabilir.

$$F(z) = \frac{z}{z+\lambda} f(z),\ \lambda > 0$$

vazedelim. O halde

$$|F(z)| = \frac{r\ |f(z)|}{\sqrt{(r^2 + 2r\lambda\cos\theta + \lambda^2)}} < \frac{r\ |f(z)|}{\sqrt{(r^2+\lambda^2)}}$$

Hipotezden dolayı, $\varepsilon > 0$ yeter derecede küçük için $\exists r_1 = r_1(\varepsilon) \ni \theta = \pm\theta_0$ doğruları üzerinde $r > r_1$ için $|f(z)| < \varepsilon$, ve

$$|F(z)| < |f(z)| < \varepsilon$$

Diğer taraftan $\lambda = r_1 M/\varepsilon$ vazedilirse, $r \leq r_1$ için

$$|F(z)| < r\ |f(z)|/\lambda < r_1 M/\lambda = \varepsilon$$

Binaenaleyh $\theta = \pm\theta_0$ doğruları üzerinde

$$|F(z)| < \varepsilon$$

Yani

$$|f(z)| < \left|1 + \frac{\lambda}{z}\right| \varepsilon < \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right)\varepsilon$$

ve $\lambda < r$ için $\theta = \pm\theta_0$ doğruları üzerinde

$$|f(z)| < 2\varepsilon.$$

$f(z)$, doğruların belirttiği açıda sınırlı olduğundan teorem 4.10.1.9* dan dolayı orada da $|f(z)| < 2\varepsilon$. Bu ise teoremi ispatlar.

(1) O sembolünün tarifi için § 5.2.7 yi gör.

BÖLÜM V

TAM FONKSİYON

1. Sonsuz Çarpım

5.1.1. $p_1\, p_1 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ kompleks sayıların sonsuz çarpımı, $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n$ kısmi çarpımların limitine geçilerek hesaplanır. Şayet bu limit mevcut ve sıfırdan farklı ise, $\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, bu takdirde $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ yakınsaktır denir ve $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ yazılır.

Not. $P \neq 0$ şartının ileri sürülmesinde sebep şudur. Şayet $P = 0$ ise bu takdirde en az bir faktörü sıfır olan her sonsuz çarpım yakınsaktır. Böylece P, diğer faktörlere tâbi değildir. Diğer taraftan p_n bir sayı olmayıp bir fonksiyon ise, limit fonksiyonun sıfırları olabilir, daha doğrusu sıfırı olan herhangi bir fonksiyonu sonsuz çarpımla gösterebilmeliyiz. İşte bu son hal de göz önünde tutulursa tarifi aşağıdaki şekilde genişletmek mümkündür.

TARİF 1. $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ yakınsaktır denir yalnız ve yalnız (i) en fazla sonlu sayıda faktörler sıfır ve (ii) sıfır olmıyan faktörlerin kısmi çarpımlarının limiti sonlu ve sıfırdan farklı ise.

Not. Yakınsak bir sonsuz çarpımda $\lim p_n = 1$ dir. Filhakika $p_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$ dir, sıfır olan faktörleri yazmıyoruz. $n \to \infty$ yapılırsa istenilen neticeye varılır. Bu vaziyet göz önünde tutulursa bir sonsuz çarpım, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ diye yazılabilir. Binaenaleyh $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ nin yakınsak olması için gerek şart $n \to \infty$ için $a_n \to 0$ dır.

Teorem 5.1.1.1. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum_1^{\infty} \log (1 + a_n)$ yakınsak olmalıdır. a_n kompleks ise bu seride her logaritmanın esas değeri alınır. Üstelik her n için $1 + a_n \neq 0$ farzedilebilir.

İspat. **Yeter şart.** Serinin kısmi toplanımı S_n ile gösterelim. Bu takdirde

$$P_n = e^{S_n}.$$

Binaenaleyh

$$P_n = e^{S_n}, \text{ ve } S_n \to S \Rightarrow P_n \to e^S \neq 0.$$

Gerek şart. Farzedelim ki $P_n \to P \neq 0$. Göstermek istiyorruz ki $S_n \to \log P + 2ki\pi$. $P_n = \rho_n{}^{i\Phi_n}$ vaz edelim. $\log P_n$ nin esas değerini göz önüne alırsak $\arg P_n = \Phi_n$, $-\pi < \Phi_n \leq \pi$ şartını sağlar. P_n yakınsak ise n sonsuz için Φ_n nin limiti vardır (çünkü $|P_n| = \rho_n$ yakınsaktır). Şimdi $1 + a_n = r_n e^{i\theta_n}$ vazedelim. $\log (1 + a_n)$ nın esas değerini göz önüne alırsak, $-\pi < \theta_n \leq \pi$ dir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \theta_n \to 0$$

Sonra, $S_n = \log P_n + 2k_n i\pi$. İmajiner kısımlar eşit kılınırsa $\theta_1 + \theta_1 + \ldots + \theta_n = \Phi_n + 2k_n\pi$ dir. Yani $2k_n\pi = \theta_1 + \ldots + \theta_n - \Phi_n$. Binaenaleyh

$$2\pi\,(k_{n+1} - k_n) = \theta_{n+1} - (\Phi_{n+1} - \Phi_n).$$

Halbuki $n \to \infty$ için sağ tarafın limiti sıfırdır. O halde n yeter derecede büyük alınırsa $|2\pi\,(k_{n+1} - k_n)| < 2\pi$. Fakat k_n tam sayı olduğundan $k_{n+1} = k_n = k$. Yani $n > n_0$ için $S_n = \log P_n + 2ki\pi$, ve $n \to \infty$ için

$$S_n \to S = \log P + 2ki\pi$$

TARİF 2. $\prod_1^{\infty} (1 + a_n)$ sonsuz çarpımına mutlak yakınsaktır denir şayet $\sum_1^{\infty} \log (1 + a_n)$ mutlak yakınsak ise.

Teorem 5.1.1.2. $\prod_1^{\infty} (1 + a_n)$ mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum_1^{\infty} |a_n|$ yakınsak olmalıdır.

İspat. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\log (1 + z)}{z} = 1$ olduğuna göre şayet $\sum_1^{\infty} \log (1 + a_n)$

veya $\sum_1^\infty |a_n|$ serilerinden herhangi biri yakınsak ise $a_n \to 0$ dır, ve yukardaki limit tatbik edilebilir. Limitin tarifinden dolayı verilen bir $\varepsilon > 0$ için n yeter derecede büyük alınırsa

$$(1 - \varepsilon)\ |a_n| < |\log(1 + a_n)| < (1 + \varepsilon)\ |a_n| \qquad (5.1.1.1)$$

Binaenaleyh $\sum_1^\infty \log(1 + a_n)$ ile $\sum_1^\infty a_n$ aynı zamanda mutlak yakınsaktır.

5.1.2. **Üniform Yakınsak Sonsuz Çarpımlar.** *TARİF* 3. $\prod_1^\infty [1 + u_n(z)]$ sonsuz çarpımı üniform yakınsaktır denir şayet $P_n(z) = \prod_1^n [1 + u_n(z)]$ kısmi çarpımı bir bölgede sıfır olmıyan bir limite üniform yakınsak ise.

Teorem 5.1.2.1. $\sum_1^\infty |u_n(z)|$ serisinin üniform yakınsak olduğu herhangi bir bölgede $\prod_1^\infty [1 + u_n(z)]$ aynı bölgede üniform yakınsaktır.

İspat. (5.1.1.1.) çift eşitsizliğinin sağ tarafındaki eşitsizlikten dolayı $\sum_1^\infty \log[1 + u_n(z)]$ aynı bölgede üniform yakınsaktır.

Teorem 5.1.1.1. den dolayı da (Üniform yakınsaklık için ifade edildiği takdirde) $\prod_1^\infty [1 + u_n(z)]$ aynı bölgede üniform yakınsaktır.

2. Tam Fonksiyonlar-Kanonik Çarpımlar.

5.2.1. *TARİF* 4. Bütün sonlu kompleks düzlemde analitik bir fonksiyona *tam fonksiyon* denir.

$g(z)$ bir tam fonksiyon ise, $f(z) = e^{g(z)}$ de bir tam fonksiyondur ve $\neq 0$. Karşıt olarak,

Teorem 5.2.1.1. Hiç sıfırı olmıyan bir tam fonksiyon $e^{g(z)}$ şeklindedir.

İspat. Filhakika, $f(z)$ sıfır olmıyan herhangi bir tam fonksiyon olsun. $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ bütün sonlu düzlemde analitiktir. Cauchy integral teoremi tatbik

edilirse $\int_0^z f'(z)/f(z)\, dz$ yola tâbi değildir. Dolayısile *Morera* teoreminden dolayı

$$g(z) = \int_0^z \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

bütün sonlu düzlemde analitiktir ve $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ dir. Halbuki $f(z)e^{-g(z)}$ in türevi hesaplanacak olursa sıfır olduğu görülür. Binaenaleyh $f(z)e^{-g(z)} = C$. Buradan $f(z) = Ce^{g(z)}$ bulunur. $C = e^{\log C}$ olarak yazılırsa arzu edilen neticeye varılır.

Aynı metodla sonlu sayıda sıfır yerleri olan en genel tam fonksiyon bulunabilir. Farzedelim ki $z = 0$ m inci mertebeden bir sıfır yeridir ($m = 0$ olabilir). Diğer sıfır yerlerini $a_1, a_2, \ldots a_N$ ile gösterelim. Bu dizide katlı sıfırlar tekrar edilmiştir. Bu takdirde $\dfrac{f(z)}{z^m(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_N)}$ hiç sıfırı olmıyan bir tam fonksiyondur.

Binaenaleyh

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_1^N (z - a_n).$$

Fakat sıfır yerlerinin sayısı sonsuz ise, yukardaki muhakemeyi tatbik edebilmemiz için çarpımları o şekilde yazmayıp

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad (5.2.1.1)$$

şeklinde yazmak daha doğru olur.

(5.2.1.1) ifadesi formel olarak aşağıdaki şekle teşmil edilebilir.

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad (5.2.1.2)$$

Yalnız, sağdaki ifade $f(z)$ yi gösterebilmesi için sonlu düzlemin her sınırlı kapalı bölgesinde $\prod_1^\infty \left(1 - \dfrac{z}{a_n}\right)$ üniform yakınsak olmalıdır. Bu takdirde sonsuz çarpım, $f(z)$ nin $z = 0$ hariç, aynı sıfır yerlerini haizdir. Binaenaleyh $\dfrac{f(z)}{\prod_1^\infty \left(1 - \dfrac{z}{a_n}\right)}$, $z^m e^{g(z)}$ şeklindedir. Biliyoruz ki (5.2.1.2) deki çarpım,

mutlak yakınsaktır yalnız ve yalnız $\sum_1^\infty \frac{1}{|a_n|}$ yakınsak ise, üstelik yakınsaklık her bir $|z| \leq R$ dairesinde üniformdur.

Umumiyetle $\sum_1^\infty \frac{1}{|a_n|}$ serisi yakınsak değildir. Bu noksanlığı gidermek için *Weierstrass* herbir $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ faktörüne $e^{p_n(z)}$, $p_n(z)$ polinomdur, faktörünü ekliyerek $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)}$ sonsuz çarpımını yakınsar hale getirmiştir.

Teorem (*Weierstrass*) 5.2.1.2. Herhangi bir (a_n) kompleks sayı dizisi verildiğine göre öyleki her $a_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ dır, bu takdirde $\exists p_n(z)$ polinomu ∋

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)} \tag{5.2.1.3}$$

bir tam fonksiyona yakınsaktır.

İspat. Biliyoruz ki (5. 2. 1. 3) çarpımı

$$\sum_1^\infty \left[\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_n(z)\right]$$

serisi ile aynı zamanda yakınsar. Bu serinin genel terimini

$$v_n(z) = \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_n(z)$$

ile gösterelim. Burada logaritmanın o dalını seçiyoruz ki $v_n(z)$ in imajiner kısmı $-\pi$ ile π (dahil) arasında olsun.

Verilen bir R için $|a_n| < R$ e tekabül eden terimleri göz önüne alırsak, $\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ nin esas dalı $|z| \leq R$ için analitiktir ve dolayısiyle $z = 0$ da Taylor serisine açılabilir.

$$\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 - \dots.$$

Şimdi

$$p_n(z) = \frac{z}{a_n} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 + \dots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$$

alalım. Bu takdirde

$$v_n(z) = \frac{1}{m_n + 1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} + \frac{1}{m_n + 2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2} + \dots$$

ve

$$|v_n(z)| \leq \frac{1}{m_n + 1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \frac{1}{1 - \frac{R}{|a_n|}}$$

Farzedelim ki

$$\sum_1^\infty \frac{1}{m_n + 1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \tag{5.2.1.4}$$

serisi yakınsaktır. Bu takdirde $n \to \infty$ için $\frac{1}{m_n + 1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \to 0$.

Binaenaleyh

$$v_n(z) \to 0.$$

Dolayısiyle

$$Re\,(v_n(z)) \to 0, \qquad Im\,(v_n(z)) \to 0.$$

O halde n yeter derecede büyük alınırsa $-\pi < \mathrm{Im}\,(v_n(z)) \leq \pi$. Diğer taraftan *Weierstrass M-Kriterinden* dolayı $\sum_1^\infty v_n(z)$, $|z| \leq R$ için mutlak ve üniform yakınsaktır. Binaenaleyh (5.2.1.3) $|z| < R$ de bir analitik fonksiyon gösterir. R keyfi olduğundan, istenildiği kadar büyük alınabilir ve dolayısiyle (5. 2. 1. 3) bir tam fonksiyon gösterir. Zira $|a_n| \leq R$ sayılarına tekabül eden sonlu sayıda faktörlerin her biri bütün sonlu düzlemde analitiktir.

En son göstermeliyiz ki (5.2.1.4) her R için daima yakınsak yapılabilir. Meselâ $m_n = n$ vaz eder ve $\frac{1}{n+1}$ yerine daima 1 alırsak bu seri $\sum_1^\infty \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{n+1}$ tarafından *majore* edilmiş olur. $\sum_1^\infty \left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1}$ $|z| \leq R$ için üniform yakınsaktır. Filhakika $\sum_1^\infty \left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1}$ serisinin $\sum_1^\infty \left|\frac{R}{a_n}\right|^{n+1}$ majore serisi yakınsaktır.

Not. *Borel* gösterdi ki, yakınsaklığı sağlamak için $m_n + 1 > \log n$ almak kâfidir. Filhakika bu takdirde $\sum_1^\infty \left|\frac{R}{a_n}\right|^{\log n}$ yakınsaktır, zira ge-

nel terim, $e^{\log n \log \left|\frac{R}{a_n}\right|} = n^{\log \left|\frac{R}{a_n}\right|}$ yazılabilir. n nin büyük değerleri için $\frac{R}{|a_n|} < e^{-2}$. Binaenaleyh

$$n^{\log \left|\frac{R}{a_n}\right|} < n^{-2}$$

Şu halde *Weierstrass* teoremi aşağıdaki şekilde tamamlanabilir.[1]

Teorem 5.2.1.3. (a_n), sıfır yerlerinin sonsuz dizisi olsun öyleki $a_n \neq 0$ ve $a_n \to \infty$. Bu takdirde sıfır yerleri yalnız a_n yerleri olan herbir tam fonksiyon

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}} \qquad (5.2.1.5)$$

şeklinde yazılabilir.

TARİF 5. Kutup yerleri hariç bir G bölgesinde analitik bir fonksiyona G de *meromorf*tur denir.

Teorem 5.2.1.3 ün bir neticesi olarak aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz.

Teorem 5.2.1.4. Bütün düzlemde meromorf herhangi bir fonksiyon iki tam fonksiyonun bölümüdür.

İspat. Filhakika $F(z)$ meromorf fonsiyonunun kutup yerlerini sıfır yerleri olarak kabul eden bir tam $g(z)$ fonksiyonu mevcut olduğuna göre

$$F(z)\, g(z) = f(z)$$

bir tam fonksiyondur. Binaenaleyh

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

5.2.2. Farzedelim ki m_n, n ye tâbi değildir. Bu takdirde $m_n = h$ vazedebiliriz. Gördük ki

$$\prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h} \qquad (5.2.1.6)$$

sonsuz çarpımı yakınsaktır ve bir tam fonksiyonu gösterir şayet bütün R ler için $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{h+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{h+1}$ yakınsak ise. Yani

[1] Yeni gelişmeler için bak: H. Florack, Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannshen Flächen, Schr. Math. Inst. Univ. Münster 1 (1948).

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{h+1}} < \infty$$

Farzedelim ki h, bu serinin yakınsaklığını temin eden en küçük tam sayıdır. Bu takdirde

TARİF 6. (5.2.1.6) ifadesine *Kanonik Çarpım* denir ve h, kanonik çarpımın *Cinsi* dir. (5.2.1.5) gösteriminde daima kanonik çarpım kullanılır, zira bu takdirde (5.2.1.5) birtektir.

TARİF 7. $g(z)$ tam fonksiyonu bir polinom ise $f(z)$ nin cinsi sonludur denir.

TARİF 8. $f(z)$ nin *cinsi* diye $g(z)$ polinomunun derecesi ile kanonik çarpımın cinsini gösteren sayıların en büyüğüne denir.

Misâl. (i) $Cz^m \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$, öyleki $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty$ dır, tam fonksiyonunun cinsi sıfırdır. Çünkü burada $h = 0$ ve $\log C$ de derecesi 0 olan bir polinomdur.

(ii) $z^m e^{\alpha z} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}$, öyleki $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$ dır, $h = 1$ ve $g(z) = \alpha z$ in derecesi 1 dir. Binaenaleyh gösterilen tam fonksiyonun cinsi 1 dir. Diğer taraftan $z^m e^{\alpha z} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$, öyleki $\sum \frac{1}{|a_n|} < \infty$, $\alpha \neq 0$ dır, nın cinsi yine 1 dir (burada $h = 0$, $g(z) = \alpha z$ in derecesi 1 dir).

Tatbikat. $\sin \pi z$ in kanonik gösterimini yazalım. $\sin \pi z$ in sıfırları $z = \pm n$ tam sayılarıdır. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ve $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ olduğundan $h = 1$ dir. Binaenaleyh

$$\sin \pi z = z\, e^{g(z)} \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

Burada 'ün manası, $\prod_{-\infty}^{\infty}$ sonsuz çarpımında $n = 0$ yok demektir. Görülüyor ki yalnız sıfırların bilinmesi $\sin \pi z$ yi tamamiyle belirtmez $g(z)$ yi ilerde hesaplıyacağız.

5.2.3. **Kısmi kesirler.** Biliyoruz ki bir rasyonel fonksiyon kısmi kesirlere ayırt edilerek gösterilebilir. Burada aynı şeyi keyfi olarak verilmiş bir meromorf fonksiyon için yapacağız.

Farzedelim ki $f(z)$ verilen bir G bölgesinde meromorftur. Herbir a_ν kutup noktasındaki Laurent açılımlarını göz önüne alalım. Bu açılımların *esas kısımları* $P_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$ polinomlarıdır. $\sum_\nu P_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$ yi $f(z)$ den çıkarırsak geriye kalan $g(z)$ G de analitiktir. Yani

$$f(z) = \sum_\nu P_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) + g(z)$$

dir. Yalnız umumiyetle $\sum_\nu P_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$ sonlu değildir. Bu takdirde serinin yakınsak olup olmadığı mevzuu bahistir. $\sum_\nu P_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$ yakınsak ise mesele yok, aksi halde sonsuz çarpımlarda olduğu gibi burada da bir p_ν polinomunun ithali ile, ki bu $f(z)$ nin kutup sayısını ve yerlerini değiştirmez, $\sum_\nu (P_\nu - p_\nu)$ yakınsak yapılabilir.

G yi bütün sonlu düzlem farzederek meseleyi en genel halinde çözebiliriz. Bu teorem, G herhangi bir bölge olmak şartıyle *Mittag Lefflere* aittir.

Teorem 5.2.3.1. (a_ν) bir kompleks sayı dizisi olsun, öyleki $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \infty$. Herbir a_ν ye sabit terimi olmayan bir $P_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$ polinomunu veya $G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$ tam fonksiyonunu tekabül ettirelim. Bu takdirde (a_ν) dizisinin noktaları hariç bütün sonlu düzlemde analitik bir fonksiyon bulunabilir öyleki a_ν noktalarındaki esas kısımları $G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$ dür. Üstelik bu tipte en genel fonksiyon

$$f(z) = \sum_\nu \left[G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) - p_\nu(z) \right] + g(z)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $p_\nu(z)$ polinomları o şekilde seçilmiştir ki $\sum_\nu$ herhangi bir sınırlı kapalı bölgede üniform yakınsaktır. $g(z)$ ise bütün sonlu düzlemde analitiktir.

İspat. Farzedelim ki her bir $a_\nu \neq 0$. Herbir a_ν ye bir $M_\nu > 0$ sayısı tekabül ettirelim öyleki $\sum_\nu M_\nu < \infty$. C, merkezi $z = 0$ da ve yarı çapı R olan bir

çember olsun. $G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$, $|a_\nu| > R$ için $|z| \leq R$ de analitiktir ve dolayısiyle

$$G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) = \alpha_{\nu,0} + \alpha_{\nu,1} z + \ldots + \alpha_{\nu,n_\nu} z^{n_\nu} + \ldots$$

Bu seri C nin içinde ve üzerinde üniform yakınsaktır. Binaenaleyh n_ν yeter derecede büyük alınırsa $|z| \leq R$ için

$$\left| G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) - \alpha_{\nu,0} - \alpha_{\nu,1} z - \ldots - \alpha_{\nu,n_\nu} z^{n_\nu} \right| < M_\nu.$$

Şimdi

$$p_\nu(z) = \alpha_{\nu,0} + \alpha_{\nu,1} z + \ldots + \alpha_{\nu,n_\nu} z^{n_\nu}$$

vazedersek

$$\left| G\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) - p_\nu(z) \right| < M_\nu.$$

C nin içinde ve üzerinde olan a_ν ler için

$$F_1(z) = \sum_{\nu=1}^{p} \left[G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) - p_\nu(z) \right]$$

toplamını teşkil edelim.

$$F_2(z) = \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \left[G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) - p_\nu(z) \right]$$

serisi C nin içinde ve üzerinde mutlak ve üniform yakınsaktır. Binaenaleyh $F_2(z)$ C nin içinde analitiktir. Dolayısile $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$ C nin içinde $F_1(z)$ nin aynı singüler noktalarını ve aynı esas kısımlarını haizdir. C keyfi alındığından teoremin birinci kısmı ispatlanmıştır. Açık olarak $F(z)$ ye bir $g(z)$ polinomu veya tam fonksiyonu ilâve edilirse $f(z) = F(z) + g(z)F(z)$ in aynı singüler noktalarını ve aynı esas kısımlarını haizdir.

Not. Verilen ispat tarzı tatbik edilebilme bakımından çok geneldir. Meselâ maksada uygun bir $\sum_\nu M_\nu < \infty$ serisi bulmakta güçlük vardır. Bunun için tatbikat bakımından ne şekilde hareket edileceğini aşağıda gösteriyoruz.

Tatbikat. Farzedelim ki $z = 0$ kutup yeri değildir ve

$$G_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right) = \frac{1}{z-a_\nu}.$$

Sonra

$$\frac{1}{z-a_\nu} = -\frac{1}{a_\nu} - \frac{z}{a^2_\nu} - \dots - \frac{z^{n_\nu-1}}{a_\nu^{n_\nu}} + \frac{1}{z-a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{n_\nu}$$

dır. Şimdi

$$-p_\nu(z) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{z}{a^2_\nu} + \dots + \frac{z^{n_\nu-1}}{a_\nu^{n_\nu}}$$

alırsak, başlangıçtan sonlu sayıda terimler hariç $\sum\limits_{1+q}^{\infty} \frac{1}{z-a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{n_\nu}$ serisinin, merkezi $z = 0$ da olan herbir dairede mutlak ve üniform yakınsaklığını temin etmek kâfidir.

$$\sum_{1+q}^{\infty} \frac{1}{z-a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right) = -\sum_{1+q}^{\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)z}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{n_\nu+1}$$

yazılırsa görülür ki

$$\sum_\nu \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{n_\nu+1}$$

in aynı bölgede mutlak ve üniform yakınsak olması kâfidir. Şayet her h için

$$\sum_\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{h+1}$$

yakınsak ise $n_\nu = h$ alınır. Böyle bir tam sayı yoksa $n_\nu = \nu$ veya $n_\nu + 1 > \log \nu$ alınır.

M i s a l. $\pi \cot \pi z - \frac{1}{z}$ in birinci mertebeden kutup noktaları $z = \nu$, $\nu \neq 0$ tam sayı. Bu noktalardaki rezidü 1 dir. Sonra $\Sigma \frac{1}{\nu^2}$ yakınsaktır. Binaenaleyh $h = 1$ ve $n_\nu = 1$. Yani $p_\nu(z) = -\frac{1}{a_\nu} = -\frac{1}{\nu}$.

Binaenaleyh

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right) + g(z).$$

Burada $g(z)$ tam fonksiyondur. Fakat diyorum ki $g(z) \equiv 0$.

Filhakika

$$g(z) = \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} - \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{z+\nu}\right)$$

Derhal görülüyor ki $g(z)$ peryodu 1 olan peryodik bir fonksiyondur. Yani

$$g(z+1) = g(z)$$

Biliyoruz ki $\sum\limits_1^{\infty}$ serisi, başlangıçtan birkaç terim sarfınazar edilirse merkezi $z = 0$ da olan herbir dairede mutlak ve üniform yakınsaktır. Binaenaleyh $\sum\limits_1^{\infty}$, $|y| > 1$ için mutlak üniform yakınsaktır. Şu halde $|y| \to \infty$ için $\sum\limits_1^{\infty}$ serisinin limitini bulmak için ayrı ayrı herbir terimin limiti alınabilir.

Binaenaleyh

$$\lim_{|y|\to\infty}\left[-\frac{1}{z} - \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{z+\nu}\right)\right] = 0.$$

Şu halde

$$\lim_{|y|\to\infty} |g(z)| = \lim_{|y|\to\infty} \pi \,|\cot \pi z|$$

Halbuki

$$|\cos \pi z|^2 = \tfrac{1}{2}(\cosh 2\pi y + \cos 2\pi x)$$

$$|\sin \pi z|^2 = \tfrac{1}{2}(\cosh 2\pi y - \cos 2\pi x).$$

Binaenaleyh

$$\lim_{|y|\to\infty} |g(z)| = \pi$$

$|g(z)|$ nin, meselâ, $0 \leq x \leq 1$ period şeridinde sınırlı olduğu neticesine varabilmek için bu kâfidir. Binaenaleyh periodiklik hassasından dolayı $g(z)$ bütün düzlemde sınırlıdır. *Liouville* teoreminden dolayı $g(z)$ sabittir. Binaenaleyh,

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} - \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2-\nu^2} = C$$

Fakat z yerine $-z$ konursa, sol taraf işaret değiştirir. Binaenaleyh $C = 0$ dır. Binnetice

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2-\nu^2} \qquad (5.2.3.1)$$

§ 5.2.2 deki tatbikatı yeniden ele alalım. Yani

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

Logaritmik türevi hesaplayalım.

$$\log \sin \pi z = \log z + g(z) + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left[\log\left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n}\right].$$

Binaenaleyh

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + g(z) + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

§ 5.2.3 deki misâl ile karşılaştırırsak

$$g'(z) = 0 \quad \text{ve} \quad g(z) = C$$

bulunur. Fakat $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin \pi z}{z} = \pi = e^C$ olduğundan

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \qquad (5.2.3.2)$$

veya

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

bulunur. (5.2.3.2) formülü gösteriyor ki $\sin \pi z$ cinsi 1 olan bir tam fonksiyondur.

5.2.4. **Poisson Formülü.** Farzedelim ki $f(z)$, $\Gamma : |z| \leq R$ de analitiktir. $z = re^{i\theta}$, dairenin içinde bir nokta ve $\zeta = Re^{i\Phi}$ çemberin üzerinde bir nokta olsun. Bu takdirde, $u(r,\theta)$ kutupsal koordinatlar cinsinden $f(z)$ in reel kısmı olduğuna göre

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \Phi) + r^2}\, u(R, \Phi)\, d\Phi.$$

İspat. Bu formül Cauchy Formülünün benzeridir. İspatına gelince, $f(z)$, $|z| \leq R$ de analitik olduğundan orada $f(z) = \sum\limits_0^{\infty} a_n z^n$ dir. Diyorum ki genelliğe halel getirmeden a_n leri reel farzedebilirim. Filhakika $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ vazedersek $f(z) = \sum\limits_0^{\infty} \alpha_n z^n + i \sum\limits_0^{\infty} \beta_n z^n = f_1(z) + if_2(z)$ yazılabilir. $|\alpha_n| \leq |a_n|$, $|\beta_n| \leq |a_n|$ olduğundan $\sum\limits_0^{\infty} \alpha_n z^n$, $\sum\limits_0^{\infty} \beta_n z^n$, $|z| \leq R$ de üniform yakınsaktır ve dolayısıyle $f_1(z)$, $f_2(z)$ $|z| \leq R$ de analitiktir. Diğer taraftan $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(f_1) + \mathrm{Re}(if_2)$ dir. Ayrı ayrı $\mathrm{Re}(f_1)$ ve $\mathrm{Re}(if_2)$ için Poisson formülü yazılacak olursa yukardaki formülün elde edildiği açık olarak görülür. Şimdi özel hali göz önüne alarak $f(re^{i\theta}) = u + iv$ vazedelim. Binaenaleyh $f(re^{-i\theta}) = u - iv$. $f(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$ vazedelim. Cauchy formülünden dolayı

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

yani

$$u(z) + iv(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[u(\zeta) + iv(\zeta)]\, Re^{i\Phi}\, d\Phi}{Re^{i\Phi} - re^{i\theta}} \qquad (5.2.4.1)$$

$\dfrac{R^2}{z}$ noktası Γ nın dışında olduğundan

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{u(\zeta) + iv(\zeta)}{\zeta - \frac{R^2}{z}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[u(\zeta) + iv(\zeta)]\, Re^{i\Phi}\, d\Phi}{Re^{i\Phi} - \frac{R^2}{re^{i\theta}}}$$

Φ yi $-\Phi$ ile değiştirirsek

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[u(\zeta) - iv(\zeta)]\, Re^{-i\Phi}\, d\Phi}{Re^{-i\Phi} - \frac{R^2}{re^{i\theta}}}.$$

Yani

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[u(\zeta) - iv(\zeta)]\, re^{i\theta}\, d\Phi}{-re^{i\theta} + Re^{i\Phi}} = 0 \qquad (5.2.4.2)$$

(5.2.4.1) ve (5.2.4.2) formüllerini toplarsak

$$u(z) + iv(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u(\zeta) \frac{Re^{i\Phi} + re^{i\theta}}{Re^{i\Phi} - re^{i\theta}} + iv(\zeta)\right] d\Phi$$

veya

$$u(z) + iv(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u(\zeta)\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) + iv(\zeta)\right] d\Phi.$$

Nihayet reel kısımlar göz önüne alınırsa

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta)\, \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) d\Phi.$$

Bu ise istenilen neticenin aynıdır.

Şimdi farzedelim ki $f(z)$ $\Gamma : |z| \leq R$ de analitiktir ve orada sıfır değildir. Bu takdirde $\log |f(z)|$ Γ da harmoniktir. Filhakika $\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$ Γ da analitiktir. Binaenaleyh $\log |f(z)|$ için Poisson formülü

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\zeta)| \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) d\Phi.$$

dir. Özel olarak

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\Phi})| \, d\Phi. \qquad (5.2.4.3)$$

Şayet $f(z)$ nin çember üzerinde sıfır yerleri varsa (5.3.4.3) formülü yine doğrudur. Filhakika farzedelim ki ζ_j bir sıfır yeridir.

$$\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{N} (z - Re^{i\Phi_j})}$$

Γ da analitiktir ve sıfır değildir. Binaenaleyh (5.2.4.3) tatbik edilebilir.

$$\log \frac{|f(0)|}{R^N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|f(\zeta)| \, d\Phi}{\left| \prod_j (\zeta - Re^{i\Phi_j}) \right|}$$

Yani

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\Phi})| \, d\Phi - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\Phi} - e^{i\Phi_j}| \, d\Phi.$$

Gösterelim ki her j için

$$\int_0^{2\pi} \log |e^{i\Phi} - e^{i\Phi_j}| \, d\Phi = 0.$$

Yani

$$\int_0^{2\pi} \log |e^{i(\Phi - \Phi_j)} - 1| \, d\Phi = 0.$$

Sol taraftaki integral Φ_j ye tâbi değildir. Hakikatte $\Phi_j = 0$ almakta mahzur yoktur. Yani

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| \, d\theta = 0$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Halbuki $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ göz önün-

de tutulursa $\sin \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{e^{i\theta} - 1}{2ie^{\frac{i\theta}{2}}}$. Binaenaleyh

$$2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| = |e^{i\theta} - 1|.$$

Dolayısıyla

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| \, d\theta = 2\pi \log 2 + \int_0^{2\pi} \log \sin \frac{\theta}{2} \, d\theta$$

$$= 2\pi \log 2 + 2 \int_0^{\pi} \log \sin \theta \, d\theta$$

Halbuki (§ 5.4.5)

$$\int_0^{2\pi} \log \sin \theta \, d\theta = -\pi \log 2$$

5.2.5. **Jensen Formülü.** (5.2.4.3) formülü daha da genelleştirilebilir. Farzedelim ki $f(z)$, $|z| < R$ de, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yerlerinde sıfırdır. Şayet $f(z)$ a_i de m defa sıfırsa, a_i yukardaki dizi de m defa tekrar edilmiştir. Üstelik, şimdilik, farzedelim ki $z = 0$ bir sıfır yeri değildir. Bu takdirde

$$F(z) = f(z) \prod_{i=1}^{n} \frac{R^2 - \bar{a}_i z}{R(z - a_i)}$$

Γ nın içinde sıfır değildir. Diğer taraftan çemberin üzerinde $|F(\zeta)| = |f(\zeta)|$ dir. Binaenaleyh (5.2.4.3) $F(z)$ e tatbik edilebilir.

$$\log |F(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\Phi})| \, d\Phi$$

Halbuki

$$|F(0)| = |f(0)| \prod_1^n \frac{R}{|a_i|}, \quad \log |F(0)| = \log |f(0)| + \sum_1^n \log \frac{R}{|a_i|}$$

Binaenaleyh,

$$\log |f(0)| = -\sum_1^n \log \frac{R}{|a_i|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\Phi})| \, d\Phi. \qquad (5.2.5.1)$$

Şayet $f(0) = 0$ ise, $f(z) = Cz^h + \ldots$ dır, ve $\dfrac{f(z)}{z^h} = C + \ldots$

(5.2.5.1) formülü $F(z) = \frac{f(z)}{z^h}$ ya tatbik edilebilir. $\log |F(0)| = \log |C|$ dir. Halbuki

$$\log \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^h} \right| = \log |f(\zeta)| - h \log |\zeta| = \log |f(Re^{i\Phi})| - h \log R$$

Binaenaleyh

$$\log |C| + h \log R = - \sum_1^n \log \frac{R}{|a_i|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\Phi})| \, d\Phi.$$

Poisson formülü ayni şekilde genelleştirilebilir.

5.2.6. **Poisson-Jensen Formülü.** Poisson formülü $\log |F(z)|$ ye tatbik edilirse

$$\log |f(z)| = - \sum_1^n \log \left| \frac{R^2 - \bar{a}_i z}{R(z - a_i)} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) \log |f(\zeta) d\Phi.$$

Burada $z = 0$ yapılırsa $(f(0) \neq 0)$ (5.2.5.1) elde edilir.

Not. (5.2.5.1) formülü, $|f(z)|$ modülünü sıfır yerlerinin $|a_i|$ modüllerine bağladığından sıfır yerlerinin dağılımında çok önemli rol oynar.

5.2.7. **Bir Tam Fonksiyonun Cinsi ile Mertebesi Arasındaki Bağıntı.** (5.2.5.1) formülünü, bir $f(z)$ tam fonksiyonunun cinsi ile, z sonsuza yaklaştığı zaman $f(z)$ in büyüme nisbeti arasındaki çok sıkı irtibatı etüt etmek için kullanacağız.

Bu formülün ehemmiyetini taktir edebilmek için bir polinomun sonsuzdaki durumunu tetkik etmek kâfidir. Filhakika sonsuzda bir $g(z)$ polinomunun durumu $a_n z^n$ nin durumu gibidir. Diğer taraftan $g(z)$ nin n sıfırı olduğuna göre sonsuzdaki durumu ile sıfır yerlerinin sayısı arasındaki münasebet belirmiş olur. Aynı münasebet Jensen formülünde görülür.

Notasyon. *Weierstrass kanonik çarpımını* $P(z)$ ile göstereceğiz. Bu çarpımdaki herbir faktöre (çarpana) *Weierstrass primer faktörü* denir ve $E\left(h; \frac{z}{a_n}\right)$ diye yazılır.

Burada

$$E(h; u) = (1 - u) e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^h}{h}}$$

O halde,

$$P(z) = \Pi E \left(h ; \frac{z}{a_n}\right)$$

dir.

TARİF 9. $f(z)$ bir tam fonksiyon olsun, $|z| = r$ çemberi üzerinde $|f(z)|$ in maksimumunu $M(r)$ ile gösterelim. *Borel*, $f(z)$ tam fonksiyonunun *mertebesini*

$$\lambda = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

olarak tarif ediyor.

Üst limitin tarifinden dolayı, $\varepsilon > 0$ verildiğine göre r nin, bir değerden büyük bütün değerleri için

$$\frac{\log \log M(r)}{\log r} < \lambda + \varepsilon.$$

Yani

$$M(r) < e^{r^{\lambda + \varepsilon}} \qquad (5.2.7.1)$$

ve r nin sonsuz değerleri için

$$M(r) > e^{r^{\lambda - \varepsilon}}$$

O, o, $\sim$ Sembollerinin Tarifi.

1. (i) $z \to \alpha$ için $f(z) = O(1)$ in mânası, α noktasının bir civarında $|f(z)|$ sınırlıdır demektir. Yani z ye tâbi olmıyan A ve δ pozitif sayıları mevcuttur öyle ki $|z - \alpha| < \delta$ için $|f(z)| < A$ dır.

(ii) Şayet $z \to \alpha$ için $\frac{f(z)}{g(z)} = O(1)$ ise bu takdirde $f(z) = O(|g(z)|)$ yazacağız. Yani z ye tâbi olmıyan A ve δ pozitif sayıları mevcuttur öyleki $|z - \alpha| < \delta$ için $|f(z)| < A \, |g(z)|$.

2. (i) Şayet $z \to \alpha$ için $f(z) \to 0$ ise bu takdirde $f(z) = o(1)$

(ii) Şayet $z \to \alpha$ için $\frac{f(z)}{g(z)} \to 0$ ise bu takdirde $f(z) = o(|g(z)|)$ yazacağız.

3. $z \to \alpha$ için $f(z) \sim g(z)$ ($f(z)$ *asimpototik* $g(z)$ okunur) in manası $\frac{f(z)}{g(z)} \to 1$ dir[1].

(1) Şayet $z \to \alpha$ için $f(z)/g(z) \to l \neq 0$ ise, bu takdirde diyoruz ki $z = \alpha$ civarında $f(z)$ ve $g(z)$ aynı *büyüklük mertebeden* dirler. Daha genel olarak $f(z)$ ve $g(z)$ aynı büyüklük mertebedendirler denir şayet $\exists A_1 > 0$, $A_2 > 0 \ni A_1 |g(z)| < |f(z)| < A_2 |g(z)|$. Şayet $|f(z)/g(z)| \to 0$ (∞) ise diyoruz *ki*. $z = \alpha$ civarında $f(z)$ in büyüklük mertebesi $g(z)$ in büyüklük mertebesinden küçüktür (büyüktür).

Bu sembollerin yanlış tefsirlerini önlemek için meselâ 1. (ii) nin mânasını biraz daha açıklıyorum. $z \to \alpha$ için $f(z) = O(|g(z)|)$, $|f(z)|$ in büyüklük mertebesi $|g(z)|$ in büyüklük mertebesini aşmıyor mânasındadır. Fakat bu demek değildir ki $|f(z)|$ in büyüklük mertebesi $|g(z)|$ in büyüklük mertebesinden küçük olamaz.

Misâl. $z \to \infty$ için $z = O(|z|^2)$.

O notasyonuna göre (5.2.7.1)

$$f(z) = O(e^{r^{\lambda+\varepsilon}})$$

olarak yazılır.

Farzedelim ki $f(z)$ nin cinsi sonlu ve bir kanonik gösterimi vardır.

$$f(z) = e^{g(z)}\, P(z). \qquad (5.2.7.2)$$

Üstelik farzedelim ki $f(z)$ nin cinsi h dır. Bu takdirde $g(z)$ bir polinomdur ve derecesi $h_0 \leq h$.

Teorem (*Poincaré-Hadamard*) 4.2.7.1. Bir $f(z)$ tam fonksiyonunun h cinsi ile mertebesi arasında $h \leq \lambda \leq h + 1$ bağıntısı mevcuttur.

İspat. Farzedelim ki $f(z)$ nin cinsi h dır. r nin büyük değerleri için $e^{g(z)} = O(e^{r^{h_0}})$. Binaenaleyh $e^{g(z)}$ nin mertebesi $\leq h$. $P(z)$ in mertebesi h_1 ise açık olarak $f(z)$ in mertebesi hem $e^{g(z)}$ nin hem de $P(z)$ nin mertebesini aşamaz. Bu takdirde $h_1 \leq h + 1$ olduğunu göstermek kâfidir. Bir kere $\Sigma \left| \frac{1}{a_n} \right|^{h+1} < \infty$ dır. Diyorum ki bütün u lar için

$$\log |E(h; u)| \leq (2h+1)\, |u|^{h+1} \qquad (5.2.7.1)$$

(i) $|u| < 1$ için gördük ki

$$\log |E(h; u)| \leq \frac{|u|^{h+1}}{h+1} + \frac{|u|^{h+2}}{h+2} + \ldots \leq \frac{1}{h+1}\, \frac{|u|^{h+1}}{1-|u|},$$

dolayısiyle

$$(1 - |u|) \log |E(h; u)| \leq |u|^{h+1} \qquad (5.2.7.2)$$

Diğer taraftan herhangi bir u ve $h > 0$ için

$$\log |E(h; u)| - \log |E(h-1; u)| = \frac{1}{h} \operatorname{Re}(u^h) \leq |u|^h.$$

Binaenaleyh

$$\log |E(h; u)| \leq \log |E(h-1; u)| + |u|^h \qquad (5.2.7.3)$$

(5.2.7.3) ü $|u|$ ile çarparak (5.2.7.2) ye ilâve edelim.

$$\log |E(h; u)| < |u| \log |E(h-1; u)| + 2\, |u|^{h+1}. \qquad (5.2.7.4)$$

Bu eşitsizlik $|u| < 1$ ve $h \geq 1$ için doğrudur.

(ii) $|u| \geq 1$, $h \geq 1$ için (5.2.7.4) doğrudan doğruya (5.2.7.3) yardımı ile elde edilir. Fakat bunun için $|E(h-1; u)| \geq 1$ farzedeceğiz. Aksi halde $\log |E(h-1; u)| < 0$ dır ve dolayısiyle (5.2.7.3) eşitsizliği

$$\log |E(h; u)| < |u|^h < (2h+1)\, |u|^{h+1}$$

şeklini alır. Yani (5.2.7.1) doğrudur. Şimdi h üzerinde indüksiyon yaparak (5.2.7.1) nin doğru olduğunu göstereceğiz. $h = 0$ için

$$E(0; u) = 1 - u$$

kabul edersek, $\log |E(0; u)| = \log |1 - u| \leq \log (1 + |u|) \leq |u|$. Yani (5.2.7.1) doğrudur. $h > 0$ için farzedelim ki $h - 1$ için (5. 2. 7. 1) doğrudur. Bu takdirde biliyoruz ki $h > 0$ için (5.2.7.4) doğrudur. Indüksiyon hipotezi göz önünde tutulursa

$$\log |E(h; u)| \leq |u|\, (2h-1)\, |u|^h + 2\, |u|^{h+1} = (2h+1)\, |u|^{h+1}.$$

Son olarak (5.2.7.1) eşitsizliği göz önünde tutulursa

$$\log |P(z)| = \Sigma \log \left| E\left(h; \frac{z}{a_n}\right) \right| \leq (2h+1)\, |z|^{h+1}\, \Sigma \left| \frac{1}{a_n} \right|^{h+1}.$$

Hipotezden dolayı $\Sigma \left| \frac{1}{a_n} \right|^{h+1} < \infty$. Binaenaleyh $P(z)$ nin mertebesi en fazla $h + 1$ dir.

Şimdi sol taraftaki eşitsizliği gösterelim. Yani $h \leq \lambda$. Bu takdirde farzediliyor ki $f(z)$ in mertebesi λ (sonlu) dır. h en büyük tam sayı olsun öyle ki $h \leq \lambda$ dır. Dolayısiyle $h + 1 < \lambda$. İspat etmeliyiz ki $\Sigma \left| \frac{1}{a_n} \right|^{h+1} < \infty$.

Bunun için Jensen formülünü kullanacağız. Bundan sonra R değişken olacağından, klasik notasyonlara göre ρ harfini kullanacağız. ρ yarı çaplı çemberin içindeki sıfır yerlerinin sayısını $\nu(\rho)$ ile göstereceğiz, $|a_n| < \rho$. $\nu(\rho)$ nun bir üst sınırını arayalım. Bunun için Jensen formülünü ρ dan büyük bir yarıçapa, meselâ 2ρ, tatbik edelim.

$$\log |f(0)| = -\sum_{i=1}^{N} \log \frac{2}{|a_i|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(2\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi$$

$$\sum_{1}^{N} \log \frac{2\rho}{|a_i|} = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{2\rho}{|a_i|} + \sum_{n+1}^{N} \log \frac{2\rho}{|a_i|} \geq \sum_{i=1}^{n} \log \frac{2\rho}{|a_i|}.$$

Binaenaleyh

$$\sum_{i=1}^{n} \log \frac{2\rho}{|a_i|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(2\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi - \log |f(0)|$$

Halbuki

$$\sum_{i=1}^{n} \log \frac{2\rho}{|a_i|} = \log \frac{2\rho}{|a_1|} + \log \frac{2\rho}{|a_2|} + \ldots + \log \frac{2\rho}{|a_n|} \geq \nu(\rho) \log 2.$$

Çünki $|a_i| < \rho$. Şu halde

$$\nu(\rho) \log 2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(2\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi - \log |f(0)|$$

Hipotezden dolayı

$$\log M(r) = O(r^{\lambda})$$

Binaenaleyh her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{\nu(\rho)}{\rho^{\lambda+\varepsilon}} = 0 \qquad (5.2.7.5)$$

Diğer taraftan a_n sıfırlarını, mutlak değerlerinin büyüklük sırasına göre yazalım:

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n| \leq \ldots$$

Bu takdirde $\rho = 2|a_n|$ alırsak, açık olarak $n \leq \nu(2|a_n|)$. n yi yeter derecede büyük alırsak (5.2.7.5) den dolayı

$$\frac{\nu(2|a_n|)}{2|a_n|^{\lambda+\varepsilon}} < \frac{1}{2^{\lambda+\varepsilon}}$$

yapılabilir. Yani $n \leq \nu(2|a_n|) < |a_n|^{\lambda+\varepsilon}$. Dolayısiyle

$$\left| \frac{1}{a_n} \right|^{\lambda+\varepsilon} < \frac{1}{n}.$$

Veya

$$\left| \frac{1}{a_n} \right|^{h+1} < \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{h+1}{\lambda+\varepsilon}}.$$

Halbuki

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{h+1}{\lambda+\varepsilon}}}$$

serisi $h + 1 > \lambda + \varepsilon$ için yakınsaktır. Neticede $\varepsilon < h + 1 - \lambda$ seçilirse

$$\sum_1^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{h+1}$$

yakınsaktır. Bununla göstermiş oluyoruz ki

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h}$$

şeklinde yazılabilir. Fakat daha henüz $g(z)$ nin derecesi en fazla h olan bir polinom olduğunu göstermedik.

Poisson-Jensen formülünün iki tarafı da analitik fonksiyonların reel kısımlarıdır. Binaenaleyh, bir sabit farkla, iki tarafın konjüge harmonik fonksiyonları da eşittir. Şu halde,

$$\log f(z) = -\sum_{i=1}^{n} \log \frac{\rho^2 - \bar{a}_i z}{\rho(z - a_i)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\zeta)| \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\varphi + i\,C$$

logaritmik türev alınırsa

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^{\nu(\rho)} \frac{1}{(z - a_n)} + \sum_1^{\nu(\rho)} \frac{\bar{a}_n}{\rho^2 - \bar{a}_n z} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\rho e^{i\varphi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi}{(\rho e^{i\varphi} - z)^2}$$

h defa z ye nazaran türev alınırsa

$$D^{(h)} \frac{f'(z)}{f(z)} = -h! \sum_1^{\nu(\rho)} \frac{1}{(a_n - z)^{h+1}} + h! \sum_1^{\nu(\rho)} \frac{\bar{a}_n^{h+1}}{(\rho^2 - \bar{a}_n z)^{h+1}} + (h+1)!$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\rho e^{i\varphi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi}{(\rho e^{i\varphi} - z)^{h+2}}$$

Şimdi $\rho \to \infty$ için hipotezden dolayı $\log |f(\rho e^{i\varphi})| = O(\rho^{\lambda})$, $\lambda < h+1$, binaenaleyh integralin limiti sıfırdır. İkinci toplamda z sabit tutulur $\rho > 2|z|$ alınırsa,

$$\left| \frac{\bar{a}_n}{\rho^2 - \bar{a}_n z} \right| \leq \frac{|\rho_n|}{\rho^2 - |x_n| \, |z|} < \frac{2}{\rho}.$$

Binaenaleyh bu toplamın limiti de sıfırdır. Çünkü

$$\left| \sum_1^{\nu(\rho)} \frac{\bar{a}_n^{n+1}}{(\rho^2 - \bar{a}_n z)^{h+1}} \right| \leq \sum_1^{\nu(\rho)} \frac{|a_n|^{n+1}}{|\rho^2 - \bar{a}_n z|^{h+1}} < \frac{2^{h+1} \nu(\rho)}{\rho^{h+1}}.$$

Halbuki gösterdik ki $\lim_{\rho \to \infty} \frac{\nu(\rho)}{\rho^{h+1}} = 0$. O halde

$$D^{(h)} \frac{f'(z)}{f(z)} = -h! \sum_1^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^{h+1}}$$

Diğer taraftan $f(z) = e^{g(z)}\,P(z)$ in logaritmik türevinin z ye nazaran h ıncı türevi

$$D^{(h)}\frac{f'(z)}{f(z)} = g^{(h+1)}(z) + D^{(h)}\frac{P'(z)}{P(z)}$$

Halbuki aşikâr olarak

$$D^{(h)}\frac{P'(z)}{P(z)} = -h!\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(a_n - z)^{h+1}}$$

Binaenaleyh $g^{(h+1)}(z) = 0$. Yani $g(z)$, derecesi $\leq h$ olan bir polinomdur. Bu ise Poincar-Hadamard teoreminin ispatını tamamlar.

3. Gamma Fonksiyonu.

5.3.1. Bu fonksiyon bir kaç şekilde tarif edilebilir. Fakat tam fonksiyonların teorisine bağlamak istiyorsak şu şekilde hareket edebiliriz. Gördük ki $\sin \pi z$ sıfırları : $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tam sayıları olan bir tam fonksiyondur. Bu fonksiyona tekabül eden kanonik çarpım

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

dir. Bu çarpımda n nin yalnız, meselâ, negatif değerlerini alırsak

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

kanonik çarpımı, sıfırları $z = -n$, $n = 1, 2 \ldots$, olan en basit tam fonksiyondur. Diğer taraftan $G(-z)$, sıfırları $z = n$, $n = +1, +2, \ldots$ olan tam fonksiyon olduğuna göre

$$G(z)\,G(-z) = \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

Binaenaleyh

$$z\,G(z)\,G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$

dir. $G(z-1)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Açık olarak $z = 0$, $z = -n$, $n > 0$ için $G(z-1) = 0$ dır. Yani $z = 0$ hariç $G(z-1)$, $G(z)$ nin ayni sıfırlarını haizdir. Binaenaleyh

$$G(z-1) = z\,e^{\gamma(z)}\,G(z)$$

dir. Burada $\gamma(z)$ bir tam fonksiyondur. $\gamma(z)$yi tayin etmek için iki tarafın logaritmik türevini alalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)$$

Soldaki seride $n = n' + 1$ vazedelim. Bu takdirde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n'} - \frac{1}{n'+1}\right) = \frac{1}{z} - 1$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Binaenaleyh $\gamma'(z) = 0$ ve $\gamma(z) =$ sabit. Bu sabit γ ile gösterilir ve buna Euler sabiti denir. γ nın değerini derhal hesaplıyabiliriz. $G(z-1) = z\,e^{\gamma}\,G(z)$ fonksiyonel denkleminde $z = 1$ yapılırsa $G(0) = e^{\gamma}\,G(1)$ dir. Fakat $G(z)$ in kanonik çarpımından $G(0) = 1$ olduğu görülür. Şu halde

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}$$

İki tarafın logaritması alınırsa

$$-\gamma = \sum_{1}^{\infty}\left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]$$

Yani

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Burada

$$S_n = \sum_{m=1}^{n}\left[\frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right] = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

Binaenaleyh

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

TARİF 10. $\Gamma(z)$ fonksiyonu diye $\dfrac{1}{e^{\gamma z}\, z\, G(z)}$ fonksiyonuna denir. Yani

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\gamma z}\, z\, G(z)}$$

$e^{\gamma}\, z\, G(z)$, sıfır yerleri $z = 0, -1, -2, \ldots, -n \ldots$ olan bir tam fonksiyon olduğuna göre $\Gamma(z)$, hiç sıfırı olmayan ve kutup yerleri $z = 0, -1, -2, \ldots$, olan bütün sonlu düzlemde meromorf bir fonksiyondur. Aşağıdaki ilk mühim formülü yani Euler formülünü veriyoruz.

Teorem 5.3.1.1. $\Gamma(z + 1) = z\, \Gamma(z)$

İspat. $H(z) = e^{\gamma z}\, G(z)$ vaz edersek

$$H(z-1) = \frac{e^{\gamma z}\, z\, G(z-1)}{e^{\gamma}} = e^{\gamma z}\, z\, G(z)$$

Binaenaleyh

$$H(z-1) = z\, H(z)\,.$$

Şimdi

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z\, H(z)}$$

olduğuna göre $\Gamma(z) = \dfrac{1}{H(z-1)}$ dir. Yani $\Gamma(z+1) = \dfrac{1}{H(z)}$. Neticede

$$\Gamma(z + 1) = z\, \Gamma(z)$$

$\Gamma(z)$ in tarifinden dolayı

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{z}{n}}}{1 + \frac{z}{n}} \right) \qquad (5.3.1.1)$$

Teorem 5.3.1.2. $\Gamma(z)\, \Gamma(1 - z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$.

İspat. $z\, G(z)\, G(-z) = \dfrac{\sin \pi z}{\pi}$ formülünde, $\Gamma(z)$ in tarifi gözönünde tutulursa

$$\Gamma(z)\, \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (5.3.1.2)$$

Teorem 5.3.1.3. $\Gamma(n) = (n - 1)\,!$

İspat. $\Gamma(z)$ in tarifinde $z = 1$ yapılırsa $\Gamma(1) = \dfrac{1}{e^{\gamma}\, G(1)} = 1$.

Fonksiyonel denklemde $z = 1$ yapılırsa $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ bulunur. Şimdi sıra ile aynı denklemden $\Gamma(3) = 1.2$, $\Gamma(4) = 1.2.3$ ve indüksiyon ile $\Gamma(n) = (n - 1)\,!$ bulunur.

(5.3.1.2) formülünde $z = \frac{1}{2}$ yaparsak $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$. Dolayısiyle $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Burada kabul edilen pozitif işareti $\Gamma(z)$ nin (5. 3. 1.1.) ifadesinden bellidir. Yani $x > 0$ için $\Gamma(x) > 0$ dır.

Teorem *(Legendre)* 5.3.1.4. $\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\, \Gamma(z)\, \Gamma(z + \frac{1}{2})$

İspat. (5.3.1.1) de logaritmik türevin türevi alınırsa

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z + n)^2} \qquad (5.3.1.2)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2}$$

$$= 4\left[\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n)^2} + \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n+1)^2}\right] = 4\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+m)^2}\right]$$

$$= 2\,\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)$$

Neticede

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = 2\,\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} + C_0$$

Yeniden integral alınırsa $\log\Gamma(z)\, \Gamma(z+\frac{1}{2}) = \log \Gamma(2z) + C_0\, z + C_1$. Son olarak

$$\Gamma(z)\, \Gamma(z + \tfrac{1}{2}) = e^{C_0 Z + C_1}\, \Gamma(2z)$$

Şimdi C_0 ve C_1 sabitlerini hesaplayalım. $z = \frac{1}{2}$ yaparsak

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\, \Gamma(1) = e^{\frac{C_0}{2} + C_1}\, \Gamma(1)$$

Binaenaleyh

$$\sqrt{\pi} = e^{\frac{C_0}{2} + C_1}$$

Buradan

$$\frac{C_0}{2} + C_1 = \log \sqrt{\pi}.$$

$z = 1$ yaparsak

$$\Gamma(1)\ \Gamma(1 + \tfrac{1}{2}) = e^{C_0+C_1}\ \Gamma(2)$$

Burada $\Gamma(2) = 1$ ve Euler formülü tatbik edilirse

$$\Gamma(1 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

O halde

$$C_0 + C_1 = \log\sqrt{\pi} - \log 2$$

ve

$$C_0 = -2\log 2, \qquad C_1 = \tfrac{1}{2}\log\pi + \log 2.$$

Binaenaleyh

$$e^{C_0 z + C_1} = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}.$$

Binaenaleyh

$$\Gamma(z)\ \Gamma(z + \tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\ 2^{1-2z}\ \Gamma(2z)$$

Yani

$$\sqrt{\pi}\ \Gamma(2z) = 2^{2z-1}\ \Gamma(z)\ \Gamma(z + \tfrac{1}{2})$$

Problem. C_0, C_1 katsayılarını Euler formülünü kullanmadan hesaplayınız.

Not. $\Gamma(z)$ fonksiyonu

$$\int_0^\infty e^{-t}\ t^{z-1}\ dt$$

integrali ile tarif edilebilir.

Bu integral $\mathrm{Re}(z) > 0$ için yakınsaktır. $\Gamma(z)$ nin bu iki tarifinin muadil olduğunu görebilmek için Cauchy rezidü teoreminin reel integrallerin hesabına tatbikini biraz daha incelemek icab ediyor.

4. Çevre İntegrali Hesabı

5.4.1. Bir C çevresini[1] göz önüne alalım öyle ki tek değerli bir $f(z)$ fonksiyonu çevrenin üzerinde, ve sonlu sayıda singüler noktalar hariç içinde analitiktir. Üstelik bu C çevresi o şekilde seçiliyor ki C nin bir kısmı reel ekseni ihtiva ediyor ve diğer kısmıyle birlikte sonsuza götürülüyor. Bu çeşit integral hesabına *Çevre integrali* hesabı denir. Şimdi olabilir ki C nin üzerinde $f(z)$ in sonlu sayıda singüler noktaları bulunabilir. Bu hali de inceleyeceğiz.

5.4.2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integralinin hesabı. Farzedelim ki $f(z)$, reel eksen üzerinde bulunmıyan sonlu sayıda kutup noktaları hariç $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ yarı üst düzlemde tek değerli ve analitiktir. Şimdi bir C çevresini göz önüne alalım, öyleki C, $-R$ ile R arasında bulunan Δ reel ekseni ile çapı bu Δ doğru parçası olan Γ üst yarı çemberini ihtiva etsin. Şimdi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ i hesaplıyabiliriz, şayet $R \to \infty$ için $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz$ mevcut ise. En basit hal, $|z|$ çok büyük için $f(z) = O(|z|^{-k})$ ya tekâbül eden haldir. Bu takdirde

$$\left| \int_\Gamma \right| < A\ |z|^{1-k}$$

$A > 0$ dır. Şayet $k > 1$ ise

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma = 0$$

Genel halde $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma$ yı hesaplamak biraz daha güçtür. Binnetice $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma = 0$ halinde, şayet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ âdi mânada mevcut ise yani $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\ dx, \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\ dx$ ayrı ayrı yakınsak iseler yani $\int_{-x_1}^{x_2} f(x)\ dx$ in biri diğerinden bağımsız olarak $x_2 \to \infty$, $x_1 \to \infty$ için bir limiti var ise, bu takdirde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\ dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{rezidü } f(z)$$

Fakat limit mevcut olduğu halde integral âdi mânada mevcut değilse, $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\ dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ in *Cauchy esas değeri* denir ve

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\ dx = \text{c. e. d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$$

Son olarak, şuna işaret etmek istiyoruz ki, Γ yerine, $R \to \infty$ için sonsuza giden herhangi bir eğri alınabilir. Hatta bazı maksatlar için, köşeleri $\pm R$, $\pm R + iR$ de olan bir dörtgen de çevre olarak alınabilir.

Misal. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^4 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\ dx = \dfrac{5\pi}{12}$

5.4.3. **Sonsuz İntegrallerin Cauchy Tarifi.** Bir $a \leq x \leq b$ kapalı aralığında bir $f(x)$ fonksiyonunun Riemann integralini tarif ederken $f(x)$ in bu

(1) Aksi iddia edilmedikçe basit kapalı çevreler bahis konusudur.

aralıkta sonlu olduğunu kabul ettik. Şimdi farzedelim ki $f(x)$ sonlu sayıda noktalarda sonsuzdur. Açık olarak $f(x)$ in bir tek c noktasında sonsuz olduğunu kabul edebiliriz. Şayet c ne a ne de b ise, yani c bir iç nokta ise $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ yeter derecede küçük iki sayı için

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx$$

ifadesini göz önüne alalım. Şayet bu ifadenin bağımsız olarak $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ için limiti var ise bu takdirde Cauchy ye göre diyoruz ki $f(x)$ in $[a, b]$ kapalı aralığında sonsuz integrali mevcuttur ve değeri tarif olarak

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to+0} \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx.$$

Olabilirki ayrı ayrı $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ için limit mevcut değildir, fakat

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right\}$$

mevcuttur. Bu takdirde bu limite sonsuz integralin Cauchy esas değeri denir ve

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right\} = \text{c.e.d} \int_a^b f(x)\,dx$$

yazılır. Şayet $f(x)$, meselâ a da sonsuz ve $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ mevcut ise bu takdirde $f(x)$ $[a, b]$ de Riemann integralini haizdir denir.

Bir sonsuz integralin Cauchy rezidü teoremi ile hesabında, çevre üzerinde, daha doğrusu reel eksen üzerindeki herhangi bir singüler noktayı c ile gösterelim. c den geçen ve uzunluğu 2δ olan küçük reel eksen parçası, merkezi c de ve çapı 2δ olan bir γ yarım çember parçası ile değiştirilir. Sonsuz integral bu şekilde değiştirilen yeni çevre ile hesaplanır ve sonra $\delta \to 0$ yapılır.

Misal. § 5.4.2. deki hipotezleri muhafaza edelim ve üstelik farzedelim ki $z = 0$ $f(z)$ için birinci mertebeden bir kutup yeridir. $f(z)$ nin $z = 0$ daki rezidüsüne b diyelim. γ yı alt yarı düzlemde alalım, bu takdirde γ nın yönü pozitiftir. $z = 0$ noktasında

$$f(z) = \frac{b}{z} + g(z)$$

Burada $g(z)$ $z = 0$ da analitiktir.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\pi^{2\pi} \frac{b}{\delta e^{i\theta}} \cdot i\delta e^{i\theta}\,d\theta + \int_\gamma g(z)\,dz = \pi i b + \int_\gamma g(z)dz$$

Fakat

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\gamma g(z)\,dz = 0.$$

Binaenaleyh $\lim\limits_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ farzedersek

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_\delta^\infty f(x)dx = 2\pi i \left\{ \sum_{Im(z)>0} \text{rezidü } f(z) + \frac{b}{2} \right\}$$

Şayet $\int_{-\infty}^{-\delta}$, $\int_\delta^\infty$ ayrı ayrı mevcut iseler

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \left\{ \sum_{y>0} \text{Rezidü } f(z) + \frac{b}{2} \right\} \qquad (5.4.3.1)$$

Aksi halde

$$\text{c.e.d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \left\{ \sum_{y>0} \text{Rezidü } f(z) + \frac{b}{2} \right\} \qquad (5.4.3.2)$$

Bu formül pek tabii olarak derhal genelleştirilebilir. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \left\{ \sum_{y>0} \text{Rezidü } f(z) + \tfrac{1}{2} \sum_{y=0} \text{Rezidü } f(z) \right\}$$

veya

$$\text{c.e.d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \left\{ \sum_{y>0} \text{Rezidü } f(z) + \tfrac{1}{2} \sum_{y=0} \text{Rezidü } f(z) \right\}$$

Misal. $\text{c.e.d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i$

5.4.4. $I = \int_0^\infty x^\alpha R(x)dx$ integralinin hesabı. Burada α reeldir ve 0 ile 1 arasında farzedebiliriz. $R(x)$ bir rasyonel fonksiyondur ve farzediyoruz ki $x^\alpha R(x)$ pozitif reel eksen üzerinde analitiktir. İntegralin yakınsaklığına gelince I ikiye parçalanarak

$I = \int_0^1 + \int_1^\infty$ şeklinde yazılırsa görülür ki $\int_0^1$ integrali yakınsaktır şa-

yet $z = 0$ $R(z)$ nin en fazla birinci mertebeden kutup noktası ise. $\int_1^\infty$ integrali yakınsaktır şayet $z = \infty$ $R(z)$ nin en az ikinci mertebeden bir sıfır yeri ise. Hülasa olarak $R(z)$ bu şartları sağladığı takdirde I yakınsaktır. Bu integralin diğer misallerden farkı, umumiyetle $z^\alpha R(z)$ tek değerli değildir. $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ vazedelim ve $\log z$ in esas değerini alalım. Yani $0 \leq \arg z < 2\pi$. Bundan sonra $\log z$ esas değeri gösterecektir. Bu takdirde $\log z$, düzlemi pozitif reel eksen boyunca keserek elde edilen D bölgesinde tek değerli ve analitiktir. Bu kesitin üst kenarında $\log z$ nin değeri $\log x$ dir. Alt kenarında ise $\log x + 2\pi i$ dir.

Şimdi merkezi $z = 0$ da olan iki çember çizelim. Çemberleri γ ve Γ, yarıçaplarını ise δ ve R ile gösterelim. δ yı yeter derecede küçük, R yi de yeter derecede büyük seçersek $R(z)$ nin bütün kutup noktaları, kesitin iki kenarı ile bu iki çemberin belirttiği D′ bölgesinde bulunmuş olur. Diğer taraftan $e^{\log z}$ $R(z)$, D′ de tek değerlidir ve dolayısıyle rezidü teoremini tatbik edebiliriz.

$$\int_\delta^R e^{\alpha \log x} R(x)dx + \int_\Gamma e^{\alpha \log z} R(z)dz + \int_R^\delta e^{\alpha(\log x + 2\pi i)} R(x)dx$$

$$+ \int_\gamma e^{\alpha(\log z + 2\pi i)} R(z)dz = 2\pi i \sum_{D'} \text{Rezidü } e^{\alpha \log z} R(z)$$

Yukarda yapılan hipotezlerden dolayı

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma = 0$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\gamma = 0$$

Binaenaleyh $R \to \infty$ ve $\delta \to 0$ için

$$I - e^{2\pi i\alpha} I = 2\pi i \sum_D \text{Rezidü } e^{\alpha \log z} R(z)$$

Veyahut $1 - e^{2\pi i\alpha} = -2ie^{i\pi\alpha} \sin \pi\alpha$ vazedilirse

$$I = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \left\{ \sum_D \text{Rezidü } e^{\alpha \log z} R(z) \right\} \qquad (5.4.4.1)$$

Misal. $I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}$, $0 < \alpha < 1$. Bu integral

$I = \int_0^\infty \frac{x^\alpha\, dx}{x(1+x)}$ şeklinde yazılırsa $R(z) = \frac{1}{z(1+z)}$ in yukardaki hipotezleri sağladığı görülür. Binaenaleyh I yakınsaktır. (5.4.4.1) formülü tatbik edilebilir ve $\frac{e^{\alpha \log z}}{z(1+z)}$ in $z = -1$ deki rezidüsü $-e^{\alpha \log(-1)} = -e^{i\pi\alpha}$ olduğu derhal görülür. Dolayısiyle

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

5.4.5. $I = \int_0^\pi \log \sin x\, dx$ integralinin hesabı. $\sin z = \frac{1 - e^{2iz}}{-2ie^{iz}}$ vaz edelim, ve $J = \int_0^\pi \log(1 - e^{2iz})\, dz$ integralini göz önüne alalım.

$\log(1 - e^{2iz})$ periyodik bir fonksiyondur ve periyodu π dir. $z = k\pi$ noktaları $\log(1 - e^{2iz})$ için singüler noktalardır. $\log(1 - e^{2iz})$ in esas değerini göz önüne alalım. Yani $-\pi < \arg(1 - e^{2iz}) \leq \pi$. Binaenaleyh $w = 1 - e^{2iz}$ vaz edersek $\log w$, negatif reel eksen boyunca kesilmiş düzlemde tek değerli analitiktir. z-düzlemine dönersek $\log(1 - e^{2iz})$ w nin reel negatif değerlerine tekabül eden analitik eğriler boyunca kesilmiş düzlemde tek değerli ve analitiktir. Bu analitik eğrileri temin etmek için

$$1 - e^{2iz} = 1 - e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) \qquad (5.4.5.1)$$

vaz ederiz ve görürüz ki $x = k\pi$, $y \leq 0$ için w reel ve negatiftir. Binaenaleyh $\log(1 - e^{2iz})$ esas dalı bu doğrular boyunca kesilen düzlemde tek değerli ve analitiktir. Şimdi $\int_0^\pi \log(1 - e^{2ix})\, dx$ integralinin hesabı için Cauchy rezidü teoremini tatbik edelim. Bunun için C çevresi olarak köşeleri $0, \pi, \pi + iY, iY$ de olan dörtgeni seçelim. Yalnız $0, \pi$ singüler noktalarını, merkezleri bu noktalarda olan δ yarı çaplı yeter derecede küçük çeyrek γ çemberleri ile çevirelim. Binaenaleyh

$$\int_\delta^{\pi-\delta} + \int_\gamma + \int_{\pi+i\delta}^{\pi+iY} + \int_{\pi+iY}^{iY} + \int_{iY}^{i\delta} + \int_\gamma \log(1 - e^{2iz})\, dz = 0$$

Periyodik hassasından dolayı üçüncü ve beşinci integraller birbirini götürür. Dördüncü integral (5. 4. 5. 1) den dolayı $Y \to \infty$ için sıfırdır. γ üzerindeki integrallere gelince, meselâ en sonuncuyu göz önüne alalım. Yani

$$\int_\gamma \log(1 - e^{2iz})\, dz = \int_\gamma \log|1 - e^{2iz}|\, dz + i \int_\gamma \arg(1 - e^{2iz})\, dz$$

Halbuki $\arg(1 - e^{2iz})$ sınırlı olduğundan $\delta \to 0$ için son integral sıfırdır. Diğer

taraftan $z \to 0$ için $\dfrac{|1-e^{2iz}|}{|z|} \to 2$. Binaenaleyh $\lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{\gamma} \log|1-e^{2iz}|\,dz$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\gamma} \log|z|\,dz = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} ie^{i\theta}\delta \log\delta\, d\theta = 0.$$

π köşesinde durum aynı olduğundan, binnetice

$$\int\limits_0^{\pi} \log(1-e^{2ix})\,dx = \int\limits_0^{\pi} \log(-2ie^{ix}\sin x)\,dx = 0.$$

Yani

$$\pi \log 2 + \int\limits_0^{\pi} \log(-i)\,dx + \int\limits_0^{\pi} \log e^{ix}\,dx + \int\limits_0^{\pi} \log \sin x\,dx = 0$$

Şimdi, $\log(-i) = i[\arg(-i) + 2k\pi]$, $\log(1-e^{2iz})$ in imajiner kısmı $-\pi$ ile π arasında olması için $\arg(-i) + 2k\pi = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ye mutlak değeri en küçük olan değeri vermeliyiz yani $k = -1 \Rightarrow \log(-i) = -\dfrac{\pi i}{2}$.

Diğer taraftan $0 \le x \le \pi$ olduğundan $\log e^{ix} = ix$ dir. Binanaleyh

$$\log 2 - \frac{\pi^2 i}{2} + \frac{\pi^2 i}{2} + \int\limits_0^{\pi} \log \sin x\,dx = 0$$

Yani

$$\int\limits_0^{\pi} \log \sin x\,dx = -\pi \log 2$$

Problem. § 5.4.4. te sözü geçen $R(z)$ nin reel eksen üzerinde pozitif ve negatif kutup noktaları olması halini inceleyiniz.

Rezidü teoreminin en son tatbikatı olarak Stirling formülünü elde edeceğiz.

5.4.7. **Stirling Formülü.** $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum\limits_0^{\infty} \dfrac{1}{(z+n)^2}$ yi bir integral ile ifade etmeye çalışalım. Bunun için z sabit farzedilerek $\zeta = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ noktasında rezidüsü $\dfrac{1}{(z+\nu)^2}$ olan bir fonksiyon arıyalım. Halbuki

$$\lim_{\zeta\to\nu} \frac{(\zeta-\nu)\left[\dfrac{1}{\zeta} + \sum\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \left(\dfrac{1}{\zeta-\nu} + \dfrac{1}{\nu}\right)\right]}{(z+\zeta)^2} = \frac{1}{(z+\nu)^2}$$

Binaenaleyh istenilen fonksiyon

$$\Phi(\zeta) = \frac{\pi \cot \pi\zeta}{(z+\zeta)^2}$$

Şu halde z yi sağ yarı düzlemde sabit tutarsak $\Phi(\zeta)$, $\zeta = 0, 1, 2, \ldots$ kutup noktaları hariç bu yarı düzlemde tek değerli ve analitiktir. Şu halde $\xi = 0$, $\xi = n + \frac{1}{2}$, $\eta = \pm Y$ doğrularının teşkil ettikleri C dörtgenine Cauchy rezidü teoremi tatbik edilebilir ve (5.4.3.2) formülünden dolayı

$$\text{c.c.d}\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \Phi(\zeta)\,d\zeta = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(z+\nu)^2} + \frac{1}{2z^2} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(z+\nu)^2} - \frac{1}{2z^2}.$$

Şimdi

$$\left| \int\limits_{\eta=\pm Y} \Phi(\zeta)\,d\zeta \right| \le \int\limits_{\eta=\pm Y} |\Phi(\zeta)|\,d\zeta.$$

Fakat $Y \to \infty$ için üniform olarak $|\cot \pi\zeta| \to 1$ ve $\dfrac{1}{|z+\zeta|} \to 0$.

O halde üniform olarak $|\Phi(\zeta)| \to 0$. Dolayısiyle

$$\lim_{Y\to\infty} \int\limits_{\eta=\pm Y} \Phi(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Gelelim $\xi = 0$, $\xi = n + \frac{1}{2}$ üzerindeki integrallere. Her $\xi = n + \frac{1}{2}$ doğrusu üzerinde $\cot \pi\zeta$ analitiktir ve dolayısıyle sınırlıdır. $\cot \pi\zeta$ periyodik ve periyodu 1 olduğundan bu A üst sınırı n ye tâbi değildir. Şu halde her n için

$$\left| \int\limits_{\xi=n+\frac{1}{2}} \Phi(\zeta)\,d\zeta \right| \le A \int\limits_{\xi=n+\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{|\zeta+z|^2}$$

Bu integrali rezidü teoremi ile hesaplamaya teşebbüs edelim. Bunun için $\zeta = n + \frac{1}{2} + i\eta$ vazedelim. $\bar{\zeta} = n + \frac{1}{2} - i\eta$ dır. Binaenaleyh

$$\zeta + \bar{\zeta} = 2n + 1$$

Diğer taraftan $|\zeta + z|^2 = (\bar{\zeta} + \bar{z})(\zeta + z)$ vazederek rezidü teoremini doğrudan doğruya aşağıdaki ikinci integrale tatbik edelim.

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{|\zeta+z|^2} = \int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta+z)(2n+1-\zeta+\bar{z})}$$

Burada Γ, $\xi = n + \frac{1}{2}$ ekseninin bir kısmı ile bu kısmı çap olarak kabul eden sağ yarı çemberi ihtiva eder. $\zeta = 2n + 1 + \bar{z}$ noktasındaki rezidü

$$\frac{1}{2n + 1 + \bar{z} + z} = \frac{1}{2n + 1 + 2x} \text{ dir. Binaenaleyh}$$

$$\frac{1}{i} \int_{\xi = n + \frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{|\zeta + z|^2} = \frac{2\pi}{2n + 1 + 2x}$$

Halbuki $n \to \infty$ için bu sıfırdır. Binnetice

$$\text{c.e.d } \frac{1}{2} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\cot \pi i \eta}{(z + i\eta)^2} d\eta = -\frac{1}{2z^2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)$$

Fakat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cot \pi i \eta}{(z + i\eta)} d\eta = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{0} = \int_{\infty}^{0} \frac{\cot \pi i \eta}{(z - i\eta)^2} d\eta = -\int_{0}^{\infty} \frac{\cot \pi i \eta}{(z - i\eta)^2} d\eta$$

Binaenaleyh

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{0}^{\infty} \cot \pi i \eta \left[\frac{1}{(z + i\eta)^2} - \frac{1}{(z - i\eta)^2}\right] d\eta = \int_{0}^{\infty} \frac{-4iz\eta}{(z^2 + \eta^2)^2} \cot \pi i \eta \, d\eta$$

Yani

$$\int_{\infty}^{-\infty} = \int_{0}^{\infty} \frac{4z\eta}{(z^2 + \eta^2)^2} \coth \pi\eta \, d\eta$$

Yani

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2z\eta}{(z^2 + \eta^2)^2} \coth \pi\eta \, d\eta = -\frac{1}{2z^2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)$$

Binaenaleyh

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \frac{1}{2z^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{2z\eta}{(z^2 + \eta^2)^2} \coth \pi\eta \, d\eta$$

Veyahut $\coth \pi\eta = 1 + \dfrac{2}{e^{2\pi\eta} - 1}$ yazılır ve

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2z\eta}{(z^2 + \eta^2)^2} d\eta = \left[\frac{-z}{z^2 + \eta^2}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{z}$$

gözönünde tutulursa

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + \int_{0}^{\infty} \frac{4z\eta}{(z^2 + \eta^2)^2} \cdot \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}$$

z yi sağ yarı düzlemde değişken farzedersek bu formülün integrali alınabilir.

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = K + \log a - \frac{1}{2z} - \int_{0}^{\infty} \frac{2\eta}{\eta^2 + z^2} \cdot \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}$$

Çünkü Rez > 0 sağ yarı düzlemde herhangi bir kapalı sınırlı bir bölge için bu integral üniform yakınsaktır. Binaenaleyh içerisinde türev alınabilir. İkinci defa integral alınırsa

$$\log \Gamma(z) = K' + Kz + (z - \tfrac{1}{2}) \log z + J(z)$$

Burada $K - 1$ yerine K koyduk ve

$$J(z) = 2 \int_{0}^{\infty} \arctan \frac{\eta}{z} \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}$$

veyahut kısmi integral alarak

$$J(z) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{z}{\eta^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta$$

Açık olarak $x \geq \varepsilon > 0$ yarı düzlemde $z \to \infty$ için $J(z) \to 0$.

5.4.7. **K ve K′ katsayılarının hesabı.** Bunun için aşağıdaki fonksiyonel denklemlerden istifade edeceğiz.

$$\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z) \qquad \Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Şimdi

$$\log \Gamma(z) = K' + Kz + (z - \tfrac{1}{2}) \log z + J(z) \qquad (5.4.7.1)$$

denkleminde z yerine $z + 1$ koyalım.

$$\log \Gamma(z + 1) = K' + K(z + 1) + (z + \tfrac{1}{2}) \log (z + 1) + J(z + 1)$$

(5.4.7.1) i son denklemden çıkaralım ve birinci formülü göz önünde tutalım.

$$K + (z + \tfrac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{1}{z}\right) + J(z + 1) - J(z) = 0$$

Burada z yi reel ve pozitif farzedersek logaritmalar reeldir ve dolayısiyle tekdeğerlidir ve $z \to \infty$ için $K = -1$ olduğu derhal görülür.

K' nün hesabında ikinci hassayı kullanacağız. Bunun için $z = \frac{1}{2} + iy$ vazedelim. Bu takdirde

$$\Gamma(\tfrac{1}{2} + iy)\,\Gamma(\tfrac{1}{2} - iy) = \frac{\pi}{\cos \pi iy}$$

ve

$$\log \Gamma(\tfrac{1}{2} + iy)\,\Gamma(\tfrac{1}{2} + iy) = \log \frac{2\pi e^{-\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}}$$

(5.4.7.1) de $z = \frac{1}{2} + iy$ ve $z = \frac{1}{2} - iy$ vazettikten sonra toplayalım.

$$\log \Gamma(\tfrac{1}{2} + iy) = K' - (\tfrac{1}{2} + iy) + iy \log (\tfrac{1}{2} + iy) + J(\tfrac{1}{2} + iy)$$

Burada $\log (\frac{1}{2} + iy)$, $2k\pi i$ farkla belirlidir. Fakat $y = 0$ yapılırsa sol taraf yani $\log \Gamma(\frac{1}{2})$ reel pozitiftir. Diğer taraftan $J(\frac{1}{2})$ de reeldir. Binaenaleyh $k = 0$. Çünkü K', $\log \Gamma(z)$ de z reel > 0 yapılırsa reel olduğu görülür. Neticede

$$\log \Gamma(\tfrac{1}{2} + iy)\,\Gamma(\tfrac{1}{2} - iy) = 2K' - 1 + iy \log \frac{\frac{1}{2} + iy}{\frac{1}{2} - iy}$$

$$+ J(\tfrac{1}{2} + iy) + J(\tfrac{1}{2} - iy) = \log \frac{2\pi e^{-\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}}$$

Şimdi

$$\log \frac{2\pi e^{-\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}} = \log \Gamma(\tfrac{1}{2} + iy) + \log \Gamma(\tfrac{1}{2} - iy)$$

yi gözönüne alalım.

$$\log \Gamma(\tfrac{1}{2} + iy) = U + iV, \quad \log \Gamma(\tfrac{1}{2} - iy) = U' + iV'$$

vaz eder ve i yi $-i$ yaparsak görülür ki $U' - iV' = U + iV$. Binaenaleyh $U = U'$. Halbuki sol taraf ta reeldir. Binaenaleyh

$$2\mathrm{Re}\,(\log \Gamma(\tfrac{1}{2} + iy)) = \log \frac{2\pi e^{-\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}}$$

$y \to \infty$ için

$$\mathrm{Re}\,(\log \Gamma(\tfrac{1}{2} + iy)) = \log \sqrt{2\pi} - \frac{\pi y}{2} + o(1)$$

Diğer taraftan

$$iy \log \frac{\frac{1}{2} + iy}{\frac{1}{2} - iy} = -\pi y + 1 + o(1)$$

Şu halde

$$\mathrm{Re}\,(\log \Gamma(\tfrac{1}{2} + iy)) = K' - \frac{\pi y}{2} + o(1)$$

Hakikatte

$$iy \log \frac{\frac{1}{2} + iy}{\frac{1}{2} - iy}$$

reeldir. Zira konjügesi kendisine eşittir. Binnetice $K' = \log \sqrt{2\pi}$ Binaenaleyh Stirling formülü

$$\log \Gamma(z) = \log \sqrt{2\pi} + (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + J(z)$$

dir. Veyahut

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z - \frac{1}{2}}\, e^{-z}\, e^{J(z)}$$

5.4.8. Asimptotik Açılım. Stirling serisi.

TARİF 10. Aşağıda yazılı tipte bir seri verilmiş olsun.

$$A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \ldots \qquad (5.4.8.1)$$

$S_n = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n}$ vaz edelim. (5.4.8.1) serisine, bir $f(z)$ fonksiyonunun, arg z nin verilen değerleri için asimptotik açılımıdır denir ve

$$f(z) \backsim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \ldots$$

ile gösterilir, şayet

$$R_n(z) = z^n \{ f(z) - S_n(z) \}$$

ifadesi

$$\lim_{|z| \to \infty} R_n(z) = 0 \qquad (n \text{ sabit})$$

şartını sağlıyorsa. Yani istenildiği kadar küçük bir $\varepsilon > 0$ için $|z|$ yeter derecede büyük alınırsa

$$| z^n \{ f(z) - S_n(z) \} | < \varepsilon .$$

Bu tarif *Poincare* ye aittir.

Not. $f(z)$ fonksiyonunun asimptotik açılımı varsa birtektir. Fakat tersi doğru değildir. Meselâ $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ arasında muteber, $e^{\frac{1}{z}}$ ve $e^{\frac{1}{z}} + e^{-z}$ in ayni asimptotik açılımı vardır. Yani $1 + \frac{1}{z.1\,!} + \frac{1}{z^2.2\,!} + \ldots$.

Misal olmak üzere $\log \Gamma(z)$ nin asimptotik açılımını elde edelim.

$$J(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{z}}{1+\left(\frac{\eta}{z}\right)^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta$$

ifadesindeki $\dfrac{\frac{1}{z}}{1+\left(\frac{\eta}{z}\right)^2}$ faktörünü $\dfrac{1}{z}$ in kuvvetlerine göre seriye açalım.

$$\frac{\frac{1}{z}}{1+\left(\frac{\eta}{z}\right)^2} = \frac{1}{z} - \frac{\eta^2}{z^3} + \frac{\eta^4}{z^5} - \frac{\eta^6}{z^7} + \ldots + (-)^{k-1}\frac{\eta^{2k-2}}{z^{2k-2}}$$

$$+ (-1)^k \frac{\frac{\eta^{2k}}{z^{2k+1}}}{1+\left(\frac{\eta}{z}\right)^2}.$$

Binaenaleyh

$$J(z) = \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^3} + \ldots + \frac{C_k}{z^{2k-1}} + J_k(z).$$

Burada

$$C_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \eta^{2\nu-2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta$$

ve

$$J_k(z) = \frac{(-1)^k}{z^{2k+1}}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta^{2k}}{1+\left(\frac{\eta}{z}\right)^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\,d\eta.$$

Diğer taraftan

$$B_\nu = \frac{2\nu(2\nu-1)}{\pi}\int_0^\infty \eta^{2\nu-2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}\right)d\eta$$

vazedilirse

$$C_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu-1)\,2\nu} \qquad (5.4.8.1)$$

B_ν kat sayılarına *Bernouilli sayıları* denir ve $\dfrac{1}{e^z-1}$ fonksiyonunun $z=0$ kutup noktası civarındaki Laurent açılımının kat sayılarıdır.

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu!}z^{2\nu-1}. \qquad (5.4.8.2)$$

Binaenaleyh

$$J(z) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{z} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{z^3} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)2k}\frac{1}{z^{2k-1}} + J_k(z)$$

ve

$$\log\Gamma(z) \backsim \log\sqrt{2\pi} + (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}B_\nu}{2\nu(2\nu-1)z^{2\nu-1}},$$

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \Delta.$$

Burada Δ istenildiği kadar küçük alınabilen pozitif bir sayıdır.

Not. Bernouilli sayılarının rasyonel olduğunu gösterelim.

$$\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} = \frac{i}{2}\cot\frac{iz}{2} - \frac{1}{z}.$$

Biliyoruz ki (5.2.3.1)

$$\pi\cot\pi x - \frac{1}{x} = \sum_1^\infty \frac{2x}{x^2-n^2}$$

Burada

$$x = \frac{iz}{2\pi}$$

vaz edersek

$$\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2} = 2\sum_1^\infty \frac{z}{z^2+4n^2\pi^2}$$

dir. Formel olarak

$$\left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{z} = 2\sum_1^\infty \frac{1}{z^2+4n^2\pi^2} = 2\sum_1^\infty\left[\frac{1}{4n^2\pi^2}\right.$$

$$\left. - \frac{z^2}{(4n^2\pi^2)^2} + \frac{z^4}{(4n^2\pi^2)^3} - \ldots\right]$$

sonra

$$2\sum_1^\infty \frac{1}{(4n^2\pi^2)^\nu} = \frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^{2\nu}}\sum_1^\infty\frac{1}{n^{2\nu}} = \frac{B_\nu}{(2\nu)!}.$$

Burada

$$B_\nu = 2\frac{(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}}\left(1 + \frac{1}{2^{2\nu}} + \frac{8}{3^{2\nu}} + \ldots\right)$$

vaz edilmiştir.

Görülüyor ki B_ν sayıları rasyoneldir. Zira $\cot x$ in açılımını elde etmek için $\cos x$ in açılımını $\sin x$ in açılımı ile bölmek kâfidir. Halbuki bu açılımlardaki katsayılar rasyoneldir.

5.4.9. (5.4.8.1) **ifadesinin ispatı.** $\dfrac{\pi \cot \pi \zeta}{(2+\zeta)^2}$ ifadesi yerine umumiyetle $\pi \cot \pi \zeta . f(\zeta)$ alınırsa, öyle ki $f(\zeta), \xi \geq 0$ sağ yarı düzlemde analitiktir, bu takdirde Cauchy rezidü teoremi aynı dörtgene tatbik edilebilir ve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \pi \cot \pi \zeta . f(\zeta)\, d\zeta = \tfrac{1}{2} f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu)$$

Farzedelim ki § 5.4.6 daki şartlara benzer

(i) üniform olarak $\lim\limits_{Y \to \mp\infty} e^{-2\pi |Y|} f(\xi + iY) = 0$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\eta|} \left| f\left(n + \tfrac{1}{2} + i\eta\right)\right| d\eta = 0$

şartları sağlanmıştır.

Bu takdirde

$$\int_0^\infty f(\xi)\, d\xi + i \int_0^\infty \frac{f(0+i\eta) - f(0-i\eta)}{e^{2\pi\eta} - 1}\, d\eta$$

$$= \tfrac{1}{2} f(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) \qquad (5.4.9.1)$$

bulunur.

(5.4.9.1) förmülünde $f(\zeta) = e^{-z\zeta}$ vaz edersek

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2} + 2 \int_0^\infty \frac{\sin z\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}\, d\eta$$

dır. $\sin z\eta$ yi $z = 0$ noktasında Taylor serisine açar ve (5.4.8.2) ile karşılaştırırsak

$$B_\nu = 4\nu \int_0^\infty \frac{\eta^{2\nu-1}}{e^{2\pi\eta}-1}\, d\eta = \frac{2\nu(2\nu-1)}{\pi} \int_0^\infty \eta^{2\nu-2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}}\, d\eta .$$

Problem. (5.4.9.1) formülünü bütün teferruatı ile gösteriniz.

5.4.10 $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ ifadesinin ispatı. Biliyoruz ki

$$\mathrm{I}(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

integrali $x > 0$ için yakınsaktır. z yerine $z + 1$ koyarsak

$$\mathrm{I}(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^z dt = z \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = z\mathrm{I}(z) .$$

Binaenaleyh görülüyor ki $\mathrm{I}(z)$ ile $\Gamma(z)$ aynı fonksiyonel denklemi sağlıyorlar. Diğer taraftan

$$\frac{\mathrm{I}(z)}{\Gamma(z)} = \frac{\mathrm{I}(z+1)}{\Gamma(z+1)} .$$

Binaenaleyh $\dfrac{\mathrm{I}(z)}{\Gamma(z)}$ periyodu 1 olan periyodik bir fonksiyondur.

$\mathrm{I}(z)$ ve $\Gamma(z)$ fonksiyonlarının özdeş olduğunu göstermek için evvelâ $\dfrac{\mathrm{I}(z)}{\Gamma(z)}$ in sabit olduğunu gösterelim. Bunun için $\dfrac{\mathrm{I}(z)}{\Gamma(z)}$ in bir periyod şeridinde, meselâ, $1 \leq x \leq 2$ de sabit olduğunu göstermek kâfidir.

$$|\mathrm{I}(z)| \leq \int_0^\infty |e^{-t}\, e^{(z-1)\log t}|\, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = \mathrm{I}(x) . \qquad (5.4.10.1)$$

Binaenaleyh $\mathrm{I}(z)$ periyod şeridinde sınırlıdır. Şimdi $|\Gamma(z)|$ in büyük $|y|$ için değerini bulalım. Stirling formülünde iki tarafın reel kısmı alınırsa $\log|\Gamma(z)| = \log\sqrt{2\pi} - x + (x - \tfrac{1}{2}) \log|z| - y \arg z + \mathrm{Re}\,(J(z))$. Görülüyor ki $|y| \to \infty$ için

$$\log|\Gamma(z)| = O\left(-\frac{\pi|y|}{2}\right)$$

Yani

$$|\Gamma(z)| = O\left(e^{\frac{-\pi|y|}{2}}\right) .$$

Binaenaleyh $|y| \to \infty$ için

$$\left|\frac{\mathrm{I}(z)}{\Gamma(z)}\right| = O\left(e^{\frac{\pi|y|}{2}}\right).$$

Teorem 4.9.2.2 den dolayı $\dfrac{\mathrm{I}(z)}{\Gamma(z)}$, $1 \leq x \leq 2$ şeridinde analitiktir

ve dolayısıyle periyodiklik hassasından ötürü $\frac{I(z)}{\Gamma(z)}$ bir tam fonksiyondur.

Şimdi $w = e^{2\pi i z}$ vaz edelim $x = 1$, $x = 2$ doğrularına dik $y = y_1$, $y = y_2$ doğrularını göz önüne alalım. Bu doğrulara w düzleminde merkezi $w = 0$ da olan C_1, C_2 çemberleri tekabül eder. Filhakika, meselâ $y = y_1$ e tekabül eden eğri

$$w = e^{2i\pi(x+iy_1)} = e^{-2\pi y_1} e^{2i\pi x}$$

yani merkezi $w = 0$ da ve yarıçapı $e^{-2\pi y_1}$ olan C_1 çemberidir. Şimdi $y = y_1$ ve $y = y_2$ doğrularının $x = 1$, $x = 2$ doğrularını kestiği noktalara M_1, N_1 ve M_2, N_2 diyelim. Diğer taraftan $x = \pm n$ doğrularına w düzleminde reel eksenin pozitif kısmı tekabül eder. Halka bu reel eksen boyunca kesilecek olursa bu kesitin kenarları $M_1 M_2$ ve N_1N_2 doğru parçalarına tekabül eder. Binaenaleyh M_1M_2 ve N_1N_2 doğru parçaları birtek doğru olarak sayılacak olursa halkanın noktaları ile $M_1N_1N_2M_2$ dörtgeninin noktaları arasında birebir tekabül tesis edilmiş olur. Binaenaleyh halkanın her bir noktasına $y = Y$, $y_1 \leq Y \leq y_2$, doğrusunun ürezerinde sonsuz sayıda noktalar tekabül eder öyle ki birbirini takip eden iki nokta arasındaki uzaklık 1 dir. Bu noktalara konjüge noktalar deyip ve her konjüge nokta sistemini birtek nokta olarak kabul edersek halkanın noktaları ile şeridin noktaları arasında bir birebir tekabül tesis etmiş oluruz. Binaenaleyh $f(z) = \frac{I(z)}{\Gamma(z)}$ tam fonksiyonu $y_1 \leq y \leq y_2$ şeridinde tek değerli analitik olduğundan $f(z) = \varphi(w)$ fonksiyonu da halkada tekdeğerli ve analitiktir. Binaenaleyh Laurent açılımı mevcuttur ve

$$\varphi(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu w^\nu$$

yani

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu e^{2\nu i\pi z}.$$

$f(z)$ bütün sonlu düzlemde analitik olduğundan bu açılım bütün sonlu düzlemde muteberdir. Halbuki $1 \leq x \leq 2$ periyod şeridinde meselâ $y \to \infty$ yapılırsa a_ν, $\nu > 0$, nün katsayıları sıfırdır.

Dolayısıyla

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_{-\nu}\, e^{-2\nu i\pi(x+iy)} = \sum_{0}^{\infty} a_{-\nu}\, e^{-2\nu i\pi x}\, e^{2\nu\pi y}$$

Burada görülüyor ki $f(z)$, $y \to \infty$ için en az $e^{2\pi y}$ gibi büyüyor. Halbuki

yukarda gösterdik ki en çok $e^{\frac{\pi y}{2}}$ gibi büyüyor. Bu tezat $\Rightarrow$

$$a_{-\nu} = 0.$$

Şu halde $y \to \infty$ için $f(z) = a_0$. Aynı şey $y \to -\infty$ için gösterilebilir yani $y \to -\infty$ için $f(z) = a_0$. Yani $f(z)$ periyod şeridinde sınırlıdır. Periyodik olduğundan bütün düzlemde sınırlıdır. *Liouville teoreminden* dolayı $f(z) = \frac{I(z)}{\Gamma(z)}$ sabittir. Fakat

$$\frac{I(1)}{\Gamma(1)} = 1$$

dir. Binaenaleyh

$$\Gamma(z) \equiv I(z)$$

Aynı zamanda göstermiş oluyoruz ki önce $x > 0$ için tarifli olan $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ integrali şimdi bütün düzlemde tariflidir.

5.4.11. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ **için Hankel'in Çevre İntegrali.** $\int_C e^t\, t^{-z}\, dt$ çevre integralini göz önüne alalım. İntegral içerisindeki ifade umumiyetle çok değerli analitik bir fonksiyondur.

$$e^t\, t^{-z} = e^{t-z\log t}$$

şeklinde yazmakla $\log t$ nin esas dalını kastetmiş oluyoruz, $-\pi < \arg t \leq \pi$. Şayet t-düzlemini negatif reel eksen boyunca kesecek olursak $e^{t-z\log t}$ kesilmiş düzlemin herbir kapalı sınırlı bölgesinde tek değerli ve analitiktir. Bu kesik düzlemde bir C^* çevresini göz önüne alalım. C^*, kesitin alt kenarındaki bir noktadan başlıyor pozitif yöne doğru başlangıç noktasının etrafında bir kere dönerek üst kenarın üzerinde aynı noktada nihayet buluyor. Bu noktanın apsisine $-\rho$ diyelim. C^* çevresi kesiti kat etmeden sürekli bir deformasyon ile uç noktaları sabit tutulmak üzere, kesitin iki kenarını ve başlangıç noktasında merkezlenmiş δ yarıçaplı küçük bir γ çemberini ihtiva eden bir E^* çevresine dönüştürülebilir. Bu deformasyonda *Cauchy teoreminden* dolayı integralin değeri değişmez. Yani

$$\int_{C^*} e^t\, t^{-z}\, dt = \int_{E^*} e^t\, t^{-z}\, dt$$

Şimdi, $t = ue^{i\varphi}$ vaz edelim. t kesitin üst kenarında ise $\varphi = \pi$, $t = ue^{i\pi}$

ve $e^t e^{-z \log t} = e^{-u} u^{-z} e^{-z\pi i}$ dir. t kesitin alt kenarında ise $\varphi = -\pi$, $t = ue^{-i\pi}$ ve $e^t e^{-z \log t} = e^{-u} u^{-z} e^{z\pi i}$ dir. Binaenaleyh

$$\int_{E^*} e^t t^{-z}\, dt = -\int_{\rho}^{\delta} e^{-u} u^{-z} e^{z\pi i}\, du + \int_{\gamma} e^t e^{-z \log t}\, dt - \int_{\delta}^{\rho} e^{-u} u^{-z} e^{-z\pi i}\, du .$$

Yani,

$$\int_{E^*} e^t t^{-z}\, dt = I + (e^{z\pi i} - e^{-z\pi i}) \int_{\delta}^{\rho} e^{-u-z}\, du.$$

Burada

$$I = \int_{\gamma} e^t e^{-z \log t}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta e^{i\theta}} e^{-z(\log\delta + i\theta)}\, i\delta e^{i\theta}\, d\theta,$$

$t = \delta e^{i\theta}$ vaz edildi. Binaenaleyh

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta e^{i\theta}}\, i\delta^{1-z} e^{i\theta(1-z)}\, d\theta.$$

$z = x + iy$ vaz edilirse

$$|I| \leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta \cos\theta}\, \delta^{1-x} e^{\theta y}\, d\theta = \delta^{1-x} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta \cos\theta + \theta y}\, d\theta$$

Fakat

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta \cos\theta + \theta y}\, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta + \pi|y|}\, d\theta = e^{\delta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pi|y|}\, d\theta$$

ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pi|y|}\, d\theta = 2\pi e^{\pi|y|} .$$

Binaenaleyh

$$|I| \leq 2\pi\delta^{1-x} e^{\delta + \pi|y|}$$

Şayet $1 - x > 0$ ise $\lim_{\delta \to 0} I = 0$

Şimdi $\rho \to \infty$ yapılırsa $E^* \to E$ ve dolayısıyle

$$\int_{E} e^t t^{-z}\, dt = 2i \sin \pi z \int_{0}^{\infty} e^{-u} u^{-z}\, du = 2i \sin \pi z\, \Gamma(1 - z) . \tag{5.4.11.1}$$

Fakat $\Gamma(z)\, \Gamma(1 - z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ göz önünde tutulursa

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{E} e^t t^{-z}\, dt$$

yine Cauchy teoreminden dolayı

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} e^t t^{-z}\, dt \tag{5.4.11.2}$$

Burada C, $-\infty$ noktasından başlıyan ve pozitif yöne doğru bir defa başlangıç noktasının etrafında döndükten sonra yine $-\infty$ da biten çevredir. İspat bakımınan formülümüz $1 - x > 0$ için muteber olmasına rağmen hakikatte bütün z ler için doğrudur, zira (5.4.11.1) denkleminde sağ taraf bir tam fonksiyondur. Veyahut şöyle de denebilir. (5.4.11.2) nin iki tarafı da tam fonksiyondur ve düzlemin bir parçasında yani $1 - x > 0$ da eşittirler. Biliyoruz ki (§ 4.8.5) bu takdirde eşitlik bütün düzlemde caridir.

Diğer taraftan (5.4.11.1) den dolayı

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i \sin \pi z} \int_{C} e^t t^{z-1}\, dt .$$

BÖLÜM VI

ASAL SAYILARIN DAĞILIMI.

1. RIEMANN ZETA-FONKSİYONU.

6.1.1 TARİF 1. Riemann fonksiyonu diye

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots, \; s = \sigma + it \qquad (6.1.1.1)$$

serisine denir. Bu seri $\sigma > 1$ için *her kapalı sınırlı bölgede üniform yakınsaktır*. Filhakika $\sigma \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, farzedersek $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$. *Weierstrass kriterinden* dolayı iddiamız doğrudur. Diğer taraftan (6.1.1.1) serisinin her bir terimi tarif bölgesinde analitik olduğundan $\zeta(s)$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ de analitiktir.

Şimdi

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx, \; \sigma > 0$$

integralinde x yerine nx koyalım

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} \, dx$$

$n = 1,2,\ldots$ vaz edip toplarsak $\sigma > 1$ için

$$\zeta(s)\,\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} \, dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} \, dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, dx$$

($\int$ ile Σ nın yer değiştirmesi hususunda reel değişkenli fonksiyonlara müracaat ediniz § 2.4.4. ve § 2.9.1).

Yani

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, dx, \; \sigma > 1 .$$

Şimdi $\zeta(s)$ i bir çevre integrali ile göstererek bu fonksiyonu bütün düzlemde tarif edeceğiz. Bunun için

$$\Phi(s) = \int_E \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \, dz$$

çevre integralini göz önüne alalım. log z, esas dalı gösterdiğine göre, $0 \leq \arg z < 2\pi$, $z^{s-1} = e^{(s-1)\log z}$ pozitif reel eksen boyunca kesilmiş düzlemde tekdeğerli analitiktir. $e^{(s-1)\log z}$ in kesitin üst kenarındaki değeri $e^{(s-1)\log x}$ dir. Kesitin alt kenarında ise değeri $e^{(s-1)(\log x + 2\pi i)} = e^{(s-1)\log x} e^{2\pi i s}$. Binaenaleyh E çevresi kesitin üst kenarını, merkezi başlangıç noktasında olan δ yarıçaplı ve pozitif yönlü küçük bir γ çemberini ve kesitin alt kenarını ihtiva ettiğine göre

$$\Phi(s) = -\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, dx + \int_\gamma \frac{e^{(s-1)\log z}}{e^z - 1} \, dz + \int_0^\infty e^{2\pi i s} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, dx$$

Gösterelim ki $\sigma > 1$ ise $\delta \to 0$ için $\int_\gamma \to 0$.

Gerçekten

$$\left| e^{(s-1)\log z} \right| = e^{(\sigma-1)\log|z| - t\arg z} \leq |z|^{\sigma-1} e^{2\pi|t|}$$

ve

$$\left| e^z - 1 \right| > A \, |z| .$$

Binaenaleyh, $z = \delta e^{i\theta}$ vaz edilirse

$$\left| \int_\gamma \right| < \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \delta^{\sigma-1} e^{2\pi|t|} \, d\theta = \frac{2\pi\delta^{\sigma-1} e^{2\pi|t|}}{A} .$$

Bu ise istenilen neticeyi verir.

Şu halde

$$\Phi(s) = (e^{2\pi i s} - 1) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, dx .$$

Yani

$$\Phi(s) = (e^{2\pi i s} - 1)\, \zeta(s)\, \Gamma(s)$$

veya

$$\Phi(s) = \frac{2\pi i e^{\pi i s}}{\Gamma(1-s)} \zeta(s) . \qquad (6.1.1.2)$$

Şimdi E, $\pm 2i\pi$, $\pm 4i\pi$, ... noktalarını dışında bırakan sonsuzda başlıyan ve sonsuzda biten pozitif yönlü herhangi bir C çevresine *deforme* (Tarifi için Topoloji kısmına veya Konform Tasvir adlı eserimize müracaat ediniz) edildiği takdirde $\Phi(s)$ in değeri değişmez. Şu halde

$$\zeta(s) = \frac{e^{-\pi i s}\,\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\, dz, \qquad (6.1.1.3)$$

$\int_C \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\, dz = \Phi(s)$ bir tam fonksiyon olduğuna göre $\left(\int_C\right.$, düzlemin herhangi bir kapalı bölgesinde üniform yakınsaktır), bütün düzlemde tariflidir ve en fazla $\Gamma(1-s)$ nin $s = 1,2,\ldots$ kutup yerleri hariç bir analitik fonksiyondur.

Halbuki $\zeta(s)$, $\sigma > 1$ için analitik olduğundan yegâne singüler noktası $s = 1$ kutup noktasıdır. Bu noktadaki rezidüyü hesaplamak istiyorsak

$$\Phi(1) = \int_C \frac{dz}{e^z - 1} = 2\pi i$$

Zira $\frac{1}{e^z - 1}$ in C nin içindeki yegâne kutup yeri $z = 0$ dır.

Diğer taraftan

$$\Gamma(1-s) = \frac{-1}{s-1} + \ldots .$$

Şu halde

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \ldots .$$

Yani $\zeta(s)$ in $s = 1$ kutup noktasındaki rezidüsü 1 dir. Şimdiye kadar elde edilen bütün neticeleri aşağıdaki teoremde topluyoruz.

Teorem 6.1.1.1. $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ bir tam fonksiyondur.

6.2.2. **Fonksiyenel denklem** $\zeta(s)$ fonksiyonunun sıfır yerleri hakkında ilk malumatı $\zeta(s)$ in sağlamış olduğu fonksiyonel denklemden elde edebiliriz.

Bu denklemi (6.1.1.2) den çıkarabiliriz. Filhakika, aşağıda tarifi verilen bir C_n çevresini göz önüne alalım. C_n çevresi, merkezi başlangıç noktasında, kenarları eksenlere paralel ve uzunlukları $(4n+2)\pi$ olan karedir.

$\frac{z^{s-1}}{e^z-1}$ in $z = +2\nu i\pi$ deki rezidüsü $(2\nu\pi e^{\frac{\pi i}{2}})^{s-1}$ ve $z = -2\nu i\pi$

deki rezidüsü ise $(2\nu\pi e^{\frac{3i\pi}{2}})^{s-1}$. Rezidülerin toplamı

$$(2\nu\pi)^{s-1} e^{i\pi(s-1)}\, 2\cos\frac{\pi}{2}(s-1) = -2\,(2\nu\pi)^{s-1} e^{i\pi s}\sin\frac{\pi s}{2} .$$

Binaenaleyh Cauchy Rezidü Teoremi $C_n + E\rho$ çevresine tatbik edilirse ($\rho = (2n+1)\pi$, ve $E\rho$, ρ uzunluğunda olan bir kesittir.)

$$-\int_{C_n} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\, dz + [\Phi(s)]_\rho = 4\pi i\, e^{\pi i s}\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(2\nu\pi)^{s-1} .$$

Şimdi $\frac{1}{e^z-1}$ karenin kenarları üzerinde sınırlıdır ve yine karenin kenarları üzerinde

$$|z^{s-1}| \leq |z|^{\sigma-1} e^{2\pi|t|} .$$

Binaenaleyh $n \to \infty$ için $z^{s-1} = O(n^{\sigma-1})$. Diğer taraftan karenin uzunluğu $O(n)$ dir. Dolayısiyle $\int_{C_n} \frac{z^{s-1}}{e^z-1}\, dz = O(n^\sigma)$. Binaenaleyh $\sigma < 0$ için

$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} = 0$ ve

$$\Phi(s) = 4\pi i\, e^{\pi i s}\sin\frac{\pi s}{2}(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s) .$$

Binnetice

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) .$$

Bu denklemin ispatında $\sigma < 0$ farzedilmişti. Fakat şimdi görülüyor ki bütün s ler için muteberdir (Teorem 6.1.1.1.).

Euler özdeşliği. p, bir asal sayı olsun. $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$ verildiğine göre

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \ldots .$$

Sağdaki seri mutlak yakınsak olduğundan (çünkü $1 + p^{-\sigma} + p^{-2\sigma} + \ldots$ yakınsaktır), $p = 2,3,\ldots$ P asal sayılarına tekabül eden sonlu sayıda bu gibi serileri çarpabiliriz. Elde edilen serinin genel terimi

$$2^{-a_2 s}\, 3^{-a_3 s}\ldots P^{-a_p s} = n^{-s} \quad (a_2 \geq 0,\ a_3 \geq 0, \ldots, a_p \geq 0)$$

Burada, n in hiç bir asal faktörü P yi aşamaz. Diğer taraftan Aritmetiğin esas teoremine göre (bir tam sayı, sıra hariç, bir tek şekilde asal çarpan-

lara (faktörlere) ayrılabilir bu çarpımda herbir n sayısı yalnız bir defa husule gelir. Binaenaleyh

$$\prod_{p \leq P} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{(P)} n^{-s},$$

sağdaki toplamda (P) işareti, n nin asal faktörleri, yalnız, 2, 3, 5,7,... P asal sayılardan ibaret olduğunu gösterir. Bu toplam, n nin asal faktörleri 1 den p ye kadar olan bütün n^{-s} sayılarını ihtiva ettiğine göre

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{(P)} n^{-s} < \sum_{P+1}^{\infty} n^{-s}$$

$s > 1$ ve $P \to \infty$ için $\sum_{P+1}^{\infty} n^{-s} \to 0$. Binaenaleyh

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \lim_{P \to \infty} \sum_{(P)} n^{-s} = \lim_{P \to \infty} \prod_{p \leq P} \frac{1}{1-p^{-s}} .$$

Sağdaki çarpım sonsuzdur *yani asal sayıların sayısı sonsuzdur*. Aksi halde $s = 1$ için sağdaki çarpım sonlu bir sayıdır. Halbuki $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksaktır. Bu tezat iddiamızın doğru olduğunu gösterir. Netice olarak aşağıdaki Euler özdeşliğini elde ederiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} .$$

Binaenaleyh Riemann $\zeta(s)$ fonksiyonu

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

olarak da tarif edilebilir. Bu sonsuz çarpım da $\sigma > 1$ için *mutlak* ve *üniform yakınsaktır*. Filhakika

$$\sum_p \left| \frac{1}{p^s} \right| = \sum_p \frac{1}{p^\sigma}$$

Bu son seri $\Sigma n^{-\sigma}$ serisinin terimlerinden müteşekkil olduğundan iddiamız doğrudur.

Euler özdeşliği $\zeta(s)$ in sıfırları hakkında aşağıdaki neticeyi verir.

Teorem 6.1.2.1. *$\zeta(s)$ in $\sigma > 1$ sağ yarı düzleminde sıfırları yoktur.*

İspat. Sonsuz çarpım $\sigma > 1$ için yakınsaktır ve hiç bir faktörü sıfır değildir. Binaenaleyh $\zeta(s)$, $\sigma > 1$ için sıfır değildir.

Teorem 6.1.2.2. *$\zeta(s)$ in $s = -2, -4, -6, \ldots$ sıfırları hariç $\sigma < 0$ için sıfırları yoktur.*

İspat. Fonksiyonel denklemde $\zeta(1-s)$ in, yukardaki teoremden dolayı, $\sigma < 0$ için sıfırları yoktur. $\Gamma(1-s)$ in hiç sıfırı yoktur. $\sin \frac{\pi s}{2}$ $\sigma < 0$ için yalnız $s = -2, -4, \ldots$ yerlerinde sıfır olduğundan teoremin ispatı tamamlanmıştır.

TARİF 2. $s = -2, -4, -6, \ldots$ yerlerine *$\zeta(s)$ in aşikar sıfırları* denir.

En son neticeleri hülâsa edersek

Teorem 6.1.2.2. *$\zeta(s)$ nin aşikâr sıfırlar hariç diğer sıfırları var ise $0 \leq \sigma \leq 1$ şeridindedir.*

$\zeta(s)$ in sıfırları hakkında biraz daha malûmat edinebilmemiz için fonksiyonel denklemi başka birşekle sokmaya çalışalım. Şöyle ki

$$\sin \frac{\pi s}{2} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}$$

vaz edilirse

$$\zeta(s)\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = (2\pi)^s \zeta(1-s)\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Theta(s)$$

dir.

Burada

$$\Theta(s) = \frac{\frac{1}{\Gamma(1 - \frac{s}{2})} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}}{\frac{1}{\Gamma(1-s)}} .$$

$\frac{1}{\Gamma}$ lar *Weierstrass kanonik çarpımlarıyle* gösterilirse derhal görülür ki paydaki $\frac{1}{\Gamma}$ ların bütün sıfırları ile paydadaki $\frac{1}{\Gamma}$ nın $s = 2$ hariç bütün sıfırları birbirini götürür. Neticede $\Theta(s)$, hiç sıfırı olmayan bir tam fonksiyon olup

$$\Theta(s) = e^{\alpha s + \beta}$$

şeklinde olduğu hemen anlaşılır. Şimdi α, β katsayılarını hesaplıyalım.

$$s = 0 \text{ için } e^\beta = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$s = 1$ ve, $z \to 0$ için $z\,\Gamma(z) \to 1$ gözönünde tutulursa

$$e^{\alpha+\beta} = \frac{1}{2\,\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot$$

Binaenaleyh

$$\Theta(s) = \frac{1}{2^s\,\pi^{\frac{1}{2}}}$$

ve

$$\zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \zeta(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}} .$$

Veyahut

$$\zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \zeta(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}$$

şeklinde yazılırsa görülür ki $\zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ fonksiyonu s yerine $1-s$ vaz edildiği takdirde değişmez. Diğer taraftan $\zeta(s)\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$, $s = 1$ ve $s = 0$ kutup yerleri hariç bütün düzlemde analitiktir. Zira $\sigma > 1$ için analitiktir. Yukardaki hassadan dolayı $\sigma < 0$ için analitiktir.

Binaenaleyh

$$\xi(s) = s(s-1)\,\zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} \qquad (6.1.2.1)$$

fonksiyonu bir tam fonksiyondur öyleki s yerine $1-s$ konularsa değişmez. Yani $\xi(s) = \xi(1-s)$. Diğer taraftan $s = \frac{1}{2} + iz$ vaz edilirse $\xi(\frac{1}{2} + iz) = \xi(\frac{1}{2} - iz)$. En son olarak

$$\Xi(z) = \xi(\tfrac{1}{2} + iz)$$

vaz edilirse

$$\Xi(z) = \Xi(-z)$$

Binaenaleyh fonksiyonel denklem aşağıdaki basit şekilde ifade edilebilir.

Teorem 6.1.2.4. $\Xi(z)$ Riemann fonksiyonu z in *çift* bir tam fonksiyonudur.

Teorem 6.1.2.5. $\xi(s)$ ve $\Xi(z)$ tam fonksiyonlarının *mertebeleri* 1 dir.

Bu teoremin ispatını vermezden evvel $\zeta(s)$ hakkında biraz daha bilgi edinelim.

TARİF 3. $[x]$, x yi aşmıyan en büyük tam sayıyı gösterir.

Teorem 6.1.2.6. $\varphi(x)$, $m \leq x \leq n$ (m,n pozitif tam sayı) kapalı aralığında sürekli ve türevi haiz olsun bu takdirde

$$\varphi(m) + \varphi(m+1) + \ldots + \varphi(n) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{\varphi(m)}{2}$$

$$+ \int_m^n \varphi(x)\,dx + \int_m^n \varphi'(x)\,(x - [x] - \tfrac{1}{2})\,dx.$$

İspat. k ve $k+1$ birbirini takip eden iki tam sayı olsun.

$$\int_k^{k+1} \varphi'(x)\,(x - [x] - \tfrac{1}{2})\,dx = \int_k^{k+1} \varphi'(x)\,(x - k - \tfrac{1}{2})\,dx$$

$$= \left[\varphi(x)\left(x - k - \tfrac{1}{2}\right)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \varphi(x)\,dx.$$

Binaenaleyh

$$\int_k^{k+1} \varphi'(x)\,(x - [x] - \tfrac{1}{2})\,dx = \frac{\varphi(k+1)}{2} + \frac{\varphi(k)}{2} - \int_k^{k+1} \varphi(x)\,dx$$

$k = m, m+1, \ldots, n$ değerleri verilip toplandığı takdirde istenilen neticeye varılır.

Özel olarak $\varphi(n) = n^{-s}$ vaz edelim; $m = 1$ alınırsa

$$\sum_1^n \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^s} + \tfrac{1}{2} + \int_1^n \frac{dx}{x^s} - s\int_1^n \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2n^s} + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1\right) - s\int_1^n \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^{s+1}}\,dx.$$

Şimdi $s > 1$ farzedilir ve $n \to \infty$ yapılırsa

$$\zeta(s) = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}}\,dx \qquad (6.1.2.2)$$

$[x] - x + \frac{1}{2}$ sınırlı olduğundan integral $\sigma > 0$ için yakınsaktır. Üstelik $\sigma > 0$ yarı düzleminde *her sınırlı kapalı bölgede üniform yakınsaktır*. Dolayısiyle bu integral $\sigma > 0$ için bir analitik fonksiyon tarif eder.

Diğer taraftan aşağıdaki neticeyi kaydedelim.

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s}$$

$$+\ldots - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \ldots\right).$$

Yani

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots .$$

Bu Dirichlet serisi (umumiyetle $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ tipteki serilere denir). s nin bütün pozitif reel değerleri için yakınsaktır, ve dolayısiyle $\sigma > 0$ yarı düzlemde üniform yakınsaktır. Fakat bize yalnız bu serinin s nin pozitif değerleri için yakınsaklığı lüzumlu olduğunda ikinci iddianın ispatını vermiyeceğiz [1]. Birinciye gelince aşikârdır (teorem 2.5.1.2).

Şimdi yeniden yukardaki Teoreme dönelim ve aşağıdaki denklemi gözönüne alalım.

$$|\xi(s)| = |s|\,|s-1|\,\pi^{-\frac{\sigma}{2}}\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right|\,|\zeta(s)|.$$

Gördük ki (5.4.10.1), $\sigma > 0$ için

$$\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| = \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)$$

$|s|$ nin çok büyük değerleri için Stirling formülü $\Rightarrow$

$$\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) = O\left(e^{\frac{1}{2}\sigma\log\sigma}\right).$$

Diğer taraftan (6.1.2.1) formülü $\Rightarrow$

$$|\zeta(s)| \leq |s| \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2}}{x^{\sigma+1}}\,dx + \left|\frac{1}{s-1}\right| + \frac{1}{2}$$

$|s|$ çok büyük ve $\sigma \geq \frac{1}{2}$ için

$$|\zeta(s)| \leq |s| \int_1^\infty \frac{dx}{2x^{\frac{3}{2}}} + O(1)$$

yani

$$\zeta(s) = O(|s|).$$

Binaenaleyh $\sigma \geq \frac{1}{2}$ için

(1) Mamafih bu iddianın ispatı § 4.8.2 de verilmiştir. Sırası gelmişken şunu da ilâve edelim. $\eta(s) = 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \ldots$ fonksiyonu Weiertrass teoreminden dolayı $\sigma > 0$ yarı-düzleminde analitiktir. Diğer taraftan $\sigma > 1$ için $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$. Binaenaleyh bu formül $\zeta(s)$ nin 0 $\sigma \leq 1$ bölgesine analitik temditini sağlamaktadır (bu bahis için Bölüm VII yi gör).

$$\xi(s) = O\left(e^{\frac{1}{2}|s|\log|s|}\right) = O\left(e^{|s|}\right). \qquad (6.1.2.3)$$

Fakat $\xi(s) = \xi(1-s) \Rightarrow (6.1.2.3)$, $\sigma \leq \frac{1}{2}$ için de doğrudur.

Şu halde $\xi(s)$ in mertebesi en fazla 1 dir. Yani $\lambda \leq 1$.

Diğer taraftan s reel değerler alarak sonsuza yaklaşırsa

$$\xi(\sigma) \sim e^{\frac{1}{2}\sigma\log\sigma} \sim e^{\sigma}.$$

Binaenaleyh $|\xi(s)| \geq |\xi(\sigma)|$ olduğundan $\xi(s)$ in mertebesi en aşağı 1 dir. Yani $\lambda \geq 1$. Şu halde $\lambda = 1$.

Binaenaleyh $\Xi(z)$ in mertebesi de 1 dir. Dolayısiyle $\Xi(\sqrt{z})$ nin mertebesi $\frac{1}{2}$ dir. Halbuki biliyoruz ki Hadamard teoreminden dolayı mertebesi sonlu olan bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = e^{g(z)}\, z^m \prod_1^\infty E\left(h\,;\,\frac{z}{a_n}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $h \leq \lambda \leq h + 1$. Yani h en fazla λ ya eşit tir ve $g(z)$ nin derecesi en fazla h dır. Şayet sıfırların sayısı sonlu ise $\prod_1^\infty$ bu takdirde bir polinomdur ve λ $g(z)$ in derecesine eşittir. Binaenaleyh λ bir tam sayı değilse $f(z)$ nin sıfır yerlerinin sayısı sonsuzdur.

Şu halde $\Xi(\sqrt{z})$ in ve dolayısıyle $\Xi(z)$ ve $\xi(s)$ in sonsuz sayıda sıfır yerleri vardır. Fakat (6.1.2.2) den görülüyor ki *$\xi(s)$ nin bu sıfırları aynı zamanda $\zeta(s)$ nin sıfırlarıdır.* Binaenaleyh $\zeta(s)$ nin sıfırları hakkında aşağıdaki neticeyi verebiliriz.

Teorem 6.1.2.7. Aşikâr sıfırları hariç $\zeta(s)$ nin bütün sıfırları $0 \leq \sigma \leq 1$ şeridinde bulunuyor.

Teorem 6.1.2.8. $\zeta(s)$ nin reel eksen üzerinde 0 ile 1 arasında (0 dahil) sıfırları yoktur.

İspat. $0 < s < 1$ reel için

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \ldots > 0.$$

Üstelik $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ yani $\zeta(0) \neq 0$ dır. Teorem ispatlanmıştır.

Son olarak diyebiliriz ki s reel için $\zeta(s)$ reel olduğundan $\zeta(s)$ in sıfır yerleri ikişer konjügedirler. Sonra, a bir sıfır yeri ise fonksiyonel denklemden

(1) Fonksiyonel denklem ve $s \to 0$ için $\zeta(1-s) \sim -\frac{1}{s}$ yardımıyle bulunur.

dolayı $1-a$ da bir sıfır yeridir. Binnetice a bir sıfır yeri ise $\bar{a}$, $1-a$, $1-\bar{a}$ da sıfır yerleridirler. Binaenaleyh $\zeta(s)$ in sıfır yerleri $\sigma = \frac{1}{2}$ eksenine nazaran simetriktirler. Riemannın tahminine göre $\zeta(s)$ in, aşikâr sıfır yerleri hariç, bütün sıfırları $\sigma = \frac{1}{2}$ *kritik hattın* üzerindedir. Bu tahminin doğru olup olmadığı bu güne kadar ispat edilmiş değildir.

6.1.3. $\xi(s)$ tam fonksiyonunun *kanonik* gösterimi. $\xi(s)$in mertebesi 1 olup sonsuz sayıda sıfırları olduğuna göre $\xi(0) = 1$ göz önünde tutulursa

$$\xi(s) = e^{b_0 s} \prod_a \left(1 - \frac{s}{a}\right) \frac{s}{e^a} .$$

Burada b_0 bir sabittir.

O halde,

$$\zeta(s) = \frac{e^{b_0 s}}{s\,(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\ \Gamma\left(\frac{s}{a}\right)} \prod_a \left(1 - \frac{s}{a}\right) e^{\frac{s}{a}} .$$

Veyahut,

$$\zeta\ (s) = \frac{e^{bs}}{2\,(s-1)\ \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)} \prod_a \left(1 - \frac{s}{a}\right) e^{\frac{s}{a}} .$$

Burada $b = b_0 + \frac{1}{2} \log \pi$

Aynı zamanda logaritmik türev alınırsa

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)} + \sum_a \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{a}\right)$$

$s \to 0$ için

$$\frac{\zeta'(0)}{\xi(0)} = b + 1 - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} .$$

Halbuki fonksiyonel denklemde, s yerine $1-s$ vaz edildiği takdirde

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log 2\pi - \frac{\pi}{2} \tan \frac{s\pi}{2} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

elde edilir. Sonra

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right) - \gamma$$

ifadesinde $s = 1$ yapılırsa

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$$

dır. Diğer taraftan

$$\lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \int_1^{\infty} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^2}\, dx + \frac{1}{2}$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{[x] - x}{x^2}\, dx + 1 .$$

Halbuki

$$\int_1^{\infty} \frac{[x]-x}{x^2}\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^{n} \frac{[x]-x}{x^2}\, dx = \lim_{n \to \infty} \left[\int_1^{n} \frac{[x]}{x^2}\, dx - \log n \right]$$

yazılırsa

$$\int_1^{n} \frac{[x]}{x^2}\, dx = \sum_{m=1}^{n-1} m \int_m^{m+1} \frac{dx}{x^2} = \sum_{m=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)$$

dir. Binaenaleyh

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{n} \frac{[x]-x}{x^2}\, dx + 1 = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{1+m}\right) - \log n \right] = \gamma .$$

Şu halde $s = 1$ civarında

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + A(s-1) + \dots .$$

Dolayısiyle

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\frac{-1}{(s-1)^2} + A + \dots}{\frac{1}{(s-1)} + \gamma + A\,(s-1) + \dots} = -\frac{1}{s-1} + \gamma + \dots \quad .(6.1.3.1)$$

Yine $s = 1$ civarında

$$\frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi s}{2} = -\frac{1}{s-1} + o(1) .$$

Binaenaleyh

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\,\pi$$

ve

$$b = \log 2\,\pi - 1 - \frac{1}{2}\,\gamma .$$

Binnetice

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}\,\pi^s\, e^{-(1+\frac{1}{2}\gamma)s}}{(s-1)\,\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} \prod_a \left(1-\frac{s}{a}\right) e^{\frac{s}{a}}.$$

6.1.4. **Hadamard ve Vallée Poussin Teoremi.** Yeniden

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \ \sigma > 1$$

Sonsuz çarpımını göz önüne alalım. Logaritmik türevini alırsak

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} = -\sum_p \log p\,\frac{p^{-s}}{1-p^{-s}}$$

$$= -\sum_p \log p \sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms}.$$

Yani,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \log p\left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right).$$

Veyahut, terimlerin sırası değiştirilerek

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}, \ \sigma > 1.$$

Burada

$$\Lambda(n) = \begin{array}{l} \log p, \text{ şayet } n \neq p^m \ m > 0, \text{ ise} \\ 0, \text{ şayet } n \neq p^m \text{ ise} \end{array}$$

Teorem 6.1.4.1 *(Hadamard de la Vallée Poussin).* $\zeta(s)$ in, $\sigma = 1$ doğrusu üzerinde hiç sıfırı yoktur.

İspat. Burada *de la Vallée Poussin*'nin ispat tarzını veriyoruz.

$$Z(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

fonksiyonu $s = 1+\varepsilon+it$, $\varepsilon > 0$ doğrusu üzerinde analitiktir, çünki bu doğru üzerinde $\zeta(s)$ sıfır değildir. Hemen görüleceği gibi belli bir sebepten dolayı aşağıdaki ifadeyi teşkil edelim.

$$3Z(1+\varepsilon)+4\mathrm{Re}(Z(1+\varepsilon+it))+\mathrm{Re}(Z(1+\varepsilon+2it))$$

$$= -\sum_2^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\varepsilon}}\,[3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)]$$

$$= -2\sum_2^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\varepsilon}}\,[1+\cos(t\log n)]^2 \leq 0.$$

Şimdi (6.1.3.1) den dolayı $\varepsilon \to 0$ için $\varepsilon Z(1+\varepsilon) \to -1$. Halbuki $t \neq 0$ ise,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon Z(1+\varepsilon+it) = \begin{array}{l} 0 \text{ şayet } 1+it,\ \zeta(s) \text{ in sıfırı değilse} \\ \alpha \text{ şayet } 1+it,\ \zeta(s) \text{ nin } \alpha \text{ mertebeden bir sıfırı ise.} \end{array}$$

Aynı şey $Z(1+\varepsilon+2it)$ için doğru olduğundan, şu halde $1+it$ nin $\zeta(s)$ nin bir sıfırı olması halinde ($\alpha \geq 1$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon[3Z(1+\varepsilon)+4\mathrm{Re}(Z(1+\varepsilon+it))+\mathrm{Re}(Z(1+\varepsilon+2it))] \geq -3+4\alpha \geq 1.$$

Bu ise tezat teşkil eder. Dolayısıyle teorem ispatlanmıştır.

Benzer bir usul ile *Hadamard-de la Vallée Poussin* Teoreminin ikinci bir ispatını vereceğiz.

Yine Euler formülünden hareket ederek

$$\log\zeta(s) = \sum_p \log(1-p^{-s})^{-1} = \sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p^{-ms}}{m} \qquad (6.1.4.1)$$

elde edilir. Bu katlı serinin bütün terimleri pozitiftir. Üstelik bütün p ve s ler için $p^{-s} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan bütün seriler yakınsaktır. Şu halde terimlerin yerleri mevzubahis değildir ve (6.1.4.1)

$$\log\zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n^{-s},\ \sigma > 1 \qquad (6.1.4.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada a_n şu şekilde tarif edilmiştir.

$$a_n = \begin{array}{l} \dfrac{1}{m} \text{ şayet } n = p^m \text{ ise} \\ 0 \text{ şayet } n \neq p^m \text{ ise} \end{array} \qquad (6.1.4.3)$$

Birinci ispatta olduğu gibi

$$3+4\cos\Phi+\cos 2\Phi = 2(1+\cos\Phi)^2 \geq 0 \qquad (6.1.4.4)$$

bağıntısını göz önüne alalım.

$$\omega = e^{i\Phi},\ |\omega| = 1,\ \mathrm{Re}\,\omega = \cos\Phi$$

vaz edilirse (6.1.4.4)

$$3+4\,\mathrm{Re}\,\omega+\mathrm{Re}\,\omega^2 = \mathrm{Re}\,(3+4\omega+\omega^2) \geq 0 \qquad (6.1.4.5)$$

şeklini alır. Şimdi

$$3\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma)+4\,\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+it)+\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+2it)$$

$$= \mathrm{Re}\,\Sigma a_n\, n^{-\sigma}(3+4\,n^{-it}+n^{-2it})$$

$$= \Sigma a_n\, n^{-\sigma}\,\mathrm{Re}\,(3+4n^{-it}+n^{-2it})$$

ifadesini teşkil edelim. $a_n \geqq 0$ ve $|n^{-it}| = 1$ olduğundan (6.1.4.5) den dolayı

$$\mathrm{Re}\,(3 + 4\,n^{-it} + n^{-2it}) \geq 0\,.$$

Şu halde

$$\mathrm{Re}(\log \zeta^3(\sigma)\,\zeta^4(\sigma + it)\,\zeta(\sigma + 2it) \geq 0,\ \sigma > 1\,.$$

Veyahut

$$|\,\zeta^3(\sigma)\,\zeta^4(\sigma + it)\,\zeta(\sigma + 2it)\,| \geq 1,\quad \sigma > 1\,. \qquad (6.1.4.6)$$

Şimdi farzedelim ki $\exists t_0 \ni \zeta(1 + it_0) = 0$. Bu takdirde

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{\zeta(\sigma + it_0)}{\sigma - 1}$$

analitiktir. Zira $\sigma = 1$ kutup noktası ile yine aynı noktadaki $\zeta(s)$ nin sıfırı biribirini götürür. (6.1.4.6) formülü $t = t_0$ için

$$\left|\,\zeta(\sigma + 2it_0)\left[\frac{\zeta(\sigma + it_0)}{\sigma - 1}\right]^4 [(\sigma - 1)\,\zeta(\sigma)]^3\,(\sigma - 1)\,\right| \geq 1$$

şeklinde yazılırsa görülür ki $(\sigma - 1)\,\zeta(\sigma)$, $\sigma \to 1$ için analitik olduğundan sol taraf $\sigma \to 1$ için sıfırdır. Bu ise imkânsızdır.

2. Asal Sayılar Teoremi

(Hadamard-de la Vallée Poussin)

6.2.1 **Asal Sayı Teoremi.** *TARİF* 4. x den küçük veya x e eşit asal sayıların sayısı $\pi(x)$ ile gösterilir. Yani $\pi(x) \leq x$.

Hadamard ile *de la Vallée Poussin* ayni zamanda gösterdiler ki

$$x \to \infty \text{ için } \frac{\pi\,(x)\log x}{x} \to 1$$

yani x in çok büyük değerleri için asal sayıların sayısı tam $\dfrac{x}{\log x}$ ye eşittir.

Diğer bir ifade tarzı ile

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

olarak yazılır.

6.2.2. Asal sayılar teoremini doğrudan doğruya $\pi(K)$, K tam sayı, için değil, $\sum\limits_2^K a_n$, $K \to \infty$ için ispat edeceğiz. Bunun için de gösterme liyiz ki $\sum\limits_2^K a_n$ ile π (K) nın *büyüklük mertebeleri* aynıdır. Evvelâ şu lemmayı ispat edelim.

Lemma 1. $\pi(x) < 7\,\dfrac{x}{\log x}$

İspat. Biliyoruz ki

$$(x + y)^{2n} = \sum_{r=0}^{2n} \binom{2n}{r} x^{2n-r}\,y^r \qquad (6.2.2.1)$$

Burada

$$\binom{2n}{r} = \frac{2n\,!}{r\,!\,(2n - r)\,!}$$

(6.2.2.1) de $x = y = 1$ vaz edilirse

$$2^{2n} = \sum_{r=0}^{2n} \binom{2n}{r}\,.$$

Şu halde

$$C_n = \binom{2n}{n} < 2^{2n}.$$

$$C_n = \frac{(n + 1)\,(n + 2)\ldots(2n - 1)\,2n}{n\,!}$$

tam sayı olup, n ile $2n$ arasındaki herhangibir p asal sayısı C_n yi böldüğünden

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq C_n < 2^{2n},$$

veyahut

$$\sum_{n<p\leq 2n} \log p < 2n \log 2\,. \qquad (6.2.2.2)$$

Şimdi

$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$$

vaz edersek (6.2.2.2) eşitsizliği

$$\theta(2n) - \theta(n) < 2n \log 2$$

olarak yazılır. $\theta(1) = 0$ göz önünde tutulur, $n = 2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$ vaz edilir taraf tarafa toplanırsa

$$\theta(2^k) < 2\,(2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1}) \log 2\,.$$

Halbuki indüksiyon ile derhal görülür ki

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1\,.$$

O halde

$$\theta(2^k) < (2^{k+1} - 2) \log 2 < 2^{k+1} \log 2,$$

sonra herhangibir $x \geq 1$ için $\exists k, \ni$

$$2^{k-1} \leq x < 2^k$$

$\theta(x)$, x in küçülmeyen monoton bir fonksiyonu olduğundan

$$\theta(x) < \theta(2^k) < 2^{k-1} . 4 \log 2 \leq 4x \log 2 . \qquad (6.2.2.3)$$

Diğer taraftan

$$\theta(x) > \sum_{\sqrt{x}}^{x} \log p > [\pi(x) - \pi(\sqrt{x})] \log \sqrt{x} .$$

Binaenaleyh (6.2.2.3) eşitsizliği göz önünde tutulursa

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) < 8 \log 2 . \frac{x}{\log x}$$

ve $\pi(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}$ olduğundan

$$\pi(x) < 8 \log 2 . \frac{x}{\log x} + \sqrt{x} .$$

Yani

$$\pi(x) < \frac{x}{\log x} \left(8 \log 2 + \frac{\log x}{\sqrt{x}} \right)$$

Son olarak $\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ in maksimumu göz önünde tutularak: Max $\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ $= \frac{2}{e}$

$$\pi(x) < 7 \frac{x}{\log x}$$

dır.

Şimdi $\pi(x)$ için bir alt sınır bulacağız[1]

Lemma 2. $x \geq 2$ için $\pi(x) > \frac{x}{5 \log x}$

İspat. Burada yeniden $C_n = \binom{2n}{n}$ binom katsayısını göz önüne alalım. Açık olarak

(1) Konu dışı olmakla beraber, $\pi(x) \simeq x/\log x$ neticesine çok yakın olan $\frac{x}{5 \log x} < \pi(x) < \frac{7x}{\log x}$ eşitsizliklerini göstereceğiz. Bunun için de aşağıdaki lemma 2 yi ispat etmek kâdfidir.

$$C_n = \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdots \frac{n+1}{1} \geq 2^n ,$$

çünki, bu çarpımda herbir kesir yani

$$\frac{2n-k}{n-k} = 2 + \frac{k}{n-k} \geq 2 .$$

Diğer taraftan Aritmetiğin Esas Teoreminden dolayı, birtek şekilde olarak

$$C_n = \prod_{p \leq 2n} p^{\alpha}, \ \alpha \text{ pozitif tam}.$$

Gösterelim ki her bir $p^{\alpha} \leq 2n$.

Bunun için gösterelim ki $m!$ yi bölen p nin en büyük kuvveti

$$\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots .$$

Bu toplam sonludur, zira $\exists k \ni p^k \leq m < p^{k+1}$ ve bütün $j > k$ lar için $\left[\frac{m}{p^j}\right] = 0$ mademki bu j ler için $p^j > m$.

Şimdi $m!$ de p nin böldüğü faktörler

$$1p, 2p, 3p, \ldots, \left[\frac{m}{p}\right] p$$

şeklindedirler. Yukardaki dizide p lerin sayısı $\left[\frac{m}{p}\right]$ dir. Şu halde $p^{\left[\frac{m}{p}\right]}$, $m!$ yi böler. $m!$ yi $p^{\left[\frac{m}{p}\right]}$ ile bölelim. p, neticeyi bölüyorsa, p^2 $m!$ yi böler ve $m!$ de p^2 nin böldüğü faktörler

$$1p^2, 2p^2, 3p^2, \ldots, \left[\frac{m}{p^2}\right] p^2$$

şeklindedirler. Bunların sayısı $\left[\frac{m}{p^2}\right]$ olup, p^2 nin $\left[\frac{m}{p^2}\right]$ kuvveti, $m!$ yi böler. Binaenaleyh $p^{\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right]}$, $m!$ yi böler. Bu şekilde devam edilerek $m!$ yi bölen p nin en büyük kuvveti elde edilir[1].

1 Şöyle de muhakeme edilebilir. Birinci mülâhazadan dolayı

Neticede, birtek şekilde olarak

$$m! = \prod_{p \leq m} p^{\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots}$$

yazılabilir.

$$m\,! = \left[\frac{m}{p}\right]!\; p^{\left[\frac{m}{p}\right]}\; Q_1,$$

burada p, Q_1 i bölmüyor. Diğer taraftan p, $\left[\frac{m}{p}\right]!$ yi bölüyorsa, $\left[\frac{m}{p}\right]!$ deki faktörler

$$1p,\ 2p,\ \ldots \left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right] p$$

şeklindedir. Fakat $\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right] = \left[\frac{m}{p^2}\right]$. Gerçekten, genel olarak, a, b pozitif tamları için

$$\left[\frac{\left[\frac{m}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{m}{ab}\right]$$

Filhakika, $\left[\frac{m}{a}\right] = \alpha$ vazedersek tariften dolayı $\alpha \leq \frac{m}{a}$. Veya, $m = \alpha a + r_1$, $o \leq r_1 < a$. Aynı şekilde $\left[\frac{\alpha}{b}\right] = \beta$ vazedilirse, $\alpha = \beta b + r_2$, $o \leq r_2 < b$. Binaenaleyh, $m = \beta ab + ar_2 + r_1$ ve

$$\left[\frac{m}{ab}\right] = \beta + \left[\frac{ar_2 + r_1}{ab}\right]$$

Fakat $r_2 \leq -1$, $r_1 \leq a - 1$; yani $ar_2 + r_1 \leq ab - 1$ ve

$$\frac{ar_2 + r_1}{ab} \leq 1 - \frac{1}{ab}$$

Binaenaleyh $\left[\frac{ar_2 + r_1}{ab}\right] = 0$. Bu ise iddianın doğurduğunu gösterir.

Neticede, $\left[\frac{m}{p}\right]!$ yi bölen p nin kuvveti $\left[\frac{m}{p^2}\right]$ dir, yani $\left[\frac{m}{p}\right]! = \left[\frac{m}{p^2}\right]!\; p^{\left[\frac{m}{p^2}\right]}\; Q_2$,

ve

$$m! = \left[\frac{m}{p^2}\right]!\; P^{\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right]}\; Q_1 Q_2,$$

v.s.

Şimdi yukardaki iddiamıza gelerek.

$$C_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)\,!}{(n\,!)^2}$$

den

$$C_n \prod_{p \leq 2n} p^{\alpha} = \frac{\prod_{p \leq 2n} p^{\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \cdots}}{\prod_{p \leq n} p^{2\left[\frac{n}{p}\right] + 2\left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots}}$$

$$= \prod_{p \leq 2n} p^{\left\{\left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right) + \cdots\right\}}$$

elde edilir.

$n < p \leq 2n$ lere tekabül eden parantezlerde $\left[\frac{n}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right] = \ldots = 0$ ve $\left[\frac{2n}{p}\right]$, $\left[\frac{2n}{p^2}\right]$, ... lerin herbiri en fazla 1 e eşit olduğundan bu parantezler en fazla 1 e eşittir. $2 \leq p \leq n$ lere tekabül eden parantezelere gelince bunların da herbiri en fazla 1 e eşittir. Yani

$$[2x] - 2[x] \leq 1.$$

Filhakika $[x]$ in tarifinde ndolayı

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Bu eşitsizlik 2 ile çarpılırsa

$$2[x] \leq 2x < 2[x] + 2.$$

Halbuki

$$[2x] \leq 2x.$$

Binaenaleyh

$$[2x] < 2[x] + 2$$

$[2x] - 2[x] \geq 0$ olduğu da göz önünde tutulursa

$$0 \leq [2x] - 2[x] < 2.$$

$[2x] - 2[x]$, bir tam sayı olduğundan yukardaki eşitsizlik bu sayının ya 0 ya 1 olduğunu ifade etmektedir.

Şayet $p^k \leq 2n < p^{k+1}$ ise tırnak içinde k parantez vardır ve dolayısiyle

$$\alpha \leq k \text{ ve } p^{\alpha} \leq p^k \leq 2n$$

Şimdi netice şöyle tamamlanabilir

$$2^n \leq C_n \leq \prod_{p \leq 2n} (2n) = (2n)^{\pi(2n)}.$$

İki tarafın logaritmesi alınırsa

$$n \log 2 \leq \pi(2n) \log 2n^{\pi(2n)}$$

veyahut

$$\pi(2n) \geq \frac{n \log 2}{\log 2n} .$$

Bu ise teoremi çift tamlar için ispat eder.

Diğer taraftan her $x \geq 4$ reel sayısı için bir $n \geq 2$ bulunabilir öylcki

$$2n \leq x < 2n + 2 \leq 3n$$

$\pi(x)$ ve $\log x$, x in büyüyen fonksiyonları, ve $n > \frac{x}{3}$ olduğundan

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq \frac{n \log 2}{\log 2n} > \frac{x \log 2}{3 \log x} > \frac{x}{5 \log x}$$

$2 \leq x < 4$ için bu eşitsizliğin doğru olduğu direkt hesap neticesinde anlaşılır.

Teorem 6.2.2.1. K nın çok büyük değerleri için

$$\sum_2^K a_n - \pi(K) < 14 \frac{\sqrt{K}}{\log K} .$$

Hatta $\pi(K) \backsim \sum_2^K a_n$.

İspat. $\sum_2^K a_n$ toplamında her $m = 1, 2, 3, \ldots$ tam sayısına tekabül eden a_n lerin sayısını hesap edelim. (6.1.4.3) den dolayı $m = 1$ için $a_n = 1$ ve $n = p$ dir. Binaenaleyh $p \leq K$ ise $\sum_2^K a_n$ toplamında 1 e eşit olan a_n lerin sayısı $\pi(K)$ dır.

$m = 2$ için $a_n = \frac{1}{2}$ ve $n = p^2$ dir. Binaenaleyh $p \leq \sqrt{K}$ ise $\sum_2^K a_n$ toplamında $\frac{1}{2}$ ye eşit olan a_n lerin sayısı $\pi(K^{\frac{1}{2}})$ dir, v.s.

$a_n = 0$ katsayılarını sarfınazar edersek göstermiş oluyoruz ki

$$\sum_2^K a_n = \pi(K) + \tfrac{1}{2}.\pi(K^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}.\pi(K^{\frac{1}{3}}) + \ldots .$$

Veyahut kısaca

$$\sum_2^K a_n = \pi(K) + R(K) .$$

Burada $R(K)$, $\pi(K)$ dan sonra gelen terimlerin toplamını gösterir.

$$R(K) = \tfrac{1}{2}.\pi(K^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}.\pi(K^{\frac{1}{3}}) + \ldots .$$

Bu terimlerin sayısı sonludur. Filhakika, K verildiğine göre $\exists m \in (m) \ni$ bütün $n > 0$ ler için

$$K^{\frac{1}{m+n}} < 2, \; K^{\frac{1}{m}} \geq 2$$

ve dolayısıyle

$$\pi\left(\frac{1}{K^{m+n}}\right) = 0 .$$

Şu halde $K^{\frac{1}{m}} \geq 2 \Rightarrow \pi(K^{\frac{1}{m}}) \neq 0$ ve binaenaleyh $R(K)$ daki terimlerin sayısı $< m$ (tam olarak $m-1$). Halbuki

$$m \leq \frac{\log K}{\log 2} .$$

Binaenaleyh $R(K)$ daki terimlerin sayısı $\log K / \log 2$ den küçüktür. Lemma 1 den dolayı

$$\pi(K^{\frac{1}{2}}) < 7 \frac{K^{\frac{1}{2}}}{\log K^{\frac{1}{2}}} .$$

Diğer taraftan $\pi(K^{\frac{1}{3}}) \leq K^{\frac{1}{3}}$. Sonra ilk terim hariç diğer bütün terimler $K^{\frac{1}{3}}$ ile majore edilir ve bu terimlerin sayısı $\frac{\log K}{\log 2}$ den küçük olduğu gözönünde tutulursa

$$R(K) < 7 \frac{K^{\frac{1}{2}}}{\log K^{\frac{1}{2}}} + K^{\frac{1}{3}} \frac{\log K}{\log 2} < \frac{14 K^{\frac{1}{2}}}{\log K}$$

Çünkü ikinci terimin büyüklük mertebesi birinci terimin büyüklük mertebesinden daha küçüktür.

Lemma 2 gözönünde tutulursa $\pi(K) \backsim \sum_2^K a_n$ elde edilir.

Şimdi asal sayılar teoremini ispat edebilmek için $\sum_{n=2}^{K} a_n$ ile $\log \zeta(s)$ arasında bir bağıntı bulacağız.

Teorem *(O. Perron)* 6.2.2.2. Şayet

$$f(s) = \log \zeta(s) = \sum_{2}^{\infty} a_n n^{-s}, \qquad \sigma > 1,$$

x, bir tam sayıdan farklı herhangi bir sayı ve $c > 1$ ise bu takdirde

$$\sum_{n<x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} ds \qquad (6.2.2.1)$$

İspat. $$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT_1}^{c+iT_1} f(s) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT_1}^{c+iT_1} \sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{x^s}{s} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{2}^{\infty} a_n \int_{c-iT_1}^{c+iT_1} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}$$

(seri üniform yakınsak olduğundan Σ ile $\int$ yer değiştirebilir).

Bir an için integral limitleri sonsuza götürülür ($T_1 = T_2 = \infty$),

$\sum_{2}^{\infty} = \sum_{n<x} + \sum_{n>x}$ (x, sabit) yazılır ve

§ 5.10.1 deki misal (ii) :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \begin{matrix} 1, & n < x \\ 0, & n > x \end{matrix}$$

gözönünde tutulursa (6.2.2.1) neticesine varılmış olur.

Şu halde bütün mesele T_1 ve T_2 yerine ∞ konulduğu takdirde $\int$ ile Σ nın yer değiştirebildiğini göstermekten ibarettir. Bunun için de şunu göstermek kâfidir:

$$\lim_{T_2 \to \infty} \sum_{2}^{\infty} a_n \int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = 0,$$

Aynı şekilde T_1 için.

Şimdi x sabit için

$$\int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \frac{\frac{1}{s} d\left(\frac{x}{n}\right)^s}{\log \frac{x}{n}}$$

$$= -\left(\frac{x}{n}\right)^{c+iT_2} \frac{1}{\left(\log \frac{x}{n}\right)(c+iT_2)} + \frac{1}{\log \frac{x}{n}} \int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s^2},$$

$$\int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s^2} = {}_{T_2}\!\int^{\infty} i \left(\frac{x}{n}\right)^{c+it} \frac{dt}{(c+it)^2}$$

ve

$$\left| \int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s^2} \right| \leq {}_{T_2}\!\int^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{dt}{c^2+t^2}.$$

Binaenaleyh

$$\left| \int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| \leq \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{1}{T_2 \left|\log \frac{x}{n}\right|} + \frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} {}_{T_2}\!\int^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{dt}{c^2+t^2}.$$

Halbuki $T_2 \to \infty$ için

$${}_{T_2}\!\int^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{dt}{c^2+t^2} \to 0.$$

Binaenaleyh

$$\int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = O\left(\frac{1}{n^c T_2}\right).$$

O halde

$$\sum_{2}^{\infty} a_n \int_{c+iT_2}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right) \frac{ds}{s} = O\left(\frac{1}{T^2} \sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^c}\right).$$

Fakat $\sum_{2}^{\infty} a_n n^{-c}$ yakınsak olduğundan $T_2 \to \infty$ için $\frac{1}{T_2} \sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^c} \to 0$.

Dolayısiyle (6.2.2.1) ispatlanmıştır.

Teorem 6.2.2.1 gözönünde tutularak teorem 6.2.2.2 nin neticesi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{2}^{[x]} a_n = \pi(x) + R(x) \qquad (6.2.2.4)$$

olarak yazılabilir. Burada $R(x)$ bilindiği gibi

$$0 \leq R(x) < \frac{A\sqrt{x}}{\log x}, \quad x > 2$$

eşitsizliğini sağlar. A pozitif bir sabittir. Şimdi integrali hesap edeceğiz. Bunun için $\sigma = 1$ i ihtiva eden bir şerit içinde $\log \zeta(s)$ in bir üst sınırını bulacağız. Bu istikamete doğru aşağıdaki teoremleri veriyoruz.

Teorem 6.2.2.3. Farzedelim ki $\sigma_0 = 1 - \log^{-1} T$ dir, bu takdirde $T > e^2$ için R: $\sigma_0 \pm iT$, $2 \pm iT$ dörtgeninde

$$\zeta(s) = O(\log T). \qquad (6.2.2.5)$$

İspat. Teorem 6.1.2.6 dan dolayı $\sigma > 0$ için

$$\zeta(s) = \sum_1^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{-s}}{2} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_n^\infty \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^{1+s}}\,dx$$

dir. $s = 1$ kutup noktası hariç $\zeta(s)$, $\sigma > 0$ sağ düzlemde analitiktir. Şu halde

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_1^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{-s}}{2} - \int_1^n \frac{dx}{x^s} - s\int_n^\infty \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^{1+s}}\,dx$$

$\sigma > 0$ sağ yarı-düzlemde analitiktir. Burada $\frac{n^{1-s}}{s-1}$ yerine $\frac{1}{s-1} - \int_1^n \frac{dx}{x^s}$ koyduk.

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| < \sum_1^n k^{-\sigma} + \int_1^n x^{-\sigma}\,dx + \frac{|s|}{2}\int_n^\infty x^{-1-\sigma}\,dx. \qquad (6.2.2.6)$$

Bu eşitsizliği teşkil ederken $\frac{n^{-\sigma}}{2}$ yerine $n^{-\sigma}$ ve $\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|$ yerine $\frac{1}{2}$ üst sınırlarını koyduk. Diğer taraftan $\sigma > 0$ olduğundan

$$\sum_1^n k^{-\sigma} = 1 + \sum_2^n k^{-\sigma} = 1 + \sum_2^n \int_{k-1}^k k^{-\sigma}\,dx \le 1 + \sum_2^n \int_{k-1}^k x^{-\sigma}\,dx$$
$$= 1 + \int_1^n x^{-\sigma}\,dx.$$

Şu halde

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| < 1 + 2\int_1^n x^{-\sigma}\,dx + \frac{|s|}{2}\int_n^\infty x^{-1-\sigma}\,dx. \qquad (6.1.2.7)$$

Şimdi, R: $\sigma_0 \pm iT$, $2 \pm iT$, dörtgenini göz önüne alalım. $s \varepsilon R$ ne olursa olsun, (6.2.2.7) nin sağ kısmında σ yerine σ_0 konulursa $<$ nın yönü değişmez. Binaenaleyh integraller alındıktan sonra

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{1-s}\right| < \frac{2\,n^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} + \frac{n^{-\sigma_0}}{\sigma_0}\,\frac{|s|}{2}. \qquad (6.2.2.8)$$

Burada $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ için ($\sigma^0 = 1 - \log^{-1} T$ ve $T > e^2 \Rightarrow \sigma_0 > \frac{1}{2}$)

$1 - \frac{2}{1-\sigma_0} < 0$ olduğundan bu terim sarfınazar edilmiştir.

Şimdi, R de $|s| < 2 + T$ dir. Binaenaleyh

$$\frac{|s|}{2\sigma_0} < |s| < 2 + T$$

$n = [T]$ vaz edelim. Bu takdirde $T - 1 < n \le T$. Dolayısiyle (6.2.2.8) $T \to \infty$ için

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| < \frac{2T^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} + (2+T)(T-1)^{-\sigma_0} = 2\,e\log T + (2 + T)(T-1)^{-\sigma_0}$$

şeklini alır. Halbuki

$$(2+T)(T-1)^{-\sigma_0} = O(T^{1-\sigma_0}) = O(1)$$

dır. Binaenaleyh,

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = O(\log T).$$

Diğer taraftan $t \to \infty$ için $\left|\frac{1}{s-1}\right| \to 0$. Bu ise (6.2.2.5) i verir.

Teorem 6.2.2.4. Aynı şartlar altında

$$\zeta'(s) = O(\log^2 T).$$

İspat. $$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_1^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{-s}}{2} - \int_1^n \frac{dx}{x^s} - s\int_n^\infty \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^{1+s}}\,dx$$

in s ye nazaran türevini alalım.

$$\zeta'(s) + \frac{1}{(s-1)^2} = -\sum_2^{n-1} k^{-s}\log k - \frac{n^{-s}\log n}{2} + \int_1^n \log x \,.\, x^{-s}\,dx$$
$$- \int_n^\infty \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^{1+s}}\,dx + s\int_n^\infty \frac{\log x\,(x-[x]-\frac{1}{2})}{x^{1+s}}\,dx\,.$$

$\log x$, x in büyüyen bir fonksiyonu olduğundan,

$$\left|\zeta'(s) + \frac{1}{(s-1)^2}\right| < \log n\left(\sum_1^n k^{-\sigma_0} + \int_1^n x^{-\sigma_0}\,dx\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_n^\infty \frac{dx}{x^{1+\sigma_0}} + \frac{|s|}{2}\int_n^\infty \frac{\log x}{x^{1+\sigma_0}}\,dx. \qquad (6.2.2.9)$$

Şimdi $n \to \infty$ için $\int_n^\infty \frac{dx}{x^{1+\sigma_0}} \to 0 \quad (\sigma_0 > 0)$.

Diğer taraftan

$$\int_n^\infty \frac{\log x}{x^{1+\sigma_0}}\, dx = \frac{n^{-\sigma_0}}{\sigma_0} \log n + \frac{n^{-\sigma_0}}{\sigma_0^2}$$

$T - 1 < n = [T]$ vaz edelim. Bu takdirde

$$\int_n^\infty \frac{\log x}{x^{1+\sigma_0}}\, dx < \frac{(T-1)^{-\sigma_0}}{\sigma_0} \log T + \frac{(T-1)^{-\sigma_0}}{\sigma_0^2}$$

ve

$$\frac{|s|}{2} \int_n^\infty \frac{\log x}{x^{1+\sigma_0}}\, dx < \frac{(2+T)\,(T-1)^{-\sigma_0}}{2\,\sigma_0} \log T + \frac{(2+T)\,(T-1)^{-\sigma_0}}{2\,\sigma_0^2} .$$

Halbuki

$$\frac{(2+T)\,(T-1)^{-\sigma_0}}{2\sigma_0} \log T = O(\log T)$$

ve

$$\frac{(2+T)\,(T-1)^{-\sigma_0}}{2\sigma_0^2} = O(1) .$$

Binaenaleyh

$$\frac{|s|}{2} \int_n^\infty \frac{\log x}{x^{1+\sigma_0}}\, dx = O(\log T) .$$

Halbuki (6.2.2.9) daki parantez aynen (6.2.2.6) da bulunuyor. O halde

$$\sum_1^n k^{-\sigma_0} + \int_1^n x^{-\sigma_0}\, dx = O(\log T) .$$

Binnetice

$$\zeta'(s) + \frac{1}{(s-1)^2} = O(\log^2 T)$$

ve dolayısiyle

$$\zeta'(s) = O\,(\log^2 T) .$$

Teorem 6.2.2.5. $\sigma > 1$ ve $|t| \leq \frac{T}{2}$ için

$$\frac{1}{\zeta(\sigma + it)} = O\left(\frac{\log^{\frac{1}{4}} T}{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}\right) . \qquad (6.2.2.9)$$

İspat. (6.1.4.6) dan $\sigma > 1$ için

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq \zeta^{\frac{3}{4}}(\sigma)\ |\ \zeta\ (\sigma + 2it)\ |^{\frac{1}{4}}$$

yazılabilir. Veyahut

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq |\zeta(\sigma + 2\,it)|^{\frac{1}{4}}\, \zeta^{\frac{3}{4}}(\sigma)\ (\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}\ (\sigma - 1)^{-\frac{3}{4}} .$$

Şimdi, $\sigma \to 1$ için $(\sigma-1)\ \zeta(\sigma) \to 1$ ve $1 < \sigma \leq 2$ de süreklidir, şu halde o aralıkta bir $A_0 > 0$ üst sınırı vardır. Dolayısiyle

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq A_0\,(\sigma - 1)^{-\frac{3}{4}}\,|\ \zeta\ (\sigma + 2it)\ |^{\frac{1}{4}} .$$

Teorem 6.2.2.3 den dolayı $|t| \leq \frac{T}{2}$ için

$$|\ \zeta\ (\sigma + 2it)\ |^{\frac{1}{4}} = O(\log^{\frac{1}{4}} T) .$$

Bu ise (6.2.2.9) u ispatlar.

O sembolünün tarifinden dolayı $\exists\ A_1 > 0,\ \ni$

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| < A_1\ (\sigma - 1)^{-\frac{3}{4}}\ \log^{\frac{1}{4}} T .$$

Dolayısiyle

$$|\ \zeta(\sigma + it)\ | > A_2\,(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}\ \log^{-\frac{1}{4}} T \quad \sigma > 1,\ |\ t\ | \leq \frac{T}{2} \quad .. \ (6.2.2.10)$$

6.2.3. Teorem 6.1.4.1 de gösterdik ki $\zeta(s)$ in $\sigma = 1$ üzerinde hiç bir sıfırı yoktur. Binaenaleyh $\sigma = 1$ i ihtiva eden yeter derecede ince bir şeritin içinde $\zeta(s) \neq 0$. Bu paragrafta bu şeritin eni için T ye tâbi olmak üzere bir alt sınır bulacağız ve $\log \zeta(s)$ in bir üst sınırını vereceğiz. Şimdiden söyliyelim ki bu sınırların bulunmasında kullanacağımız A_3, A_4, A_5,... sabitleri daima pozitiftir.

Yine ayni R dörtgenini göz önüne alalım. Üstelik $\zeta(s)$ nin $s = 1$ singüler noktasını, meselâ, $\sigma_0 \pm i$, $2 \pm i$ dörtgeninin içine alalım. R den bu şeriti çıkarırsak geriye iki dörtgenden (σ– eksenine nazaran simetrik) müteşekkil bir R′ cümlesi kalır. $s \varepsilon R'$, $\sigma = 1$ in solunda ve s', s in $\sigma = 1$ e nazaran simetriği olsun. Bu takdirde $s = \sigma + it$ ise $s' = \sigma' + it$ öyle ki

$$\sigma' - 1 = 1 - \sigma .$$

Teorem 6.2.3.1. $1 - A_4 \log^{-9} T \leq \sigma \leq 2$ ve $|t| > 1$ için

$$|\zeta(s)| > A_5 \log^{-7} T \ . \qquad (6.2.3.2)$$

İspat. R′ cümlesinde ($|t| > 1$)

$$\zeta(s) + \int_s^{s'} \zeta'(s)\, ds = \zeta(s') \ .$$

Binaenaleyh (6.2.2.10) da gözönünde tutulursa

$$|\zeta(s)| + \left| \int_s^{s'} \zeta'(s)\, ds \right| \geq |\zeta(s')| > A_2 (\sigma' - 1)^{\frac{3}{4}} \log^{-\frac{1}{4}} T \ ; \ \sigma' > 1,$$

$$1 < |t| \leq \frac{T}{2} \ .$$

Teorem 6.2.2.4. den dolayı

$$\left| \int_s^{s'} \zeta'(s)\, ds \right| \leq \int_s^{s'} |\zeta'(s)|\, |ds| < A_3 (\sigma' - \sigma) \log^2 T = 2A_3 (\sigma' - 1) \log^2 T$$

Binaenaleyh

$$|\zeta(s)| > A_2 (\sigma' - 1)^{\frac{3}{4}} \log^{-\frac{1}{4}} T - 2 A_3 (\sigma' - 1) \log^2 T \ .$$

Sağ taraftaki terimlerin mertebelerinin ayni olduğunu ifade edelim. Bunun için birinci terim ikinci terimin meselâ iki katı olduğunu yazalım, yani

$$A_2 (\sigma' - 1)^{\frac{3}{4}} \log^{-\frac{1}{4}} T = 4 A_3 (\sigma' - 1) \log^2 T$$

ve

$$\sigma' - 1 = A_4 \log^{-9} T \ .$$

Şu halde s ve s' için

$$|\zeta(s)| > A_5 \log^{-7} T \ . \qquad (6.2.3.3)$$

Diğer taraftan (6.2.3.1) den dolayı

$$1 - \sigma = A_4 \log^{-9} T \ .$$

Binaenaleyh (6.2.3.3) eşitsizliği $1 - A_4 \log^{-9} T \leq \sigma \leq 1 + A_4 \log^{-9} T$ aralığında muteberdir. Fakat $\sigma > 1 + A_4 \log^{-9} T$ için (5.2.2.10) dan dolayı

$$|\zeta(s)| > A_2 . A_4 \log^{-\frac{27}{4}} T \log^{-\frac{1}{4}} T = A_5 \log^{-7} T \ .$$

Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi σ_0 yerine $\sigma_1 = 1 - A_4 \log^{-9} T$ koyarak elde edilen yeni R dörtgenine R* yeni R′ cümlesine de R′* diyelim.

Teorem 6.2.3.2 R* ın $\sigma = \sigma_1$, alt ve üst kenarlarında

$$|\log \zeta(s)| < A_7 \log^9 T \ .$$

İspat. Teorem 6.2.2.4 ve teorem 6.2.3.1 den dolayı R′* da

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < A_6 \log^9 T \ .$$

Diğer taraftan $\sigma_1 \leq \sigma_2 < 2$, $|t| > 1$ için

$$\log \zeta(s_2) = -\int_{\sigma_2}^{2} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\, d\sigma + \log \zeta(2 + it)$$

$$= O(\log^9 T) + O(1) = O(\log^9 T) \ .$$

Binaenaleyh $\log \zeta(s)$ in R′* ın sol, üst ve alt kenarlarındaki O su $O(\log^9 T)$ dır.

Şimdi $s_1 = \sigma_1 + it$, $|t| \leq 1$ haline geçelim. Gösterdik ki $(s - 1)\zeta(s)$, $\sigma = 1$ üzerinde analitik ve sıfırdan farklıdır. Şu halde A_4 yeter derecede küçük alınırsa $(s - 1)\zeta(s)$ Δ: $\sigma_1 \pm i$, $1 \pm i$ dörtgeninde sıfırdan farklıdır. Binaenaleyh $\log (s - 1)\zeta(s)$ Δ da analitik ve sınırlıdır. Δ nın sol kenarında

$$s_1 - 1 = \sigma_1 - 1 + it,$$

ve dolayısiyle

$$s_1 - 1 = O(\log^{-9} T) + O(1) = O(\log^{-9} T) \ .$$

Sonra,

$$|\log \zeta(s_1)| \leq |\log [(s_1 - 1)\zeta(s_1)]| + |\log (s_1 - 1)| \ .$$

Üstelik, $\log [(s_1 - 1)\zeta(s_1)]$ sınırlı olduğundan

$\log \zeta(s_1) = O(1) + O(\log \log^{-9} T) = O(\log \log^{-9} T) = O(\log^9 T)$. Şu halde teorem tamamiyle ispatlanmıştır.

Kalıyor integralin hesabı.

6.2.4. $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log \zeta(s) \frac{x^s}{s}\, ds$, $c > 1$, **İntegralinin hesabı.**

Bu integrali hesap etmek için, üzerinde integral alınan çevreyi mümkün olduğu kadar $\sigma = 1$ in soluna alacağız. Teorem 6.2.3.1 de gösterdik ki $\zeta(s)$, $c \pm iT$, $b \pm iT$ ($T > e^2$) dörtgeninde ($b = 1 - A_4 \log^{-9} T$, $c = 1 + A_4 \log^{-9} T$) sıfırdan öteye sınırlıdır. Şu halde $\log \zeta(s)$ in her bir dalı 1 den b ye kadar kesilmiş dörtgende tek değerli ve analitiktir. Bundan sonra $\log \zeta(s)$ esas dalı gösterecektir. Yani $\log \zeta(s)$, s reel için reeldir. Kesitin alt kenarını δ_1, üst kenarını δ_2, merkezi $\sigma = 1$ de olan ρ yarı çaplı bir küçük çemberi de γ ile gösterelim. Cauchy teoreminden dolayı

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} = \int_{c-i\infty}^{c-iT} + \int_{c-iT}^{b-iT} + \int_{b-iT}^{b-i\varepsilon} + \int_{\delta_1} + \int_{\gamma}$$

$$+ \int_{c+iT}^{c+i\infty} + \int_{b+iT}^{c+iT} + \int_{b+i\varepsilon}^{b+iT} + \int_{\delta_2} .$$

Kolaylık olmak üzere

$$K = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-i\infty}^{ci-T} + \int_{c+iT}^{c+i\infty}\right)$$

$$L = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iT}^{b-iT} + \int_{b+iT}^{c+iT}\right)$$

$$M = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{b-i\varepsilon} + \int_{b+i\varepsilon}^{b+iT}\right)$$

$$N = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\delta_1} + \int_{\gamma} + \int_{\delta_2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{kesit}$$

vaz edelim.

N in hesabı.

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{kesit} \log\left[(s-1)\,\zeta(s)\right]\frac{x^s}{s}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{kesit} \log(s-1)\frac{x^s}{s}\,ds .$$

Birinci integral sıfırdır. Zira $\log\left[(s-1)\,\zeta(s)\right]$, kesiti ihtiva eden bir bölgede tek değerli ve analitiktir. İkinci integrale gelince farzedelim ki $\log(s-1)$ esas değeri gösteriyor. Yani

$$-\pi < \arg(s-1) \leq \pi .$$

Dolayısıyle $\log(s-1)$ in δ_1 ve δ_2 üzerindeki değerlerinin farkı $2\pi i$ dir.

Şimdi $s-1 = re^{i\theta}$ vaz edelim. $-\pi < \theta = \arg(s-1) \leq \pi$.

Binaenaleyh

$$\log(s-1) = \log r + i\theta .$$

Şu halde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{kesit} \log(s-1)\frac{x^s}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1} (\log r - i\pi)\frac{x^\sigma}{\sigma}\,d\sigma$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} (\log\rho + i\theta)\frac{x^s}{s}\,ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_2} (\log r + i\pi)\frac{x^\sigma}{\sigma}\,d\sigma .$$

Birkere, $\frac{x^s}{s}$, $s = 1$ civarında analitik olduğundan orada sınırlıdır.

Yani $\left|\frac{x^s}{s}\right| \leq A$. O halde

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} (\log\rho + i\theta)\frac{x^s}{s}\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot (\overset{+}{\log}\rho + \pi) \cdot A$$

$\rho \to 0$ için sağ taraf sıfırdır. Yani

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma} = 0 .$$

Şu halde

$$N = -\frac{1}{2\pi i}\int_{kesit} \log(s-1)\frac{x^s}{s}\,ds = \int_b^1 \frac{x^\sigma}{\sigma}\,d\sigma .$$

$x^\sigma = u$ vaz edelim:

$$N = \int_b^1 \frac{x^\sigma}{\sigma}\,d\sigma = \int_{x^b}^{x} \frac{du}{\log u} = \int_2^x \frac{du}{\log u} - \int_2^{x^b} \frac{du}{\log u} .$$

Not. Açık olarak

$$\int_2^{x^b} \frac{du}{\log u} < A_8 \int_2^{x^b} du < A_8\, x^b .$$

Fakat $b < 1$ olduğundan x^b nin büyüklük mertebesi $\frac{x}{\log x}$ den küçüktür.

L ve M nin Hesabı.

Bu integraller dörtgenin sol, üst ve alt kenarlarını alakadar ettiğinden pek tabii olarak teorem 6.2.3.2 den istifade edeceğiz. Yani

$$|\log\zeta(s)| < A_7 \log^9 T .$$

Üst kenarda

$$\left|\frac{x^s}{s}\right| = \frac{x^\sigma}{|s|} < \frac{x^c}{|s|} < \frac{x^c}{T} .$$

Binaenaleyh

$$|\,L\,| < A_{10}\,\frac{\log^9 T.x^{c(1)}}{T}\,.$$

Ayni şekilde,

$$|M| < A_7 \log^9 T.x^b \int_{-T}^{T} \frac{dt}{\sqrt{b^2+t^2}} < A_{11}\,\log^9 T.x^b.\log T = A_{11}x^b \log^{10} T.$$

K nın hesabı.

İntegrallerden yalnız birisini tetkik etmek kâfidir. Burada integral sonsuz olduğundan bu integrali mutlak yakınsak bir integrale dönüştürmek icap eder. Bu ise teorem 6.2.2.2 de olduğu gibi umumiyetle kısmi integral alarak yapılabilir. U>T farzedelim.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{c+iU} \log\,\zeta(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds = \sum_2^n a_n\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{c+iU}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}$$

(seri üniform yakınsak olduğundan Σ ile $\int$ yer değiştirebilir).

Şimdi kısmi integral alınırsa

$$\left|\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right| \le \frac{2\left(\frac{x}{n}\right)^c}{\left|\log\frac{x}{n}\right| T} + \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^c}{\left|\log\frac{x}{n}\right|}\int_T^{\infty}\frac{dt}{t^2}$$

$$\le \frac{3\left(\frac{x}{n}\right)^c}{T\left|\log\frac{x}{n}\right|}\,.$$

Burada $x \neq$ tam sayı. En son a_n lerin 1 den küçük oldukları göz önünde tutulursa

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\log\,\zeta(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds\right| \le \frac{3}{2\pi}\,\frac{x^c}{T}\cdot\sum_2^{\infty}\frac{n^{-c}}{\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|}\,.$$

Sağdaki serinin bir üst sınırını bulmak için bu seriyi üç kısma ayıracağız.

(1) Hakikatte $|\,L\,| < A_{10}\frac{x^c}{T}$.

Birinci kısımda $n < \frac{x}{2}$, ikinci kısımda $n > \frac{3x}{2}$ ve üçüncü kısımda $\frac{x}{2} < n < \frac{3x}{2}$. Birinci kısım için $\left|\log\frac{x}{n}\right| > \log 2$. İkinci kısım için $\left|\log\frac{x}{n}\right| = \log\frac{n}{x} > \log\frac{3}{2}$. Binaenaleyh, birinci ve ikinci kısım için

$$\left|\log\frac{x}{n}\right| > \log\frac{3}{2} = A_{10}\,.$$

Şu halde

$$\text{Birinci kısım} + \text{İkinci kısım} < \frac{1}{A_{10}}\sum_2^{\infty} n^{-c}\,.$$

Halbuki $c > 1$, ve n^{-c}, $n \to \infty$ için küçüldüğünden,(1)

$$\Phi(\xi) = \int_1^{\xi}\frac{dx}{x^c} = \frac{\xi^{1-c}-1}{1-c}\,,$$

$\lim\limits_{\xi\to\infty}\Phi(\xi) = \frac{1}{c-1}$ vaz edilirse görülür ki

$$\sum_2^{\infty} n^{-c} < \frac{1}{c-1}\,.$$

Binaenaleyh

$$\frac{1}{A_{10}}\sum_2^{\infty} n^{-c} < \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{1}{c-1}\,.$$

Dolayısıyle

$$\text{I inci kısım} + \text{II inci kısım} < \frac{A_{11}}{c-1}\,.$$

Gelelim üçüncü kısma. Yani

$$\frac{x}{2} < n < \frac{3x}{2} \qquad (6.2.4.1)$$

(6.4.2.1) i aşağıdaki şekilde yazalım.

$$-\tfrac{1}{2} < \frac{x-n}{x} < \tfrac{1}{2}$$

(1) $\sum_2^N n^{-c} < \int_1^N \frac{dx}{x^c}$

$\frac{x-n}{x} = y$ vaz edilirse $\frac{x}{n} = (1-y)^{-1}$ ve

$$\log \frac{x}{n} = \log \frac{1}{1-y} = y\left(1 + \frac{y}{2} + \ldots\right), \; -1 \leq y < 1$$

$|y| < \frac{1}{2}$ için parantezin pozitif bir alt sınırı vardır. Binaenaleyh

$$\frac{1}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} < \frac{A_{12}}{|y|} = \frac{A_{12}\, x}{|x-n|} .$$

Şu halde üçüncü kısım için, şayet $n < 2x$ göz önünde tutulursa

$$\sum_{x/2}^{3x/2} \frac{n^{-c}}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} < A_{12}(2x)^{-c} \sum_{x/2}^{3x/2} \frac{x}{|x-n|} = A_{12} 2^{-c}\, x^{1-c} \sum_{x/2}^{3x/2} \frac{1}{|x-n|} .$$

Diğer taraftan T nin çok büyük değerleri için

$$2^{-c} < \tfrac{1}{2}\,, \; x^{1-c} < 1 .$$

Şu halde

$$\sum_{x/2}^{3x/2} \frac{n^{-c}}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} < A_{13} \sum_{x/2}^{3x/2} \frac{1}{|x-n|}$$

x, tam sayı olmadığına göre $x = [x] + \xi$, $\xi \neq 0$, vaz edilebilir. Binaenaleyh

$$|\, x - n \,| = |\,[x] + \xi - n\,|$$

(6.2.4.1) göz önünde tutulursa görülür ki n, $\frac{[x]}{2}$ den $[x]$ e ve $[x]$ den $\frac{3[x]}{2}$ ye kadar değerler alır. Yani $|\, x - n \,|$

$$\xi, \; |\, \xi \pm 1 \,|, \; |\, \xi \pm 2 \,|, \; \ldots, \; |\, \xi \pm \frac{[x]}{2} \,|$$

değerlerinden geçer . Binaenaleyh

$$\sum_{x/2}^{3x/2} \frac{1}{|x-n|} < \frac{1}{\xi} + \sum_{1}^{[x]} \frac{1}{k} = A_{14} + \sum_{1}^{[x]} \frac{1}{k} .$$

Fakat

$$\sum_{2}^{[x]} \frac{1}{k} < \int_{1}^{x} \frac{dx}{x} = \log x.$$

Dolayısıyle

$$\sum_{x/2}^{3x/2} \frac{1}{|x-n|} < A_{15} \log x$$

ve binaenaleyh üçüncü kısım için

$$\sum_{x/2}^{3x/2} \frac{n^{-c}}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} < A_{16} \log x .$$

Binnetice üç kısmı da birden göz önüne alırsak

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{c+i\infty} \log \zeta(s) \frac{x^s}{s}\, ds \right| < \frac{A_{17}\, x^c}{T} \left[\log x + \frac{1}{c-1}\right] .$$

Şimdi $R_1 = K + L + M$ vaz edilirse

$$|R_1| < A_{10} \frac{\log^9 T x^c}{T} + A_{11} x^b \log^{10} T + A_{18} \frac{x^c}{T} \left(\log x + \frac{1}{c-1}\right) . \tag{6.2.4.2}$$

6.2.5. Bu paragrafta asal sayılar teoreminin ispatını tamamlıyoruz. Yukardaki hesaplarda x ve T bağımsız değişkenlerdi. Şimdi

$$T = x^{c-b}$$

vaz edelim. Binaenaleyh $\frac{x^c}{T} = x^b$ ve iki tarafın logaritması alınırsa

$$\log x = \frac{\log T}{c-b} = \frac{2 \log^{10} T}{A_4} . \tag{6.2.5.1}$$

Bu takdirde (6.2.4.2) de $\frac{x^c}{T} = x^b$ ve $\log x = \frac{2 \log^{10} T}{A_4}$ konulursa

$$|R_1| < A_{19}(x^b \log^9 T + x^b \log^{10} T + x^b \log^{10} T + x^b \log^9 T) < A_{20} x^b \log^{10} T .$$

Şimdi,

$x^b \log^{10} T = x . x^{-A_4 \log^{-9} T} . \log^{10} T = x . e^{-A_4 \log^{-9} T . \log x + 10 \log \log T}$ (6.2.5.1) göz önünde tutulursa

$$x^b \log^{10} T = x . e^{-2 \log T + 10 \log \log T} = O\,(x . e^{-2 \log T}) .$$

Yine (6.2.5.1) den dolayı

$$x^b \log^{10} T = O(x . e^{-A_{21} (\log x)^{\frac{1}{10}}} .$$

Binaenaleyh

$$R_1 = O\left(x.e^{-A_{21}(\log x)^{\frac{1}{10}}}\right).$$

Halbuki göstermiştik ki

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log \zeta(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds = \pi(x) + R(x).$$

Burada

$$R(x) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right).$$

Şimdi ise gösterdik ki

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log \zeta(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds = N + R_1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} - \int_2^{x^b} \frac{du}{\log u} + R_1.$$

Şu halde

$$\frac{x}{\log x} = xe^{-\log\log x} \quad yi \quad x.e^{-A_{21}(\log)x^{\frac{1}{10}}}$$ ile mukayese edersek görülür

ki son ifade ilk ifadeden daha çok yavaş olarak sonsuza gider.

Binaenaleyh

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + \text{büyüklük mertebesi } \frac{x}{\log x} \text{ den küçük olan terimler.}$$

Diğer taraftan kısmi integral alınırsa

$$\int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u}.$$

Fakat $\sqrt{x} > 2$ için

$$\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} = \int_2^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x < \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x}{\log^2\sqrt{x}} < A_{22}\,\frac{x}{\log^2 x}.$$

Yani

$$\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Binnetice

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \text{büyüklük mertebesi } \frac{x}{\log x} \text{ den küçük olan terimler.} \tag{6.2.5.2}$$

Binaenaleyh

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}} = 1$$

ve teorem ispatlanmıştır.

Not. (6.2.5.2) formülündeki hata terimini $R^*(x)$ ile gösterecek olursak Riemann hipotezi doğru ise $R^*(x) = O(x^{\frac{1}{2}})$. Filhakika gösterilebilir ki $R^*(x) = O(x^{r+\varepsilon})$; burada ε istenildiği kadar küçük bir pozitif sayıdır, r ise $\zeta(s)$ in sıfırlarının reel kısımlarının üst sınırıdır, yani $\sigma > r$ için $\zeta(s) \neq 0$. Bugüne kadar bilinen $r \geq 1$.

Bu teoremin elemanter ispatı yani $\zeta(s)$ ve kompleks fonksiyonlar teorisine dayananmayan bir ispatı ilk defa olarak 1949 da *A. Selberg* ve *Erdös* tarafından verilmiştir.

BÖLÜM VII

ANALİTİK TEMDİT KAVRAMI

1. Analitik Temdit

7.1.1. Şimdiye kadar tek değerli analitik fonksiyonlardan bahis ettik. Vakıa çok değerli analitik fonksiyonlara da rast geldik. Fakat bunların herbiri için tarif bölgesini daraltmak suretiyle bir *tek-değerli dal* seçmek zorunda kaldık. Diğer taraftan bir *çok değerli* analitik fonksiyonun bütünü hakkında bir fikir edinmek istiyorsak tek değerli bulunduğu ilk tarif bölgesini genişletmek icab eder. Şu halde bir bölgede bir tek değerli analitik fonksiyon kavramını esas kavram kabul ederek bu kavram yardımı ile çok değerli analitik fonksiyonları tarif edelim.

TARİF 1. Birbirini kısmen örten D_1, D_2 bölgeleri verilmiş olsun. Farzedelim ki $f_1(z)$ D_1 de tek değerli ve analitik ve $f_2(z)$ D_2 de tek değerli ve analitiktir. En son farzedelim ki $D_1 \cap D_2$ ortak kısımda $f_1(z) \equiv f_2(z)$ dir. Bu takdirde diyoruz ki $f_2(z)$, $f_1(z)$ in D_1 dışına ve D_2 nin içerisine analitik temditidir. Aynı şekilde $f_1(z)$, $f_2(z)$ nin D_2 dışına ve D_1 içerisine analitik temditidir.

Teorem 7.1.1.1. Farzedelim ki $f(z)$, bir D bölgesinde tekdeğerli ve analitiktir. Şayet $f(z)$ nin D dışına analitik temditi mümkün ise birtektir.

İspat. Teorem 4.8.5.1 in neticesidir.

7.1.2. **Klasik analitik temdit metodu.** Farzedelim ki $f(z)$ bir α noktası ve civarında tek-değerli ve analitiktir. Biliyoruz ki $f(z)$ in α da bir Taylor açılımı vardır ve bu serinin katsayıları

$$a_0 = f(\alpha),\ a_1 = f'(\alpha), \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n\,!}, \ldots \qquad (7.1.2.1)$$

Şimdi

$$P(z-\alpha) = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots \qquad (7.1.2.2)$$

vaz edelim.

TARİF 2. Kat sayıları (7.1.2.1) olan α noktasındaki (7.1.2.2) ile gösterilen $P(z-\alpha)$ serisine *fonksiyon eleman* denir.

(7.1.2.2) serisinin yakınsaklık dairesini Γ_α, yarıçapını ise r_α ile gösterelim. $f(z)$, Γ_α da tek-değerli ve analitiktir.

Şimdi Γ_α nın içinde bir β noktası alalım.

$$b_0 = f(\beta),\ b_1 = f'(\beta), \ldots,\ b_n = \frac{f^{(n)}(\beta)}{n\,!}, \ldots$$

vaz edersek ikinci bir fonksiyon eleman tarif etmiş oluruz.

$$P(z-\beta) = b_0 + b_1(z-\beta) + b_2(z-\beta)^2 + \ldots.$$

Burada b_n katsayıları derhal $P(z-\alpha)$ elemanından hesaplanabilir. Hakikatte

$$b_n = \frac{P^{(n)}(\beta-\alpha)}{n\,!}$$

TARİF 3. $P(z-\beta)$ ya $P(z-\alpha)$ nın *direkt analitik temditi* denir.

Açık olarak $P(z-\alpha)$ ve $P(z-\beta)$ $f(z)$ yi $\Gamma_\alpha + \Gamma_\beta$ bölgesinde tek değerli bir analitik fonksiyon olarak tarif eder. $f(z)$ in analitik temditine bu şekilde devam edelim. Farzedelim ki m inci operasyonda bir $P(z-\mu)$ fonksiyon elamanı elde edilmiştir öyle ki Γ_μ, Γ_α yı kısmen örter. Hipoteze göre $P(z-\mu)$ bundan bir evvel gelen $P(z-\lambda)$ nın direkt analitik temditidir. Şayet $P(z-\alpha)$, $P(z-\mu)$ nün direkt analitik temdidi ise $f(z)$, $\Gamma_\alpha + \Gamma_\beta + \ldots + \Gamma_\mu$ bölgesinde tek-değerli analitiktir, ve dolayısiyle $f(z)$ hakkında hiçbir yenilik kaydedilmiş değildir. Fakat $P(z-\alpha)$, $P(z-\mu)$ nün direkt analitik temdidi değilse, $P(z-\alpha)$, $P(z-\beta), \ldots, P(z-\mu)$ fonksiyon eleman koleksiyonu $\Gamma_\alpha + \Gamma_\beta + \ldots + \Gamma_\mu$ de bir tek-değerli analitik fonksiyon tarif edemez.

Bu takdirde $f(z)$ ye *çok-değerli* bir analitik fonksiyon denir.

TARİF 4. $P(z-\alpha_1)$, $P(z-\alpha_2), \ldots, P(z-\alpha_n)$ koleksiyonu verilmiş olsun öyleki $P(z-\alpha_j)$, $P(z-\alpha_{i-1})$ nin direkt analitik temditidir. Bu takdirde bu koleksiyona α_1 i α_n ye birleştiren bir *zincir* teşkil ediyor denir.

TARİF 5. α_1 i α_n ye birleştiren bir fonksiyon eleman zinciri verilmiş olsun. Diyoruzki zincirin herhangi iki elemanı biri diğerinin *analitik temditi* dir.

TARİF 6. $f = \{P(z-\alpha)\}$ koleksiyonu verilmiş olsun. Bu koleksiyon analitik temdite nazaran *kapalı dır* diyoruz şayet f ye ait herhangi iki fonksiyon eleman f ye ait olan bir zincirle birleştirilebilirse.

TARİF 7. Analitik temdite nazaran kapalı herhangi bir $f = \{P(z-\alpha)\}$ fonksiyon elaman koleksiyonuna *genel analitik fonksiyon* denir.

TARİF 8. Bir genel analitik fonksiyona bir *tam analitik fonksiyon* denir şayet koleksiyona ait herhangi bir elemanın bütün analitik temditleri yine koleksiyona ait ise.

Bir tam analitik fonksiyon *maksimal* dır. Şu bakımdan ki daha fazla genişletilemez

Not. Kuvvet serilerinin *bütününü* göz önüne alalım. Şayet $P(z-\beta)$, $P(z-\alpha)$ nın bir analitik temditi ise

$$P(z-\alpha) \sim P(z-\beta) \qquad (7.1.2.3)$$

yazalım. Açık olarak bu tarif *eşdeğerlik bağıntısı* nın bütün şartlarını sağlıyor (§ 1.1.1). Binaenaleyh (7.1.2.3) bağıntısı kuvvet serilerinin sınıfını alt sınıflara böler öyle ki her bir alt sınıfa ait herhangi iki kuvvet serisi biri diğerinin analitik temditidir. İşte bu alt sınıflara *Weierstrass*, analitik fonksiyon diyor. Yani bizim tarife göre herbir alt sınıf bir tam analitik fonksiyondur.[1]

7.1.3. **Örtme yüzeyi.**

TARİF 9. İki fonksiyon elemanı bir z_0 noktasında aynı *dalı* tarif ediyor denir yalnız ve yalnız bu noktadaki Taylor açılımları aynı ise.

$P(z-\alpha)$, $P(z-\beta)$ iki fonksiyon elamanı ve $z_0 \in \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$ olsun. Şayet bu iki fonksiyon elemanı tarifteki şartı sağlıyorsa, yine

$$P(z-\alpha) \sim P(z-\beta)$$

yazalım. Yine kolaylıkla görülür ki bu bir *ekivalentlik bağıntısı* dır. Ve dolayısiyle, yakınsaklık daireleri z_0 ı ihtiva eden, bütün fonksiyon elemanlarının sınıfı bu bağıntıya nazaran alt sınıflara ayrılır. İşte bu alt sınıfların herbirine z_0 daki *analitik dal* denir.

Şimdi bir genel analitik fonksiyon göz önüne alalım: $f = \{P(z-\alpha)\}$. Farzedelim ki f, z_0 noktasında tariflidir. z_0 noktasındaki bütün analitik dalları gözönüne alalım. Herbir analitik dal f koleksiyonuna aittir ve f in z_0 daki dalı denir. Herbir dala bir z_0 noktası tekabül ettirelim. Bu z_0 noktasına *analitik nokta* denir. z_0 noktasına ise z_0 analitik noktalarının *izdüşümü* denir. z_0 noktası bir G bölgesinde değiştiği zaman, z_0 analitik noktalarının heyeti umumiyesine G nin *örtme yüzeyi* denir. Hakikatte bir Riemann yüzeyidir.

TARİF 10. $z_0 \in \Gamma_\alpha$ olsun. z_0 dan başlıyan ve z_0 da kapanan bütün eğrileri gözönüne alalım. Bu eğrilerin herhangi birini γ ile gösterelim. γ_1 ve γ_2 eğrileri *homotop* tur denir ve $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ile gösterilir şayet $P(z-\alpha)$ γ_1 ve γ_2 eğrileri boyunca analitik temdit edildiği takdirde z_0 ı ihtiva eden $P_{\gamma_1}(z-\lambda)$ ve $P_{\gamma_2}(z-\mu)$ elemanları $P(z-\alpha)$ ya *ekivalent* iseler.

Karşıt olarak *homotopi* kavramı yardımı ile analitik dal kavramı tarif edilebilir. Binaenaleyh bu iki kavram muadil kavramlardır. Homotopi kavramını, bu bölümün 3. kısmında ele alacağız.

Teorem 7.1.3.1. **Fonksiyonel bağıntılarının devamlılığı.** Farzedelim ki

$$G(w_1, w_2, \ldots, w_n) \qquad (7.1.3.1)$$

(1) Bölüm XVII de analilik fonksyonların tümü ele alınarak *Demet* adı altında incelenecektir.

$w_1, \ldots, w_n$ değişkenleri cinsinden bir polinomdur öyle ki bu polinomun katsayıları bir D bölgesinde analitiktir. Bir $z_0 \varepsilon D$ noktasının civarında analitik n fonksiyon verilmiş olsun.

$$w_1 = f_1(z),\ w_2 = f_2(z), \ldots, w_n = f_n(z)\ . \qquad (7.1.3.2)$$

Farzedelim ki bu fonksiyonlar (7.1.3.1) de yerlerine konulduğu takdirde z_0 ın civarında özdeş olarak

$$G(w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0 \qquad (7.1.3.3)$$

En son (7.1.3.2) fonksiyonlarının analitik temditlerini göz önüne alalım. Bu takdirde bu analitik temditler yine (7.1.3.3) denklemini sağlarlar.

İspat.

$$G(w_1, \ldots, w_n) = H(z)$$

z_0 da analitiktir. Her bir w_k, $k = 1,2,\ldots, n$, nın analitik temditi mümkün olduğundan $H(z)$ nin analitik temditi mümkündür. Şu halde (7.1.3.3) daima sağlanmaktadır.

7.1.4 Bu paragrafta analitik temdit kavramını biraz farklı bir açıdan tetkik edeceğiz. § 7.1.1 deki tarifte gördük ki $f_2(z)$ in değerleri $D_1 \cap D_2$ de bilinyorsa bu takdirde $f_2(z)$, $f_1(z)$ in analitik temditidir. Şimdi $D_1 \cap D_2$ bölgesi yerine kompleks düzlemde bir C eğri parçasını gözönüne alalım. Farzedelim ki $\zeta \varepsilon C$ için $\varphi(\zeta)$ değerleri verilmiştir. C yi ihtiva eden bir G bölgesini göz önüne alalım. İki şeyden biri doğrudur: (i) G de analitik ve C üzerinde $\varphi(\zeta)$ değerlerini alan hiçbir fonksiyon mevcut değildir, (ii) G de analitik ve C üzerinde $\varphi(\zeta)$ değerlerini alan bir $f(z)$ fonksiyonu mevcuttur. Bu takdirde biliyoruz ki $f(z)$ (§ 4.8.5) birtektir. (ii) halinde yine diyoruz ki $f(z)$, $\varphi(\zeta)$ nin analitik temditidir. Veyahut $\varphi(\zeta)$ G bölgesine analitik temdit edilmiştir. Özel olarak C yi reel eksenin bir parçası olarak alalım.

Teorem 7.1.4.1. Reel değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunun z-kompleks düzlemine analitik temditi mümkün ise birtektir.

Bu teorem yardımı ile elemanter fonksiyonları tarif etmek derhal mümkündür.

2. Elemanter Fonksiyonların Tarifi.

7.2.1. **Elementer fonksiyonlar.** 1. *Rasyonel Fonksiyonlar.*

$$\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$$

rasyonel fonksiyonu verilmiş olsun; a, b kat sayıları reel veya komplekstir.

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

Gördük ki (teorem 4.8.8.2), $f(z)$ sonlu sayıda kutup yerleri hariç genişletilmiş düzlemde analitiktir. Üstelik $f(x) = \varphi(x)$ dir. Teorem 7.1.4.1 den dolayı $f(z)$, $\varphi(x)$ in analitik temditidir. Dolayısiyle $f(z)$ e *rasyonel fonksiyon* denir.

2. e^z, $\sin z$, $\cos z$. e^x *eksponensiyel fonksiyonu*, $\sin x$ *ve* $\cos x$ *trigonometrik fonksiyonları*,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

serileri ile tarif edilebilir. Şimdi x yerine z vazedip formel olarak

$$f_1(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

$$f_2(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

$$f_3(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

kuvvet serilerini yazarsak bu serilerin yakınsaklık yarıçapları sonsuz olduğundan temsil ettikleri fonksiyonlar tam fonksiyonlardır. Üstelik $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ olduğundan e^x, $\sin x$, $\cos x$ reel fonksiyonlarının analitik temditleridir. Dolayısiyle $f_1(z) = e^z$, $f_2(x) = \sin z$, $f_3(z) = \cos z$ vaz edilebilir ve bu fonksiyonlara yine eksponensiyel ve trigonometrik fonksiyon denilebilir.

Yukarda verilen tariflere dayanılarak 1. ve 2. formülleri kolaylıkla tahkik edilebilir.

1. Euler formülleri

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} .$$

2. Eksponansiyel fonksiyon için *toplam teoremi.*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} . e^{z_2} .$$

3. Euler formüllerinde $z = iy$ yapılırsa

$$\cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y$$

$$\sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y .$$

4. Euler formülleri ile toplam teoremi göz önünde tutulursa

$$\cos (x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin (x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$|\cos z|^2 = \cos z . \overline{\cos z} = \cos z . \cos \bar{z} = \tfrac{1}{2} (\cosh 2y + \cos 2x)$$

$$|\sin z|^2 = \tfrac{1}{2} (\cosh 2y - \cos 2x) .$$

TARİF 11. Reel veya kompleks bir γ sayısı bir $f(z)$ fonksiyonunun periyodudur denir şayet bütün z ler için

$$f(z + \gamma) = f(z)$$

ise.

Teorem 7.2.1.1. e^z periyodik bir fonksiyondur ve periyodu $2n\pi i$ (n pozitif veya negatif bir tam sayı) dır.

İspat. $\gamma = \alpha + \beta i$, e^z in periyodu ise

$$e^z = e^{z+\gamma} = e^z . e^\gamma$$

$\Rightarrow$

$$e^\gamma = 1,$$

yani

$$e^\alpha \cos \beta = 1, \; e^\alpha \sin \beta = 0.$$

Karelerini alıp ilâve edersek $e^{2\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 0$.

Şu halde β

$$\cos \beta = 1, \; \sin \beta = 0$$

denklemlerini sağlar. Binaenaleyh

$$\beta = 2n\pi .$$

Bu ise teoremi ispatlar.

3. *Logaritmik fonksiyon.* x reel ve pozitif ise $e^u = x$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Bu çözüme x in *logaritmesi* denir ve $\log x$ ile gösterilir. Halbuki z kompleks için göstereceğiz ki $e^w = z$ denkleminin sonsuz sayıda çözümü vardır ve her bir çözüme z in logaritmesi denir. Şimdi çözümleri bulmak için $w = u + iv$ vaz edelim. Burada u ve v reeldir. O halde

$$e^u (\cos v + i \sin v) = z .$$

İki tarafın modülü alınırsa

$$|z| = e^u .$$

Binaenaleyh

$$u = \log|z| \ .$$

Bu takdirde

$$|z| \ (\cos v + i\sin v) = z$$

dir. Buradan $v = \arg z$. Dolayısiyle $e^w = z$ denkleminin çözümü

$$w = u + iv = \log|z| + i \arg z = \operatorname{Log} z \ .$$

$\arg z$ in sonsuz sayıda değerleri olduğundan, öyleki iki değer arasındaki fark $2\pi i$ nin bir katıdır,

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \arg z$$

çok-değerli bir fonksiyondur. Yani herbir z ye $\operatorname{Log} z$ in sonsuz sayıda değerleri tekabül eder. $\arg z$ in verilen bir değerine tekabül eden $\operatorname{Log} z$ ye, logaritmanın bir *dalı* denir. $\arg z$ in *esas değerine*, $-\pi < \arg z \leq \pi$, tekabül eden dala $\operatorname{Log} z$ in *esas değeri* denir. z reel ve pozitif için $\operatorname{Log} z$ in esas değeri âdi logaritmaya eşit olduğundan bu değer $\log z$ ile gösterilir.

Problem. § 7.1.3. ve § 5.4.10 dan faydalanarak $\log z$ in Riemann yüzeyini tarif ediniz.

3. Esas Grup ve Monodromi Teoremi

7.3.1. **Homotop eğriler.** Kompleks düzlemde bir G bölgesi verilmiş olsun. Müşterek uçları haiz iki eğri (bu eğrilere bazen yay, bazen de yol denir) verilmiş olsun: $\gamma_1, \gamma_2 \in G$. Uç noktaları sabit, ve bütün noktaları G de olmak üzere, *sürekli bir deformasyonla*, meselâ γ_1 eğrisi γ_2 nin üzerine getirilebilirse, bu takdirde diyoruz ki γ_1 eğrisi γ_2 eğrisine *homotoptur* ve sembolik olarak $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ile gösteriyoruz. Bunun bir *eşdeğerlik* bağıntısı olduğu aşikârdır.

Ancak, bir sezişe dayanan bu tarifi matematik olarak ifade etmekte zaruret vardır.

TARİF 12. I: $0 \leq t \leq 1$, J: $0 \leq u \leq 1$ kapalı intervallerini (aralıklarını) gözönüne alalım. $I \times J$ kartezien çarpımı, (t, u) noktalarının taradığı kareyi gösterir. Farzedelim ki

$$f = f(t,u): I \times J \to G$$

sürekli bir fonksiyondur, öyleki, $f(t, 0)$, γ_1 ri ve $f(t, 1)$ γ_2 yi göstersin. Üstelik farzedelim ki u ne olursa olsun $f(0, u)$ ve $f(1, u)$ sabittirler. Bu takdirde γ_1 ve γ_2 eğrileri homotoptur denir, daha doğrusu G ye nazaran homotoptur denir.

Görülüyor ki, u ya bir parametre nazarı ile bakılırsa, ve $f(0, u)$, $f(1, u)$ sabit farzedilirse, $f(t, u)$ fonksiyonu, uçları sabit olan u parametresine tâbi bir γ eğrisi tarif eder. u, 0 ile 1 arasında değiştiği zaman γ eğrisi uçları sabit olan γ_1 ile γ_2 eğrileri arasında değişir. Kısaca, u, 0 ile 1 arasında değiştiği zaman $f(t, u)$ sürekli bir *deformasyon* tarif eder diyoruz. Bu deformasyonda γ nın $f(t_0,u)$ noktası, $f(t_0, 0) \in \gamma_1$ noktasını $f(t_0, 1) \in \gamma_2$ noktasına dönüştüren bir *deformasyon yolu* çizer. İşte bu deformasyon yolları boyunca γ_1 eğrisi γ_2 eğrisine *deforme* edilmiş olur, (deformasyon, şekil değiştirme mânasına gelir).

7.3.2. **Homotop sınıflar.** Başlangıç ve bitim noktaları $p_1, p_2 \in G$ olan bütün $\{\gamma\}$ eğrilerini gözönüne alalım, $\gamma \in G$. Farzedelim ki $\{\gamma\}$ da bir homotopi bağıntısı tarif edilmiştir. Bu takdirde $\{\gamma\}$ *homotop sınıflar* denilen ayrık sınıflara ayrılır, öyleki herbir sınıfa ait iki eğri homotoptur.

7.3.3. **Eğrilerin parametrizasyonu.** $\gamma \in G$ olsun. Şayet, sürekli bir $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, fonksiyonu bulunabilirse öyleki t, I: $0 \leq t \leq 1$ aralığında değiştiği zaman $f(t)$, γ yı tasvir ediyor, bu takdirde $f(t)$, γ nın bir parametrizasyonudur denir, ve kısaca γ: $t \to f(t)$ ile gösterilir.

Farzedelim ki, $t \to \tau(t)$, $t \in I$, sürekli, reel ve azalmıyan bir fonksiyondur, ve $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$. Bu takdirde diyeceğiz ki $t \to f(\tau(t))$ eğrisi, $t \to f(t)$ eğrisinden yeni bir parametrizasyonla *hasıl olmuştur*.

Yeni bir parametrizasyona tâbi tutulan bir eğri, önceki eğri ile homotoptur. Gerçekten, $(t, u) \to f[(1-u)\,t + u\tau(t)]$ deformasyonu bahis konusu homotopiyi tarif eder.

7.3.4. **Kapalı eğriler.** $\gamma \in G$ eğrisine *sıfır* veya *birim* eğrisi denir, şayet $\gamma: t \to f(t) =$ sabit ise. γ eğrisinin invers'i diye $\gamma^{-1}: t \to f(1-t)$ eğrisine denir. $\alpha : t \to h(t)$, $\beta: t \to g(t)$, G de verilmiş iki eğri olsun. Farzedelim ki $h(1) = g(0)$, yani α eğrisinin bitim noktası β eğrisinin başlangıç noktası ile çakışıyor. Bu takdirde α ve β eğrilerinin çarpımı $\alpha\beta$ ile gösterilir, ve aşağıdaki şekilde tarif edilir.

$$\alpha\beta = \gamma: t \to f(t) = \begin{cases} h(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ . \end{cases}$$

Geometrik olarak, $\alpha\beta$ eğrisi, α ve β eğrilerinin birleşiminden meydana gelen $\gamma = \alpha \cup \beta$ eğrisidir. γ eğrisi *kapalıdır* şayet başlangıç ve bitim noktaları çakışıyorsa. Mesela, $\gamma\gamma^{-1}$ ve $\gamma^{-1}\gamma$ eğrileri kapalıdırlar.

7.3.5. **Esas Grup.** p, G de sabit bir nokta olsun. p de başlıyan ve p de biten G de bütün kapalı eğrileri gözönüne alalım. p noktasına, eğrilerin *taban* noktası denir, ve eğriler de *p noktasına ait* eğrilerdir. $\alpha \in G$, $p \in G$ ye ait bir eğri ise, $[\alpha]$ sembolü, α eğrisine homotop p ye ait bütün eğrilerin sınıfını gösterir. $[\alpha]$ sınıfına α eğrisini ihtiva eden homotop sınıf denir. $[\alpha]$ ve $[\beta]$ iki homotop sınıf iseler, bu sınıfların çarpımı

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$$

olarak tarif edilir. Bu tarif, $[\alpha]$ ve $[\beta]$ sınıflarını temsil eden α ve β eğrilerine tâbi değildir. Zira $\alpha \sim \gamma$, $\beta \sim \delta$ ise, $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ dır. İspatını okuyuculara bırakıyoruz. O halde $[\alpha], [\beta]$ sınıfları $[\alpha][\beta]$ çarpımını birtek olarak tarif eder. Şimdi gösterilebilir ki, p ye ait eğrilerin, homotop sınıfların cümlesinde, yukarda tarifi verilen çarpma operasyonu bir grup strüktürü tarif eder. Başka bir deyimle, homotop sınıfların cümlesi, bu çarpma operasyonuna nazaran bir grup teşkil eder. Bunun için aşağıdaki grup aksiyomlarının sağlandığını göstermek lâzımdır.

(i) homotop sınıfların cümlesi çarpma operasyonuna nazaran kapalıdır.
(ii) $([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma])$.
(iii) $[1]$, p ye ait birim eğrinin homotop sınıfı ise $[\alpha][1] = [\alpha]$.
(iv) $[\alpha][\alpha^{-1}] = [1]$.

(i) aşikârdır, madem ki, $[\alpha][\beta]$ tariften dolayı p ye ait eğrilerin bir homotop sınıfıdır. (ii) yi göstermek için $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ gösterilmelidir. (iii) ü göstermek için $\alpha 1 \sim \alpha$ gösterilmelidir. (iv) yi göstermek için $\alpha\alpha^{-1} \sim 1$ gösterilmelidir. Bu ispatlar okuyucuya bırakılmıştır.

Bu grub'a, G nin p ye nazaran *esas grubu* denir ve $\pi_1(G,p)$ ile gösterilir.

TARİF 13. İki grup verilmiş olsun. Bunları G_1, G_2 ile gösterelim. Şayet $\varphi: G_1 \to G_2$, grup operasyonunu muhafaza eden bir birebir transformasyon ise, φ ye G_1 den G_2 üzerine bir izomorfizmdir denir. Yani $g, h \varepsilon G_1$ ise $\varphi(gh) = \varphi(g)\,\varphi(h)$. Sembolik olarak

$$G_1 \cong G_2$$

yazılır ve G_1 izomorftur G_2 okunur.

Mücerret grup olarak veya sadece grup olarak, esas grup p ye tâbi değildir. Yani $p' \varepsilon G$ ikinci bir nokta ise

$$\pi_1(G,p) \cong \pi_1(G,p') .$$

Gerçekten, p yi p' ye bir $c \varepsilon G$ eğrisi ile birleştirelim. p' ye ait herbir $\gamma' \varepsilon G$ eğrisine, p ye ait $\gamma = c\gamma' c^{-1}$ eğrisi tekabül eder. Şayet $\beta' \varepsilon G$, p' ye ait ikinci bir eğri ise ve $\beta' \sim \gamma'$, bu takdirde $\beta \sim \gamma$. Binaenaleyh, p' ye ait eğrilerin bir homotop sınıfına, p ye ait eğrilerin bir homotop sınıfı tekabül eder. Çarpımların muhafaza edildiğini gösterelim. γ_1', γ_2', p' ye ait iki eğri olsun. Bu eğrilere, p ye ait $\gamma_1 = c\gamma_1' c^{-1}$ ve $\gamma_2 = c\gamma_2' c^{-1}$ eğrileri tekabül eder. Diğer taraftan $\gamma_1\gamma_2 = (c\gamma'_1 c^{-1})(c\gamma'_2 c^{-1}) \sim c\gamma_1'\gamma_2' c^{-1}$. Son olarak tekabül birebirdir. Zira, γ verildiği takdirde, $\gamma' = c^{-1}\gamma c$ seçilebilir ve görülür ki $c\gamma' c^{-1} = \gamma$. Üstelik $\gamma \to c\gamma c^{-1}$ tasviri, üzerine bir tasvirdir, zira, $c\gamma' c^{-1} = \gamma$.

Teorem 7.3.6. (*Monodromi*). G de p_1 başlangıç ve p_2 bitim noktaları müşterek olan iki eğri verilmiş olsun: γ_1, γ_2. Farzedelim ki $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Merkezi p_1.

de herhangibir $P(z-p_1)$ fonksiyon elemanı verilmiş olsun. Farzedelim ki bu fonksiyon elemanın, G nin ihtiva ettiği bütün eğriler boyunca analitik temditi mümkündür. Bu takdirde bu fonksiyon eleman γ_1, γ_2 eğrileri boyunca analitik temdit edilirse $P_{\gamma_1}(z-p_1)$, $P_{\gamma_2}(z-p_2)$ netice fonksiyon elemanları aynıdır.

Bu teorem, verilen bir basit irtibatlı G bölgesinde tarifli analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun tek değerli olduğunu ifade eder. Kat'i olarak şu teoremi söyliyebiliriz.

Teorem 7.3.6.1. Bir basit irtibatlı G bölgesi, $\alpha \varepsilon G$ ve $P(z-\alpha) = \Sigma a_n (z-\alpha)^n$ fonksiyon elemanı verilmiş olsun. Şayet $P(z-\alpha)$, başlangıç noktası α da olan G ye ait herhangi bir *eğri* boyunca analitik temdit edilebilirse, elde edilen fonksiyon dalı G de analitik ve tek-değerlidir.

İspat. $\beta \varepsilon G$, α dan farklı herhangi bir nokta olsun. Tamamiyle G ye ait γ_1, γ_2 eğrilerile α yı β ya birleştirelim. Göstermeliyiz ki

$$P_{\gamma_1}(z-\beta) = P_{\gamma_2}(z-\beta)$$

veyahut

$$P(z-\alpha) = P_{\gamma_1+\gamma_2^{-1}}(z-\alpha) .$$

Bunun için $P(z-\alpha) \neq P_{\gamma_1+\gamma_2^{-1}}(z-\alpha)$ farzedeceğiz ve göstereceğiz ki bu kabul G ye ait her eğri boyunca analitik temditin mümkün oluşu hipotezine aykırıdır.

Biliyoruz ki $P(z-\alpha)$ nın $\gamma_1 + \gamma_2^{-1}$ kapalı bir eğri boyunca analitik temditi için sonlu sayıda $P(z-\zeta_k)$ elemanlarına ihtiyaç vardır. Burada ζ_k, $k=0,1,\ldots,n$, $\gamma_1 + \gamma_2^{-1}$ in üzerinde ve $\zeta_0 = \alpha$, $\zeta_n = \alpha$ dır. Üstelik herbir $P(z-\zeta_k)$, $P(z-\zeta_{k-1})$ in direkt analitik temditidir. Cauchy teoreminde olduğu gibi kompleks düzlemi karelere bölelim. Bu bölünmeyi o şekilde yapabiliriz ki her bir ζ_k bir karenin köşesidir. Son olarak bu bölünmeyi yeniden bölmek sureti ile yeter derecede incelterek $\gamma_1+\gamma_2^{-1}$ eğrisini aynı hassayı haiz kare kenarlarından müteşekkil bir p poligonu ile değiştirebiliriz. Görülür ki, bu poligon ya basit kapalıdır, ya sonlu sayıda aksi yönde iki defa tasvir edilen kare kenarlarından, ya sonlu sayıda basit kapalı poligonlardan, veya sonlu sayıda basit kapalı poligonlardan ve sonlu sayıda iki defa aksi yönde tasvir edilen kare kenarlarından mürekkeptir. Yapılan kabulden dolayı p poligonuna ait en az bir p' basit kapalı poligonu mevcuttur öyle ki pozitif yöne doğru p' boyunca analitik temdit ilk elemanı vermez. Şimdi p' nün bir kenarından başlıyarak p' tarafından ihtiva edilen her bir kare boyunca analitik temditi göz önüne alalım. Yapılan kabulden dolayı en az bir R_0 karesi mevcuttur öyle ki bu kare boyunca analitik temdit ilk elemanı vermez. Bu kareye yarılama usulünü tatbik edersek limiti ζ olan iç içe R_n kareleri elde ederiz, öyleki bu kareler boyunca analitik temdit ilk elamanı vermez. Diğer taraftan $\zeta \varepsilon G$, ve α ile ζ yı birleştiren herhangi bir eğri boyunca analitik temdit mümkün olduğundan ζ da bir $P(z-\zeta)$ elemanı mevcuttur. $\Gamma\zeta$ bu elemanın yakınsaklık dairesi olsun n yeter derecede büyük alınırsa $R_n \subset \Gamma\zeta$ dır. Bu ise Monodromi teoremini ispatlar.

BÖLÜM VIII

KONFORM TASVİR KAVRAMI

1. Konform Tasvir

8.1.1. Teorem 4.10.1.5. te gösterdik ki $w=f(z)$ z_0 da analitik ve $w_0, f(z)$ in z_0 da aldığı değer ise $w = f(z)$ z_0 ın bir ε – civarını w_0 ın bir ε' – civarına dönüştürür.

Teorem 8.1.1.1. Farzedelim ki $w = f(z)$ z_0 da analitiktir. Bu takdirde $f(z)$ z_0 ın bir civarında topolojik olması için yani $f(z)$ in z_0 ın bir civarında aldığı w – değerleri w_0 ın bir civarını yalnız bir defa örtmesi için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ dır.

İspat. Farzedelim ki $w = f(z)$ z_0 ın bir civarında topolojik ve $f'(z_0) = 0$ dır. Bu takdirde

$$w - w_0 = (z - z_0)^k \varphi(z)$$

yazılabilir öyle ki $\varphi(z)$ z_0 da analitik ve $\varphi(z_0) \neq 0$. Şu halde $z_0, f(z)$ için en az ikinci mertebeden bir w_0 – yeridir. Binaenaleyh (§ 4.10.1)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \geq 2 \ .$$

Süreklilikten dolayı bu integral w_0 ın bir ε – vicarında da ≥ 2. Yani $f(z)$ bu civara ait her bir w değerini z_0 ın bir civarında en az iki defa alır. Bu ise $f(z)$ in topolojik karakterine aykırıdır.

TARİF 1. Tarif bölgesinin her noktasında açıları ve yönleri muhafaza eden *topolojik transformasyonlara* doğrudan doğruya (direkt) *konform* veya sadece konform denir.

8.1.2. Farzedelim ki $w = f(z)$, z_0 da (ve dolayısiyle bir ε– civarında) analitiktir. Yani

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \ . \qquad (8.1.2.1)$$

(8.1.2.1), argüment ve modül bakımından ayrı ayrı tefsir edilirse aşağıdaki teoremler elde edilir.

Teorem 8.1.2.1. Farzedelim ki $w = f(z)$ z_0 da analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ dır. Bu takdirde $f(z)$ transformasyonu z_0 ın bir civarında (veya sadece z_0 da) konformdur.

İspat. z_0 dan geçen ve ε – civarına ait bir γ: $z = z(t)$ eğrisini göz önüne alalım. γ nın resimine γ' diyelim. Bu takdirde γ' nün denklemleri

$$\gamma' : w = f(z(t)) = w(t) .$$

$z(t)$ yi sürekli diferansiyellenebilir ve $z'(t_0) \neq 0$ farzedersek (8.1.2.1) den dolayı

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\Delta w}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta t}} = \frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = f'(z_0) \ .$$

Binaenaleyh $w'(t_0) \neq 0$ ve

$$\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0) \ . \qquad (8.1.2.2)$$

Burada $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$, ve dolayısiyle $\arg z'(t_0)$, z_0 noktasındaki teğetin x – ekseni ile yaptığı açıdır. Halbuki (8.1.2.2) nın mânası, $\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0)$ yalnız z_0 a tâbi olup z_0 dan geçen γ eğrisine tâbi değildir. Yani $w = f(z)$ z_0 dan geçen sürekli teğeti haiz herhangi iki eğrinin açı ve yönünü muhafaza eder.

Teorem 8.1.2.2. z_0 dan çıkan herhangi bir doğrultu limitte $|f'(z_0)|$ nisbetinde büyür veya küçülür. Bu değişme z_0 a tâbi olup doğrultunun istikametine bağlı değildir.

İspat. (8.1.2.1) modül olarak

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} |\Delta w| / |\Delta z| = |f'(z_0)| \qquad (8.1.2.3)$$

yazılır. Bu ise teoremi ispat eder.

Şimdi karşıt teoremlere geçelim. Farzedelim ki bir G bölgesinin herbir z_0 noktasında (8.1.2.2) ve (8.1.2.3) şartları aynı zamanda sağlanmıştır. Bu ise (8.1.2.1) demektir ve dolayısiyle $f(z)$ z_0 da analitiktir.

Hakikatte (8.1.2.2) ve (8.1.2.3) şartlarının yalnız birisi göz önünde tutulur ve $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $(u + iv = f(z))$ kısmi türevleri z_0 ve civarında sürekli farzedilirse yine $f(z)$ in z_0 da analitik olduğu gösterilebilir. Yani

Teorem 8.1.2.3. Farzedelim ki (i) $w = f(z) = u + iv$ transformasyonu z_0 da konformdur, (ii) $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ z_0 ve civarında süreklidir. Bu takdirde $f(z)$ z_0 da analitiktir.

İspat. $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$, $dz = dx + idy$, $\overline{dz} = dx - idy$ olduğuna göre

$$dw = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) dz + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) \overline{dz}\ .$$

Binaenaleyh

$$\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}\ . \quad (8.1.2.4)$$

Açık olarak $\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)}$ noktası, merkezi $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ noktasında olan

$$\tfrac{1}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right| \left|\frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right|$$

yarıçaplı çemberi çizer.

Şimdi, z_0 da açılar muhafaza edildiğinden, arg $w'(t_0)$ – arg $z'(t_0)$, arg $z'(t_0)$ a tâbi değildir. Binaenaleyh

$$\tfrac{1}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right| = 0,$$

yani

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\ .$$

Şu halde $f(z)$, z_0 da analitiktir.

Teorem 8.1.2.4 (ii) şartını muhafaza edelim ve üstelik farzedelim ki $w = f(z)$, z_0 dan geçen bir doğrultuyu, istikameti ne olursa olsun ayni nisbette büyültsün veya küçültsün. Bu takdirde $f(z)$ z_0 da ya analitiktir veya bir analitik fonksiyonun konjügesidir.

İspat. Bu o demektir ki (8.1.2.4) te

$$\left|\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)}\right| = \text{Sabit}\ . \qquad (8.1.5.5)$$

Halbuki yukarda gördük ki $\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)}$ noktası, merkezi $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ noktasında olan $\frac{1}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right|$ yarıçaplı çemberi çizer. Binaenaleyh

(8.1.2.5) ten dolayı bu çemberin ya yarıçapı sıfır olmalıdır, yani

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\ ,$$

ve dolayısıyle $f(z)$ z_0 da analitiktir, veya çemberin merkezi başlangıç noktasında olmalıdır. Yani

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0\ .$$

Binaenaleyh

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\ .$$

Bu takdirde, $\overline{f(z)} = u - iv$ Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığından z_0 da analitiktir.

Bir analitik fonksiyonun konjügesi tarafından tasvirine, şayet türev sıfır değilse, *indirekt konform* denir. Böyle bir tasvir açıları muhafaza eder fakat yönün işaretini değiştirir.

Teorem 8.1.2.5. Farzedelim ki $w = f(z)$ bir G bölgesinde analitik ve topolojik bir transformasyondur. Bu takdirde $f(z)$ G de konformdur.

İspat. $f(z)$ G de analitik ve topolojik olduğundan G nin her noktasında $f'(z) \neq 0$. Binaenaleyh $f(z)$ G nin her noktasında konformdur. G de topolojik olduğundan G de konformdur.

Not. Farzedelim ki $f(z)$ G de sadece analitik ve $f'(z) \neq 0$. Bu takdirde teorem 8.1.1.1. den dolayı $f(z)$ G nin her noktasında konformdur. Bununla beraber G de konform olmıyabilir, şu bakımdan ki $f(z)$ G de topolojik olmıyabilir. Yani G nin w-düzlemindeki G* resmi kendisini hiç olmazsa birkere kısmen örtebilir. Fakat Riemann yüzeyleri kavramı vasıtasiyle bölge kavramı genelleştirilerek G ile G* arasında bir birebir tekabül tesis edilebilir.

Bu bakımdan evvelce yalnız bir lokal karakter taşıyan konform kavramı şimdi Riemann yüzeylerinin tarifi ile $f(z)$ in bütün tarif bölgesine teşmil edilmiş olur.

TARİF 2. Farzedelim ki $w = f(z)$ analitik fonksiyonu bir G bölgesini genel manada bir G* bölgesine (Riemann yüzeyi) dönüştürüyor. Bu takdirde G* a G nin konform tasviri denir.

Bir G bölgesinde ayni zamanda analitik ve topolojik bir fonksiyona *Schlicht* denir (Kısım 3).

Teorem 8.1.2.6. *Schwarz Akis Prensibi.* x– eksenine nazaran simetrik basit irtibatlı bir G bölgesini göz önüne alalım. Farzedelim ki $w = f(z)$ G de

analitik ve G nin ihtiva ettiği Δ reel eksen parçası üzerinde reeldir. Bu takdirde $f(z)$ konjüge noktalarda konjüge değerler alır. Yani

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})} \ .$$

İspat. $f(z)$ G de analitik olduğundan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

dir. $\overline{f(\bar{z})}$ aynı denklemleri sağladığından G de analitiktir. Diğer taraftan Δ da $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ dir. Teorem 4.8.5.1 den dolayı bütün G de $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

2. Lineer Transformasyonlar

8.2.1. **Genişletilmiş kompleks düzlemin kendi üzerine konform tasvirleri.** Böyle bir fonksiyon mevcut ise sabit değildir. Binaenaleyh genişletilmiş düzlemin her noktasında analitik olamaz. Tek değerli olduğundan yegâne singüler noktaları ayrık esas singüler veya kutup noktaları olabilir. Hipotezden dolayı (birebir sürekli) esas singüler nokta olamaz. Teorem 4.8.8.2 den dolayı $f(z)$ rasyoneldir. Fakat bir rasyonel fonksiyon verilen herhangi bir değeri (sonsuz dahil) kutup yerlerinin sayısı kadar aldığından, hipotezden dolayı (birebir) bu sayı 1 dir. Şu halde bir tek (sonlu veya sonsuzda) kutup noktası vardır.

Binnetice

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \ . \qquad (8.2.1.1)$$

$f(z)$ sabit olmadığından

$$ad - cb \neq 0 \ .$$

Not. Derhal gösterilebilir ki (8.2.1.1), çemberleri çemberlere (doğrulara) dönüştürür (Teorem 3.1.12.5).

8.2.2. $|w| \leq 1$ **Birim dairesini** $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ **üst-yarı düzleme konform tasvir eden Lineer Translormasyonlar.** Teorem 8.1.2.6 daki G bölgesine (8.2.1.1) tatbik edilirse o şekilde ki Δ bir çember parçasına dönüşmektedir, bu takdirde konjüge noktalara, çembere nazaran simetrik noktalar tekabül eder. Schwarz akis prensibinin bu şekli gözönünde tutulursa görülür ki x – eksenine nazaran simetrik z, $\bar{z}$ noktalarına, $|w| = 1$ e nazaran simetrik w, $\frac{1}{\bar{w}}$ noktaları tekabül eder. Özel olarak w – düzleminin başlangıç ve sonsuz noktalarına z – düzleminde x – eksenine nazaran simetrik iki nokta tekabül eder. Şimdi farzedelim ki

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

istenilen transformasyondur. Açık olarak $c \neq 0$. Aksi halde sonsuzdaki noktalar tekabül eder. Şimdi $w = 0$, $w = \infty$ sıra ile $z = -\frac{b}{a}$, $z = -\frac{d}{c}$ ye tekabül ettiğinden, $-\frac{b}{a} = \alpha$ vaz edilirse $-\frac{d}{c} = \bar{\alpha}$ dır, ve dolayısiyle

$$w = \frac{a}{c} \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \ .$$

Diğer taraftan $z = 0$, $|w| = 1$ çemberi üzerinde bir noktaya tekabül ettiğinden

$$1 = \left| \frac{a}{c} \frac{-\alpha}{-\bar{\alpha}} \right| = \left| \frac{a}{c} \right| \ .$$

Binaenaleyh

$$\frac{a}{c} = e^{i\theta}, \ \theta \text{ reel} \ .$$

Şu halde

$$w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \ .$$

8.2.3. $|z| \leq 1$ **Birim Dairesini** $|w| \leq 1$ **Birim Dairesine Konform Tasvir eden Trasformasyonlar.** Teorem 8.1.2.6 da, (8.2.1.1) hem z hem de w–düzlemine tatbik edilirse o şekilde ki reel eksen parçaları çember yaylarına dönüşsün bu takdirde çember yayına nazaran simetrik iki noktaya, diğerinde aynı şekilde iki simetrik nokta tekabül eder.

Şimdi farzedelim ki

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

istenilen transformasyondur. Burada $w = 0$, $w = \infty$ a z-düzleminde $z=\alpha$, $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$, $|\alpha| < 1$, tekabül eder. $-\frac{b}{a} = \alpha$ vaz edilirse $-\frac{d}{c} = \frac{1}{\bar{\alpha}}$ dır, ve

$$w = \frac{a\,\bar{\alpha}}{c} \cdot \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}\, z - 1} \ .$$

Diğer taraftan $z = 1$, $|w| = 1$ çemberi üzerinde bir noktaya tekabül ettiğinden

$$1 = \left| \frac{a\,\overline{\alpha}}{c} \cdot \frac{1-\alpha}{\overline{\alpha}-1} \right| = \left| \frac{a\,\overline{\alpha}}{c} \right| .$$

Binaenaleyh

$$w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}\, z - 1} .$$

3. Schlicht Fonksiyonlar

8.3.1. *TARİF* 3. Bir G bölgesinde tarifli (tekdeğerli) bir $f(z)$ analitik fonksiyonuna *Schlicht* denir şayet $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, $z_1, z_2 \in$ G.

Kısaca tekkatlı bir bölgeyi tekkatlı bir bölgeye konform tasvir eden analitik fonksiyonlara *Schlicht* denir.

Not. Kısım 1 den de anlaşılacağı gibi $f(z)$ G de schlicht ise G de $f'(z) \neq 0$. Bunun tersi doğru değildir (§ 8.1.2, Not).

Teorem 8.3.1.1. Bir schlicht fonksiyonun schlicht fonksiyonu schlichttir.

İspat. Farzedelim ki $w = f(z)$ G de schlichttir. G nin resmine G* diyelim. Farzedelim ki F(w) G* da schlichttir. Diyorum ki F$(f(z))$ G de schlichttir. Filhakika, F$(f(z_1)) =$ F$(f(z_2)) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$ çünkü F(w) G* da schlichttir. Sonra $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$. Çünkü $f(z)$ G de schlichttir. Binaenaleyh F$(f(z))$ G de schlichttir.

8.3.2. Bu paragrafta schlicht fonksiyonlar hakkında üç mühim teorem vereceğiz.

Teorem 8.3.2.1. *Alan teoremi.* Şayet

$$w = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \qquad (8.3.1.1)$$

sonsuzdaki kutup noktası hariç $|z| > 1$ için analitik ve schlicht ise bu takdirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \leq 1 .$$

İspat. (8.3.1.1) schlicht olduğundan, herhangi bir $|z| = r > 1$ çemberine w - düzleminde basit kapalı bir Γ eğrisi tekabül eder öyleki bu eğrinin çevrelediği A alanı pozitiftir. $z = r\,e^{i\theta}$ vaz edersek eğrinin parametrik denklemleri

$$u = u(\theta), \qquad v = v(\theta)$$

dır. Burada $w = u + i\,v$ dir. (8.3.1.1), $|z| = r$ in dışını Γ nın dışına konform

tasvir ettiğinden, $|z| = r$ pozitif yönü taşıyorsa Γ da pozitif yönü taşıyor. Binaenaleyh pozitif yönü taşıyan Γ nın çevrelediği A alanı

$$A = \int_0^{2\pi} uv'\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{w(\theta) + \overline{w}(\theta)}{2} \cdot \frac{w'(\theta) - \overline{w}'(\theta)}{2\,i}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(re^{i\theta} + re^{-i\theta} - \sum_1^{\infty} \frac{a_n\, e^{-in\theta} + \bar{a}_n\, e^{in\theta}}{r^n} \right)$$

$$\times \left(re^{i\theta} + re^{-i\theta} - \sum_1^{\infty} \frac{na_n\, e^{-in\theta} + n\bar{a}_n\, e^{in\theta}}{r^n} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi \left[\left(r + \frac{\bar{a}_1}{r}\right)\left(r - \frac{a_1}{r}\right) + \left(r + \frac{a_1}{r}\right)\left(r - \frac{\bar{a}_1}{r}\right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n\, a_n \bar{a}_n}{r^{2n}} \right]$$

$$= \pi\, r^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2\, r^{-2n} > 0 .$$

Yani

$$\sum_1^{\infty} n\,|a_n|^2\, r^{-2n} < r^2$$

Şimdi $r \to 1$ yapılırsa netice elde edilir.

Teorem 8.3.2.2. Şayet[1]

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

$|z| < 1$ için schlicht ise

$$|a_2| \leq 2 .$$

İspat.

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \tfrac{1}{2}\, a_2\, z^3 + \dots$$

$|z| < 1$ de schlichttir. $f(z^2)$ yalnız $z = 0$ için sıfırdır, ve üstelik $z = 0$ ikinci mertebeden bir sıfır yeri olduğundan $\sqrt{f(z^2)}$ $|z| < 1$ de analitiktir. Diğer taraftan F$(z_1) =$ F(z_2) ise $f(z_1^2) = f(z_2^2)$. $f(z)$ schlicht olduğundan $z_1^2 = z_2^2$. Yani $z_1 = \pm z_2$. Fakat F$(z) = -$ F(z). Şu halde $z_1 = -z_2 \Rightarrow$ F$(z_2) = -$ F(z_1). Binaenaleyh F$(z_1) =$ F$(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$. Yani F$(z)$ schlichttir. Dolayısıyla

$$\left[F\left(\frac{1}{z}\right) \right]^{-1} = z - \frac{\frac{1}{2} a_2}{z} + \dots$$

$|z| > 1$ için schlichttir. Alan teoremi tatbik edilirse

$$\tfrac{1}{4}\,|a_2|^2 + \dots \leq 1$$

yani

$$|a_2|^2 \leq 4 \text{ ve } |a_2| \leq 2 .$$

(1) Bu teorem her n için doğrudur. İspatı ilk defa olarak tarafımdan verilmiştir (bk. Ek II. Proof of Bieberbach's Conjecture, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un. d'Ankara Série A, Tome 22 A' 1973, pp. 1–20.

Teorem 8.3.2.3. Şayet

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

$|z| < 1$ için schlicht ise, tasvirdeki sınır noktalarının $w = 0$ noktasına olan uzaklıkları $\frac{1}{4}$ ten küçük olamaz.

İspat. c, $f(z)$ fonksiyonunun birim dairesinin tasviri dışında bir nokta olsun. Bu takdirde

$$\frac{c\, f(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right) z^2 + \dots$$

$|z| < 1$ de analitik ve schlichttir. Teorem 8.3.2.2. den dolayı

$$\left| a_2 + \frac{1}{c} \right| \leq 2 .$$

Binaenaleyh

$$\left| |a_2| - \left|\frac{1}{c}\right| \right| \leq 2 .$$

Yani

$$\left| \frac{1}{c} \right| \leq 2 + |a_n| \leq 4 .$$

Binaenaleyh

$$|c| \geq \tfrac{1}{4} .$$

Bu alt sınır daha fazla islah edilemez. Filhakika

$$w = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n + \dots$$

birim dairesini $-\frac{1}{4}$ den $-\infty$ a kadar kesilmiş düzleme konform tasvir eder. Bu ise gösteriyor ki $w = 0$ a en yakın sınır noktası $w = -\frac{1}{4}$ dür.

4. Poligonların Üst-Yarı Düzleme Veya Birim Dairesine Konform Tasvirleri

8.4.1. **Schwarz-Christöffel Förmülü.** z-düzleminde basit kapalı bir P poligonu verilmiş olsun. Köşelerini sıra ile pozitif yöne doğru $A_1, A_2, \dots, A_n$ ile gösterelim. $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi, \dots, \alpha_n \pi$ açıları ise pozitif olarak yönlenmiştir. Burada $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n-2$. Farzedelim ki $w = f(z)$, P nin içini $\operatorname{Im} w > 0$ üstyarı düzleme konform tasvir etsin o şekilde ki $A_1, A_2, \dots, A_n$ köşeleri reel eksen üzerinde sıra ile $a_1, a_2, \dots, a_n$ noktalarına dönüşsün. Fonksiyonun hassalarını inceleme bakımından $z = F(w)$ ters fonksiyonunu etüt etmek daha elverişli olacaktır. Şimdi, $F(w)$ $\operatorname{Im} w > 0$ da schlicht olduğundan orada $F'(w) \neq 0$ dır. Binaenaleyh $\log F'(w)$, ve dolayısıyla

$$\frac{d}{dw} \log F'(w) = \frac{F''(w)}{F'(w)} .$$

$\operatorname{Im} w > 0$ da analitiktir. Gösterelim ki bu hassa, a noktaları hariç reel eksen üzerinde de doğrudur. P nin herhangi bir kenarını gözönüne alalım. Bu kenara L diyelim. L ye w-reel ekseni üzerinde l doğru parçası tekâbül ettiğine göre Schwarz akis prensibinden dolayı l ye nazaran simetrik noktalara z düzleminde L ye nazaran simetrik noktalar tekâbül eder. Binaenaleyh $F(w)$, a noktaları hariç l yi ihtiva eden yeter derecede küçük bir bölgede schlichttir. Şu halde a noktaları hariç l nin bütün noktalarında $F'(w) \neq 0$. Binaenaleyh eğer $w = \infty$ hiç bir köşeye tekabül etmiyorsa a noktaları hariç $\frac{F''(w)}{F'(w)}$, $\operatorname{Im} w = 0$ da analitiktir. Binaenaleyh Schwarz akis prensibinden dolayı $\frac{F''(w)}{F'(w)}$, a noktaları hariç ve $w = \infty$ hiç bir köşeye tekabül etmiyorsa, genişletilmiş düzlemde analitiktir.

En son gösterilim ki a noktaları $\frac{F''(w)}{F'(w)}$ için kutup noktalarıdır.

Herhangi bir A köşesini göz önüne alalım. z düzlemine, $z' = (z-\zeta)e^{-i\theta}$ lineer transformasyonu tatbik edilerek P nin açısı, köşesi $z' = 0$ da, bir kenarı pozitif reel eksen üzerinde, pozitif yönlü aynı büyüklükte bir A' açısına dönüştürülebilir. Burada θ, reel eksen üzerine dönüşen kenarın x – ekseni ile yaptığı açı ve ζ da A nın koordinatıdır.

En son $Z = (z')^{\frac{1}{a}}$, A' açısını Im Z üst yarı düzleme konform tasvir eder. Yine Schwarz akis prensibinden dolayı

$$Z = [(F(w) - \zeta)\, e^{-i\theta}]^{\frac{1}{a}}$$

$w = a$ nın yeter derecede küçük bir civarında schlichttir. Binaenaleyh

$$[(F(w) - \zeta)\, e^{-i\theta}]^{\frac{1}{a}} = \sum_{r=1}^{\infty} b_r\, (w - a)^r .$$

Burada b_r kat sayıları reel ve $b_1 \neq 0$ dır. Dolayısiyle

$$F(w) = \zeta - e^{i\theta}\, (w - a)^a \sum_{r=0}^{\infty} b'_r\, (w - a)^r \qquad b'_0 \neq 0 .$$

Binaenaleyh

$$F'(w) = (w - a)^{\alpha - 1}\, G(w),\ G(a) \neq 0 .$$

Şu halde

$$\frac{d}{dw}\log F'(w) = \frac{F''(w)}{F'(w)} = \frac{\alpha-1}{w-a} + \frac{G'(w)}{G(w)} .$$

Aynı şekilde, A ya tekabül eden nokta sonsuzda ise ($a = \infty$)

$$\frac{F''(w)}{F'(w)} = -\frac{\alpha+1}{w} + \sum_2^\infty \frac{c_r}{w^r} .$$

Binaenaleyh $\frac{F''(w)}{F'(w)}$ bir rasyonel fonksiyondur (Teorem 4.8.8.2) ve a lar sonlu farzedilirse

$$\frac{F''(w)}{F'(w)} = \Sigma \frac{\alpha-1}{w-a} + G(w).$$

Burada $G(w)$ bir polinomdur. Şimdi diyorum ki $G(w) \equiv 0$. Filhakika $|w|$ çok büyük için

$$\frac{F''(w)}{F'(w)} = G(w) + \sum_1^\infty \frac{d_r}{w^r} .$$

Burada

$$d_1 = \Sigma(\alpha - 1) = -2 .$$

Şu halde

$$\frac{F''(w)}{F'(w)} = G(w) - \frac{2}{w} + \sum_2^r \frac{d_r}{w^r} . \qquad (8.4.1.1)$$

Halbuki $w = \infty$ a tekabül eden nokta, hipotezden dolayı (a lar sonlu) A lardan farklı, Poligon üzerinde bir noktadır. Bu noktayı yine ζ ile gösterirsek

$$(F(w) - \zeta)\, e^{-i\theta} = \sum_1^\infty \frac{e_r}{w^r}$$

Burada e_r reel ve $e_1 \neq 0$.

Binaenaleyh

$$\frac{F''(w)}{F'(w)} = -\frac{2}{w} + \sum_2^r \frac{d_r}{w^r} \qquad (8.4.1.2)$$

(8.4.1.2) yi (8.4.1.1) ile karşılaştırırsak $G(w) \equiv 0$ neticesi elde edilir. Binnetice

$$\frac{d}{dw}\log F'(w) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i - 1}{w - a_i}$$

ve integral alınırsa

$$F(w) = A \int_{w_0}^{w} \prod_{i=1}^n (w - a_i)^{\alpha_i - 1}\, dw + B . \qquad (8.4.1.3)$$

A, B sabitleri, poligonun düzlemdeki vaziyetine ve büyüklüğüne, integral

içerisindeki çok değerli fonksiyonun seçilen dalına ve integralin alt limitine bağlıdır. Bu alt limit daima $\operatorname{Im} w > 0$ veya a noktaları hariç reel eksen üzerinde alınır. Diğer taraftan üst yarı düzlemin kendi üzerine dönüşü üç reel parametreye tâbi olduğundan, üç adet a keyfi olarak seçilebilir. Üçgen ve dörtgenler hariç, diğer poligonlar için a katsayılarının hesabı umumiyetle çok güçtür.

Problem. $w = \infty$ noktası bir A köşesine tekabül ettirildiği takdirde (8.4.1.3) formülünün alacağı şekli bulunuz.

Problem. Reel eksen boyunca a_{i-1} ile a_i arasında integral alarak elde edilen sayının mutlak değeri $a_{i-1}\, a_i$ ye tekabül eden poligon kenarının uzunluğu olduğunu izah ediniz.

8.4.2. **Dairesel bir poligonun üst yarı düzleme konform tasviri.** § 8.4.1. deki notasyonları muhafaza ederek orada olduğu gibi burada da $z = F(w)$ ters fonksiyonununu etüd edeceğiz.

Schwarz akis prensibinden dolayı $F(w)$, a noktaları hariç genişletilmiş düzlemde analitiktir. Binaenaleyh $F(w)$ nın yegâne singüler noktaları A köşelerine tekabül eden reel eksen üzerindeki a noktalarıdır. $F(w)$ nin bu noktalar civarında durumunu tetkik etmek için z-düzlemine

$$z_1 = \frac{kz + l}{mz + n} \qquad (8.4.2.1)$$

transformasyonunu tatbik edelim. k, l, m, n katsayıları o şekilde seçilebilir ki bu transformasyonda verilen bir A açısını ihtiva eden kenarlar z_1-düzleminde kenarları doğru olan bir A_1 açısına dönüşür. Her bir A köşesi için (8.4.2.1) hesaplanırsa § 8.4.1 de olduğu gibi görülür ki, a lar hariç reel eksenin bütün noktalarında z_1''/z_1' her halde anilitiktir. Ve $w = \infty$ hiçbir köşeye tekabül etmiyorsa sonsuz noktada

$$\frac{z_1''}{z_1'} = -\frac{2}{w} + \sum_2^r \frac{d_r}{w^r} . \qquad (8.4.2.2)$$

Diğer taraftan herhangibir a noktasında

$$\frac{z_1''}{z_1'} = \frac{\alpha-1}{w-a} + g\,(w - a) . \qquad (8.4.2.3)$$

Bu serilerdeki bütün katsayılar reeldir.

Şayet $w = \infty$ A köşesine tekabül ediyorsa

$$\frac{z_1''}{z_1'} = -\frac{\alpha+1}{w} + \sum_2^\infty \frac{c_r}{w^r} . \qquad (8.4.2.4)$$

Buradan tekrar z''/z' ye dönmek lazımdır, ve görülüyor ki z''/z', k, l, m, n ye tâbidir. Halbuki z_1''/z_1' yerine

$$\left(\frac{z_1''}{z_1'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z_1''}{z_1'}\right)^2 \qquad (8.4.2.5)$$

ifadesi göz önüne alınırsa derhal tahkik edilebilir ki (8.4.2.5), (8.4.2.1) e nazaran invarient dir yani

$$\left(\frac{z_1''}{z_1'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z_1''}{z_1'}\right)^2 \equiv \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2,$$

(8.4.2.5) ifadesine Schwarz türevi denir ve

$$\{z, w\} = \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$$

ile gösterilir.

Binaenaleyh $w = \infty$ hiçbir köşeye tekabül etmiyor, ve (8.4.2.2) göz önünde tutulursa, $w = \infty$ daki $\{z, w\}$ nın açılımı

$$\{z, w\} = \frac{e_4}{w^4} + \cdots \qquad (8.4.2.6)$$

dır. a noktalarının civarında (i) a sonlu ise (8.4.2.3) göz önünde tutularak

$$\{z, w\} = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{(w-a)^2} + \frac{h}{w-a} + \cdots .$$

Burada h reeldir. (ii) a sonsuz ise (8.4.2.4) göz önünde tutularak

$$\{z, w\} = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{w^2} + \cdots . \qquad (8.4.2.7)$$

Binnetice göstermiş oluyoruz ki $\{z, w\}$ bir rasyonel fonksiyondur. Meselâ a ları sonlu farzedersek,

$$\{z, w\} = \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{1-w^2}{(w-a)^2} + \frac{h}{w-a}\right] + G(w) .$$

Burada $G(w)$ bir polinomdur. $w = \infty$ da

$$\{z, w\} = \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{(w-a)^2} + \frac{h}{w-a}\right] + G(w) = \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{n} h_i +$$

$$\frac{1}{w^2}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i h_i + \frac{1-\alpha_i^2}{2}\right) + \frac{1}{w^3}\sum_{i=1}^{n}\left[a_i^2 h_i + a_i(1-\alpha_i^2)\right] + \cdots + G(w)$$

(8.4.2.6) ile karşılaştırılırsa $G(w) \equiv 0$ ve h lar aşağıdaki şartları sağlarlar.

$$\begin{cases} \Sigma h_i = 0 \\ \Sigma\left(a_i h_i + \dfrac{1-\alpha_i^2}{2}\right) = 0 \\ \Sigma\left[a_i^2 h_i + a_i(1-\alpha_i^2)\right] = 0 \end{cases} \qquad (8.4.2.8)$$

a lardan birisi sonsuz ise, (8.4.2.7) ile karşılaştırılarak yine görülür ki $G(w) \equiv 0$, $\Sigma h_i = 0$ ve (8.4.2.8) deki iki son şart yerine

$$\Sigma\left(a_i h_i + \frac{1-\alpha_i^2}{2}\right) = \frac{1-\alpha^2}{2}$$

şartı gelir. Şimdi hülasa edelim. z-düzleminde, kenarları çember yaylarından ibaret olan bir P dairesel poligonu verilmiş olsun. Köşelerini $A_1, A_2, \ldots A_n$, iç açılarını ise $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_n$ ile gösterelim. $Im\ w > 0$ üstyarı düzlemini P nin içine konform tasvir eden $z = F(w)$ fonsiyonu, öyleki reel eksen üzerinde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlu noktaları $A_1, A_2, \ldots, A_n$, köşelerine tekabül eder, aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar.

$$\{z, w\} = \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{(w-a)^2} + \frac{h}{w-a}\right] .$$

Burada

$$\{z, w\} = \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 \qquad (8.4.2.10)$$

ve h lar (8.4.2.8) şartlarını sağlar.

(8.4.2.9) un bir $z = F(w)$ çözümü biliniyorsa bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Z = \frac{kz + l}{mz + n}$$

dır.

Şimdi (8.4.2.9) un ne şekilde bir özel çözümü elde edilir onu gösterelim.

$$y'' + p(w)y' + q(w)y = 0 \qquad (8.4.2.11)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım . $y_1(w)$, $y_2(w)$ iki özel çözüm olsun

$$u = \frac{y_1}{y_2}$$

vaz edelim. Görülüyor ki

$$\left(\frac{u''}{u'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2 + 2q - \frac{1}{2}p^2 - p' .$$

Binaenaleyh (8.4.2.11) denkleminin iki çözümünün oranı (8.4.2.9) tipinde bir diferansiyel denklemin çözümüdür. Karşıt olarak (4.8.2.9) un herbir çözümü (8.4.2.11) in iki çözümünün oranıdır öyle ki

$$2q - \frac{1}{2} p^2 - p' = \Sigma \left[\frac{1}{2} \frac{1 - \alpha^2}{(w - a)^2} + \frac{h}{w - a} \right]$$

p, keyfi olarak seçilebilir meselâ $p = 0$ alınabilir. Bu takdirde

$$2q = \Sigma \left[\frac{1}{2} \frac{1 - \alpha^2}{(w - a)^2} + \frac{h}{w - a} \right]$$

ve

$$y'' + \frac{1}{2} \Sigma \left[\frac{1}{2} \frac{1 - \alpha^2}{(w - a)^2} + \frac{h}{w - a} \right] y = 0 .$$

Not. Poligonların birim dairesi üzerine konform tasvirleri, $\operatorname{Im} w > 0$ üst yazı düzleminden birim dairesine geçerek yapılır, bu geçiş gözönünde tutularak ispatın teferruatı okuyuculara bırakılmıştır.

Problem[1] $|z| < 1$ dairesinde P: GAG'EBE' FCF' poligonu verilmiş olsun. Burada G'E, E'F, F'G kenarları $|z| = 1$ e dik ve GAG', EBE', FCF' kenarları birim çemberine ait yaylardır. A, B, C noktalarının koordinatları sıra ile $z = -1, e^{-\pi i/3}, e^{\pi i/3}$ tür ve P, OA, OB, OC eksenlerine nazaran simetriktir. O, $|z| = 1$ in merkezidir.

Gösteriniz ki P yi $|x| < 1$ e konform tasvir eden $z = z(x)$ fonksiyonu

$$\{z, x\} = \frac{9x}{4} \cdot \frac{2 (\cos 3 \Psi - \cos \Psi) x^6 + (\cos 6 \Psi + 4 \cos 3 \Psi \cos \Psi - 5) x^3 + 2 (\cos 3 \Psi - \cos \Psi)}{(x^6 - 2x^3 \cos 3 \Psi + 1)^2}$$

$0 < \Psi < \pi/3$, diferansiyel denklemini sağlar.

(1) C. Uluçay, On The Constant $\wp$ Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara, Série A. Tome VI, Fasc. 2, 1954.

BÖLÜM IX

RIEMAN YÜZEYLERİNE GİRİŞ

1. Cebirsel Fonksiyonlar

9.1.1. **Rezültant ve Diskreminant.** Bölüm VII de Analitik temdit metodu ile kompleks düzlemdeki bir G bölgesinin örtme yüzeyini tarif ettik. Bu noktai nazarı cebirsel fonksiyonlar gibi müşahhas bir misalle aydınlatmaya çalışacağız.

TARİF 1. Bir $w = w(z)$ analitik fonksiyonuna cebirsel fonksiyon denir, şayet $w = w(z)$, bir $G(z, w) = 0$ cebirsel denklemini sağlıyorsa. Daha da kesin olarak, bir $w = w(z)$ tam analitik fonksiyonuna, cebirsel fonksiyon denir, şayet $w = w(z)$ nin bütün fonksiyon elemanları bir

$$G(z, w) = 0$$

cebirsel denklemini sağlıyor ise. Burada $G(z, w)$, z ve w nin bir polinomudur, ve özdeş olarak sıfır değildir.

$G(z, w)$, w nin artan kuvvetlerine göre yazılırsa,

$G(z, w) = a_0(z) + a_1(z).w + a_2(z).w^2 + \ldots + a_m(z)\, w^m = 0$ elde edilir. Burada, $a_i(z)$ ler, $i = 0, 1, \ldots, m$ katsayıları kompleks sayılar olan, z nin polinomlarıdır.

$G(z, w) = 0$ cebirsel denklemini, *indirgenemez* farzedeceğiz. Zira.

$$G_1(z, w).G_2(z, w) = 0$$

şeklinde yazılabilen bir denklem aynı tipte iki ayrı

$$G_1(z, w) = 0, \; G_2(z, w) = 0$$

denklemlerine irca olunabilir, ve $G(z, w) = 0$ yerine, bu iki denklem ayrı ayrı tetkik edilir.

Şimdi z_0, z nin belli bir değeri olsun. Bu takdirde,

$$G(z_0, w) = 0,$$

kat sayıları belli bir denklem olup, umumiyetle m sayıda farklı köklere maliktir.

İstisnalar ancak aşağıdaki hallerde vuku bulur.

(i) $a_m(z_0) = 0$. Burada denklemin derecesi düşmüştür.

(ii) $G(z_0\, w) = 0$ ın çok katlı kökleri vardır. (ii) nci hal, $G(z, w) = 0$ denkleminin *diskreminant*'ı sıfır ise varittir. Cebirsel denklemlerde diskreminant mühim bir rol oynadığından, bu kavramı tarif edelim.

TARİF 2. $f(w)$ ve $g(w)$ gibi iki polinom nazarı itibare alalım.

$$f(w) = w^n + a_{n-1}\, w^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$g(w) = w^m + b_{m-1}\, w^{m-1} + \ldots + b_0.$$

Bu iki polinomun çarpanlara ayrılarak yazıldıklarını farzedelim:

$$f(w) = (w - \alpha_1)\,(w - \alpha_2)\ldots(w - \alpha_n)$$
$$g(w) = (w - \beta_1)\,(w - \beta_2)\ldots(w - \beta_m)\ .$$

Şimdi aşağıda yazılı mn çarpanların çarpımını düşünelim.

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 - \beta_1)\,(\alpha_1 - \beta_2)\ldots(\alpha_1 - \beta_m)\\ &(\alpha_2 - \beta_1)\,(\alpha_2 - \beta_2)\ldots(\alpha_2 - \beta_m)\\ &(\alpha_n - \beta_1)\,(\alpha_n - \beta_1)\ldots(\alpha_n - \beta_m)\ .\end{aligned} \tag{9.1.1.1}$$

Bu çarpım sıfırdır, yalnız ve yalnız, α lardan en az biri, β lardan birine eşit ise. Binaenaleyh, bu çarpımın sıfır olması, f ve g nin ortak bir çarpanı olması için gerek ve yeter şarttır. Üstelik (9. 1.1.1) çarpımı, α ve β ların simetrik bir polinomu olduğundan, α ve β ların elemanter simetrik polinomları cinsinden ifade edilebilir, ve dolayısıyla, a ve b katsayılarının bir polinomudur.

Bu polinomu,

$$F(a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1},\ b_0,\ b_1, \ldots,\ b_{m-1})$$

şeklinde göstereceğiz ve ona f, g polinomlarının *rezültantı* diyeceğiz.

Şimdi, hangi şartlar altında, bir $f(w)$ polinomunun çok katlı bir lineer çarpanı vardır? sualini inceleyelim. f ve g polinomlarında olduğu gibi burada da

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots\ (\alpha_1 - \alpha_n)\\ &\qquad(\alpha_2 - \alpha_3)\ \ldots\ (\alpha_2 - \alpha_n)\\ &\qquad\qquad(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\end{aligned} \tag{9.1.1.2}$$

çarpımını teşkil edelim. Görülüyor ki (9.1.1.2) ifadesinin sıfır olması, $f(w)$ polinomunun çok katlı bir lineer çarpanı olması için gerek ve yeter şarttır. Dikkat edilirse, (9.1.1.2) simetrik değildir. Zira iki indeks yer değiştirdiği takdirde, (9.1.1.2) işaret değiştirir. O halde (9.1.1.2) ifadesinin karesi simetriktir ve dolayısıyla, a katsayılarının bir polinomudur. Bu polinomu

$$F\ (a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1})$$

şeklinde gösterir, ve (9.1.1.2) ifadesine $P = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dersek

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2 = F(a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1}).$$

Üstelik $F=0$, f polinomunun çok katlı bir çarpan ihtiva etmesi için gerek ve yeter şarttır.

Diğer taraftan görülür ki, $f(w)$ nin çok katlı bir lineer çarpanı olması için gerek ve yeter şart, $f(w)$ ve $f'(w)$ nin ortak lineer çarpanı olmalıdır.

O halde, $f(w)$ nin çok katlı bir lineer çarpanı olması için, gerek ve yeter şart, f ve f' nün rezültant'ı sıfır olmalıdır.

Bu rezültant'a $f(w)$ nin *diskreminant*'ı denir ve Δ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem ispat edilebilir.

Teorem 9.1.1.1. $F\ (a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1})$ ve Δ polinomları, sabit bir çarpan hariç, eşittirler, ve indirgenemezler.

$F\ (a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1})$ ve Δ nın indirgenemez olduğunu göstermek için, en umumi hal olan, f ve g polinomlarının $F\ (a_0,\ a_1 \ldots,\ a_{n-1};\ b_0,\ b_1, \ldots,\ b_{m-1})$ rezültant'ının indirgenemez olduğunu gösterelim. Farzedelim ki, $F(a_0, \ldots,\ a_{n-1};\ b_0, \ldots,\ b_{m-1})$ indirgenebilir.

O halde

$$\begin{aligned}F(a_0, \ldots, a_{n-1};\ b_0, \ldots, b_{m-1}) \equiv\ & F_1(a_0, \ldots, a_{n-1};\ b_0, \ldots, b_{m-1})\\ & F_2(a_0, \ldots,\ a_{n-1};\ b_0, \ldots,\ b_{m-1}).\end{aligned}$$

Burada, F_1, F_2 sabit değil. Diğer taraftan a lar ve b ler α ve β ların simetrik polinomları olduklarından, F_1 ve F_2; α ve β ların simetrik polinomları olan Φ_1 ve Φ_2 ile ifade edilebilirler. Öyle ise

$$\begin{aligned}\Phi_1\ (\alpha_1, \ldots,\ \alpha_m;\ \beta_1, \ldots,\ \beta_m)\ \Phi_2\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \ldots,\ \beta_m) \equiv\\ (\alpha_1 - \beta_1)\ (\alpha_1 - \beta_2)\ldots(\alpha_1 - \beta_m)\\ (\alpha_2 - \beta_1)\ (\alpha_2 - \beta_2)\ldots(\alpha_2 - \beta_m)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\alpha_n - \beta_1)\ (\alpha_n - \beta_2)\ldots(\alpha_n - \beta_m)\ .\end{aligned}$$

Bu özdeşliğin sağındaki ifadede çarpanlar indirgenemediğinden, Φ_1 bu çarpanların bir kısmını, Φ_2 ise diğer kısmını ihtiva edecektir. Bu ise mümkün değildir, zira, bu taktirde ne Φ_1 ne de Φ_2 simetrik olamazlar. O halde F indirgenemez.

Teoremin ispatını tamamlayabilmek için, şu iki lemmayı da ispat edelim. Önce bir değişkenli polinomlar hakkında birkaç hususu daha hatırlatalım.

TARİF 3. Bir Φ polinomuna, değişken sayısı ne olursa olsun, bir f polinomunu böler veya onun çarpanıdır denir şayet $\exists\,\Psi$ polinomu, $\ni f = \Phi\Psi$.

TARİF 4. İki polinom rölatif asaldır, şayet sabitten farklı hiçbir ortak böleni yoksa.

TARİF. 5. Katsayıları reel veya kompleks olan iki polinom verilmiş olsun. Bu polinomların

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

şeklinde yazıldıklarını farzedelim. Bu iki polinomun *en büyük ortak böleni* diye, derecesi *en büyük* olan *ortak bölene* denir.

Farzedelim ki, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $n \geq m > 0$, yani f ve g polinomları sabit değildirler ve f nin derecesi en fazla g nin derecesine eşittir. Şimdi f ve g ye Euclid bölme algoritmasını tatbik edelim.

$$\begin{cases} f(x) = Q_0(x)\, g(x) + R_1(x) \\ g(x) = Q_1(x)R_1(x) + R_2(x) \\ R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{\rho-1}(x) = Q_\rho(x)R_\rho(x) + R_{\rho+1} \end{cases} \qquad (9.1.1.3)$$

Notasyonların ahengi bakımından, $g(x) = R_0(x)$ vazedelim. Görülüyor ki R_0, R_1, R_2,... polinomlarının dereceleri her adımda azalmakta ve sonlu adımlardan sonra x e tâbi olmıyan $R_{\rho+1}$ kalanı elde edilmektedir. Diğer taraftan f ve g nin herbir ortak çarpanı, aynı zamanda bütün R lerin çarpanıdır. Şu halde bu ortak çarpan sabit değil ise, $R_{\rho+1}$ in de çarpanıdır. Binaenaleyh $R_{\rho+1} = 0$. Karşıt olarak $R_{\rho+1}=0$ ise $R_\rho(x)$ polinomu $R_{\rho-1}(x)$ ve $R_{\rho+1}$ in ortak çarpanıdır ve dolayısıyla f ve g nin ortak çarpanıdır. O halde aşağıdaki neticeleri söyleyebiliriz.

Teorem 9.1.1.2. Birtek değişkenli, sabit olmıyan, f ve g polinomları *rölatif asaldırlar* yalnız ve yalnız (9.1.1.3) Euclid algoritmasında $R_{\rho+1} \neq 0$ ise.

Teorem 9.1.1.3. Euclid algoritmasında $R_{\rho+1} = 0$ ise, $R_\rho(x)$ f ve g nin en büyük ortak bölenidir.

Problem. $R_{\rho+1}$ kalanının f ve g polinomlarının rezültantı olduğunu gösteriniz.

Lemma 9.1.1.1. $f(x,y,z)$ ve $g(x,y,z)$ üç değişkenli iki polinom olsun. Farzedelim ki $g(x,y,z)$ indirgenemez. Şayet f polinomu g nin sıfır olduğu bütün (x,y,z) noktalarında sıfır ise, g polinomu f nin bir çarpanıdır.

İspat. g nin en az bir değişken ihtiva ettiğini kabul etmekle, genelliğe halel getirmiş olmayız. Aksi halde, g polinomu, x, y, z değişkenlerinin hiçbirini ihtiva etmiyorsa, lemma aşikâr olarak doğrudur.

Farzedelim ki g, f nin bir çarpanı değildir, ve

$$g(x,y,z) \equiv b_m(y,z)x^m + b_{m-1}(y,z)x^{m-1} + \ldots + b_0(y,z),\ m \geq 1,\ b_m(y,z) \not\equiv 0$$

şeklinde yazılmış olsun. $f(x,y,z)$ ve $g(x,y,z)$ polinomlarının *en büyük ortak bölen* algoritmasından aşağıdaki Bezout özdeşliği elde edilir.

$$R_{\rho+1}(y,z) \equiv F(x,y,z)\, f(x,y,z) + G(x,y,z)\, g(x,y,z)\ ^{(1)}$$

g ve f nin bir çarpanı olmadığından, ve üstelik, g indirgenemediğinden, f ve g rölatif asaldırlar. O halde

$$R_{\rho-1}(y,z) \not\equiv 0$$

ve

$$R_{\rho+1}(y, z)\, b_m(y, z) \not\equiv 0.$$

Dolayısıyla (y_1, z_1) noktası bulunabilir öyle ki

$$R_{\rho+1}(y_1, z_1)\, b_m(y_1, z_1) \neq 0.$$

Yani

$$(i) R_{\rho+1}(y_1,z_1) \neq 0, \qquad (ii)\ b_m(y_1, z_1) \neq 0.$$

Binaenaleyh, $(ii) \Rightarrow (y_1, z_1)$ noktasında $g(x, y_1, z_1)$, x in bir polinomu olup, en az birinci derecedendir. Cebirin esas teoreminden dolayı, $g(x, y_1, z_1)$, x in bir x_1 değeri için sıfırdır. Yani

$$g(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Hipotezden dolayı

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Şu halde, *Bezout* özdeşliğinden

$$R_{\rho+1}(y_1, z_1) = 0.$$

Bu tezat lemmayı doğrular.

Lemma 9.1.1.2. $(x_1,\ldots,x_n)$ nin simetrik bir polinomu, şayet $p_1,\ldots,p_n$, elemanter simetrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiş ise, bu ifadenin derecesi, eski ifadenin herhangibir x e göre derecesine eşittir.

İspat. f simetrik bir polinom olsun, ve

$$f(x_1,\ldots,x_n) \equiv \Phi(p_1,\ldots,p_n)$$

yazalım. Farzedelim ki f in x e nazaran derecesi m dir (*f simetrik olduğundan*, herhangibir x e nazaran derecesi m dir), ve Φ nin derecesi μ dür. Göstermek istiyoruz ki $m = \mu$. p ler x_1 e nazaran 1. dereceden olduklarından, $m \leq \mu$.

Φ homogen değil ise, aynı derecedeki terimleri biraraya getirmek suretiyle, Φ yi homogen polinomların toplamı şeklinde parçalayabiliriz. p lerin yerine x lerin cinsinden değerleri koyularak, bahis konusu herbir homogen polinomu, x lerin bir simetrik polinomu şeklinde ifade edilebilir. Teorem, bir homogen polinom için ispat edildiği takdirde, teorem genel hal için de doğru olacaktır.

(1) Euclid algoritması tatbik edilirken $R_{\rho+1}(y,z)$, x e tâbi olmıyan ilk kalandır, ve özdeşlik, $R_1,\ldots,R_\rho(x, y, z)$ kalanları yok etmek suretiyle elde edilir.

O halde, farzedelim ki Φ homogen bir polinomdur. Teorem, $n=1$ için aşikârdır, zira $p_1 = -x_1$. Teorem matematik endüksiyon ile tamamen ispat edilmiş olacaktır, şayet teoremin doğruluğu, x lerin sayısı $1,2,\ldots, n-1$ için kabul edilerek, x lerin sayısı n olduğu taktirde gösterilebilir ise.

(i) önce farzedelim ki, p_n, Φ nin herbir teriminin çarpanı değildir. Bu takdirde $\Phi(p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}, 0) \neq 0$, fakat yine de derecesi μ olan homogen bir polinomdur. Şimdi $x_n = 0$ vazedelim. Dolayısıyle, $p_n = 0$ dır, ve

$$f(x_2,\ldots, x_{n-1}, 0) = \Phi(p'_1, p'_2,\ldots, p'_{n-1}, 0)$$

özdeşliği elde edilir. Burada p' ler, $x_1,\ldots,x_{n-1}$ in elemanter simetrik fonksiyonlarıdır, ve $f(x_1,\ldots, x_{n-1}, 0)$ x_1 e nazaran derecesi m_1 olan simetrik bir polinomdur, ve $m_1 \leq m$. Endüksiyon hipotezinden dolayı, yukardaki özdeşlikten

$$\mu = m_1 \leq m$$

elde edilir. Halbuki biraz önce $m \leq \mu$ olduğunu görmüştük. O halde $\mu = m$.

(ii) Şimdi, p_n nin Φ nin herbir teriminin çarpanı olduğunu kabul edelim. O halde

$$\Phi(p_1,\ldots,p_n) = p_n^k\, \Phi_1(p_1,\ldots,p_n).$$

Burada Φ_1, μ-k dereceden bir polinomdur, p ler x ler cinsinden yazıldığı takdirde

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^k\, x_2^k \ldots x_n^k\, f_1(x_1,\ldots,x_n). \qquad (9.1.1.3)$$

Yani

$$f_1(x_1,\ldots,x_n) = \Phi_1(p_1,\ldots, p_n) \qquad (9.1.1.4)$$

(9.1.1.3) ten görülüyor ki, f_1 in derecesi x_1 e nazaran m-k dır. Φ_1 in derecesi ise, μ-k dır. O halde, (9.1.1.4) ten dolayı, Φ_1, p_n yi çarpan olarak ihtiva etmediğine göre, f_1 in x_1 e nazaran derecesi Φ_1 in p lere nazaran derecesine eşittir.

$$\mu - k = m - k.$$

Buradan $\mu = m$ elde edilir.

Bu bilgilerle, Teoremin ispatını tamamlamak kolaydır.

Filhakika, $F=0$, $f(w)$ nin çok katlı bir lineer çarpanı olması için gerek ve yeter şart olduğundan, ve $\Delta = 0$ aynı şeyi ifade ettiğinden, F yi sıfır yapan α değerleri, Δ yı da sıfır yaparlar. Lemma 9.1.1.1 den dolayı, F polinomu Δ nın bir çarpanıdır. Diğer taraftan, F, α ların simetrik bir polinomu olup herbir α ya göre derecesi $2n$-2 dir. Lemman 9.1.1.2 den dolayı F nin α lara nazaran derecesi $2n$-2 dir. Fakat görülür ki Δ nın derecesi $2n$-2 den büyük değildir. O halde F, Δ nın bir çarpanı olduğundan, derecesi ise Δ nınkinden küçük olmadığından, Δ dan ancak bir sabit çarpan kadar farklıdır.

2. Köklerin Sürekliliği ve Analitikliği

9.2.1. **Köklerin analitikliği.** Gösterdik ki $G(z, w)$ polinomu indirgenemezse, w nin artan kuvvetlerine göre yazılan

$$G(z, w) = a_0(z) + a_1(z)\, w + \ldots + a_m(z)\, w^m$$

polinomunun $\Delta(z)$ diskreminantı z nin belli derceden bir polinomudur. Binaenaleyh, (i) ve (ii) gibi istisnai haller ancak z nin sonlu sayıda, *kritik noktalar* diye adlandırılan, özel değerleri için mümkündür.

Bu kritik noktaları,

$$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_r$$

ile göstereceğiz. Şu halde, bu noktalarda

$$a_m(\alpha_k) = 0 \quad \Delta(\alpha_k) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, r\ .$$

Şimdi, bir z_0 noktasını gözönüne alalım, öyleki $a_m(z_0) \neq 0$ şartı sağlanmış olsun. Bu takdirde $G(z_0, w) = 0$ denkleminin tam m kökü vardır, bunlardan bazıları çok katlı olabilir.

Farzedelim ki, w_i kökü s katlıdır. Aşağıdaki çok mühim teoremi ispat edelim.

Teorem 9.2.1.1 (köklerin sürekliliği). Merkezi w_i de ve yarıçapı $\varepsilon > 0$ yeter derecede küçük bir K_i dairesi çizildiği takdirde, merkezi z_0 da ve yarıçapı $\delta=\delta(\varepsilon) > 0$ olmak üzere öyle bir küçük K_0 dairesi çizilebilir ki, her $z \neq z_0$, $z \varepsilon K_0$ için $G(z, w) = 0$ denkleminin, K_i dairesinde tam s farklı kökü vardır.

İspat. Bu teorem der ki, $G(z_0, w_i) = 0$ ise, ve $w = w_i$, $G(z_0, w) = 0$ ın s katlı bir kökü ise, z_0 ı çok az değiştirmekle, bu s katlı w_i kökü s sayıda farklı köklere ayrılır.

Şimdi, $\varepsilon > 0$ i, 0 şekilde seçilim ki, merkezi w_i de, ve yarıçapı ε olan K_i dairesinin C_i çemberi üzerinde $G(z_0, w) \neq 0$ olsun.

Argument prensibinden dolayı

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{G'(z_0, w)}{G(z_0, w)}\, dw = s,$$

burada $G'(z_0, w)$ $G(z_0, w)$ nın w ye nazaran türevidir. z_0 yerine z vazedilirse, bu integral, z_0 ın bir cıvarında, z nin sürekli bir fonksiyonudur. Aynı zamanda, integralin değeri daima tam olduğundan, z_0 ın bir K_0 cıvarında bütün z ler için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{G'(z, w)}{G(z, w)}\, dw = s.$$

Nihayet, K_0 ı öyle küçük seçebiliriz ki, orada $z \neq z_0$ için $\Delta(z) \neq 0$. Yani her $z \varepsilon K_0$, $z \neq z_0$, için $G(z, w) = 0$ denkleminin K_i de, farklı tam s kökü vardır.

Özel olarak, farzedelim ki, $s=1$, yani $\Delta(z_0) \neq 0$, dolayısıyla $z_0 \neq \alpha_k$, $k = 1,2,\ldots, r$. Bu takdirde her $z \varepsilon K_0$ için, K_i de $G(z, w) = 0$ ın bir ve birtek kökü vardır. Bu kökü $w = f_i(z)$ ile gösterelim. Bu takdirde $f_i(z)$, K_0 da z nin sürekli bir fonksiyonudur. Ve hatta, analitiktir. Gerçekten,

Teorem 9.2.1.2. (köklerin analitikliği) $w=f_i(z)$ K_0 da analitiktir.

İspat. Rezidü teoremlerinden dolayı

$$f_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} w \frac{G'(z, w)}{G(z, w)} dw.$$

Bu de gösteriyor ki $f_i(z)$ analitiktir, ve $w_i = f_i(z_0)$. Son olarak, $G(z, w) = 0$, $z \varepsilon K_0$ ise, bu takdirde, bir i için $w = f_i(z)$, zira $G(z, w) = 0$ ın bunlardan başka kökü yoktur. Yukardaki neticeleri tek bir teorem altında toplıyabiliriz.

Teorem 9.2.1.3. z_0 kritik noktalardan farklı bir nokta olsun. Merkezi z_0 da bir K_0 dairesi ve m fonksiyon elaman bulunabilir: $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ öyleki

(i) $G(z, f_i(z)) = 0$, $z \varepsilon K_0$, $i = 1, 2, \ldots, m$,

(ii) $f_i(z_0) = w_i$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$

(iii) $G(z, w) = 0$, $z \varepsilon K_0$ ise bir i bulunabilir öyleki $w = f_i(z)$. $f_i(z)$ fonksiyon elemanını, (f_i, K_0) veya (f_i, z_0) ile de göstereceğiz.

Bu teorem gösteriyor ki, $G(z,w)= 0$ denklemini sağlıyan bir $w = w(z)$ cebirsel fonksiyonu mevcuttur. Hakikatte, $w = w(z)$ yi, kritik noktalardan farklı olmak şartıyle herhangibir z_0 a tekabül eden (f_i, K_0) fonksiyon elemanının belirttiği tam analitik fonksiyon olarak seçebiliriz. (f, Γ) $G(z, w) = 0$ denklemini sağlıyan bir fonksiyon eleman olsun. Kritik noktalardan farklı bir z_0 bulunabilir öyleki $z_0 \varepsilon \Gamma$. Bilahare K_0 ı tesbit edebiliriz. $z \varepsilon \Gamma$ için $G(z, f(z)) = 0$ olduğundan, (iii) den dolayı $\Gamma \cap K_0$ ın herbir noktasında $f(z) = f_i(z)$. Bu takdirde, z_0 ın herhangi bir komşuluğunda, sonsuz sayıda noktalarda $f(z) = f_i(z)$, ve dolayısıyla (f,Γ) elemanı, (f_i, K_0) ın belirttiği tam analitik fonksiyona aittir. Şu halde $G(z, w) = 0$ denklemini sağlıyan bir fonksiyon eleman, (f_1, K_0), (f_2, K_0),... fonksiyon elemanlarının belirttikleri tam analitik fonksiyonlardan birine aittir. Şimdi, gösterelim ki $G(z, w) = 0$ denklemini sağlıyan bir (f, Γ) fonksiyon elemanının, kritik noktalardan geçmiyen herhangibir eğri boyunca, analitik temditi mümkündür. Aksini kabul ederek, farzedelim ki, bir $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ eğrisi mevcuttur öyleki bu eğrinin herbir parçası boyunca, $\alpha \leq t \leq \tau < \beta$, (f,Γ) elemanının analitik temditi mümkündür, fakat bütün eğri boyunca devamı mümkün değildir. $z(\beta) = z_0$ vazedelim, ve K_0 ı tesbit edelim. τ yı o şekilde seçelim ki, $\tau \leq t \leq \beta$ için $z(t) \varepsilon K_0$. Fakat $G(z,f(z(\tau)))=0$, $z(\tau) \varepsilon K_0$. O halde (iii) den dolayı (f, Γ) nın analitik temditi olan $(f, z(\tau))$ elemanı (f_i, K_0) elemanına eşittir. Bu takdirde (f, Γ), β ya kadar analitik temdit edilebilir. Bu tezat iddiamızı doğrular.

Nihayet gösterelim ki herbir (f_i, K_0) fonksiyon elemanı aynı tam analitik fonksiyonu belirtir. Bunun için de göstermeliyiz ki herhangibir elemandan diğerine analitik temdit ile geçilebilir. Bu husus ise önce (f_i, K_0) elemanlarının kritik noktalardaki durumlarının tetkikini icab ettirir.

9.2.2 **Fonksiyon elemanların kritik noktalardaki durumu.** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ kritik noktalarının, herbirini yarıdoğrularla ∞ a birleştirelim, öyleki L_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ ile gösterilen bu yarı doğrular birbirlerini kesmesinler. Bu yarı doğrulardan müteşekkil, $L_1, L_2, \ldots, L_r$ yarıdoğrularının cümlesine L diyelim. Düzlemin L boyunca kesildiğini düşünelim. Elde edilen basit irtibatlı bölgeyi D ile gösterelim. Herbir (f_i, K_0) fonksiyon elemanının bütün D de analitik temditi mümkündür. Monodromi teoremine göre, (f_i, K_0) fonksiyon elemanların herbiri D de tekdeğerli analitik bir fonksiyon belirtir. Bu fonksiyonları $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z)$ ile gösterelim. Bu fonksiyonlar, z_0 başlangıç noktasının seçimine tâbi değildir. Üstelik *fonksiyonel denklemlerin devamlılığı*ndan dolayı, $G(z, F_i(z)) = 0$ kalmaktadır. Göstermemiz gerekir ki $F_i(z)$ fonksiyonları, D nin L sınırını katetmek suretiyle, biri diğerinin analitik devamıdır. Bu sonucu elde etmek için, fonksiyonların kritik noktalardaki ve ∞ daki durumlarını tetkik etmek zorundayız. α, bir kritik nokta olsun. Merkezi α da olan bir C çemberini çizelim. Farzedelim ki C içinde ve üzerinde α dan başka hiçbir kritik nokta yoktur. z_0, C nin üzerinde bir nokta olsun. Bu takdirde herbir (f_i, K_0), $i=1, 2, \ldots, m$ elemanı C boyunca, meselâ pozitif yönc doğru, analitik devam edilebilir. z_0 noktasına dönüşte, (iii) den dolayı, belli bir (f_i, K_0) fonksiyon elemanı elde edilir, öyleki umumiyetle, $i \neq j$. Üstelik aşikârdır ki iki farklı elemanla aynı elemana dönülemez, gerçekten, bu son eleman C boyunca, ters yönde analitik devam edilirse, z_0 a belli bir elemanla dönülür. Binaenaleyh, C boyunca analitik devamla, f_1, $f_2, \ldots f_m$ fonksiyon elemanları yer değiştirirler. Yani bu m eleman bir permütasyon teşkil eder. Halbuki, herbir permütasyon devirlere ayrılır, şöyleki, bu permütasyonda, f_1 elemanı f_2 ye, f_2 elemanı f_3 e, $\ldots f_{p-1}$ elemanı f_p ye, ve nihayet f_p elemanı f_1 re dönüşüyorsa, $f_1, f_2, \ldots f_p$ elemanları bir *devir* teşkil ederler. Burada $p \leq m$. Görülüyor ki (f_1, K_0) elemanı, veya $F_1(z)$, α etrafında p kere devam edildikten sonra aynı (f_1, K_0) elemanına dönülüyor. Başka bir deyimle, z, α nın komşuluğunda, α etrafında p kere dönerse $F_1(z)$ eski değerini alır. Yani

$$z - \alpha = \zeta^p \qquad F_1(z) = F_1(\alpha+\zeta^p) = H_1(\zeta)$$

vazedilirse, $\zeta = 0$ hariç, $\zeta = 0$ ın bir komşuluğunda, $H_1(\zeta)$ tekdeğerli ve analitiktir. O halde, $H_1(\zeta)$ nın $\zeta = 0$ etrafında bir Laurent açılımı vardır.

$$H_1(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \zeta^n$$

veya, eski değişkene dönülürse,

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-\alpha)^{n/p} . \qquad (9.2.2.1)$$

Bu serilerle ilgili şu teoremi ispat edelim.

Teorem 9.2.2.1. Kritik noktaların etrafındaki Laurent açılımlarında yalnız sonlu sayıda negatif kuvvetler vardır.

İspat. İki hal tefrik edeceğiz. (i) $a_m(\alpha) \neq 0$. Bu demektir ki α kritik noktasında $\Delta(\alpha) = 0$. Bu takdirde $G(\alpha, w) = 0$ denkleminin, bazıları katlı olmak üzere, tam m kökü vardır. Bu köklerin herbiri, α noktasında sürekli olduğundan, o noktanın etrafındaki Laurent açılımlarında negatif kuvvetler olamaz. Yani (9.2.2.1) açılımında negatif kuvvetler mevcut değildir.

(ii) $a_m(\alpha) = 0$. Farzedelim ki α, q uncu mertebeden bir köktür. Bu takdirde,

$$a_m(z) = (z-\alpha)^q g_m(z), \; g_m(\alpha) \neq 0.$$

Şimdi,

$$(z-\alpha)^{q(m-1)} G(z,w)$$

ifadesini teşkil edelim, ve

$$(z-\alpha)^q w = v$$

vazedelim.

$$(z-\alpha)^{q(m-1)} G(z,w) = B(z,v) = a_0(z)(z-\alpha)^{q(m-1)} + a_1(z)(z-\alpha)^{q(m-2)} v + \ldots + a_{m-2}(z)(z-\alpha)^q v^{m-2} + a_{m-1}(z) v^{m-1} + g_m(z) v^m.$$

Veya,

$$B(z,v) = g_0(z) + g_1(z)v + \ldots + g_{m-1}(z)v^{m-1} + g_m(z)v^m,$$

g ler polinom olmak üzere yazılabilir.

$B(z,v) = 0$ cebirsel denkleminin tam m kökü vardır, ve bu kökler α da süreklidirler. Birinci halde olduğu gibi, bu köklerin, α etrafındaki Laurent açılımlarında negatif kuvvetler olamaz. Bu köklerin herhangibirine $v = v(z)$ dersek,

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-\alpha)^{n/p} = d_0 + d_1(z-\alpha)^{1/p} + d_2(z-\alpha)^{2/p} + \ldots .$$

Halbuki, $w = (z-\alpha)^{-q} v$ olduğundan,

$$w(z) = \frac{d_0}{(z-\alpha)^q} + \frac{d_1}{(z-\alpha)^{q-1/p}} + \ldots + d_{pq} + d_{pq+1}(z-\alpha)^{1/p} + \ldots .$$

Görülüyor ki, $a_m(\alpha) = 0$ ise, (9.2.2.1) açılımındaki negatif kuvvetlerin sayısı en fazla pq dur.

$z = \infty$ daki durum aynı şekilde tetkik edilir. $z-\alpha$ yerine $1/z$ koymaktan ibarettir. Yani

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \left(\frac{1}{z}\right)^{n/p}, \; 1 \leq p \leq m.$$

Nihayet gösterelim ki

Teorem 9.2.2.2. Herhangibir $F_\mu(z)$ fonksiyonunun herhangibir $F_\nu(z)$ fonksiyonuna, $\mu \neq \nu$ devamı mümkündür.

İspat. Bunun için $F_1(z)$ in herhangibir F_ν ye devamı mümkün olduğunu göstermek kâfidir. Gerçekten, F_1 in F_μ ye ve F_ν ye devamı mümkün ise, bu takdirde F_ν nün F_1 re devamı mümkündür ve dolayısıyla F_ν nün F_μ ye devamı mümkündür. Şimdi, aksini kabul ederek, farzedelim ki, F_1 in F_2, F_3, $\ldots$, F_k, $k<m$, fonksiyonlarına devamı mümkün olup, F_k, $F_{k+1}, \ldots$, F_m fonksiyonlarına devamı mümkün değildir. Bu demektir ki, noktalanmış düzlemde, başka bir deyimle, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ noktaları kaldırılmış düzlemde, $F_1, F_2, \ldots, F_k$ fonksiyonları, kritik noktaların etrafında dönüldüğü takdirde, aralarında değişir, fakat hiçbir zaman, $F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_m$ fonksiyonlarına dönüşmez.

$F_1, F_2, \ldots, F_k$ fonksiyonlarının herhangibir elemanter

$$S(F_1, F_2, \ldots, F_k) = \Psi(z)$$

simetrik fonksiyonunu yazalım. $\Psi(z)$, noktalanmış düzlemde tek değerli analitiktir. Gerçekten, z, bir kritik nokta etrafında döndüğü takdirde, F ler aralarında değişir, S, simetrik olduğundan $\Psi(z)$ değişmez. Dolayısıyla $\Psi(z)$, herhangibir kritik veya ∞ noktası etrafında bir Laurent serisine açılabilir. Bu Laurent serisinde, en fazla sonlu sayıda negatif kuvvetler vardır. Gerçekten teorem 9.2.2.1. deki mülahazalar gözönünde tutulursa, süreklilikten dolayı istenilen sonuç hasıl olur.

Netice olarak, $\Psi(z)$ nin genişletilmiş düzlemde kutuptan başka singüler noktası yoktur, yani $\Psi(z)$ rasyonel bir fonksiyondur.

Özel olarak aşağıdaki denklemi teşkil edelim.

$$(w-F_1)(w-F_2)\ldots(w-F_k) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) w + \ldots + \varphi_k(z) w^k = 0$$

φ-katsayıları elemanter simetrik fonksiyonlardır ve dolayısıyla rasyonel fonksiyonlardır. Bu denklem ortak payda ile çarpılırsa, katsayıları polinomlar olan

$$g(z,w) = \gamma_0(z) + \gamma_1(z) w + \ldots + \gamma_k(z) w^k = 0$$

cebirsel denklemi elde edilir, ve $F_1, F_2, \ldots, F_k$ bu denklemin kökleridir. Halbuki, bu kökler, w ye nazaran derecesi m olan indirgenemez bir cebirsel denklemin kökleri idi. Burada ise $k<m$ dır. Bu tezat teoremi ispat eder.

3. Riemann Yüzeyinin İnşası

9.3.1. **Cebirsel Fonksiyonların Riemann Yüzeyleri.** Kesitlerden, birtanesini, meselâ L_i yi gözönüne alalım. $F_1, F_2, \ldots, F_m$ fonksiyonları, L_i üzerinden analitik temdit edilirse, bu fonksiyonlar aralarında değişirler. Meselâ, F_ν ye ait (f_ν, K_0) fonksiyon elemanı, α_i etrafında C çemberi boyunca analitik devam edilirse, netice (f_μ, K_0) fonksiyon elemanı F_μ fonksiyonunu meydana getirir. Dolayısıyla, α_i etrafında, $F_1, F_2, \ldots, F_m$ fonksiyonları bir permütasyon teşkil ederler. Bu permütasyon sonlu sayıda devirlerin çarpımı olarak yazılabilir. Farzedelim ki, $F_1, F_2, \ldots, F_p$, bir devir teşkil ediyorlar. L boyunca kesilmiş kompleks düzlemin m sayıda kopyelerini düşünerek bunların, kesitler intibak ettirilerek, üst üste getirildiklerini düşünelim. Bu kopyeleri sıra ile $D_1, D_2, \ldots, D_m$ ile gösterelim. $F_1, F_2, \ldots, F_m$ fonksiyonları, sıra ile $D_1, D_2, \ldots, D_m$ bölgelerinde tarifli olsunlar. F_1, α_i etrafında analitik devam edilirse, F_2 ye dönüşür. Bu takdirde D_1 e ait $L_i^{(1)}$ kesitinin bir kenarını, D_2 ye ait $L_i^{(2)}$ nin karşı kenarına birleştirelim. α_i etrafında dönmeye devam edelim. Devir kapanırken, D_p ye ait $L_i^{(p)}$ kesitinin serbest kalan kenarını D_1 re ait $L_i^{(2)}$ in serbest kalan kenarına birleştirelim. Aynı işlemi α_i etrafındaki bütün devirlere tatbik edersek, neticede L_i sınırı tamamen yok edilmiş olur. Diğer kesitler, aynı şekilde yok edilirse, $w=w(z)$ cebirsel fonksiyonunun, üzerinde tarif olduğu *tam* bölge elde edilmiş olur. Bu tam bölgeye *Riemann yüzeyi* denir. Cebirsel fonksiyon, bu Riemann yüzeyi üzerinde tekdeğerli analitiktir. $D_1, D_2, \ldots, D_m$ bölgelerine, Riemann yüzeyinin *yaprakları* denir, ve dolayısıyla, Riemann yüzeyi m-yapraklı bir Riemann yüzeyidir. Son olarak, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ kritik noktalarına belli değerler tekabül ettirerek, bu noktalar da Riemann yüzeyine katılabilir, şöyle ki, bir devire tekabül eden p sayıda yaprakların etrafında yer değiştirdikleri nokta birtek nokta olarak sayılır, ve o noktaya tekabül eden değer, § 9.2.2 deki açılımlara göre c_0 veya ∞ olur.

Genişletilmiş z-kompleks düzlemi yerine, Riemann küresi gözönüne alınırsa, görülür ki, inşa edilen Riemann yüzeyi, m-yapraklı kapalı bir Riemann küresidir.

Yaprakların, etrafında yer değiştirdikleri noktalara, *dallanma* noktaları denir. Dallanma noktalarının, z-kompleks düzlemindeki *iz düşümleri*, kritik noktalardır.

Dallanma noktalarına bağlı yaprakların üzerinde tarifli fonksiyonlara, cebirsel fonksiyonun *dalları* denir.

Bir dallanma noktasının belirttiği yaprak sayısı p ise dallanma noktasının *mertebesi* $p-1$ dir.

BÖLÜM X

TEMEL KAVRAMLAR

1. Grup Kavramı

10.1.1.. **Grup aksiyomları.** Grupların tetkiki herşeyden önce *asosyatiflik* kavramına bağlıdır.

TARİF. 1. Grup diye, elemanları $a,b,c, \ldots$ ile gösterelen bir $G = G(a,b,c,\ldots)$ *cümlesi* ile, *çapma* denilen ikili bir *operasyon* dan müteşekkil bir *matematik sisteme* denir.

Bu sistem aşağıdaki şartları sağlamakla mükelleftir.

G0. *Kapalılık şartı.* $a,b \varepsilon G$ elemanlarının ab çarpımı yine G ye ait bir c elemanıdır.

G1. *Asosyatiflik şartı.* $a,b,c \varepsilon G$ herhangi üç eleman ise,

$$a(bc) = (ab)c.$$

G2. *Birim elemanının varlığı.* G de 1 ile gösterilen bir eleman vardır öyleki, her $a \varepsilon G$ için

$$1\,a = a\ .$$

G3. *Ters elemanın varlığı.* Her $a \varepsilon G$ için, bir $a^{-1} \varepsilon G$ elemanı vardır, öyleki,

$$a^{-1}\,a = 1\ .$$

Problem. Gösteriniz ki $a1 = a$, ve $aa^{-1} = 1$. Yani G2 ve G3 şartlarında, a elemanı 1 ve a^{-1} elemanlarıyla yer değiştirebilir. Bu hal umumi değildir.

Gösteriniz ki 1 birim elemanı ve herbir $a \varepsilon G$ elemanına bir tek ters $a^{-1} \varepsilon G$ elemanı tekabül eder.

Burada bir grubun klasik tarifini verdik. Modern tarifte, Grubun esas *strüktürünü* teşkil eden ve *asosyatiflik* kavramına dayanan, *yarı grup* tarif edilir.

TARİF 2. bir S *yarı grubu*, bir cümle ve asosyatif *ikili* bir operasyondan müteşekkildir. Yani, belli bir sırada verilen, S nin herbir (a,b) çiftine, a ve b nin çarpımı denilen ve ab şeklinde yazılan, S nin tek bir elemanı tekabül eder.

Bu *çarpım*, S nin herbir (a,b,c) üçlüsü için

$$a(bc) = (ab)c$$

asosyatiflik kanununu veya şartını sağlar.

Yarı grubun tarifi gözönünde tutulursa, grbun tarifi aşağıdaki şekli alır.

TARİF 3. Bir *grup*, G2 ve G3 şartlarını sağlıyan bir *yarı gruptur*.

Herbir grup şu basit hassaları haizdir:

(i) sağ kısaltma: $xb = yb$ ise $x = y$.

(ii) sol kısaltma: $bx = by$ ise $x = y$.

(iii) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(iv) $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$.

Bunların ispatını okuyucuya bırakıyoruz.

Misaller: Âdi çarpma operasyonu altında, sıfırdan farklı, bütün kompleks sayılar, bütün reel sayılar, ve bütün rasyonel sayılar birer grup teşkil ederler.

Tam sayılar ve pozitif tam sayılar, çarpmaya nazaran bir yarı grup teşkil ederler. Fakat asla grup değildirler.

Âdi toplam operasyonu altında, kompleks sayılar cümlesi, reel sayılar cümlesi, rasyonel sayılar cümlesi, tam sayılar cümlesi, ve çift sayılar cümlesi birer grup teşkil ederler.

Şayet $m \geq 0$ reel bir sayı ise, m den büyük tam sayıların cümlesi, rasyonel sayıların cümlesi, ve reel sayıların cümlesi birer yarı grup teşkil ederler, asla grup değildirler.

TARİF 4. G grubuna ait elemanların cümlesi, sonlu veya sonsuz olabilir. G cümlesi sonlu ise G grubuna *sonlu grup* denir.

Sonlu bir grupta, elemanların sayısına *grubun mertebesi* denir.

G cümlesi sonsuz ise, G ye *sonsuz grup* denir.

TARİF. 5. G0,...,G3 aksiyomlarından başka, G grubu ayrıca aşağıdaki şartı sağlıyorsa,

G4. *Komütatiflik* (yer değiştirebilme) *şartı*: Herhangi $a,b \varepsilon G$, iki eleman için

$$ab = ba,$$

bu gruba *komütatif* veya *Abel* grubu veya *Abelyen* grup denir.

G komütatif ise, ab yerine umumiyetle $a+b$ yazılır, ve grup operasyonuna çarpma yerine toplama denir.

Grup operasyonu toplama olan gruplarda, 1 birim elemanı, 0 ile gösterilir, ve sıfır elemanı denir. a^{-1} ters elemanına ise a nın *negatifi* denir ve $-a$ ile gösterilir.

TARİF 6. G grubunun bir altcümlesi, G deki çarpma operasyonuna nazaran bir grup teşkil ediyorsa, bu altcümleye, G nin bir *altgrubu* denir.

G nin bir altgrubu *hakikidir* veya *hastır*, şayet G değilse. 1 elemanından ibaret altgrup *aşikar* altgruptur. Aşikâr altgrup ta 1 ile gösterilir.

1 den farklı bir altgrup, aşikâr olmıyan bir altgruptur.

Bir altgrup *maksimal*dir şayet *hakiki* ise, ve hiçbir *hakiki altgrubun* hakiki bir altgrubu değil ise.

Misal. Toplam operasyonu altında, çift sayıların cümlesi, tam sayılar grubunun, maksimal bir altgrubudur.

Aşağıda teorem halinde ifade edilen iki kriter çok önemlidir. İspatları okuyucuya bırakılmıştır (mamafih, bu kriterlerden birinin ispatı § 12.3.2 de hatırlatılmıştır).

Teorem 10.1.1.1. $H \subset G$, G nin boş olmıyan bir altücümlesi olsun. H, G nin bir altgrubudur, yalnız ve yalnız, (i) a, $b \varepsilon H$ ise $ab \varepsilon H$, (ii) $a \varepsilon H$ ise $a^{-1} \varepsilon H$.

Teorem 10.1.1.2. $H \subset G$, G nin boş olmıyan bir altcümlesi olsun. H, G nin bir altgrubudur, yalnız ve yalnız, a, $b \varepsilon H$ ise $ab^{-1} \varepsilon H$.

TARİF 7. $a \varepsilon G$, ve $m > 0$ bir tam olsun. a nın m inci kuvveti, a^m yazılır,

$$a^m = a.a.\cdots.a.$$

m sayıda a ların çarpımı olarak tarif edilir.

a nın negatif kuvvetleri, a^{-m} yazılır, $(a^{-1})^m$ olarak tarif edilir. $m = 0$ ise $a^0 = 1$ vazedilir.

Cebirin bilinen kaideleri cari olduğu görülür. Yani

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}; \; m, n \text{ tam.}$$

Toplam notasyonunda a^m yerine ma yazılır.

TARİF 8. Şayet bir $m > 0$ tam sayısı için $a^m = 1$ ise, a elemanına *sonlu mertebeden*dir, aksi halde a, sonsuz veya sıfır mertebedendir, veya a *serbest*tir denir.

Şayet a, sonlu mertebeden ise, a nın mertebesi, en küçük r tabii sayısıdır, öyleki $a^r = 1$.

Gösterilebilir ki, $a^n = 1$ ise, r sayısı n yi böler. Gerçekten $n = pr + q$ yazılabilir. Burada, n sayısı, r ile bölündüğü takdirde q kalandır, $0 \leq q < r$. O halde,

$$1 = a^n = a^{pr+q} = (a^r)^p a^q = a^q.$$

Fakat, $1 = a^q \Rightarrow q = 0$. Yani r, n yi böler.

10.1.2. **Normal altgrup.** Grup teorisinde *normal* altgruplar, veya diğer bir ismiyle *invarient* altgruplar son derece önemlidirler.

TARİF 9. Bir G grubunun bir N altgrubuna, G de normal veya invarienttir denir, veya N, G nin normal veya invarient altgrubudur denir, yalnız ve yalnız, bütün $a \varepsilon G$ lar için

$$aN = Na$$

ise. Burada, aN, $a \varepsilon G$ sabit, ve $x \varepsilon N$ değişken olmak üzere, bütün ax elemanlarının cümlesidir. Tarif olarak, G nin aN gibi altcümlesine, N nin bir (sol) *yan cümlesi* denir. Na ya ise (sağ) yan cümle denir.

Şu halde N, G nin bir normal altgrubudur, yalnız ve yalnız, N nin (sol) yan cümlesi, N nin (sağ) yan cümlesine eşit ise.

G ve 1, G nin yegâne normal alt grupları ise, G *basit*tir denir.

10.1.3. **Bölüm grup.** a, $b \varepsilon G$ herhangi iki eleman olsun. Bu iki eleman kongruent modülo N dir denir ve

$$a \equiv b \pmod{N}$$

yazılır, yalnız ve yalnız

$$ab^{-1} \varepsilon N$$

ise. Bu bağıntının bir eşdeğerlik bağıntısı olduğu kolaylıkla tahkik edilebilir. Dolayısıyla, bu eşdeğerlik bağıntısı G yi ayrık sınıflara parçalar.

Bu sınıfların cümlesi, G/N ile gösterilir, ve *G modülo N* okunur. G/N nin herbir elemanına *kalan sınıf mod N* denir. Bu sınıfları $[a]$, $[b]$,... ile gösterelim. Burada, $a, b, \ldots \varepsilon G$ elemanları, $[a]$, $[b]$,... sınıflarını temsil eden elemanlardır.

Şimdi $G/N = \{[a], [b], \ldots\}$ cümlesinde bir *çarpma* operasyonu tarif edelim, şöyleki

$$[a].[b] = [ab].$$

Ancak, bu operasyonun tek anlam taşıdığını veya *iyi tarifli* olduğunu ayrıca göstermek gerekir. Filhakika, a', b', $[a]$, $[b]$ sınıflarını temsil eden başka iki eleman olsunlar. Bu taktirde,

$$[a'].[b'] = [a'b'].$$

Göstermeliyiz ki

$$ab \equiv a'b' \pmod{N}. \qquad (10.1.3.1)$$

Bunun için, $x \varepsilon G$ herhangibir eleman ise, göstermeliyiz ki

$$a \equiv b \pmod{N} \Rightarrow ax \equiv bx \pmod{N},\ xa \equiv xb \pmod{N};\ a,\ b \varepsilon G.$$

Gerçekten,

$$a \equiv b \pmod{N} \Rightarrow ab^{-1} \varepsilon N \Rightarrow axx^{-1}b^{-1} \varepsilon N \Rightarrow ax\ (bx)^{-1} \varepsilon N \Rightarrow$$
$$ax \equiv bx \pmod{N}.$$

Diğer taraftan, normal grubun tarifinden dolayı, bütün $x \varepsilon G$ ler için

$$xN = Nx \Rightarrow N = x^{-1}Nx = xNx^{-1}.$$

Dolayısıyla

$$ab^{-1} \varepsilon N \Rightarrow xab^{-1}x^{-1} \varepsilon N \Rightarrow xa \equiv xb \pmod{N}.$$

Şimdi (10.1.3.1) bağıntısını ispat edebiliriz. Gerçekten

$$a \equiv a',\ b \equiv b' \pmod{N} \Rightarrow$$
$$ab \equiv a'b,\ a'b \equiv a'b' \pmod{N},$$

ve eşdeğerlik bağıntısının *tranzitiflik* hassasından dolayı,

$$ab \equiv a'b' \pmod{N}.$$

Diğer taraftan $[a]$ sınıfı Na yan cümlesinden başka birşey değildir. Gerçekten, $x \varepsilon [a]$ herhangibir eleman ise,

$$xa^{-1} \varepsilon N.$$

Bu demektir ki N de bir y elemanı vardır öyleki,

$$xa^{-1} = y.$$

Dolayısıyla, $x = ya$, ve $x \varepsilon Na$, yani

$$[a] \subset Na.$$

Karşıt olarak $y \varepsilon Na$ herhangibir eleman olsun,

$$y \varepsilon Na \Rightarrow \exists x \varepsilon N \ni y = xa \Rightarrow ya^{-1} = x \Rightarrow ya^{-1} \varepsilon N \Rightarrow y \varepsilon [a].$$

Yani

$$Na \subset [a].$$

O halde

$$[a] = Na.$$

Neticede göstermiş oluyoruz ki, G/N *nin elemanları* N *nin yancümleleridir*, ve

$$aN.bN = abN.$$

Diğer taraftan, N, G/N nin birim elemanıdır, ve $a^{-1}N$, aN nin ters elemanıdır, zira

$$a^{-1}N\ aN = a^{-1}\ aN = N.$$

Binaenaleyh,

Teorem 10.1.3.1. G/N nin elemanları, yani yan cümleleri . operasyonuna nazaran bir grup teşkil ederler.

10.1.4. **İzomorfizm.** Bu kavram şu noktai nazardan önemlidir; iki *mücerret* grup verildiği taktirde, *izomorfizm* altında değişmiyen hassalara nazaran bu iki grup özdeş sayılırlar.

TARİF 10. G den G′ grubuna bir φ tasvirine *izomorfizm* denir, şayet

(i) φ birebir, ve

(ii) grup operasyonu muhafaza edilmiş ise. Yani x, $y \varepsilon G$ herhangi iki eleman için, $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$.

Böyle bir izomorfizm var ise, daha doğrusu, bir G grubundan diğer bir G′ grubuna bir φ izomorfizmi varsa, $G \cong G'$ yazıyor ve diyoruz ki, G ve G′ izomorfturlar.

TARİF 11. Bir G grubunun *kendi üzerine* izomorf tasvirlerine *otomorfizm* diyoruz.

G nin bütün otomorfizmleri bir grup teşkil ederler.

Bu fikir, yani otomorfizmler vasıtasıyla grupların inşası, *umumidir*.

Gerçekten, $S=S(a,b,c,\ldots)$ keyfi bir cümle olsun. Diğer taraftan, S yi kendi üzerine dönüştüren bütün birebir φ tasvirlerinin cümlesine G(S) diyelim.

S den S ye fonksiyonlar için, *eşitlik* ve $\circ$ çarpımı, yani mürekkep fonksiyonlar, bilindiği gibi tarif edilirler. Meselâ φ_1, φ_2 iki fonksiyon ve $x \varepsilon S$ ise

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_2 (\varphi_1 x)^{(1)}$$

Teorem 10.1.4.1. G(S), $\circ$ çarpımı ile birlikte bir grup teşkil ederler.

İspat. G0 aşikârdır. G1 i ispat edelim. Gerçekten herbir $a \varepsilon S$ için,

$$(\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3))a = \varphi_1 \circ ((\varphi_2 \circ \varphi_3)a) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3 a))$$

ve

$$((\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3)a = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(\varphi_3 a) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3 a)).$$

Yani, her a için

$$(\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3))a = ((\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3)a,$$

ve *eşitliğin* tarifinden dolayı

$$\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3.$$

Diğer taraftan, S nin her elemanını sabit bırakan ve

$$1a = a, \ \forall a \varepsilon S,$$

şeklinde tarif edilen G(S) de 1 birim elemanı mevcuttur. Nihayet, φ tasvirleri birebir olduklarından φ^{-1} ters tasvirleri mevcuttur.

Umumiyetle, G(S) nin bir altgrubuna, *S üzerinde dönüşümlerin grubu* denir. Bu tip bir grup için *Cayley*'in, aşağıda ifade edilen teoremi caridir.

(1) $\varphi_1 x = \varphi_1(x)$ anlamını taşır.

Teorem 10.1.4.2. Bir G grubu verildiğinegöre, G ye izomorf bir $\mathcal{G}$ dönüşüm grubu vardır.

İspat. Burada dönüşümler $G = G(a,b,c\ldots)$ üzerinde tarif edilmiştir, yani $G(a,b,c,\ldots)$, $S(a,b,c,\ldots)$ rolündedir. φ dönüşümlerini şu şekilde tarif ediyoruz. Herbir $a \varepsilon G$ elemanına

$$\varphi_a x = ax$$

bağıntısını sağlıyan φ_a dönüşümünü karşılık tutuyoruz. Burada x, bütün G yi tarıyor. φ_a dönüşümü birebirdir, zira x, $y \varepsilon G$ ise

$$ax = ay \Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}ay \Rightarrow x = y \qquad (G2,\ G3).$$

Şimdi, a, G yi taradığı taktirde, φ_a ların $\mathcal{G}$ cümlesinin bir grup olduğunu gösterebilmemiz için grup aksiyonmlarını sağlamış olduğunu göstermemiz kâfidir.

G0. $(\varphi_a \circ \varphi_b)x = \varphi_a(\varphi_b x) = \varphi_a(bx) = abx = \varphi_{ab} x \varepsilon \mathcal{G}$.

G1. $(\varphi_a \circ (\varphi_b \circ \varphi_c))x = \varphi_a \circ (\varphi_b \circ \varphi_c)x = \varphi_a bcx = abcx$

$[(\varphi_a \circ \varphi_b) \circ \varphi_c]x = (\varphi_a \circ \varphi_b)\varphi_c x = (\varphi_a \circ \varphi_b)cx = abcx.$

G2. G de e birim elemanının varlığı, $\mathcal{G}$ de bir özdeş dönüşümün varlığını intac eder. Gerçekten,

$$\varphi_e x = ex = x, \ \forall x \varepsilon G.$$

G3. G de a^{-1} elemanının varlığı, $\mathcal{G}$ de φ_a nın bir ters elemanının varlığını intac eder, zira.

$$(\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}})x = aa^{-1}x = ex = x = \varphi_e x, \quad \forall x \varepsilon G.$$

Nihayet $a \to \varphi_a$ tekabülü altında, G ve $\mathcal{G}$ izomorfturlar. Gerçekten, birkere tekabül birebirdir, çünki, $\varphi_a = \varphi_b \Rightarrow ae = be \Rightarrow a = b$. Üstelik, çarpım altında, tekabül muhafaza edilmektedir, zira, $\varphi_b \circ \varphi_a = \varphi_{ab}$.

Şimdi, bütün grupları düşünelim. İki grup *eşittir* diyelim yalnız ve yalnız bu iki grup aralarında izomorf iseler. Bu takdirde bütün grupların $\mathcal{C}$ sınıfı üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı tesis edilmiş olup, $\mathcal{C}$ ayrık alt-sınıflara ayrılmış bulunmaktadır, öyle ki, herbir altsınıfın elemanları aralarında izomorfturlar. Cayley teoremine göre, herbir altsınıf bir $\mathcal{G}$ dönüşüm grubu ile temsil edilebilir.

Üstteki mütalaalardan, $\mathcal{G}$, G nin φ_a *otomorfizmleri*nin bir grubu olduğu anlaşılmaktadır. G nin otomorfizmleri ile ilgili diğer bir misal da şöyledir.

$a \varepsilon G$ sabit bir eleman olsun. G nin bir f_a otomorfizmini şu şekilde de elde edebiliriz.

$$f_a x = axa^{-1}, \ \forall x \varepsilon G.$$

f_a otomorfizmine *iç otomorfizm* denir.

Yine gösterilebilir ki, $\{f_a\}$ iç otomorfizmlerinin tümü bir grup teşkil eder ve bu grup G ye izomorftur.

10.1.5. **Homomorfizm.** Bu kavram, izomorfizmden daha *zayıf* olmakla beraber daha az önemli değildir.

TARİF 12. Bir G grubundan diğer bir gruba, bir Ψ tasvirine bir *homomorfizm* denir şayet $x, y \varepsilon G$ keyfi elemanlar ise, $\Psi(xy) = \Psi(x)\,\Psi(y)$. Bu halde, $\Psi(G)$, G nin *homomorf resmi*dir denir.

Şayet, Ψ, birebir ise, bu taktirde homomorfizm bir izomorfizm olur.[1]

Ψ: G $\to$ H, G grubundan H grubuna bir homomomorfizm[1] olsun. G nin birim elemanını 1, H nın ise e ile gösterelim. Bu taktirde

$$\Psi\,(1) = e,$$

yani G nin 1 birim elemanı, H nın e birim elemanına dönüşür, ve

$$\Psi(x^{-1}) = \Psi(x)^{-1},\ \forall x \varepsilon G.$$

Gerçekten,

$$\Psi(x)\Psi(1) = \Psi(x1) = \Psi(x).$$

Bu da gösteriyor ki, $\Psi(1) = e$. Diğer taraftan,

$$\Psi(x)\,\Psi(x^{-1}) = \Psi(xx^{-1}) = \Psi(1) = e,$$

yani $\Psi(x^{-1}) = \Psi(x)^{-1}$.

TARİF 13. Bir Ψ: G $\to$ H homomorfizminde, H nın e birim elemanının üzerine tasvir olunan G nin elemanlarının tümüne, Ψ *homorfizminin çekirdeği* denir.

Aşağıdaki teorem çok önemlidir.

Teorem 10.1.5.1. Ψ: G $\to$ G*, G grubundan G* grubu üzerine bir homomorfizm, ve N, Ψ nin çekirdeği olsun. Bu taktirde N, G nin normal bir altgrubudur ve G* $\cong$ G/N.

İspat. N, G nin normal bir alt grubudur. Birkere, N, G nin bir altgrubudur. Bunun için kriterlerden bir tanesini kullanarak, meselâ göstermeliyiz ki, $x, y \varepsilon$N ise $xy \varepsilon$N ve $x \varepsilon$N ise $x^{-1} \varepsilon$N. Gerçekten $x, y \varepsilon$G olsun. N, Ψ nin çekirdeği olduğundan $\Psi(x) = e^*$, $\Psi(y) = e^*$, burada e^*, G* ın birim elemanıdır. O halde

$$\Psi(xy) = \Psi(x)\,\Psi(y) = e^*e^* = e^*,$$

ve dolayısıyla $xy \varepsilon$N. Diğer taraftan, $x \varepsilon$N ise $\Psi(x) = e^*$, ve $\Psi(x^{-1}) = \Psi(x)^{-1} = e^{*-1} = e^*$, ve dolayısıyla $x^{-1} \varepsilon$N.

Şimdi gösterelim ki N, normaldir. Bunun için göstermeliyiz ki $a \varepsilon$G sabit bir eleman, ve $x \varepsilon$N herhangibir eleman ise $a^{-1}xa \varepsilon$N. Gerçekten, $\Psi(a^{-1}xa) = \Psi\,(a^{-1})\,\Psi\,(x)\,\Psi(a) = \Psi(a)^{-1}\,e^*\,\Psi\,(a) = e^*$. Yani $a^{-1}xa \varepsilon$N.

(1) Ψ "*içine*" bir tasvir ise *monomorfizmdir.*

$G^* \cong G/N$. $a^* \varepsilon G^*$ herhangibir eleman olsun. $\Psi(a) = a^*$ denklemini sağlıyan $a \varepsilon$G elemanlarının bütününe A diyelim. $a, a' \varepsilon$A herhangi iki eleman iseler,

$$\Psi(a'\,a^{-1}) = \Psi\,(a')\,\Psi(a)^{-1} = a^*\,a^{*-1} = e^*,$$

yani $a'a^{-1} \varepsilon$N, veya $a' \equiv a$ (mod N), yani a ve a', N nin aynı yan cümlesine aittirler. Karşıt olarak, farzedelim ki, x, a yı ihtiva eden aynı yan cümlenin herhangibir elemanıdır, yani $xa^{-1} \varepsilon$N. Bu takdirde,

$$e^* = \Psi(xa^{-1}) = \Psi(x)\,\Psi\,(a)^{-1} = \Psi\,(x)\,a^{*-1}.$$

Dolayısıyla, $\Psi(x) = a^*$, yani $x \varepsilon$A, ve A $= a$N.

Binaenaleyh, G nin herbir A yan cümlesi, Ψ tarafından G* ın bir a^* elemanı üzerine tasvir edilmektedir, ve G* ın bu elemanı A yı belirtir. Fakat herbir A yan cümlesi G/N nin bir elemanıdır. Görülüyor ki Ψ: G$\to$G*, bir birebir f tasvirini istintac eder öyleki $f(A) = a^*$, AεG/N, $a^* \varepsilon G^*$.

En son gösterelim ki f: G/H $\to$ G* bir izomorfizmdir. Bunun için A, BεG/N olsun. Farzedelim ki $a \varepsilon$A, $b \varepsilon$B, ve $\Psi(a) = a^*$, $\Psi(b) = b^*$. Bu taktirde $f(A) = a^*$, $f(B) = b^*$. Üstelik biliyoruz ki $ab \varepsilon$AB. O halde.

$$f(AB) = \Psi(ab) = \Psi(a)\,\Psi(b) = a^*b^* = f(A)f(B).$$

Şayet, Ψ: G $\to$ G* nin çekirdeği birim elemandan ibaret ise, yani, N$=e$ ise, bu taktirde Ψ bir izomorfizmdir.

Teorem 10.1.5.2. Farzedelim ki Ψ homomorfizmi, G grubunu, G* grubunun bir H* altcümlesine tasvir ediyor. Bu taktirde H*, G* ın bir altgrubudur.

İspat. Farzedelim ki $x^*, y^* \varepsilon H^*$. Bu taktirde $x^* = \Psi(x)$, $y^* = \Psi\,(y)$, ve $x^*\,y^{*-1} = \Psi\,(x)\,\Psi\,(y)^{-1} = \Psi(x)\,\Psi\,(y^{-1}) = \Psi\,(xy^{-1})$. Ψ, çarpım operasyonunu muhafaza ettiğinden $x^*y^{*-1} \varepsilon H^*$. O halde H*, G* ın bir altgrubudur.

Teorem 10.1.5.3. Ψ, G grubundan G* grubu *üzerine* bir *homomorfizm* olsun. H, G nin bir altgrubu ise, Ψ(H) da G* ın bir altgrubudur. H normal ise, Ψ(H) da G* ın normal bir alt grubudur.

İspat. Teoremin birinci kısmı, teorem 10.1.5.2 nin direkt bir neticesidir. İkinci kısma gelince, farzedelim ki H normaldir. $x^* \varepsilon G^*$ ise, $x \varepsilon$G vardır öyleki $\Psi(x) = x^*$. Diğer taraftan $x^{-1}\,Hx = H$. Şu halde

$$\Psi(H) = \Psi(x^{-1}\,Hx) = \Psi(x)^{-1}\,\Psi\,(H)\,\Psi(x) = x^{*-1}\,\Psi(H)\,x^*\ .$$

Dolayısıyla, Ψ(H), G* ın normal bir altgrubudur.

Bir başka deyimle, homomorfizm grup hassalarını ve normalliği muhafaza eder.

Yine farzedelim ki Ψ, G grubundan G* grubu üzerine bir homomorfizmdir. Ψ^{-1} (H*), Ψ altında, H* $\subset$ G* üzerine tasvir olunan G nin bütün

elemanlarını göstersin. Bu takdirde, H^* bir altgrup ise, $\Psi^{-1}(H^*) \subset G$ de bir altgruptur; H^* normal ise, $\Psi^{-1}(H^*)$ da normaldir.

Bir de, Ψ, G grubundan G^* grubu üzerine bir homomorfizm, ve Ψ^*, G^* dan bir G^{**} grubu üzerine bir homomorfizm ise, bu taktirde $\varphi = \Psi^* o \Psi$, G den G^{**} üzerine bir homomorfizmdir.

Gördük ki, bir grubun bir normal altgrubu, bu grubu, yan cümle denilen ayrık altsınıflara böler. Bu hassa, sadece normal altgruplara ait bir hassa değildir. Herhangibir altgrupla da böyle bir bölmeyi temin etmek mümkündür.

Farzedelim ki, G bir grup ve H onun bir altgrubudur. Üstelik farzedelim ki, G; aH, $a \varepsilon$G, (sol) yan cümlelerine bölünmüştür. Dikkat edilirse, H nın herbir (sol) yan cümlesinin eleman sayısı, H nın eleman sayısına eşittir Gerçekten, H $\rightarrow$ aH tasviri *birebirdir*. Zira,

$$ah_1 = ah_2 \Rightarrow a^{-1} ah_1 = a^{-1} ah_2 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Bu ise bizi aşağıdaki önemli *Lagrange* teoremine götürür.

Teorem 10.1.5.4. (Lagrange). G, mertebesi n olan sonlu bir grup, ve H, G nin herhangibir altgrubu olsun. Bu takdirde, H nın mertebesi, G nin mertebesini böler.

İspat. m, H nın mertebesi olsun. Gördük ki, G; herbiri m eleman ihtiva eden, H nın (sol) yan cümlelerine bölünebilir. Mademki G nin herbir elemanı bir (sol) yan cümlede bulunmaktadır, bu yan cümlelerin sayısı r ise, $rm = n$. Dolayısıyla $m \mid n$ (m,n yi böler demektir).

H nın, (sağ) yan cümlelerinin sayısı aynıdır. Gerçekten bu sayı s ise, $n = ms$. Dolayısıyla $r = s$. Bu ortak sayıya, H altgrubunun indeksi denir.

TARİF 14. Bir $H \subset G$ altgrubunun G deki indeksi G yi H ya nazaran bölen, (sağ veya sol) yan cümlelerin sayısıdır.

Sembol olarak indeks, [G:H] ile gösterilir.

Şayet $r = [G: H]$ ise, H, $Hx_2, \ldots, Hx_r$ yan cümlelerinin, G yi tükettiğini göstermek için

$$G = H + Hx_2 + \ldots + Hx_r, \; x_2, \ldots, x_r \varepsilon G,$$

yazılır.

Herbir grup, altgruplarından biri olarak, verilen bir elemanın bütün tam kuvvetlerinden müteşekkil cümleyi ihtiva eder.

TARİF 15. Elemanları, birinin kuvvetleri olan gruba, *devir* grubu denir.

Bir G devir grubunu, $G = (a)$, $a \varepsilon G$, ile göstereceğiz.

TARİF 16. *Sonsuz devir* gruplarına *serbest* gruplar denir.

Teorem 10.1.5.5. *Asal mertebeli* herbir G grubu, bir *devir* grubudur.

İspat. $1 \neq a \varepsilon G$ olsun. a nın bütün tam kuvvetleri G nin bir altgrubunu teşkil ederler. Bu altgrubun mertebesi, G nin n mertebesini böler. n asal olduğundan, $G = (a)$ dır.

Teorem 10.1.5.6. G, mertebesi n olan sonlu bir grup olsun. Bu takdirde herbir $a \varepsilon G$ için $a^n = 1$.

İspat. Herbir $a \varepsilon G$, m sonlu mertebeden bir devir altgrubu tevlid eder, yani $a^m = 1$. Lagrange teoreminden dolayı $m \mid n$, yani $n = mr$. Dolayısıyla,

$$a^n = a^{mr} = (a^m)^r = 1.$$

10.1.6. **Merkez.** G bir grup olsun. G de a, $b \varepsilon G$ elemanları *yer değiştirir* denir, şayet a ve b nin ab çarpımı, çarpanların sırasına tâbi değilse, yani, $ab = ba$.

TARİF 17. Bir $z \varepsilon G$ elemanına *merkezî*dir denir, şayet z, G nin bütün elemanlarıyla yer değiştiriyorsa. Yani herbir $x \varepsilon G$ için

$$zx = xz.$$

TARİF 18. G nin merkezî bütün z elemanlarının cümlesine G nin merkezi denir ve Z ile gösterilir.

Aşikâr olarak $1 \varepsilon Z$, zira $1\,x = x\,1$, $\forall x \varepsilon G$.

Hatta şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 10.1.6.1. G nin Z merkezi, G nin bir altgrubudur.

İspat. Yine kriterlerden birini kullanarak, z, $z' \varepsilon Z$ ise, gösterelim ki $zz' \varepsilon Z$ ve $z^{-1} \varepsilon Z$. x, G nin herhangibir elemanı olsun. Bu takdirde, $xzz' = zxz' = zz'x$ ve dolayısıyla $zz' \varepsilon Z$. Diğer taraftan, $xz = zx \Rightarrow (xz)^{-1} = (zx)^{-1} \Rightarrow z^{-1}x^{-1} = x^{-1}z^{-1}.x^{-1} = y$ vazedilirse $z^{-1}y = yz^{-1}$, x ve dolayısıyla y keyfi olduğundan $z^{-1} \varepsilon Z$.

Teorem 10.1.6.2. H, Z nin herhangibir altgrubu olsun. Bu takdirde H, G nin normal bir altgrubudur.

İspat. $h \varepsilon H$ olsun. Bu takdirde $h \varepsilon Z$. Z nin tarifinden dolayı, herbir $x \varepsilon G$ için $xh = hx$, yani $xH = Hx$, ve H, G de normaldir.

Özel olarak Z nin kendisi de G de normaldir.

TARİF 19. Z nin altgruplarına, merkezî normal altgruplar denir.

10.1.7. **Komütatör.** a, b iki elemanın G de yer değiştirdiği veya değiştirmediğine karar verebilmek için $ab(ba)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ çarpımı teşkil edilir. Şayet

$$aba^{-1}\ b^{-1} = 1$$

ise, $ab = ba$, ve a ile b yer değiştirir.

TARİF 20. $aba^{-1}\ b^{-1}$ tipindeki bir elemana *komütatör* denir, ve umumiyetle $[a,b]$ notasyonu ile gösterilir.

TARİF 21. G ye ait komütatörlerin bütün çarpımlarından müteşekkil cümleye, G nin *komütatör altgrubu* denir ve [G, G] ile gösterilir.

Şu halde, [G, G] nin herbir elemanı $c_1\ c_2 \ldots c_m$ şeklindedir, ve burada herbir c_i bir komütatördür.

Teorem 10.1.7.1. [G, G] komütatör altgrubu, G nin normal bir altgrubudur.

İspat. Önce gösterelim ki [G, G], G nin bir altgrubudur. $x, y \varepsilon$ [G, G] farzedelim. $x = c_1 \ldots c_m$, $y = c'_1 \ldots c'_n$ demektir. Dolayısıyla $xy = c_1 \ldots c_m\ c'_1 \ldots c'_n\ \varepsilon [G, G]$. Diğer taraftan, $c_i = aba^{-1}\ b^{-1}$ ise $c_i^{-1} = bab^{-1}\ a^{-1}$ bir komütatör olduğundan $x^{-1} = c_m^{-1} \ldots c_1^{-1}\ \varepsilon$ [G, G].

Şimdi [G, G] nin G de normal olduğunu gösterelim. $x \varepsilon [G,G]$, ve $g \varepsilon G$ olsun. $gxg^{-1} = gxg^{-1}x^{-1}x = [g,x]x \varepsilon [G, G]$, yani $g[G,G]g^{-1} = [G,G]$.

Teorem 10.1.7.2. *G/[G,G] bölüm grubu komütatiftir.*

İspat. Hatırlatıyoruz ki, G/[G,G] nin *elemanları*, [G, G] nin *yan cümleleridir* ve [G,G], G/[G,G] bölüm grubunun birim elemanıdır. $A,B \varepsilon G/[G, G]$ ise $ABA^{-1}\ B^{-1} \varepsilon G/[G,G]$. Fakat $ABA^{-1}\ B^{-1}$ bir komütatör ihtiva eder, yani $aba^{-1}b^{-1}$, $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$. Dolayısıyla

$$[a,b]\ \varepsilon\ [A, B] \cap [G, G].$$

Yan cümleler ayrık olduklarından,

$$[A, B] = [G, G].$$

[G,G], G/[G, G] nin birim elemanı olduğundan AB=BA.

Teorem 10.1.7.3. G/[G,G] nin *komütatif*lik hassasını sağlıyan [G,G], G nin en küçük normal altgrubudur.

İspat. Teoremin ifadesine göre, N normal bir altgrup ise, öyleki, G/N komütatiftir, bu taktirde $N \supset [G,G]$. Gerçekten, farzedelim ki N, [G,G] de değildir. Bu demektir ki N, G nin bütün komütatörlerini ihtiva etmiyor. Farzedelim ki, $a,b \varepsilon G$ öyleki $[a,b] \notin N$. Farzedelim ki, A,B sırasıyla a,b yi ihtiva eden N nin yan cümleleridir. $[a,b] \notin N$ olduğundan $ABA^{-1}B^{-1}$, N nin birim elemanı değildir, ve dolayısıyla A ve B, G/N de yer değiştirmiyor, yani G/N komütatif değildir.

Teorem 10.1.7.4. N, G nin normal bir altgrubu olsun. [N,N], N nin komütatör altgrubu ise, bu takdirde, [N,N], G nin normal bir altgrubudur.

İspat. $n \varepsilon [N,N]$ olsun. Kolaylık olmak üzere farzedelim ki $n = [a,b]$, $a,b \varepsilon N$. O halde herbir $g \varepsilon G$ için,

$$g^{-1}ng = (g^{-1}ag)\ (g^{-1}bg)\ (g^{-1}ag)^{-1}\ (g^{-1}bg)^{-1} \varepsilon N.$$

Çünki herbir çarpan N nin bir elemanıdır.

TARİF 22. G, bir grup olsun. Aşağıdaki,

$$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_{i+1}, \ldots$$

altgruplarının herbiri

$$\mathcal{C}_1 = [G, G], \ldots, \mathcal{C}_{i+1} = [\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i]$$

şartını sağlasınlar. Teorem 10.1.7.1 ve Teorem 10.1.7.4 ten dolayı bütün $\mathcal{C}_i$ ler, G nin birer normal altgrubudurlar. Üstteki dizi sonlu sayıda adımlardan sonra, G nin birim elemanı ile nihayet buluyorsa, yani

$$G \supset \mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{C}_i \supset \mathcal{C}_{i+1} \supset \ldots \supset \mathcal{C}_m = 1,$$

ise G ye *çözülebilir* denir.

Sürekli gruplar teorisinde ve matematiğin diğer pek çok branşlarında, merkez ve komütatör kavramları önemli rol oynamaktadırlar. Üstelik bu konular Abel gruplarının tetkikini zorunlu kılmaktadır.

10.1.8. **Arakesit.** İki grubun arakesiti teşkil ediliği takdirde, bu arakesit bir gruptur. Arakesiti teşkil eden gruplar normal altgruplar ise, arekesit te bir normal altgruptur. Bu neticeleri bir teorem halinde ifade edelim.

Teorem 10.1.8.1. Bir İ indeks cümlesi verilmiş olsun. G nin bir $\{H_i\}$ altgrup kolleksiyonunu gözönüne alalım, $i \varepsilon İ$. $D = \cap_i H_i$ yi teşkil edelim. Bu takdirde D, G nin bir altgrubudur, ve herbir H_i, G de normal ise D de normaldir.

İspat. Önce, D, G nin bir altgrubu olduğunu gösterelim. Yani, a, $b \varepsilon D$ ise $ab \varepsilon D$ ve $a^{-1} \varepsilon D$. Gerçekten a, $b \varepsilon D$ ise $a,b \varepsilon H_i$. Burada i, İ yi tarar. H_i grup olduğundan, $ab \varepsilon H_i$, $\forall i \varepsilon İ$. Dolayısıyla $ab \varepsilon D$. Aynı şekilde $a \varepsilon D$ ise, her i için $a \varepsilon H_i \Rightarrow a^{-1} \varepsilon H_i \Rightarrow a^{-1} \varepsilon D$.

Şimdi farzedelim ki H_i normaldir. $x \varepsilon G$ herhangibir eleman, ve $a \varepsilon D$ olsun. Dolayısıyla, $a \varepsilon H_i . H_i$ normal olduğundan, $x^{-1}ax \varepsilon H_i$. Dolayısıyla $x^{-1}ax \varepsilon$ D.

TARİF 23. R, G nin bir altcümlesi, ve $\{H_i\}$, R yi ihtiva eden G nin bütün altgruplarının cümlesi olsun. Bu takdirde $D = \cap_i H_i$, R yi ihtiva eder, ve R yi ihtiva eden G nin *minimal altgrubudur*. R yi ihtiva eden G nin *minimal normal altgrubu* aynı şekilde tarif edilir.

Teorem 10.1.8.2. $H \subset G$ bir altgrup, ve $N \subset G$ bir *normal altgrup* olsun. Bu takdirde $D = H \cap N$, H nın bir normal altgrubudur.

İspat. Teorem 10.1.8.1. den dolayı D bir gruptur ve dolayısıyla H nın bir altgrubudur. Şimdi $h \varepsilon H$, H da herhangibir eleman ve $d \varepsilon D$ olsun. O halde $d \varepsilon N$ ve N normal olduğundan $h^{-1}dh \varepsilon$ N. Diğer taraftan, $d \varepsilon H$ ve $h^{-1}dh \varepsilon H$. Binaenaleyh, $h^{-1}dh \varepsilon D$, ve D, H da normaldir.

10.1.9. **İki grubun çarpımı.** İki cümlenin çarpımını genel olarak tarif edeceğiz ve iki altgrubun çarpımı ile arakesit arasındaki irtibatı belirteceğiz.

TARİF 24. S, T, bir G grubunun, boş olmıyan iki altcümlesi olsun. S ve T nin *çarpımı* bütün st, $s \varepsilon S$, $t \varepsilon T$, elemanlarından müteşekkil cümledir, ve ST ile gösterilir.

Teorem 10.1.9.1. $H \subset G$ bir altgrup, ve $N \subset G$ bir *normal* altgrup olsun. Bu takdirde $HN = NH$ çarpımı G nin bir altgrubudur. Üstelik H,G de *normal* ise, HN de G de *normaldir.*

İspat. Teoremin birinci kısmı için $a,b \varepsilon HN$ olsun. Gösterelim ki $ab^{-1} \varepsilon$ HN. Gerçekten, tarif gereğince, $h,h' \varepsilon H$ ve $n,n' \varepsilon N$ vardır öyleki $a = hn$, $b = h'n'$. Binaenaleyh, $ab^{-1} = hnn'^{-1}h'^{-1} = hh'^{-1}(h'nn'^{-1}h'^{-1})$. Fakat $N \subset G$ normal olduğundan, $h'nn'^{-1}h'^{-1} = n'' \varepsilon N$. Dolayısıyla, $ab^{-1} = hh'^{-1}n'' \varepsilon$ HN.

Teoremin ikinci kısmına gelince, $H \subset G$ normal, ve $a = hn \varepsilon HN$ ise, herhangibir $x \varepsilon G$ için, $x^{-1}ax = (x^{-1}hx)(x^{-1}nx) \varepsilon HN$. Yani HN normaldir.

Açık olarak, $N_1 \subset G$, $N_2 \subset G, \ldots, N_k \subset G$, normal altgruplar ise, $N_1 \ldots N_k$ çarpımı da G de normaldir. *İndüksyon* yolu ile Teorem 10.1.9.1 in bir neticesidir.

Teorem 10.1.9.2. $H \subset G$ bir altgrup ve $N \subset G$, G nin bir normal altgrubu olsun. $D = H \cap N$ ve $P = HN$ vazedelim. Bu takdirde $H/D \cong P/N$.

İspat. **H/D ve P/N gruplarının elemanları arasında bir birebir tekabülün bulunduğunun ispatı.** Bunun için göstereceğiz ki, H/D nin herbir yan cümlesi, P/N nin bir ve birtek yan cümlesinin içindedir; P/N nin herbir yan cümlesi, H/D nin en az bir yan cümlesini ihtiva eder; ve nihayet, yalnız bir tane ihtiva eder.

H/D nin elemanları A,B,..., P/N nin elemanları ise A', B',... ile gösterilsin.

$A \varepsilon H/D$ olsun, bu takdirde $A = Da = aD$, $a \varepsilon H$ olmak üzere, yazabiliriz. P/N nin A' yan cümlesini seçelim, öyleki, $A' = Na$. $D \subset N$ olduğundan $A \subset A'$. Yani H/D nin herbir elemanı, P/N nin bir ve birtek elemanının içindedir. a yerine a^{-1} alınsa idi, görülürdü ki $A^{-1} \subset A'^{-1}$. Sonra $B' = bN = Nb$. $b \varepsilon H$, olsun. Bu takdirde $B = Db \varepsilon H/D$ ve $B \subset B'$. Dolayısıyla, P/N nin herbir elemanı, H/D nin en az bir elemanını ihtiva eder; göstereceğiz ki yalnız bir tane ihtiva eder. Farzedelim ki, P/N nin aynı C' elemanının içinde,

H/D nin A,B iki elemanı vardır. Bu takdirde yukarda da işaret ettiğimiz gibi $B^{-1} \subset C'^{-1}$, ve dolayısıyla $AB^{-1} \subset C'C'^{-1} = N$. Diğer taraftan, $AB^{-1} \subset H$. Yani $AB^{-1} \subset D$. Dolayısıyla $A = B$.

$H/D \cong P/N$ nin ispatı. A, $B \varepsilon H/D$; A', $B' \varepsilon P/N$ olsun. Burada $A \leftrightarrow A'$ $B \leftrightarrow B'$. Bu demektir ki $A \subset A'$, $B \subset B'$. Buradan $AB \subset A'B'$ elde edilir. Yani $AB \leftrightarrow A'B'$.

10.1.10. **Direkt çarpım.** Yukarda tarifi verilen *çarpım* kavramı yardımıyla, *direkt çarpımı* tarif edeceğiz.

TARİF 25. H ve K bir G grubunun *iki normal altgrubu* olsun. Şayet $G = HK$ ve $H \cap K = 1$ ise diyoruz ki G, H ve K nın *direkt çarpımına* ayrılmıştır. Notasyon olarak $G = H \times K$ yazılır.

Teorem 10.1.10.1. Farzedelim ki $G = H \times K$; $H, K \subset G$, G nin normal altgruplarıdır. Bu takdirde, H nın herbir elemanı K nın herbir elemanı ile *yer değiştirir*, ve G nin herbir elemanı birtek olarak hk, $h \varepsilon H$, $k \varepsilon K$, şeklinde gösterilebilir.

İspat. $h \varepsilon H$, $k \varepsilon K$ olmak üzere, $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1}$ komütatörünü gözönüne alalım. K, normal olduğundan $hkh^{-1} \varepsilon K$, $[h,k] \varepsilon K$. Aynı şekilde, H normal olduğundan, $kh^{-1}k^{-1} \varepsilon H$, ve $[h,k] \varepsilon H$. Dolayısıyla

$$[h, k] \varepsilon H \cap K = 1.$$

O halde $hk = kh$.

Şimdi $x \varepsilon G$ olsun. $G = HK$ olduğundan, $h \varepsilon H$, $k \varepsilon K$ için $x = hk$. Farzedelim ki, aynı zamanda, $x = h'k'$, $h' \varepsilon H$, $k' \varepsilon K$. Dolayısıyla $hk = h'k'$, veya soldan h^{-1} ve sağdan k'^{-1} ile çarparak, $kk'^{-1} = h^{-1}h'$. Fakat, $kk'^{-1} \varepsilon K$, $h^{-1}h' \varepsilon H$, ve $H \cap K = 1$. Binaenaleyh, $kk'^{-1} = 1$, $h^{-1}h' = 1$. Yani $k = k'$, $h = h'$.

10.1.11. **Kartezyen çarpım.** Nihayet bir üçüncü çarpım tarif ederek, direkt çarpımla mukayese edeceğiz.

TARİF 26. H ve K iki grup olsun. (h,k), $h \varepsilon H$, $k \varepsilon K$, eleman çiftlerinin bütününe G diyelim. Sonra, G ye ait iki elemanın çarpımını,

$$(h,k)(h', k') = (hh', kk')$$

olarak tarif edelim. Bu çarpma kaidesi ile birlikte G bir grup teşkil eder, ve bu gruba, H ve K gruplarının *kartezyen çarpımı* denir, ve

$$G = H \times K$$

şeklinde yazılır.

Grup aksiyomlarının sağlandığı tahkik edilirken, görülür ki, H ve K nın asosyatiflik kanunu, G için asosyatifliği intaç eder. G nin birim elemanı $(1, 1')$ dür; 1, H nın, 1' ise K nın birim elemanlarıdır. (h,k) nın tersi (h^{-1}, k^{-1}) dir.

Direkt çarpım ile kartezyen çarpım arasındaki bağıntı aşağıdaki iki teoremle belirtilmektedir.

Teorem 10.1.11.1. Farzedelim ki $G=H\times K$. H',K' iki grup olsun, öyleki, $H'\cong H, K'\cong K$. $G'=H'\times K'$ vazedelim. Bu takdirde $G\cong G'$.

İspat. $\varphi: H' \to H, \Psi: K' \to K$ izomorf tasvirler olsun. $\chi: G' \to G$ izomorf tasviri $\chi((h', k')) = \varphi(h')\,\Psi(k')$ bağıntısı ile tesbit edilir.

Teorem 10.1.11.2. $G = H\times K$ olsun. G nin $(h, 1')$ şeklindeki bütün elemanlarının cümlesini H', ve G nin $(1,k)$ şeklindeki bütün elemanlarının cümlesini K' ile gösterelim. Bu takdirde H' ve K', G nin normal altgruplarıdır, ve $G = H'\times K'$. Üstelik $H'\cong H$ ve $K'\cong K$.

İspat. H', G nin bir altgrubundur. Gerçekten, $(h,1'), (h',1')\varepsilon H'$ ise, $(h,1')(h', 1')^{-1} = (hh'^{-1}, 1')\varepsilon H'$.

H', G nin normal bir altgrubudur. Gerçekten, $(a,b)\,\varepsilon G$ herhangibir eleman olsun. $(a,b)^{-1}(h,1')(a,b) = (a^{-1}ha, 1')\,\varepsilon H'$, zira H normal olduğundan, $a^{-1}ha\varepsilon H$. Aynı şeyler K' için tekrar edilebilir.

$G = H'\times K'$. Gerçekten, $H'\cap K' = (1,1')$, zira, $(h,1') = (1, k) \Rightarrow h=1$, $k=1'$. Diğer taraftan, $G=H'K'$, zira, herbir $(h,k)\varepsilon G$ elemanı, $(h,k) = (h,1')(1,k)$ şeklinde yazılabilir.

$H'\cong H$. Gerçekten, herbir $h\varepsilon H$ elemanına $(h,1')\varepsilon H'$ karşılık tutulabilir.

2. Komütatif grup kavramı

10.2.1. **Temel tarifler.** Cebirsel topolojide önemi daha da iyi takdir edilecek olan bu bahiste, bilhassa *sonlu tevlit edilen Abel grupları* üzerinde durulmaktadır.

Hatırlatmak isteriz ki, *kömütatif* veya diğer bir ismiyle *Abel grubu* diye, *komütatiflik kanununu* gerçekleyen gruplara denir.

G4. *Komütatiflik kanunu.* Bahis konusu grup G, elemanları da $a,b,c,\ldots$ ile gösterilirse, G nin *bütün* eleman çiftleri için

$$a+b = b+a,\ a,b\varepsilon G.$$

TARİF 27. $g_1,\ldots, g_n$ eleman kolleksyonuna, bir G Abel grubunu *tevlit* ediyor denir, şayet herbir $g\varepsilon G$ elemanı, $g_1,\ldots,g_n$ elemanlarının, a_i katsayıları *tam* olmak şartıyla bir *lineer kombinezonu* şeklinde ifade edilebiliyorsa, yani,

$$g = a_1g_1 + \ldots + a_ng_n,\ g_1,\ldots, g_n\varepsilon G.$$

$g_1,\ldots, g_n$ elemanlarına *tevlid edici*, veya *generatörler* denir.

TARİF 28. *Birtek g* elamanı tarafından tevlid olunan Abel G grubunun elemanları:

$$0,\ \pm g,\ \pm 2g,\ldots$$

den ibarettir.

(i) Bütün n ler için $ng=0$, $g=0$ ı intac ediyorsa, G ye *serbest devir grubu* denir.

(ii) Şayet $k\neq 0$, $g\neq 0$ için, $kg = 0$, ve herhangibir $0 < n < k$ için, $ng = 0 \Rightarrow g = 0$ ise, bu takdirde G ye *k mertebeden bir devir grubu* denir.

TARİF 29. $G_1,\ldots, G_n$ bir G Abel grubunun altgrupları iseler, G; $G_1,\ldots, G_n$ lerin *direkt toplamıdır*, ve

$$G = G_1 + \ldots + G_n$$

yazılır, şayet G nin herbir g elemanı, birtek olarak

$$g = g_1+\ldots+ g_n,\ g_i\varepsilon G_i,\ i = 1,\ldots, n,$$

şeklinde yazılabilirse.

Bu yazılışta, sıra, ehemmiyeti haiz değildir, yani

$$g_i + g_j = g_j + g_i.$$

İlerde bir *strüktür teoremi* ispat edeceğiz, şöyleki, bu teoreme göre, *sonlu sayıda* generatörleri haiz, bir G Abel grubu, mertebeleri $c_1,\ldots, c_\rho$ *olan* ρ *sayıda devir grupların ve b sayıda serbest devir grupların direkt toplamıdır.*

$c_1,\ldots, c_\rho$ sayılarına, *büküm* (torsion) sayıları, b ye ise G nin *Betti* sayısı denir.

TARİF 30. G nin, $g_1,\ldots, g_k$, k elemanına *lineer bağımsız* dır denir, şayet

$$a_1g_1 + \ldots + a_kg_k = 0,\ a_i \text{ ler tam},\ i = 1,\ldots,k,$$

bağıntısı, yalnız ve yalnız, bütün a_i katsayılarının sıfır olması halinde cari ise.

G Abel grubunun *sonsuz bir eleman kolleksyonu lineer bağımsızdır* denir, şayet bu kolleksyonun *herbir sonlu alt kolleksyonu lineer bağımsız* ise.

G nin, lineer bağımsız elemanlarının maksimal sayısına G nin rankı denir.

TARİF 31. Bir G grubunun, *sonlu* veya *sonsuz* bir, $g_1,\ldots, g_n,\ldots$ *sistemine*, G nin bir *generatör sistemi*, veya $g_1,\ldots, g_n,\ldots$ G yi *tevlid* ediyor denir, şayet G nin herbir g elemanı, $g_1,\ldots, g_k$ elemanlarının bir *lineer kombinezonu*, yani,

$$g = a_1g_1 + \ldots + a_kg_k,\ a_i \text{ ler tam}, \qquad (10.2.1.1)$$

şeklinde yazılabiliyorsa.[1]

Generatör sistemi lineer bağımsız ise, (10.2.1.1) gösterimi *birtektir.* Gerçekten,

$$g = b_1 g_1 + \ldots + b_kg_k,$$

(1) *Generatör sayısı sonlu ise, G sonlu tevlid ediliyor denir.*

ikinci bir gösterim ise,

$$(a_1 - b_1)\, g_1 + \ldots + (a_k - b_k)\, g_k = 0.$$

$g_1, \ldots, g_k$ lineer bağımsız olduklarından, $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$.

Serbest sonlu tevlid edilen Abel grupları: Bir G grubuna Serbest sonlu tevlid ediliyor denir, şayet G nin herbir elemanı, *birtek* $a_1 g_1 + \ldots + a_k g_k$ şeklinde ifade edilebiliyorsa.[1] Burada, a_i ler tam ve $g_i \varepsilon G$, $i = 1, \ldots, k$.

Teorem 10.2.1.1. G, *Serbest sonlu tevlid edilen* bir Abel grubu, ve H, G nin bir altgrubu ise, bu takdirde H *Serbest sonlu tevlid edilen* bir Abel altgrubudur. H nın generatörlerinin sayısı, G nin generatörlerinin sayısını aşamaz.

İspat. İndüksiyon metodunu kullanacağız. Farzedelim ki,

$$g_1, \ldots, g_k$$

G Abel grubunu tevlid eden *lineer bağımsız* bir generatör sistemidir.

$k = 0$ için teorem aşikârdır. Zira, bu halde, G, 0 elemanından ibaret olup G = H dır.

Şimdi, farzediyoruz ki teorem $k = m$ için doğru, ve göstermek istiyoruz ki, $k = m + 1$ için de doğrudur. O halde farzedelim ki G,

$$g_1, \ldots, g_m, g_{m+1}$$

lineer bağımsız generatörler tarafından tevlid ediliyor. $G' \subset G$ altgrubunu gözönüne alalım, öyle ki, bu altgrup

$$g_1, \ldots, g_m$$

tarafından tevlid edilsin.

$H' = H \cap G'$ altgrubunu teşkil edelim. H', m generatörü olan G' nün bir altgrubu olduğundan, indüksiyon hipotezinden dolayı, H' nün, sonlu, lineer bağımsız

$$h_1, \ldots, h_n, \qquad (10.2.1.2)$$

bir generatör sistemi vardır, öyle ki, $n \leq m$. $h \varepsilon H$, H nın keyfi bir elemanı ise,

$$h = a_1 g_1 + \ldots + a_m g_m + a_{m+1} g_{m+1}. \qquad (10.2.1.3)$$

Lineer bağımsızlık şartından dolayı, h elemanı, a_{m+1} sayısını bir tek olarak belirtir. *İki hal mümkündür*: ya bütün $h \varepsilon H$ için $a_{m+1} = 0$, veya bir h elemanı vardır, öyle ki, $a_{m+1} \neq 0$.

Birinci hal: Bütün $h \varepsilon H$ için $a_{m+1} = 0$. Bu takdirde herbir $h \varepsilon H$ için

$$h = a_1 g_1 + \ldots + a_m g_m.$$

O halde $H \subset G'$, ve dolayısıyla $H' = H$. Binaenaleyh, (10.2.1.2) H nın lineer bağımsız bir generatör sistemidir, ve böylece teorem ispatlanmıştır.

(1) G ye kısaca *serbestgrup* denir, şayet G nin bir *tabanı* varsa *(lineer bağımsız bir generatör sistemi)*.

İkinci hal: Bir $h \varepsilon H$ için $a_{m+1} \neq 0$. Böyle bir h için (10.2.1.3) te, $a_{m+1} \neq 0$. $a_{m+1} > 0$ farzedebiliriz, çünki $-h \varepsilon H$. Son olarak, o h yı seçiyoruz ki, a_{m+1} en küçük olsun. Bu h ya h_{n+1} diyelim. Demek ki,

$$h_{n+1} = a'_1 g_1 + \ldots + a'_m g_m + a'_{m+1} g_{m+1}, \qquad (10.2.1.4)$$

ve

$$a'_{m+1} = \min a_{m+1}.$$

Göstereceğiz ki, her $h \varepsilon H$ ya tekabül eden a_{m+1} sayısı, a'_{m+1} tarafından bölünür. Gerçekten

$$a_{m+1} = b_{n+1}\, a'_{m+1} + r, \quad 0 \leq r < a'_{m+1},$$

yazalım. (10.2.1.4) ü, b_{n+1} ile çarpalım, ve netice denklemi (10.2.1.3) ten çıkaralım.

$$h - b_{n+1} h_{n+1} = (a_1 - b_{n+1} a'_1)\, g_1 + \ldots + a_m - b_{n+1} a'_m)\, g_m + r g_{m+1}.$$

Şimdi, $h - b_{n+1} h_{n+1} \varepsilon H$. Fakat $r < a'_{m+1}$ ve dolayısıyla $r = 0$. Şu halde

$$h - b_{n+1} h_{n+1} \varepsilon G'$$

ve dolayısıyla,

$$h - b_{n+1} h_{n+1} \varepsilon H \cap G' = H'.$$

(10.2.1.2) den dolayı

$$h - b_{n+1} h_{n+1} = b_1 h_1 + \ldots + b_n h_n,$$

yani,

$$h = b_1 h_1 + \ldots + b_n h_n + b_{n+1} h_{n+1}.$$

Binaenaleyh, $h_1, \ldots, h_{n+1}$, H nın bir generatör sistemidir.

Teorem 10.2.1.2. G, *sonlu tevlid edilen* bir Abel grubu ve H, G nin bir altgrubu ise, G/H bölüm grubu (veya G–H fark grubu) da sonlu tevlid edilen bir Abel grubudur.

İspat. G/H, ayrık sınıflardan müteşekkil olup, G nin iki elemanı aynı sınıfa aittir yalnız ve yalnız bu iki elemanın farkı H da ise. Sınıflar üzerinde toplam,

$$[g] + [g'] = [g + g'], \quad g, g' \varepsilon G,$$

olarak tarif edilir. Üstelik, $g_1, \ldots, g_k$ G yi tevlid eden bir generatör sistemi ise,

$$g = a_1 g_1 + \ldots + a_k g_k, \quad a_i \text{ ler tam}, \ g \varepsilon G,$$

yazılabilir. Binaenaleyh,

$$[g] = [a_1 g_1 + \ldots + a_k g_k] = a_1 [g_1] + \ldots + a_k [g_k].$$

Yani, G, $g_1, \ldots, g_k$ tarafından tevlid ediliyorsa, G/H, $[g_1], \ldots, [g_k]$ tarafından tevlid ediliyordur.

10.2.2. **Strüktür Teoremi.** Bu teorimin ispatına yarıyacak bir teorem ispat edelim.

Teorem 10.2.2.1. a_{ij} ler *tam sayı* olmak üzere, $A = (a_{ij})$, mxn matrisini gözönüne alalım. Bu takdirde mertebeleri m ve n olan S ve T ünimodüler (elemanları tam sayılar, determinantı ± 1 olan *tam kare matris*) matrisleri bulunabilir öyle ki,

$$D = (d_{ij}) = SAT$$

kanonik şeklindedir. Yani, (i) $i \neq j$ için $d_{ij} = 0$, (ii) $d_{ii} \mid d_{i+1,\, i+1}$ (iii) $d_{ii} \geq 0$.

İspat. Önce bir X tam matrisi üzerinde *elemanter transformasyonları* izah edelim.

Tip I elemanter transformasyonu, matsin bir satırını (sütununu) -1 ile çarpmaktan ibarettir.

Tip II elemanter transformasyonu, matrisin herhangi iki satırının (sütununun) aralarında değiştirilmesidir.

Tip III elemanter transformasyonu, bir satıra (sütuna) diğer bir satırı (sütunu) bir tam sayı ile çarptıktan sonra ilâve etmekten ibarettir. Elemanter satır transformasyonların herhangibirine τ denilir, I de birim matris ise,

$$\tau X = \tau I X = (\tau I) X.$$

Yani X matrisini, *soldan* bir *ünimodüler matrisle* çarpmak demektir. Aynı şekilde, elemanter sütun transformasyonlarını tatbik etmek demek X yı *sağdan bir ünimodüler matrisle* çarpmak demektir.

Teoremin ispatı için, elemanter transformasyonlarla X in *kanonik şekle* indirgenebileceğini göstermek kâfi gelecektir.

Gösterelim ki, $X = (x_{ij})$ matrisinde x_{11} elemanı, birinci satır ve sütundaki bütün elemanları bölüyorsa, X matrisi, $x_{1j} = y_{1j}$, $y_{i1} = y_{1j} = 0$; $i, j \neq 1$, şartlarını sağlıyan Y matrisine indirgenebilir.

Gerçekten, madem ki $x_{11} \mid x_{i1}$; $x_{i1} = -r\, x_{11}$ vazedilebilir, burada r tamdır. X in birinci satırını r ile çarpıp , i inci satıra ilâve edelim. Böylece yeni matriste, birinci sütunun i inci yerinde bulunan eleman 0 dır. Bu operasyon, birinci sütundaki, ikinci elemandan başlamak üzere bütün elemanlara tatbik edilir, ve aynı işlem, birinci satırdaki, ikinci elemandan başlamak üzere bütün elemanlara tekrar edilirse, istenilen neticeye varılır.

Şimdi, X matrisinde, sıfırdan farklı elemanların mutlak değerlerinin *minimumunu* $[x]$ ile gösterelim. Diyorum ki ya $[x]$, X matrisinin bütün elemanlarını böler, veya elemanter transformasyonlarla, X matrisi Y matrisine indirgenebilir, öyleki, $[y] < [x]$. Aynı muhakeme Y matrisi üzerinde de yürütülebilir. *Sonlu sayıda* adımlardan sonra bir Z matrisi bulunabilir, öyleki, $[z]$ bütün elemanları böler.

Gerçekten X matrisinde, $[x]$ e tekabül eden elemanı taşıyan satır ve sütunu, birinci satır ve sütunla değiştirerek ve icabında, yer değiştiren satırı,

-1 ile çarparak, X, $x_{11} = [x]$ şartını sağlayan bir matrise indirgenebilir. Bu en son matrisi yine X ile gösterelim. Birinci sütunda x_{11} tarafından bölünmiyen bir x_{i1} elemanı varsa,

$$x_{i1} = -r\, x_{11} + n,\ 0 < n < x_{11},$$

yazabiliriz. Birinci satır r ile çarpıldıktan sonra i inci satıra ilâve edilirse yeni Y matrisinde

$$[y] \leq n < [x].$$

Aynı muhakeme, Y üzerinde tekrar edilebilir. Matrislerin elemanları *daima tam sayı* olduklarından, *sonlu sayıda adımlardan* sonra, yine X ile göstereceğimiz bir matris elde edilir öyleki, $x_{11} = [x]$, birinci satır ve sütundaki bütün elemanları böler. Elemanter operasyonlar tatbik edilerek, x_{11} hariç bu satır ve sütundaki bütün elemanlar sıfır yapılabilir. Bu netice matriste bir x_{ij} elemanı varsa, öyleki, x_{11}, x_{ij} yi bölmüyor, bu takdirde i inci satır 1 inci satıra ilâve edilir, ve yukardaki muhakeme tekrarlanır.

Neticede *Elemanter transformasyonlarla*, X matrisi Z matrisine indirgenebilir, öyleki, $z_{11} = [z]$, $z_{i1} = z_{1j} = 0$, $i \neq j$, ve z_{11} bütün elemanları böler. Böyle bir matrise *yarı-kanonik* diyoruz.

Z matrisinden 1 inci satır ve sütunu kaldırmak suretiyle bütün elemanları z_{11} tarafından bölünen bir Z′ matrisi elde edilir. Z′, aynı şekilde bir yarı-kanonik matrise indirgenebilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 10.2.2.2. X Serbest sonlu tevlid edilen bir Abel grubu, ve $Y \subset X$ bir altgrup olsun. Bu takdirde X de bir lineer bağımsız, $x'_1, \ldots, x'_q$, generatör sistemi bulunabilir öyleki,

$d_1x'_1, \ldots, d_rx'_r$; $r \leq q$; $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$; $d_i \mid d_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$, Y nin bir generatör sistemini teşkil ederler.

İspat. Farzedelim ki,

$$x_1, \ldots, x_q,$$

X in bir lineer bağımsız generatör sistemidir, ve

$$y_1, \ldots, y_p;\ p \leq q$$

Y nin bir lineer bağımsız generatör sistemidir. Açık olarak,

$$y_i = a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{iq} x_q,\ i = 1, \ldots, p. \qquad (10.2.2.1)$$

(10.2.2.1) lineer denklem sisteminin matrisini $A = (a_{ij})$ ile gösterelim.

$S = (s_{ki})$ ve $T = (t_{jl})$, p ve q mertebeli iki ünimodüler matris olsun. Bu matrisler kanalıyla , X ve Y nin herbirinde, sırasıyla,

$$x_j = t_{j1}x'_1 + \ldots + t_{jq}x'_q;\ j = 1, \ldots, q, \qquad (10.2.2.2)$$

$$y'_k = s_{k1}\, y_1 + \ldots + s_{kp}\, y_p;\ k = 1, \ldots, p, \qquad (10.2.2.3)$$

bağıntıları yardımıyla, yeni

$$x'_1, \ldots, x'_q$$

ve

$$y'_1, \ldots, y'_p$$

generatör sistemleri ihdas ediliyor.

Matris notasyonu ile, (10.2.2.1), (10.2.2.2.), (10.2.2.3), sırasıyla,

$$y = Ax,\ x = Tx',\ y' = Sy$$

şeklinde yazılır, ve dolayısıyla,

$$y' = SATx'.$$

S ve T, D = SAT kanonik olacak şekilde seçilirlerse, yani, $D = (d_i)$; $i=1, \ldots, r$; $r \leq q$, $d_i > 0$, $d_i \mid d_{i+1}$. O halde, $y' = Dx'$, veya

$$y'_1 = d_1\, x'_1, \ldots, y'_r = d_r x'_r.$$

Şimdi gelelim, yukardan beri vaad edilen Abel grubunun esas teoremine.

Teorem 10.2.2.3. *(Strüktür teoremi).* Sonlu tevlid edilen bir Abel grubu,

$$U_1, \ldots, U_b;\ V_1, \ldots, V_\rho$$

devir altgruplarının direkt toplamı olarak yazılır. Burada, U_i, $i = 1, \ldots, b$, *serbest devir grubu*, ve V_j, $j = 1, \ldots, \rho$, $c_j > 1$ sonlu mertebeli devir grubudur, üstelik $c_j \mid c_{j+1}$, $j = 1, \ldots, \rho - 1$. $c_1, \ldots, c_\rho$ ve b sayıları birtek olarak G tarafından belirtilmiştir. Üstelik; $c_1, \ldots, c_\rho$ sayılarına G nin *büküm katsayıları*, ve b ye, yani *Betti sayısına* G nin *rankı* denir.

Şayet G Serbest sonlu tevlid edilen bir Abel grubu ise, G nin *direkt* toplamında, V ler mevcut değildir.

İspat. Farzedelim ki $g_1, \ldots, g_q$, G nin *sonlu bir generatör sistemidir.* $a_1, \ldots, a_q$ katsayıları tam; $x_1, \ldots, x_q$ değişkenler olmak üzere,

$$x = a_1 x_1 + \ldots + a_q x_q, \qquad (10.2.2.4)$$

lineer formlarının bütününe X diyelim. X de bir toplam operasyonu tarif edilirse, X bir grup olur, ve $x_1, \ldots, x_q$, X i tevlid eden bir lineer bağımsız generatör sistemidir.

X den G ye bir f tasvirini tarif ediyoruz, öyleki bu tasvirde (10.2.2.4) ile tarif edilen herbir $x \varepsilon X$ e, G de

$$f(x) = a_1 g_1 + \ldots + a_q g_q$$

elemanı tekabül etsin.

Bu bir homomorfizmdir, zira

$$x' = a'_1\, x_1 + \ldots + a'_q x_q$$

ise,

$$f(x + x') = (a_1 + a'_1)\, g_1 + \ldots + (a_q + a'_q)\, g_q = f(x) + f(x').$$

$Y \subset X$, f homomorfizminin çekirdeği olsun. Teorem 10.2.2.2 den dolayı, X de lineer bağımsız

$$x'_1, \ldots, x'_q,$$

generatörlerini seçebiliriz, öyleki,

$$d_1 x'_1, \ldots, d_r x'_r,\ r \leq q,\ d_i > 0,\ d_i \mid d_{i+1},$$

Y altgrubunun bir generatör sistemidir.

Farzedelim ki,

$$g'_i = f(x'_i),\ i = 1, \ldots, q.$$

Bu takdirde,

$$g'_1, \ldots, g'_q,$$

G nin bir generatör sistemidir. Bu generatörlerin şu hassaları vardır. f nin tarifinden ötürü,

$$f(d_i\, x'_i) = d_i\, g'_i,\ i = 1, \ldots, r,$$

ve $d_i\, x'_i\ \varepsilon Y$ olduğundan,

$$d_1 g'_1 = 0, \ldots, d_r g'_r = 0. \qquad (10.2.2.5)$$

Diğer taraftan, farzedelim ki,

$$b_1\, g'_1 + \ldots + b_q\, g'_q = 0. \qquad (10.2.2.6)$$

Bu demektir ki,

$$x' = b_1\, x'_1 + \ldots + b'_q x'_q$$

vazedildiği takdirde, (10.2.2.6) gözönünde tutulursa,

$$f(x') = 0.$$

Dolayısıyla, $x' \varepsilon Y$. Halbuki $x'_1, \ldots, x'_q$ lineer bağımsız olduğundan, yukardaki hatırlatmadan dolayı, x', $d_1 x'_1, \ldots, d_r\, x'_r$ nin bir lineer kombinezonudur. Yani

$$x' = e_1 d_1 x'_1 + \ldots + e_r d_r x'_r, \qquad r \leq q.$$

Binaenaleyh,

$$b_1 = e_1 d_1, \ldots, b_r = e_r d_r;\ b_{r+1} = \ldots = b_q = 0.$$

Şimdi farzedelim ki, $d_1, \ldots, d_r$ pozitif tam sayılar sisteminde, $d_1, \ldots, d_s$ sayıları 1 e eşittir. (10.2.2.5) ten dolayı,

$$g_1 = \ldots = g_s = 0.$$

O halde, G nin bir generatör sistemi,

$$g'_{s+1}, \ldots, g'_r;\ g'_{r+1}, \ldots, g'_q$$

elemanlarından ibarettir.

Yeni bir sıralamaya tâbi tutularak, $d_{s+1},\ldots,d_r$ sayılarını

$$c_1,\ldots,c_\rho$$

ile, $g'_{s+1},\ldots,g'_r$ generatörlerini

$$v_1,\ldots,v_\rho$$

ile, ve nihayet, $g'_{r+1},\ldots,g'_q$ generatörlerini

$$u_1,\ldots,u_b$$

ile gösterelim. En son, $v_1,\ldots,v_\rho$ ların tevlid ettikleri G nin altgruplarını, sırasıyla,

$$V_1,\ldots,V_\rho,$$

ve $u_1,\ldots,u_b$ lerin tevlid ettikleri G nin altgruplarını, sırasıyla,

$$U_1,\ldots,U_b$$

ile gösterelim. Bu takdirde, açık olarak G, U ve V lerin *direkt toplamıdır.* Yani,

$$G = V_1 + \ldots + V_\rho + U_1 + \ldots + U_b. \qquad (10.2.2.7)$$

Nihayet, *G nin sonlu bir lineer bağımsız generatör sistemi varsa*, teorem 10.2.1.1 den dolayı G nin herbir altgrubu aynı hassayı haizdir. Özel olarak, $V_1,\ldots,V_\rho$: $U_1,\ldots,U_b$ devir gruplarının $v_1,\ldots,v_\rho$; $u_1,\ldots,u_b$ generatörlerinin herbiri lineer bağımsızdır.

Binaenaleyh (10.2.2.7) ayrılışında sonlu mertebeden eleman bulunamaz. Yani, (10.2.2.7)ayrılışında V ler yoktur.

10.3.2. **Rank.** Bir G Abel grubunun, onun bir H altgrubunun ve G/H bölüm grubunun rankları arasında şu münasebet vardır.

Teorem 10.2.3.1. Farzedelim ki bir G Abel grubunun rankı r dir. H, G nin bir altgrubu ve G/H bölüm grubu olsun. H ve G/H nın rankarını sıra ile s ve t ile gösterelim. Bu takdirde $r = s + t$.

İspat. Farzedelim ki, $h_1,\ldots,h_s$, H nın linner bağımsız elemanları, $k_1,\ldots,k_t$, G/H nın lineer bağımsız elemanlarıdır. Bu takdirde herbir k_i elemanı, G nin elemanlarından müteşekkil bir sınıftır (yan cümle). Farzedelim ki g_i, k_i sınıfının bir temsilcisidir. Yani

$$k_i = [g_i].$$

Şayet, a ve b ler tam sayı olmak üzere

$$a_1g_1 + \ldots + a_tg_t + b_1h_1 + \ldots + b_sh_s = 0 \qquad (10.2.3.1)$$

ise, gördük ki,

$$a_1[g_1] + \ldots + a_t[g_t] + b_1[h_1] + \ldots + b_s[h_s] = 0.$$

Fakat H ya ait herhangibir elemanın sınıfı 0 sınıfıdır, ve dolayısıyla,

$$a_1k_1 + \ldots + a_tk_t = 0.$$

k lar lineer bağımsız olduklarından, a_i, $i=1,\ldots,t$; tamları sıfırdır. Dolayısıyla, (10.2.3.1) bağıntısı

$$b_1h_1 + \ldots + b_sh_s = 0$$

şeklini alır. Fakat h lar lineer bağımsız olduklarından, b tamları sıfırdır. O halde, $g_1,\ldots,g_t$; $h_1,\ldots,h_s \varepsilon G$ lineer bağımsızdır. Şu halde

$$r \geq t + s.$$

Şimdi $g\varepsilon G$ herhangibir eleman ve $k = [g] \varepsilon G/H$ olsun. Bu takdirde hepsi sıfır olmıyan a, $a_1,\ldots,a_t$ tamları için

$$ak + a_1k_1 + \ldots + a_tk_t = 0.$$

$k_1,\ldots,k_t$ lineer bağımsız olduklarından $a \neq 0$. Şimdi

$$h = ag + a_1g_1 + \ldots + a_tg_t \varepsilon G \qquad (10.2.3.2)$$

elemanını gözönüne alalım.

$$[h] = ak + a_1k_1 + \ldots + a_tk_t = 0.$$

Dolayısıyla, $h\varepsilon H$. O halde, hepsi sıfır olmıyan b, $b_1,\ldots,b_s$, tamları için

$$bh + b_1h_1 + \ldots + b_sh_s = 0. \qquad (10.2.3.3)$$

h_i ler lineer bağımsız olduklarından, $b \neq 0$. (10.2.3.2) (10.2.3.3) te yerine konursa

$$abg + a_1bg_1 + \ldots + a_tbg_t + b_1h_1 + \ldots + b_sh_s = 0.$$

Burada $ab \neq 0$. Dolayısıyla, G ye ait $s + t + 1$ elemanlardan müteşekkil herbir cümle lineer bağımlıdır. Şu halde

$$r \leq s + t.$$

Binaenaleyh $r=s+t$.

10.2.4. **Period ve aperiod Abel grupları.** Bu bahisi kapatırken, bütün Abel gruplarının inşası hakkında bir fikir vermek istiyoruz.

TARİF 32. Bir Abel grubuna, *period grubu* (veya *büküm grubu*) diyoruz, şayet bütün elemanları *sonlu mertebeden* ise.

Aksine, bir Abel grubuna, birim elemandan başka, sonlu mertebeden hiçbir elemanı yoksa, *aperiod grubu* (veya *bükümden azade grup*) diyoruz.

Kolayca görülür ki herhangibir *G Abel grubunun* sonlu mertebeden elemanları, G nin bir F altgrubunu teşkil ederler. Gerçekten, $a, b\varepsilon G$; m, n mertebeden elemanlar olsun, yani $ma=0$, $nb = 0$. Binaenaleyh, $mn(a-b) = 0$; istenilen netice.

Komütatif olmıyan gruplar için bu netice muteber değildir.

Teorem 10.2.4.1. G bir Abel grubu ve F, G nin sonlu mertebeli elemanlarından oluşan altgrup olsun. Bu takdirde G/F *aperiod* bir gruptur.

İspat. Aksini kabul ederek, farzedelim ki, $x \varepsilon G/F$, $x \neq 0$, sonlu m mertebesindendir. $G \to G/F$ homomorfizminde, farzedelim ki $g \to x$, $g \varepsilon G$. Bu takdirde $mg \to mx = 0$ ve dolayısıyla, $mg \varepsilon F$. Binaenaleyh mg, sonlu mertebedendir. Bu mertebeye n diyelim. Yani

$$n(mg) = 0.$$

Şu halde, g, kendi de sonlu mertebedendir. Dolayısıyla $g \varepsilon F$. Fakat F, homomorfizmin çekirdeği olduğundan, $g \to 0$. Fakat $x \neq 0$ farzetmiştik.

Bu teorem, Abel gruplarının inşası problemini aşağıdaki üç belirli probleme irca eder.

(1) Bütün Abel period gruplarının tesbiti.

(2) Bütün Abel aperiod gruplarının tesbiti.

(3) Verilen bir F *period* grubunu altgrup kabul eden bir G Abel grubunu inşa etmek, şu şartla ki, G/F, verilen bir H *aperiod grubuna* izomorf olsun.

Bu problemlerin hiçbiri tamamen halledilmiş değildir. Bununla beraber (1) hakkında çok şeyler bilinmektedir, (3) hakkında ise çok az biliniyor.

Bundan sonraki söyliyeceklerimizde, kolaylık olsun diye, çarpma notasyonunu kullanıyoruz.

Bir G *Abel period grubundaki*, mertebeleri sabit bir p asal sayısının kuvvetleri olan elemanların $S(p)$ cümlesini gözönüne alalım. Birim elemanı $1 = p^{\circ}$ olarak tarif ediyoruz.

Kolayca tahkik edilebilir ki, $S(p)$ bir altgruptur. Bu altgruba *Sylow p-altgrubu*, veya Abel p-grubu denir.

Abel period gruplarını tetkik edebilmek için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır. Aslında bu lemmalar herhangibir grup için muteberdir.

Lemma 10.2.41. Herhangibir grupta, x, mn mertebeden bir eleman olsun. Farzedelim ki m, n rölatif asal tam sayılardır. Bu takdirde $x = yz = zy$ birtek şekilde gösterilebilir, öyleki, y, m mertebesinden ve z, n mertebesindendir. y ve z ikisi de x in kuvvetleridir.

İspat. Hatırlatıyoruz ki, a, b iki tam sayının ortak böleni (a, b) ile gösterilir. m ve n nin rölatif asal olmaları $(m,n) = 1$ ile ifade edilir. Euclid algoritmasına göre, u ve v tamları bulunabilir öyleki $um + vn = 1$. Dolayısıyla,

$$x = x^{um}x^{vn} = x^{vn}x^{um}.$$

Sonra, $y = x^{vn}$, $z = x^{um}$ vazedilirse,

$$x = zy = yz;\ y^m = x^{vnm} = 1,\ z^n = x^{umn} = 1.$$

Son iki denklem gösteriyor ki, y nin mertebesi m nin bir m_1 bölenidir. Keza, z nin mertebesi, n nin bir n_1 bölenidir. Fakat $x=yz \Rightarrow x^{m_1n_1} = y^{m_1n_1}z^{m_1n_1} = 1$. Dolayısıyla x in mertebesi, m_1n_1 i böler. Bu mertebe mn olduğundan, $m_1 = m$ y nin, $n_1 = n$ de z nin mertebesidir.

Farzedelim ki, x ikinci bir şekilde de gösterilebilir,

$$x = y_1z_1 = z_1y_1.$$

Burada y_1 in mertebesi m; z_1 in mertebesi ise n dir.

$x = yz = y_1z_1$ ifadesinden derhal,

$$w = y_1^{-1}\, y = z_1\, z^{-1}$$

yazabiliriz. İki tarafın kuvvetlerini almadan önce, $y_1^{-1}\, y = yy_1^{-1}$ ve $z_1\, z^{-1} = z^{-1}\, z_1$ yazılabileceğini göstermemiz lâzımdır. Gerçekten, birkere, y_1 ve z_1, x ile yer değiştirir, zira, $xy_1 = y_1\, z_1\, y_1 = y_1\, x$ ve $xz_1 = z_1\, y_1\, z_1 = z_1\, x$. Fakat, y ve z, x in kuvetleri olduklarından, y_1 ve z_1 sırasıyla y ve z ile yer değiştirir. Binaenaleyh, $w^m = 1$, $w^n = 1$ olduğu görülür. Halbuki, $(m, n) = 1$ olduğundan, $w = 1$, ve $y_1 = y$, $z_1 = z$. Genel olarak,

Lemma 10.2.4.2. x, mertebesi $n=n_1 \ldots n_r$, $(n_i, n_j) = 1$, $i \neq j$, olan bir eleman olsun, Bu takdirde, x, birtek şekilde $x = x_1 \ldots x_r$ yazılabilir. Burada $x_ix_j = x_jx_i$ ve x_i nin mertebesi n_i dir. Üstelik x_i, x in bir kuvvetine eşittir.

Teorem 10.2.4.2. Bir G Abel period grubu, $S(p)$ Sylow p-altgruplarının direkt çarpımıdır (toplam notasyonunda direkt toplamıdır). Yani $G = \pi_p S(p)$.

İspat. Açık olarak, G nin, S(p) Sylow altgruplarının π_p S(p) direkt çarpımı G nin bir altgrubudur. Fakat lemma 10.2.4.2. den dolayı, şayet $x \varepsilon G$, $n=p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$ mertebesinden ise, bu takdirde, $x = x_1 \ldots x_r$, $x_i \varepsilon S(p_i)$. Yani G nin herbir x elemanı Sylow alt gruplarının direkt çarpımına aittir. Binaenaleyh bu direkt çarpım G grubunun tamamını teşkil eder.

3. Hilbert Uzayı Kavramı

10.3.1. **Hilbert Uzayı Aksiyomları.** Bir Hilbert Uzayı, n-boyutlu bir vektör uzayının (lineer uzayın) genelleştirilmiş bir şekli olduğundan, haliyle n-boyutlu vektör uzayların mühim hassalarının çoğundan istifade edecektir.

TARİF 33. Elemanları, α, β,... ile gösterilen bir H cümlesine *Hilbert uzayı* denir, şayet aşağıdaki H1 – H3 aksiyomları sağlanıyorsa.

H1. *H kompleks bir vektör uzaydır.* Bir kompleks vektör uzayın veya başka bir deyimle, C kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayın hassalarını hatırlatıyoruz. Bilindiği gibi, H da iki *operasyon* tarif edilmiştir:

Toplama ve skaler çarpma, öyleki H bu iki operasyona nazaran *kapılıdır*, ve aynı zamanda şu şartlar sağlanmaktadır.

Toplama:

G1. *Asosyatiflik kanunu*: $\alpha + (\beta+\gamma) = (\alpha+\beta) + \gamma$; $\forall\alpha, \beta,\gamma\varepsilon H$.

G2. 0 *elemanının varlığı*: $\alpha + 0 = \alpha$ $\forall\alpha\varepsilon H$.

G3. *Negatif elemanının varlığı*: Her $\alpha\varepsilon H$ için bir $-\alpha\varepsilon H$ elemanı vardır öyleki,

$$\alpha - \alpha = 0,$$

veya aynı şeyi ifade etmek üzere: $\forall\alpha\varepsilon H$ ve herbir 0 elemanı için, $\alpha+\xi=0$ denklemi çözülebilir.

G4. *Komütatiflik kanunu*: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\forall\alpha,\beta\varepsilon H$.

Skaler çarpım :

M1. *H daki toplamaya nazaran dağılım kanunu*

$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta, \ \forall a\varepsilon C, \ \forall\alpha,\beta\varepsilon H.$$

M2. *C deki toplamaya nazaran dağılım kanunu*

$$(a + b)\,\alpha = a\alpha + b\alpha.$$

M3. *Asosyatiflik kanunu*

$$a(b\alpha) = (ab)\alpha.$$

M4. $1\alpha = \alpha$, burada 1, C nin *birim elemanıdır*.

H2. *Bir iç çarpımın varlığı*: H nin herbir α, β eleman çiftine tekabül eden, *iç çarpım* denilen, ve $(\alpha\ \beta)$ ile gösterilen bir kompleks sayı vardır, öyleki:

İ1. $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$.

İ2. $(a\alpha, \beta) = a(\alpha, \beta)$, $\forall a\varepsilon C$, $\forall\alpha,\beta\varepsilon H$.

İ3. $(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$.

İ4. $(\alpha, \alpha) \geq 0$; $(\alpha, \alpha) = 0$ yalnız ve yalnız $\alpha = 0$.

Bu şartlardan derhal görülür ki,

$$(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$$
$$(a, a\beta) = \bar{a}\,(\alpha, \beta)$$
$$(\alpha, 0) = (0, \alpha) = 0.$$

H3. *Tarif edilen bir norma nazaran tamdır*. Yani, herhangibir $\alpha\varepsilon H$ elemanın *normunu*,

$$\|\alpha\| = (\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

ve α, β iki elemanın uzaklığını

$$\|\alpha - \beta\|$$

şeklinde tarif edersek, H, bu norma nazaran *tamdır* diyoruz, şayet, $(\alpha_n) \subset H$, *Cauchy kriterini* sağlıyan bir dizi ise, yani, herbir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N > 0$ sayısı bulunabilir öyleki, $\forall m, n > N$ için $\|\alpha_m-\alpha_n\| < \varepsilon$ ise, bu takdirde $\alpha\varepsilon H$ elemanı vardır öyleki,

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n - \alpha\| = 0.$$

TARİF 34. Bir Hilbert uzayına *sonsuz boyutludur* diyoruz şayet,

H4. Herbir pozitif n tam sayısı için, n lineer bağımsız $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\ \varepsilon H$ elemanları varsa, yani

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = 0,$$

yalnız ve yalnız $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Sonlu boyut özel halinde, Hilbert uzayına *üniter uzay* diyoruz.

Binaenaleyh, bu husus tasrih edilmedikçe, Hilbert uzayı sonsuz boyutlu bir uzay mânasına gelecektir.

TARİF 35. Bir Hilbert uzayına *ayrılabilir* diyoruz şayet

H5. H da, sayılabilir,

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots$$

cümlesi varsa, öyleki bu cümle, *H da heryerde yoğundur*. Yani, herhangibir $\alpha\varepsilon H$ elemanı ve herhangibir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiği takdirde, üstteki dizide bir α_k elemanı vardır, öyleki, $\|\alpha_k-\alpha\| < \varepsilon$.

H5 şartını sağlıyan bir Hilbert uzayına, ayrılabilir denir.

10.3.2. **Schwarz Eşitsizliği.** Herhangibir λ kompleks sayısı için; H2, İ4 ten dolayı, $\|\alpha-\lambda\beta\|^2 \geq 0$. Yani

$\|\alpha-\lambda\beta\|^2 = (\alpha-\lambda\beta, \alpha-\lambda\beta) = \|\alpha\|^2 - 2\mathrm{Re}\bar{\lambda}(\alpha, \beta) + |\lambda|^2\,\|\beta\|^2 \geq 0$ ve evleviyetle,

$$\|\alpha\|^2 + 2|\lambda|\,|(\alpha,\beta)| + |\lambda|^2\,\|\beta\|^2 \geq 0.$$

Bu ise bize *Schwarz eşitsizliğini* verir, yani,

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\|\,\|\beta\|.$$

Schwarz eşitsizliğinin yardımıyla, H ya ait α, β iki eleman arasındaki θ açısını tarif etmek mümkündür.

$$\cos\theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}.$$

Özel olarak, α, β iki eleman için *ortogonaldır* diyoruz, şayet $\cos\theta = 0$, yani, $(\alpha, \beta) = 0$ ise. H2, İ4 ten dolayı, kendine *ortogonal* olan yegâne eleman 0 elemanıdır.

Üstelik, $(0, \beta) = (\alpha-\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) - (\alpha, \beta) = 0$, yani 0 elemanı, H nın bütün elemanlarına ortogonaldır.

(α, β) iç çarpımının diğer güzel bir hassası da, iki argümanına nazaran sürekli oluşudur. Yani,

Teorem 10.3.2.1. Şayet $\lim_{n\to\infty} \| \alpha_n - \alpha \| = 0$, ve $\lim_{n\to\infty} \| \beta_n - \beta \| = 0$ ise bu takdirde,

$$(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n, \beta_n).$$

İspat.
$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) - (\alpha_n, \beta_n) &= (\alpha, \beta) - (\alpha_n, \beta) + (\alpha_n, \beta) - (\alpha_n, \beta_n)\\ &= (\alpha-\alpha_n, \beta) + \overline{(\beta, \alpha_n)} - \overline{(\beta_n, \alpha_n)}\\ &= (\alpha-\alpha_n, \beta) + \overline{(\beta-\beta_n, \alpha_n)}\\ &= (\alpha-\alpha_n, \beta) + (\alpha_n, \beta-\beta_n)\\ &= (\alpha-\alpha_n, \beta)-(\alpha-\alpha_n, \beta-\beta_n)+(\alpha, \beta-\beta_n).\end{aligned}$$

Binaenaleyh

$$|(\alpha,\beta)-(\alpha_n-\beta_n)| \leq |(\alpha-\alpha_n,\beta)| + |(\alpha-\alpha_n, \beta-\beta_n)| + |(\alpha,\beta-\beta_n)|.$$

Schwarz eşitsizliğinden dolayı,

$$|(\alpha,\beta)-(\alpha_n-\beta_n)| \leq \|\alpha-\alpha_n\| \|\beta\| + \|\alpha-\alpha_n\| \|\beta-\beta_n\| + \|\alpha\| \|\beta-\beta_n\|,$$

ve buradan neticeye varılır.

10.3.3. **Ortogonal altuzaylar.** Bu kısımda esas itibariyle, göstereceğiz ki, ortogonal altuzayların *direkt toplamı* olarak temsil edilen herhangibir H Hilbert uzayı kapalı altuzaylara ayrılabilir.

TARİF 36. H nın A, B iki altuzayı ortogonaldır, şayet bütün $\alpha \varepsilon A$ ve bütün $\beta \varepsilon B$ için, $(\alpha, \beta) = 0$ ise. Bu takdirde $A \perp B$ yazıyoruz.

TARİF 37. A, H nın bir altuzayı olsun. $A^{\perp}$, H nın β elemanlarından müteşekkil bir cümlesi olsun, öyleki, *A nın bütün α elemanları* için, $(\alpha, \beta)=0$. Bu takdirde diyoruz ki $A^{\perp}$, A nın *ortogonal tamamlayıcısıdır* (komplemanı).

Teorem 10.3.3.1 A, H nın bir altuzayı ise, $A^{\perp}$ de H nın bir altuzayıdır. Üstelik, $A^{\perp}$, H da, tarif edilen norma nazaran kapalıdır.

İspat. $A^{\perp}$ nin bir kompleks vektör uzay olduğunu göstermemiz kâfidir. Bunun için $\alpha \varepsilon A$ sabit ve $\beta, \gamma \varepsilon A^{\perp}$ keyfi olsun. b, c kompleks sayılar olduklarına göre,

$$(b\beta + c\gamma, \alpha) = b(\beta,\alpha) + c(\gamma, \alpha) = 0 + 0 = 0,$$

yani $b\beta + c\gamma \varepsilon A^{\perp}$. Bu da gösterir ki $A^{\perp}$, kompleks bir vektör uzayıdır.

Üstelik $A^{\perp}$ kapalıdır. Gerçekten, $\alpha \varepsilon A$, sabit için (ω, α), $\omega \varepsilon H$, ω nın sürekli bir fonksyonudur. Dolayısıyla, $(\omega,\alpha) = 0$ şartını sağlıyan bütün ω ların cümlesi kapalıdır. α, A yı taradığı zaman, $A^{\perp}$ bu gibi bütün cümlelerin arakesitidir. O halde $A^{\perp}$, H da kapalıdır.

TARİF 38. A, B; H nın iki vektör altuzayı olsun. H, A ve B nin *direkt toplamıdır* denir ve

$$H = A \oplus B$$

yazılır, yalnız ve yalnız H nın herbir ω elemanı *bir ve birtek* şekilde

$$\omega = \alpha + \beta, \ \alpha \varepsilon A, \ \beta \varepsilon B,$$

yazılabilirse.

Teorem 10.3.3.2 Şayet $H = A \oplus B$, ve $A \perp B$ ise, bu takdirde A ve B karşılıklı olarak, biri diğerinin ortogonal tamamlayıcısıdır.

İspat. Göstermemiz gerekir ki $\omega \perp B$ ise, $\omega \varepsilon A$ dır. Bu ise açıktır, zira $\omega = \alpha + \beta$ dan $\beta = \omega - \alpha$ ve $\| \beta \|^2 = (\omega - \alpha, \omega - \alpha) = (\omega - \alpha, \beta) = (\omega,\beta) - (\alpha, \beta) = 0-0=0$. Dolayısıyla $\beta=0$, $\omega=\alpha \varepsilon A$.

Bu iki teoremi birleştirirsek netice olarak şu teoreme varırız.

Teorem 10.3.3.3. H, ortogonal alt uzayların bir *direkt toplamı* şeklinde temsil edilebiliyorsa, kapalı altuzaylara ayrılabiliyordur.

Karşıt olarak göstereceğiz ki, A, H nın kapalı bir altuzayı ise, H daima $H=A \oplus A^{\perp}$ şeklinde ayrılabilir.

Bu hassayı şu şekilde ifade edebiliriz.

Teorem 10.3.3.4. A, H nın herhangibir kapalı lineer altuzayı olsun. $\omega \varepsilon H$ verildiği takdirde, birtek $\alpha \varepsilon A$ elemanı vardır öyleki, $\omega-\alpha \perp A$.

İspat. Ne demek istediğimizin iyi anlaşılabilmesi için, bir özel durumu tetkik edelim. H olarak, bildiğimiz R^2–Euclid uzayını gözönüne alalım. A, reel ve $A^{\perp}$ imajiner eksen olsun. $\omega \varepsilon R^2$ herhangibir vektör ise, $R^2=A \oplus A^{\perp}$ ayrılışını temin edebilmek için, ω nın ucundan A eksenine bir *dik* indirilir. Buradan $\alpha \varepsilon A$ vektörü tesbit edilir ve $\beta = \omega - \alpha \varepsilon A^{\perp}$. Bu kaideyi en umumi bir Hilbert uzayına teşmil edebilmemiz için bir *dik indirmeyi*, bu kaidenin temel bir hassası ile *karakterize* edebilmeliyiz. Yani bir ucu ω da diğer ucu reel ekseni tarayan bütün vektörler arasında uzunluğu en küçük olan vektör dik vektördür.

Şimdi Hilbert uzayına geçer ve ω nın uzunluğunu $\| \omega \|$ ile gösterirsek, aranılan vektör, *şayet mevcut* ise, min $\| \omega - \theta \|$, $\theta \varepsilon A$.

Böyle bir vektörün mevcut olduğunu gösterebilmek için, farzedelim ki d, $\| \omega - \theta \|$ vektörlerinin, $\theta \varepsilon A$ için en büyük alt sınırıdır. Alt sınırın tarifinden dolayı, bir (θ_n), $\theta_n \varepsilon A$, dizisi vardır öyleki, $\| \omega-\theta_n \| \to d$.

Aşağıdaki özdeşlikten hareket ediyoruz:

$$\| 2\omega - \theta_m - \theta_n \|^2 + \| \theta_m - \theta_n \|^2 = 2 \| \omega-\theta_m \|^2 + 2 \| \omega-\theta_n \|^2.$$

Halbuki

$$\| 2\omega - \theta_m - \theta_n \|^2 = 4 \| \omega - \frac{\theta_m + \theta_n}{2} \|^2 \geq 4d^2.$$

Dolayısıyla

$$\| \theta_m - \theta_n \|^2 \leq 2 \| \omega - \theta_m \|^2 + 2 \| \omega - \theta_n \|^2 - 4 d^2.$$

Binaenaleyh, $m, n \to \infty$ için $\| \theta_m - \theta_n \| \to 0$.

H, tam olduğundan, θ_n bir $\alpha \varepsilon H$ limitine yakınsar. Fakat A kapalı olduğu için $\alpha \varepsilon A$. Süreklikten dolayı da, $\| \omega - \alpha \| = d$.

Şimdi, $\theta \varepsilon A$ herhangibir eleman olsun. Bu takdirde $\alpha + \varepsilon\theta \varepsilon A$, ve

$$\| \omega - \alpha - \varepsilon\theta \|^2 = \| \omega - \alpha \|^2 - 2\mathrm{Re}\{\bar{\varepsilon}(\omega - \alpha, \theta)\} + |\varepsilon|^2 \|\theta\|^2 \geq d.$$

O halde,

$$-2\mathrm{Re}\ \{\bar{\varepsilon}(\omega - \alpha, \theta)\} + |\varepsilon|^2 \|\theta\|^2 \geq 0.$$

ε keyfi olduğundan,

$$(\omega - \alpha, \theta) = 0, \ \theta \varepsilon A.$$

Yani, $\omega - \alpha \perp A$.

Birteklik hassası aşikardır. Farzedelim ki,

$$\omega = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2; \ \alpha_1, \alpha_2 \varepsilon A, \ \beta_1, \beta_2 \varepsilon A^{\perp}.$$

O halde; $\alpha_2 - \alpha_1 \varepsilon A$, $\beta_1 - \beta_2 \varepsilon A^{\perp}$. Yani, $(\alpha_2 - \alpha_1, \beta_1 - \beta_2) = 0$. Fakat, $\beta_1 - \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1$. Dolayısıyla, $(\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1) = 0$, ve $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$.

Teorem 10.3.3.5. H nın herhangibir A lineer altuzayı,

$$A^{\perp\perp} = \bar{A}, \ A^{\perp} = \bar{A}^{\perp}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. $A \subset H$ kapalı bir lineer altuzay ise gösterdik ki, $H = A \oplus A^{\perp}$. Teorem 10.3.3.2 den ötürü $A^{\perp\perp} = A$. Binaenaleyh, $A \subset H$ herhangibir lineer alt uzay ise, $A \subset A^{\perp\perp}$. Fakat *komplemanlara* geçersek $A \subset \bar{A} \Rightarrow A^{\perp} \supset A^{\perp}$, $A^{\perp\perp} \subset \bar{A}^{\perp\perp} = \bar{A}$. Fakat $A^{\perp\perp}$ kapalı olduğundan, $A \subset A^{\perp\perp} \subset \bar{A} \Rightarrow A^{\perp\perp} = \bar{A}$, Üstelik, $\bar{A}^{\perp} = A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$. Yani A ve $\bar{A}$ aynı tamamlayıcıyı haizdirler.

Şimdi $A, B \subset H$ iki lineer alt uzay olsun. $\alpha \varepsilon A$, $\beta \varepsilon B$ olmak üzere, bütün $\alpha + \beta$ elemanlarının cümlesini $A + B$ ile gösterelim. $A + B$ nin herhangibir elemanı, umumiyetle, $\alpha + \beta$ şeklinde birtek olarak yazılamaz. Birtek olarak temsil edildiği takdirde $A \cap B = 0$ ve bu halde, $A \oplus B$ notasyonu kullanılmaktadır.

Teorem 10.3.3.6. $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

İspat. Yine komplemanlara geçmek suretiyle, $A \subset A + B \Rightarrow (A + B)^{\perp} \subset A^{\perp}$. Aynı şekilde, $(A+B)^{\perp} \subset B^{\perp}$. Yani

$(A+B)^{\perp} \subset A^{\perp} \cap B^{\perp}$. Diğer taraftan, $A^{\perp} \cap B^{\perp} \subset A^{\perp} \Rightarrow (A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp} \supset A^{\perp\perp} = A$, ve aynı şekilde, $(A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp} \supset B$. Yani,

$A + B \subset (A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp}$, $(A+B)^{\perp} \supset (A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$. İki netice karşılaştırıldığı takdirde teoremin doğru olduğu anlaşılır.

Teorem 10.3.3.7. A, B kapalı ve $A \perp B$ ise, $A + B$ kapalıdır.

İspat. Teorem 10.3.3.6 dan dolayı $(A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp} = (A + B)^{\perp\perp}$ ve teorem 10.3.3.5 ten dolayı da $(A+B)^{\perp\perp} = \overline{A+B}$. Yani $(A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp} = \overline{A+B}$. Binaenaleyh, $A + B$ nin kapalı olduğunu gösterebilmek için $(A^{\perp} \cap B^{\perp})^{\perp} \subset A + B$ göstermek kâfidir. Farzedelim ki $\omega \perp A^{\perp} \cap B^{\perp}$. Bu takdirde $\omega = \alpha + \alpha^{\perp} = \beta + \beta^{\perp}$; $\alpha \varepsilon A^{\perp}$, $\alpha^{\perp} \varepsilon A^{\perp}$, $\beta \varepsilon B$, $\beta^{\perp} \varepsilon B^{\perp}$ yazılabilir. Dolayısıyla, $\omega = \alpha + \alpha^{\perp}$ nin heriki tarafına $-\beta$ ilâve ederek $\omega - \alpha - \beta = \alpha^{\perp} - \beta = \beta^{\perp} - \alpha \varepsilon A^{\perp} \cap B^{\perp}$. Diğer taraftan, $\omega \perp A^{\perp} \cap B^{\perp}$ hipotez gereğince ve $\alpha + \beta \perp A^{\perp} \cap B^{\perp}$ bir üstteki teoremden dolayı. Şu halde $\omega - \alpha - \beta$ kendisine ortogonaldır. Yani $\omega = \alpha + \beta$, veya $\omega \varepsilon A + B$.

10.3.4. **Sınırlı lineer Fonksiyonel.** H, bir Hilbert uzayı olsun (*tam* olabilir veya olmıyabilir).

TARİF 39. H üzerinde *lineer fonksiyonel* diye, H da tarifli ve kompleks değerler alan bir L fonksyonuna denir öyle ki,

$$L(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 L(\omega_1) + c_2 L(\omega_2); \ c_1, c_2 \varepsilon C; \ \omega_1, \omega_2 \varepsilon H.$$

L fonksyoneli sınırlıdır denir, şayet bir $M > 0$ sabiti için

$$|L(\omega)| \leq M \|\omega\|, \ \forall \omega \varepsilon H.$$

Bir lineer fonksiyonel *daima süreklidir.* Zira,

$$\|\omega - \omega_0\| < \varepsilon \Rightarrow |L(\omega) - L(\omega_0)| < M\varepsilon.$$

İlerde, şu lemmadan faydalanacağız.

Lemma 10.3.4.1. Bir H Hilbert uzayında, herbir sınırlı lineer fonksyonel bir sabit $\sigma \varepsilon H$ için $L(\omega) = (\omega, \sigma)$ şeklinde yazılabilir.

İspat. İşaret edelim ki (ω, σ) sınırlı bir lineer fonksiyoneldir. Zira, Schwarz eşitsizliğinden dolayı,

$$|(\omega, \sigma)| \leq \|\sigma\| \|\omega\|.$$

Farzedelim ki L, H üzerinde sınırlı bir lineer fonksyoneldir. L sürekli olduğunda $L(\omega)$, kapalı bir A lineer uzayında sıfırdır. $L(\omega)$ özdeş olarak sıfır değilse, bir θ elemanı için $L(\theta) \neq 0$. Teorem 10.3.3.4 ten dolayı,

$$\theta = \alpha + \beta, \ \alpha \varepsilon A, \ \beta \perp A,$$

yazabiliriz. O halde

$$L(\theta) = L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta) = L(\beta) \neq 0,$$

ve dolayısıyla $\beta \neq 0$. Bu sebepten,

$$\sigma = \overline{L(\beta)} \|\beta\|^{-2} \beta.$$

Aşikâr olarak $\sigma \perp A$ ve

$$L(\sigma) = \overline{L(L(\beta)} \, \| \beta \|^{-2} \, \beta) = |L(\beta)|^2 \| \beta \|^{-2}.$$

Fakat,

$$\| \sigma \|^2 = |L(\beta)|^2 \| \beta \|^{-2}.$$

Şu halde,

$$L(\sigma) = \| \sigma \|^2. \qquad (10.3.4.1)$$

Şimdi, her ω için $L(\omega)\sigma - L(\sigma)\omega$ elemanı A ya aittir, çünki

$$L(L(\omega)\sigma - L(\sigma)\omega) = L(\omega)L(\sigma) - L(\sigma)L(\omega) = 0.$$

Dolayısıyla,

$$L(\omega)\sigma - L(\sigma)\omega \perp \sigma.$$

Yani,

$(L(\omega)\sigma - L(\sigma)\omega, \sigma) = (L(\omega)\sigma, \sigma) - (L(\sigma)\omega, \sigma) = L(\omega) \|\sigma\|^2 - L(\sigma)(\omega, \sigma) = 0$, ve (10.3.4.1) gözönünde tutulursa, $L(\omega) = (\omega, \sigma)$ bulunur.

Bundan sonra gelen kısımda, Hilbert uzayının, kare-integrallenebilir fonksyonların L^2 Lebesgue uzayı tarafından bir *tahakkukunu*, yani L^2 nin *tam ayrılabilir*, ve *sayılabilir sonsuzlukta* bir Hilbert uzayı olduğunu göstereceğiz. Bunun için ölçü kavramını ve bu kavrama dayanan integrali tarif etmemiz gerekiyor.

4. Lebesgue Ölçüsü ve İntegrali Kavramı.

10.4.1. **Probleme giriş.** Bilindiği üzere modern integral teorileri bir *nokta cümlesinin ölçüsü* kavramına dayanmaktadır. Bu fikir ilk defa olarak Borel ve Lebesgue tarafından Analize sokulmuştur. Gaye, meselâ R^1–Euclid uzayında (reel eksen) bir aralığın uzunluğu mefhumunu yine aynı uzayda, bu sefer keyfi bir nokta cümlesine teşmil etmektir.

(a, b) aralığında sınırlı bir E nokta cümlesini gözönüne alalım. Hatırlatalım ki, (a, b) aralığı üzerinde, E nin *tamamlayıcı cümlesi* diye, E ye ait olmıyan, (a,b) nin noktalarının cümlesine denir. Tamamlayıcı cümleyi burada E′ ile göstermek daha uygun olacaktır.

Şimdi, (a, b) de, E nin bütün noktalarını ihtiva eden, ortak noktaları olmıyan, ve en fazla sayılabilir sonsuzlukta olan bir Γ aralık koleksiyonunu gözönüne alalım. l, Γ ya ait aralıkların uzunluklarının toplamı olsun. l, (a, b) nin L uzunluğundan büyük olamaz. E yi bu şekilde örten bütün Γ ları düşünelim. Herbir Γ ya bir $l > 0$ sayısı tekabül eder. Bu l sayılarının pozitif veya sıfır olan bir altsınırı vardır.

Bu altsınıra E nin dış ölçüsü denir, ve $m_e(E)$ ile gösterilir. Daima $m_e E \geq 0$.

E nin iç ölçüsü ise m_i (E) ile gösterilir, ve

$$m_i(E) = L - m_e E'$$

şeklinde tarif edilir.

Tarif olarak, sınırlı bir E cümlesine, (Lebesgue) mânada ölçülebilir denir, ve $m(E)$ ile gösterilir, şayet $m(E) = m_i(E) = m_e(E)$ ise.

Ölçünün bu tarifinde şu hususlara dikkat edilmelidir: E cümlesi bir aralıktan ibaret ise, ölçüsü aralığın uzunluğuna eşittir. Tarif edilen ölçü, nokta cümlelerinin *toplanabilir* (aditif) bir fonksiyonudur, yani, tarif o şekildedir ki, birbirini kesmiyen iki cümlenin *birleşiminin* ölçüsü, cümlelerin ölçülerinin toplamıdır. Nihayet ölçü kavramının temel taşı *açık cümledir. Açık* (ve dolayısıyla kapalı) *cümlelerin* ölçü teorisi kurulduğu anda, herhangibir E cümlesinin *dış ölçüsü*, E yi ihtiva eden açık cümlelerin ölçülerinin alt sınırıdır. İç ölçü ise, E nin ihtiva ettiği kapalı cümlelerin ölçülerinin üst sınırıdır. Bu iki sayı eşit ise, E ölçülebilir diyoruz; E nin ölçüsü bu ikisinin ortak değeridir.

Bu fikirleri, en genel uzaylar için değerlendireceğiz. Önce bilinen bazı kavramları hatırlatıyoruz.

10.4.2. Bir X uzayını gözönüne alalım; $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ elemanlarına *nokta* diyoruz. A, X in bir altcümlesi ise $x \varepsilon A$ yazıyoruz şayet x noktası, A nın bir elemanı ise. Herbir x noktası için $x \varepsilon X$. A, B, X in iki altcümlesi ise $A \subset B$ veya aynısı olan $B \supset A$ yazıyoruz şayet A, B nin bir altcümlesi ise, yani A nın herbir noktası, B nin bir noktası ise. Boş cümle, $\varnothing$ ile gösteriliyor, hiçbir noktası olmıyan cümledir. Boş cümle, herbir alt cümlenin bir altcümlesi olarak mütalaa edilecektir. O halde $\varnothing \subset A$, her $A \subset X$ için. Gözönüne alınan cümleler daima X e aittir, bu hususu her defasında tekrarlamıyacağız.

Bir A_n, $n=1,2,\ldots$ cümle dizisi verildiği takdirde, bu altcümlelerin *birleşimi*, $\cup A_n$ veya $\bigcup_{n=1}^{n=N} A_n$ (sonlu bir toplam ise) ile gösterilir, en az bir A_n ye ait olmak üzere, bütün noktaların cümlesidir. *Arakesit* ise, $\cap A_n$ veya $\bigcap_{n=1}^{n=N} A_n$ (sonlu bir arakesit ise), ile gösterilir, bütün A_n lere ait olmak üzere, bütün noktaların cümlesidir.

A ve B cümleleri verildiği takdirde, B ye ait olmıyan, A nın bütün noktalarının cümlesine, A ve B nin farkı denir ve A–B ile gösterilir.

(A_n) *sonsuz* bir dizi ise; *bütün x noktalarının cümlesine*, öyleki, n nin *sonsuz değerleri* için $x \varepsilon A_n$, A_n dizisinin *üstlimiti* denir, ve lim sup A_n yazılır.

n_0 dan itibaren, bütün A_n cümlelerine ait bütün x noktalarının cümlesine, (A_n) dizisinin *altlimiti* denir ve lim inf A_n yazılır. Şayet

$$\lim\inf A_n = \lim\sup A_n$$

ise, (A_n) dizisi *yakınsaktır* denir, ve bu takdirde üst ve alt limitlerine *limit* denir ve lim A_n yazılır.

Not. Lim sup ve lim inf yerine $\overline{\lim}$ ve $\underline{\lim}$ notasyonları da kullanılabilir.

Misal. Önce bir tarif verelim: Bir (A_n) dizisine *büyüyen* dizi denir, şayet $A_n \subset A_{n+1}$ ise, ve bu takdirde $\cap_1^\infty A_n = A_1$; *küçülen* dizi denir, şayet $A_n \supset A_{n+1}$ ise, ve bu takdirde, $\cup_1^\infty A_n = A_1$.

Bu hatırlatıldıktan sonra,

$$(M_n) : M_n = \cup_1^\infty A_i,\ (N_n) : N_n = \cap_1^\infty A_i$$

(küçülen ve büyüyen) dizilerini gözönüne alalım. Diyorum ki,

$$\underline{\lim}\ A_n = \cup_1^\infty N_n,\ \overline{\lim}\ A_n = \cup_1^\infty M_n.$$

Gerçekten, $\cup_1^\infty N_n$ ye ait bir nokta, N_n lerden en az birine aittir, diyelim ki N_{n_0} a aittir. Bu takdirde, $n \geq n_0$ olmak üzere bütün A_n lere aittir, yani $\underline{\lim}\ A_n$ ye aittir. Karşıt olarak, $\underline{\lim}\ A_n$ ye ait bir nokta, bir n_0 dan itibaren bütün A_n lere aittir, ve dolayısıyla N_{n_0} a aittir. Şu halde $\cup_1^\infty N_n$ ye aittir.

Aynı şekilde, $\cap_1^\infty M_n$ ye ait bir nokta bütün M_n lere aittir. Binaenaleyh, bu nokta sonsuz sayıda A_n lere aittir, yani $\overline{\lim}\ A_n$ ye aittir. Karşıt olarak, $\overline{\lim}\ A_n$ ye ait bir nokta sonsuz sayıda A_n lere aittir, ve dolayısıyla bütün M_n lere aittir, yani $\cap_1^\infty M_n$ ye aittir.

TARİF 40. Bir $A \subset X$ cümlesinin bütün noktalarında 1 e, ve $A' = X - A$ tamamlayıcı cümlesinin bütün noktalarında 0 a eşit olan $k_A(x)$ fonksyonuna A nın *karakteristik fonksiyonu* denir.

Açıkça görülür ki, $A = \cup A_n$ ve $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, ise, $k_A(x) = \Sigma k_{A_n}(x)$.

Teorem 10.4.2.1. Şayet $\lim\sup A_n = P$ ve $\lim\inf A_n = Q$ ise, bu takdirde,

$$k_P(x) = \lim\sup k_{A_n}(x)$$
$$k_Q(x) = \lim\inf k_{A_n}(x).$$

İspat. $k_P(x) = 1$, yalnız ve yalnız, n nin sonsuz çoklukta değerleri için $x \varepsilon A_n$ ise. Yani $k_P(x) = 1$, yalnız ve yalnız, n nin sonsuz çoklukta değerleri için $k_{A_n}(x) = 1$ ise. Neticede, $k_P(x) = 1$, yalnız ve yalnız $\lim\sup k_{A_n}(x) = 1$ ise. Halbuki $k_P(x)$ ve $\lim\sup k_{A_n}(x)$, her ikisi de yalnız 0 ve 1 değerlerini alırlar. Şu halde, bütün x ler için $k_P(x) = \lim\sup k_{A_n}(x)$.

Aynı muhakeme tarzıyla, $k_Q(x) = 1$, yalnız ve yalnız bir n_0 sayısından sonra gelen bütün $n \geq n_0$ için $x \varepsilon A_n$ ise. Yani $k_Q(x) = 1$, yalnız ve yalnız, $n \geq n_0$ için $k_{A_n}(x) = 1$ ise. Neticede, $k_Q(x) = 1$, yalnız ve yalnız $\lim\inf k_{A_n}(x) = 1$ ise. Halbuki $k_Q(x)$ ve $\lim\inf A_n(x)$ herikisi de yalnız 0 ve 1 değerlerini alırlar. Şu halde eşitlik bütün x lere şamildir.

Teorem 10.4.2.2. (A_n) dizisi A cümlesine yakınsaktır, yalnız ve yalnız

$$\lim k_{A_n}(x) = k_A(x).$$

İspat. Farzedelim ki $A = \lim A_n$. Bu takdirde $P = A = Q$,

$$\lim\sup k_{A_n}(x) = k_P(x) = k_A(x) = k_Q(x) = \lim\inf k_{A_n}(x).$$

Karşıt olarak $k_A(x) = \lim k_{A_n}(x)$ farzedelim. Bu takdirde

$$\lim k_{A_n}(x) = \lim\sup k_{A_n}(x) = \lim\inf k_{A_n}(x),$$

ve dolayısıyla,

$$k_A(x) = k_P(x) = k_Q(x).$$

Yani $A = P = Q$. Bu da demektir ki $A = \lim A_n$.

10.4.3. **Yarı halkalar ve σ-halkalar.** § 10.4.1. deki fikirleri bu ve bundan sonraki kısımlarda, en genel bir X uzayına tatbik etmeye çalışacağız.

TARİF 41. X uzayına ait nokta cümlelerinin bir Γ koleksiyonuna *yarı-halka* denir, şayet şu şartlar asağlanıyorsa

Γ1. $\varnothing \varepsilon \Gamma$

Γ2. $A \varepsilon \Gamma,\ B \varepsilon \Gamma \Rightarrow A \cap B \varepsilon \Gamma$

Γ3. $A \varepsilon \Gamma,\ B \varepsilon \Gamma$ ve $B \subset A \Rightarrow A - B = \bigcup_{n=1}^{n=N} C_n$,

$C_n \varepsilon \Gamma$ ve $C_i \cap C_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Misal. R^1-Euclid uzayında $\Gamma = \{(a,b]\}$, sol yarı-açık aralıkların koleksyonu, için Γ1,Γ2 aşikâr olarak sağlanmıştır. Γ3 e gelince, A, B iki sol yarı açık aralık olsun, öyleki $B \subset A$. Bu takdirde ya $A - B = \varnothing$; ya $A - B = C_1 \varepsilon \Gamma$; veya $A - B = C_1 \cup C_2$, $C_1, C_2 \varepsilon \Gamma$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Binaenaleyh Γ3 sağlanmıştır.

TARİF 42. X uzayına ait nokta cümlelerinin *boş olmıyan* bir Λ koleksyonuna bir *σ-halka* denir şayet

Λ1. $A_n \varepsilon \Lambda$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ise $\cup_1^\infty A_n \varepsilon \Lambda$

Λ2. $A, B \varepsilon \Lambda$ ise $A - B \varepsilon \Lambda$.

Teorem 10.4.3.1.. Her *σ-halka* bir *yarı-halkadır.*

İspat. Γ1 *sağlanmıştır*; zira Λ ya ait en az bir A cümlesi vardır ve Λ2 den dolayı, $A - A = \varnothing \varepsilon \Lambda$. Γ2 *sağlanmıştır*; zira, $A = \cup A_n$, $A_n \varepsilon \Lambda$, vazedilirse Λ1 den dolayı $A \varepsilon \Lambda$. Λ2 den dolayı $A - A_n = A'_n \varepsilon \Lambda$, $n = 1, 2, \ldots$. O halde,

$$\cap A_n = (\cup A'_n)' = A - \cup A_n' \varepsilon \Lambda.$$

Bundan başka, $\cup A_n \varepsilon \Lambda$, $\cap A_n \varepsilon \Lambda$ dan dolayı,

$$\lim\sup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,\ \lim\inf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

ikisi de Λ ya aittirler.

Şu hususu da işaret etmek isteriz ki $\varnothing \varepsilon \Lambda$ bilindiği anda, $A_n \varepsilon \Lambda$, $n = 1, \ldots, q$, $\Rightarrow \cup_1^q A_n \varepsilon \Lambda$ ve dolayısıyla aynı zamanda $\cap_1^q A_n \varepsilon \Lambda$. Nihayet Γ3 ün

sağlandığı yukardaki mülâhazaların bir neticesidir. Gerçekten, şu *ayrılım* daima mümkündür:

$$\cup E_n = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup (E_3 - E_1 - E_2) \cup \ldots .$$

Burada,

$$G_1 = E_1,\ G_2 = E_2 - E_1, \ldots,$$

ve üstelik, Λ2 den dolayı

$$G_1 \varepsilon \Lambda,\ G_2 \varepsilon \Lambda, \ldots, G_i \cap G_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

TARİF 43. Γ *yarı-halkasının* herbir A elemanına, bir μ *(A) reel sayısını* tekabül ettirelim. μ *(A)*, Γ üzerinde bir ölçüdür denir, şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa,

M1. $\mu(\varnothing) = 0$ ve $0 \leq \mu(A) \leq \infty$, $\forall A \varepsilon \Gamma$.

M2. $A \varepsilon \Gamma$, $A_n \varepsilon \Gamma$ $(n = 1,2,\ldots)$ ve $A \subset \cup_1^\infty A_n$ ise, bu takdirde, $\mu(A) \leq \Sigma_1^\infty \mu(A_n)$.

M3. $A \varepsilon \Gamma$, $A_n \varepsilon \Gamma$ $(n = 1,2,\ldots, N)$, $A_i \subset A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ve $A \supset \cup_1^N A_n$ ise, bu takdirde

$$\mu(A) \geq \Sigma_1^N \mu(A_n).$$

Teorem 10.4.3.2. $\mu(A)$, Γ üzerinde bir ölçü ise aşağıdaki hassaları haizdir

1. $A \varepsilon \Gamma$, $A_n \varepsilon \Gamma$ $(n = 1,2,\ldots,N)$ ve $A \subset \cup_1^N A_n$ ise, bu takdirde, $\mu(A) \leq \Sigma_1^N \mu(A_n)$.

2. *Ölçü monotondur*, yani, $A \varepsilon \Gamma$, $B \varepsilon \Gamma$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. *Ölçü tamamen toplanabilir (aditif)*. Yani,

$A \varepsilon \Gamma$, $A_n \varepsilon \Gamma$ $(n = 1,2, \ldots)$, $A_i \cup A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ve $A = \cup_1^\infty A_n$ ise, $\mu(A) = \Sigma_{1\infty} \mu(A_n)$.

İspat. $n > N$ için $A_n = \varnothing$ alınırsa, 1. hassa M2 den dolayı sağlanmıştır. 2. hassa ise yine M2 nin açık bir neticesidir. Bunu görebilmek için, M2 de $A_1 = B$ ve $n \geq 2$ için $A_n = \varnothing$ almak kâfidir. 3. ye gelince, M2 den dolayı $\mu(A) \leq \Sigma_1^\infty \mu(A_n)$, ve M3 den dolayı, her N için $\mu(A) \geq \Sigma_1^N \mu(A_n)$.

10.4.4. **Dış ölçü.** Yukarda tarif edilen μ (A), $A \varepsilon \Gamma$, ölçüsü yardımı ile, bu sefer X e ait keyfi bir S cümlesinin dış ölçüsünü tarif edeceğiz. Bundan sonra farzedeğiz ki, $X = \cup P_n$, $P_n \varepsilon \Gamma$ ve bütün n ler için $\mu(P_n) < \infty$. Bu keyfiyeti ifade etmek için μ ölçüsüne *σ-sonlu* diyeceğiz.

TARİF 44. $S \subset X$ keyfi bir nokta cümlesi olsun. S yi ihtiva eden mümkün bütün $\cup_1^\infty A_n$, $A_n \varepsilon \Gamma$, cümlelerini gözönüne alalım. Bu takdirde, S nin dış ölçüsü, $\mu_e(S)$ ile gösterilir, aşağıdaki alt sınıra denir.

$$\mu_e(S) = \text{altsınır } \Sigma_1^\infty \mu(A_n).$$

$X = \cup P_n$ olduğundan, S en az bir $\cup A_n$ cümlesi ile örtülmektedir, ve böylece tarif bir mâna ifade eder.

Teorem 10.4.4.1. Bir dış ölçü aşağıdaki hassaları haizdir.

1. Dış ölçü ***alttoplanabilir*** (subaditif). Yani S_n, $n = 1,2,\ldots$, keyfi iseler

$$\mu_e(\cup S_n) \leq \Sigma \mu_e(S_n)$$

2. $\mu_e(\varnothing) = 0$ ve $0 \leq \mu_e(S) \leq \infty$, $\forall S$.

3. *Dış ölçü monotondur*. Yani $S \subset T$ ise, $\mu_e(S) \leq \mu_e(T)$.

İspat. Farzedebiliriz ki $\Sigma \mu_e(S_n) < \infty$. $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğine göre, $A_{nj} \varepsilon \Gamma$, $(n, j = 1,2,\ldots)$ cümleleri vardır, öyleki, $S_n \subset \cup_j A_{nj}$ ve alt sınırın tarifinden dolayı her n için,

$$\Sigma_j \mu(A_{nj}) < \mu_e(S_n) + \varepsilon/2^n.$$

Bu takdirde $\cup S_n \subset \cup_n \cup_j A_{nj}$ ve

$$\Sigma_n \Sigma_j \mu(A_{nj}) < \Sigma \mu_e(S_n) + \varepsilon .$$

Dolayısıyla

$$\mu_e(\cup S_n) < \Sigma \mu_e(S_n) + \varepsilon .$$

2. nin ispatına gelince, $\mu_e(S)$ nin tarifi gereğince $\mu_e(S) \geq 0$. Şayet $S = \varnothing$ ise, bütün n ler için $A_n = \varnothing$ olmak üzere, $S, \cup A_n$ ile örtülebilir. Bu takdirde

$$\mu_e(S) \leq \Sigma \mu(A_n) = 0,$$

yani $\mu_e(\varnothing) = 0$.

Nihayet, $S \subset T$ ve $T \subset \cup A_n$, $A_n \varepsilon \Gamma$, ise $S \subset \cup A_n$. Dolayısıyla, $\mu_e(S) \leq \mu_e(T)$.

Teorem 10.4.4.2. $A \varepsilon \Gamma$ ise, $\mu_e(A) = \mu(A)$.

İspat. $A \subset \cup A_n$, $A_n \varepsilon \Gamma$ $(n = 1,2,\ldots)$ ise, bu takdirde, M2 den dolayı $\mu(A) \leq \Sigma \mu(A_n)$. Bu ise A nın mümkün bütün $\cup A_n$ örtüleri için doğrudur. O halde

$$\mu(A) \leq \mu_e(A).$$

Diğer taraftan A kendi kendini örter. Dolayısıyla, $\mu_e(A) \leq \mu(A)$.

10.4.5. **Ölçülebilir cümle.** $E \subset X$ bir cümle ise, E nin X e nazaran *tamamlayıcısını* yine E′ ile göstereceğiz. Şimdi, E, S keyfi verilmiş iki cümle olsun. Bu takdirde

$$S = (S \cap E) \cup (S \cap E')$$

yazılabilir.

Binaenaleyh, μ_e nın alttoplanabilir hassasından dolayı,

$$\mu_e(S) \leq \mu_e(S \cap E) + \mu_e(S \cap E').$$

TARİF 45. E cümlesine *μ-ölçülebilir*, veya sadece *ölçülebilir* denir, şayet herbir S cümlesi için,

$$\mu_e(S) = \mu_e(S \cap E) + \mu_e(S \cap E').$$

Ölçülebilir bütün cümlelerin koleksyonunu Λ ile göstereceğiz.

Teorem 10.4.5.1. $E \varepsilon \Lambda$ ise $E' \varepsilon \Lambda$. Üstelik X, $\varnothing \varepsilon \Lambda$.

İspat. Teoremin birinci kısmı, tarifdeki simetrinin tabii bir neticesidir. Diğer taraftan, $E = X$ ve S keyfi ise, $S \cap E = S$ ve $S \cap E' = \varnothing$. Dolayısıyla, $\mu_e(S) = \mu_e(S) + \mu_e(\varnothing) = \mu_e(S \cap E) + \mu_e(S \cap E')$ olduğundan, $E = X \varepsilon \Lambda$, yani ölçülebilir.

Teorem 10.4.5.2. Şayet $E_1 \varepsilon \Lambda$, $E_2 \varepsilon \Lambda$ ise, bu takdirde $E_1 \cup E_2 \varepsilon \Lambda$. Üstelik, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ve S keyfi ise, bu takdirde

$$\mu_e(S \cup (E_1 \cup E_2)) = \mu_e(S \cap E_1) + \mu_e(S \cap E_2),$$

ve özel olarak,

$$\mu_e(E_1 \cup E_2) = \mu_e(E_1) + \mu_e(E_2).$$

İspat. $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup E_1' \cap E_2$ ve $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cap E_2'$. Dolayısıyla, μ_e nin alttoplanabilir hassası gözönünde tutulur, ve önce E_2 sonra da E_1 ölçülebilir hipotezleri kullanılırsa,

$$\mu_e(S) \leq \mu_e(S \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu_e(S \cap (E_1 \cup E_2)') \leq$$
$$\mu_e(S \cap E_1) + \mu_e((S \cap E_1') \cup E_2) + \mu_e((S \cap E_1') \cap E_2')$$
$$= \mu_e(S \cap E_1) + \mu_e(S \cap E_1') = \mu_e(S).$$

Binaenaleyh,

$$\mu_e(S) = \mu_e(S \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu_e(S \cap (E_1 \cup E_2)'),$$

yani $E_1 \cup E_2$ ölçülebilir.

Şimdi, farzedelim ki $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, veya aynı şeyi ifade eden, $E_1' \cap E_2 = E_2$.

$E_1 \varepsilon \Lambda$ olduğundan, tarif gereğince,

$$\mu_e(S) = \mu_e(S \cap E_1) + \mu_e(S \cap E_1').$$

Bu eşitlikte, S yerine $S \cap (E_1 \cup E_2)$ yazılır ve $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ veya $E'_1 \cap E_2 = E_2$ gözönünde tutulursa,

$$\mu_e(S \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu_e(S \cap E_1) + \mu_e(S \cap E_2)$$

bulunur.

Aşağıdaki teorem bu teoremin neticesidir.

Teorem 10.4.5.3. Şayet $E_n \varepsilon \Lambda$, $(n=1,\ldots,N)$ ise, bu takdirde $\cup_1^N E_n \varepsilon \Lambda$ ve $\cap_1^N E_n \varepsilon \Lambda$. Üstelik, $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ise, bu takdirde

$$\mu_e(\cup_1^N E_n) = \Sigma_1^N \mu_e(E_n).$$

Dolayısıyla, dış ölçü, Λ üzerinde, *sonlu toplanabilir.*

İspat. Sadece $\cap_1^N E_n \varepsilon \Lambda$ nın ispatı gerekir. Bu ise $\cap E_n = (\cup E'_n)'$ özdeşliğinin bir neticesidir.

Teorem 10.4.5.4. $E_1, E_2 \varepsilon \Lambda$ ise, bu takdirde $E_1 - E_2 \varepsilon \Lambda$.

İspat. $E_1 - E_2 = E_1 \cap E'_2$ özdeşliğinin bir neticesidir.

Teorem 10.4.5.5. Şayet $E_n \varepsilon \Lambda$ $(n = 1,2,\ldots)$ ise, bu takdirde, $\cup_1^\infty E_n \varepsilon \Lambda$. Üstelik $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ve S keyfi ise,

$$\mu_e(S \cap (\cup_1^\infty E_n)) = \Sigma_1^\infty \mu_e(S \cap E_n),$$

ve özel olarak

$$\mu_e(\cup_1^\infty E_n) = \Sigma_1^\infty \mu_e(E_n).$$

Binaenaleyh, μ_e dış ölçüsü *tamamen toplanabilir.*

İspat. Aşağıdaki özdeşliği gözönüne alırsak,

$\cup_1^\infty E_n = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup (E_3 - E_1 - E_2) \cup \ldots = \cup_1^\infty G_n$, görülür ki $G_n \varepsilon \Lambda$ ve $G_i \cap G_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Dolayısıyla

$E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ farzetmekle genelliğe halel gelmez. O halde S keyfi ise, her N için,

$$\mu_e(S) = \mu_e(S \cap (\cup_1^N E_n)) + \mu_e(S \cap (\cup_1^N E_n)')$$
$$= \Sigma_1^N \mu_e(S \cap E_n) + \mu_e(S \cap (\cap_1^N E'_n)) \geq \Sigma_1^N \mu_e(S \cap E_n) + \mu_e(S \cap (\cap_1^\infty E'_n))$$
$$= \Sigma_1^N \mu_e(S \cap E_n) + \mu_e(S \cap (\cup_1^\infty E_n)').$$

μ_e nin alttoplanabilir hassası kullanılırsa,

$$\mu_e(S) \geq \Sigma_1^\infty \mu_e(S \cap E_n) + \mu_e(S \cap (\cup_1^\infty E_n)') \geq$$
$$\mu_e(S \cap (\cup_1^\infty E_n)) + \mu_e(S \cap (\cup_1^\infty E_n)') \geq \mu_e(S).$$

Dolayısıyla,

$$\mu_e(S \cap (\cup_1^\infty E_n)) + \mu_e(S \cap (\cup_1^\infty E_n)') = \mu_e(S).$$

Yani, $\cup_1^\infty E_n$ ölçülebilir.

Üstelik, $\mu_e(S)$ lerin arasında bulunan ve dolayısiyle ona eşit olan iki ifade karşılaştırılırsa,

$$\mu_e(S \cap (\cup_1^\infty E_n)) = \Sigma_1^\infty \mu_e(S \cap E_n)$$

bulunur.

Bu neticelerden şu sonuca varıyoruz. *Ölçülebilir cümlelerin Λ koleksyonu bir σ-halkadır*, öyleki bu σ- *halkanın* üzerinde μ_e *tamamen toplanabilir.*

Teorem 10.4.5.6. $A \varepsilon \Gamma$ ise, $A \varepsilon \Lambda$.

İspat. $\mu_e(S) \geq \mu_e(S \cap A) + \mu_e(S \cap A')$ göstermemiz kâfi gelecektir. Burada S keyfi ve $\mu_e(S) < \infty$. Farzedelim ki $S \subset \cup_1^\infty B_n$, $B_n \varepsilon \Gamma$, ve $\Sigma \mu(B_n) < \infty$. Bu takdirde

$$S \cap A \subset \cup (B_n \cap A),$$

ve dolayısıyla,

$$\mu_e(S \cap A) \leq \Sigma_1^\infty \mu(B_n \cap A) < \infty. \qquad (10.4.5.1)$$

Üstelik,

$$S \cap A' \subset \cup_1^\infty (B_n \cap A') = \cup_1^\infty (B_n - B_n \cup A).$$

Burada herbir $B_n - B_n \cap A$ cümlesi, $\cup_j C_{nj}$; $C_{nj} \varepsilon \Gamma$, $C_{ni} \cap C_{nj} = \varnothing$ $(i \neq j)$; sonlu toplamı şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\mu_e (S \cap A') \leq \Sigma_n \Sigma_j \mu(C_{nj}). \qquad (10.4.5.2)$$

Şimdi, $\mu (B_n) < \infty$ ve $B_n = (B_n \cap A) \cup (\cup_j C_{nj})$ olduğundan, her n için

$$\mu (B_n) - \mu(B_n \cap A) = \Sigma_j \mu(C_{nj})$$

yazılabilir. (10.4.5.2) gözönünde tutulduğu takdirde,

$$\mu_e(S \cap A') \leq \Sigma_1^\infty (\mu (B_n) - \mu (B_n \cap A)). \qquad (10.4.5.3)$$

(10.4.5.1) ve (10.4.5.3) toplanırsa

$$\mu_e(S \cap A) + \mu_e(S \cap A') \leq \Sigma_1^\infty \mu(B_n)$$

bulunur.

S nin, mümkün bütün $\cup_1^\infty B_n$ örtülerinin alt sınırı alınırsa, istenilen

$$\mu_e(S \cap A) + \mu_e(S \cap A') \leq \mu_e(S)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç: A σ-halkası, bir yarı halka olarak mütalaa edilebildiğinden, ve herhangibir $A \varepsilon \Gamma$ için $\mu_e(A) = \mu(A)$ olduğundan, en son elde edilen netice şudur:

μ_e, A üzerinde bir ölçü olup, A üzerindeki μ_e, Γ üzerindeki μ nün bir teşmilidir. Binaenaleyh, hiçbir karışıklığa meydan verilmeden, $\mu_e(E)$ yerine $\mu(E)$ yazılabilir, ve herhangibir ölçülebilir E cümlesinden, sadece *E* nin *ölçüsü* şeklinde bahsedilebilir.

10.4.6. **Ölçülebilir cümlelerin hassaları.** Bu kısımda *ölçülebilir cümlelerin* bazı önemli hassalarını teoremler halinde toparlayacağız.

Teorem 10.4.6.1. Bir E cümlesinin μ_e (E) dış ölçüsü 0 ise, E ölçülebilir. Dolayısıyla, ölçüsü 0 olan herbir cümlenin altcümlesi ölçülebilir ve ölçüsü 0 dır.

İspat. $\mu_e(E) = 0$ ise, herhangibir S için (monotonluktan dolayı) $\mu_e (S \cap E) = 0$. Dolayısıyla,

$$\mu_e(S) \leq \mu_e(S \cap E) + \mu_e(S \cap E') = \mu_e(S \cap E').$$

Diğer taraftan $S \supset S \cap E'$ olduğundan

$$\mu_e(S) \geq \mu_e(S \cap E').$$

Neticede $\mu_e(S) = \mu_e(S \cap E')$ yazılabilir, ve

$$\mu_e(S) = \mu_e(S \cap E') = \mu_e(S \cap E) + \mu_e(S \cap E'),$$

yani E ölçülebilir.

Bu teoreme dayanarak aşağıdaki tarifi verebiliriz.

TARİF 46. Bir S nokta cümlesi verilmiş olsun. Şayet, S *ye ait ölçüsü sıfır olan bir altcümle hariç*, S nin bütün noktaları bir (P) hassasını haiz iseler, diyoruz ki (P) şartı, S nin hemen hemen her noktasında sağlanmıştır. Veya, *S cümlesi, hemen hemen her yerde (P) hassasını haizdir.*

Şimdi çok önemli, bazı *ölçülebilir cümle koleksyonlarına geçelim.*

TARİF 47. $A_n \varepsilon \Gamma$, $n = 1,2,\ldots$, olmak üzere, herhangibir $O = \cup_1^\infty A_n$ cümlesine, *σ-cümle* denir.

Açık olarak, O_i, $i = 1,2,\ldots$, cümleleri, σ-cümleler ise, $\cup_1^\infty O_i$, ve $\cap_1^N O_i$ cümleleri, σ-cümlelerdir.

Şimdi tamamlayıcılara (komplemanlara) geçerek,

$F = O' = \cap_1^\infty A'_n$ cümlesine, δ-cümle denir. Dolayısıyla,

F_i, $i = 1,2,\ldots$, δ-cümleler ise, $\cup_1^\infty F_i$ ve $\cup_1^N F_i$ cümleleri de δ-cümlelerdir.

Teorem 10.4.6.2. Bütün $A_n \varepsilon \Gamma$ olmak üzere, $O = \cup A_n$ verilen bir σ-cümle ise, bu takdirde $O = \cap B_n$, $\forall B_n \varepsilon \Gamma$ ve $B_i \cap B_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, şeklinde yazılabilir. Üstelik,

$$\mu(O) = \Sigma\mu(B_n) \leq \Sigma\mu(A_n).$$

Dolayısıyla, S keyfi olarak verilen bir cümle ise, mümkün bütün O σ-cümleleri için

$$\mu_e(S) = \text{alt sınır } \mu(O).$$

İspat. Aşikârdır. Gerçekten, bilindiği üzere,

$$\cup A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_1 - A_2) \cup \ldots = B_1 \cup B_2 \cup \ldots = \cup B_n = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $B_n \varepsilon \Gamma$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Diğer taraftan,

$$\Sigma\mu (A_n) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2 - A_1) + \ldots = \Sigma\mu (B_n) = \mu(\cup B_n) = \mu(O).$$

Teorem 10.4.6.3. S herhangibir cümle ise, S yi örten ölçülebilir bütün E cümleleri için

$$\mu_e(S) = \text{altsınır } \mu(E).$$

İspat. Yukardaki teoremden dolayı, her ölçülebilir $E \supset S$ için

$$\mu_e(S) \leq \mu(E)$$

gösterilmesi kâfidir. Bu ise aşikârdır, zira, $\mu_e(S) \leq \mu_e(E) = \mu(E)$.

TARİF 48. Bütün O_n ler σ-cümleler olmak üzere $O_\delta = \cap_1^\infty O_n$ cümlesine σ_δ-cümlesi denir. Aynı şekilde, bütün F_n ler δ-cümleler olmak üzere

$F_\sigma = \cup_1^\infty F_n$ cümlesine δ_σ-cümlesi denir. Açık olarak, bütün σ_δ-cümleler ve δ_σ-cümleler ölçülebilir cümlelerdir.

Teorem 10.4.6.4. $\mu_e(S) < \infty$ ise, S yi örten bir O_δ, σ_δ-cümlesi vardır öyleki $\mu(O_\delta) = \mu_e(S)$. Binaenaleyh S ölçülebilirse, S ve O_δ hemen hemen eşittirler.

İspat. σ-cümlelerden müteşekkil bir (O_n), $n = 1,2,\ldots$, dizisi bulunabilir öyleki, $S \subset O_n$ ve

$$\mu_e(S) \leq \mu(O_n) < \mu_e(S) + n^{-1}.$$

Şimdi, $O_\delta = \cap_1^\infty O_n$ yazarsak, bütün n ler için, $S \subset O_\delta \subset O_n$, ve dolayısıyla, bütün n ler için

$$\mu_e(S) \leq \mu(O_\delta) \leq \mu(O_n) < \mu_e(S) + n^{-1},$$

yani $\mu_e(S) = \mu(O_\delta)$.

Teorem 10.4.6.5. E ölçülebilirse ($\mu(E) = \infty$ olabilir), E yi örten bir O_δ σ_δ cümlesi vardır, öyleki E ve O_δ hemen hemen eşittirler.

İspat. μ, σ-sonlu olduğundan (§ 10.4.4),

$$E = \cup E_n$$

şeklinde yazılabilir. Burada bütün n ler için E_n ölçülebilir ve $\mu(E_n) < \infty$.

Şimdi, herbir E_n ye, elemanları σ-cümleler olan bir (O_{nj}) dizisi tekabül ettiriyoruz, öyleki, $E_n \subset O_{nj}$, ve $\mu(O_{nj}-E_n) < (j.2^n)^{-1}$. Bu takdirde,

$$O_j = \cup_n O_{nj}$$

yazılırsa, O_j bir σ-cümledir, öyleki her j için $E \subset O_j$ ve $\mu(O_j - E) < j^{-1}$. Böylece $O_\delta = \cap_1^\infty O_j$ cümlesi istenilen hassaları haizdir. Zira. $O_\delta \subset O_j$ ve dolayısıyla $\mu(O_\delta - E) < j^{-1}$. Yani $\mu(O_\delta - E) = 0$.

Teorem 10.4.6.6 E ölçülebilir ve $\varepsilon > 0$ ise, bir O σ-cümlesi ve bir F δ-cümlesi vardır, öyleki,

$$F \subset E \subset O,$$

ve

$$\mu(O - E) < \varepsilon, \mu(E - F) < \varepsilon, \mu(O - F) < \varepsilon.$$

Dolayısıyla, bir O_δ σ_δ-cümlesi ve bir F_σ δ_σ-cümlesi vardır, öyleki,

$$F_\sigma \subset E \subset O_\delta,$$

ve F_σ, E, O_δ cümleleri hemen hemen eşittirler.

İspat. Yalnız F ile ilgili kısmın ispatı gerekir. E′ yü örten bir O* σ-cümlesi vardır, öyleki, $\mu(O^* - E') < \varepsilon$. Bu takdirde, $F = O^{*\prime}$ δ cümlesi, $F \subset E$ ve $E-F = E \cap F' = E \cap O^* = O^* - E'$ bağıntılarını sağlar. Binaenaleyh, $\mu(E-F) < \varepsilon$. $O \varepsilon \Lambda$ olduğundan, yukardaki muhakemede E′ yerine O′ alınırsa, $\mu(O-F) < \varepsilon$ bulunur. Nihayet, F, $O \varepsilon \Lambda$ ve $\mu(O-F) < \varepsilon$ olduğundan

(F_n) ve (O_n) dizileri vardır öyleki, $F_n \subset E \subset O_n$ ve $\mu(O_n-F_n) < 1/n$. Fakat, $F_\sigma = \cup F_n$ ve $O_\delta = \cap O_n$ yazarsak, her n için, $F_n \subset F_\sigma \subset E \subset O_\delta \subset O_n$. Dolasıyla $F_\sigma \subset E \subset O_\delta$ ve $\mu(O_\delta-E) < 1/n$, $\mu(E-F_\sigma) < 1/n$, $\mu(O_\delta-F_\sigma) < 1/n$. Yani hemen hemen $F_\sigma = E = O_\delta$.

Teorem 10.4.6.7. E ölçülebilir, yalnız ve yalnız her $\varepsilon > 0$ için E_1 ve E_2 iki ölçülebilir cümle varsa öyleki $E_1 \subset E \subset E_2$ ve $\mu(E_2 - E_1) < \varepsilon$.

İspat. E ölçülebilirse, E_1 ve E_2 cümlelerinin varlıkları, E_1 yerine bir F δ-cümlesi ve E_2 yerine bir O σ- cümlesi alınmak suretiyle, teorem 10.4.6.6. da gösterilmiştir.

Şimdi, karşıt olarak farzedelim ki her $\varepsilon > 0$ için, E_1 ve E_2, ölçülebilir cümleleri vardır öyleki, $E_1 \subset E \subset E_2$ ve $\mu(E_2 - E_1) < \varepsilon$. Binaenaleyh ölçülebilir cümlelerden müteşekkil (E_{1n}), (E_{2n}), $n = 1,2,\ldots$, dizileri vardır, öyleki, her n için

$$E_{1n} \subset E \subset E_{2n},$$

ve

$$\mu(E_{2n} - E_{1n}) < n^{-1}.$$

Nihayet, $E_\sigma = \cup E_{1n}$, $E_\delta = \cap E_{2n}$ yazarsak her n için

$$E_{1n} \subset E_\sigma \subset E \subset E_\delta \subset E_{2n}.$$

Dolayısıyla,

$$\mu(E_\delta - E_\sigma) = 0.$$

$E-E_\sigma$, $E_\delta - E_\sigma$ nın bir alt cümlesi olduğundan, $E-E_\sigma$ ölçülebilir ve ölçüsü sıfırdır. Son olarak

$$E = E_\sigma \cup (E - E_\sigma)$$

yazmak suretiyle, E nin ölçülebilir olduğu görülür.

10.4.7. **Lebesgue Ölçüsü.** Misal olarak, Lebesgue ölçüsünü m-boyutlu bir R^m-Euclid uzayında inceleyeceğiz.

R^m-uzayında *kapalı aralık* diye, $x_1,\ldots, x_m$ koordinatları

$$a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1,\ldots,m,$$

eşitsizliklerini sağlıyan, $x = (x_1,\ldots,x_m)$ noktalarının cümlesine denir.

Açık, sol yarı açık, sağ yarı açık aralıklar benzer şekilde tarif edilirler.

Sol yarı açık aralığa *hücre* denir, ve $(a_1, b_1;\ldots; a_m, b_m]$ ile gösterilir.

§ 10.4.3. te, gösterdik ki, R^1 de bütün sol açık aralıkların koleksyonu $\varnothing$ cümle ile birlikte, bir Γ yarı-halkasıdır. Bu hassa, derhal R^m-Euclid uzayına ($m > 1$) teşmil edilebilir.

Yine aynı § 10.4.3 te tarifi yapılan Γ yarı halkası için şu lemma ispatlanabilir.

Lemma 10.4.7.1. Γ, bir yarı halka, ve $A_1,\ldots,A_n \varepsilon\Gamma$ ise, $B_1,\ldots,B_q\varepsilon\Gamma$ cümleleri vardır, öyleki, $B_i \cap B_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ve her A_i, birkaç B_j nin birleşimidir.

İspat. Önce $n = 2$ farzedelim. Bu takdirde,

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 - A_1 \cap A_2),\ A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - A_1 \cap A_2).$$

ve

$$B_1 = A_2 \cap A_1,\ B_2 = A_1 - A_1 \cap A_2,\ B_3 = A_2 - A_1 \cap A_2$$

cümlelerinden herhangi iki cümlenin ortak noktası yoktur. Üstelik $\Gamma 1$–$\Gamma 3$ sağlanmıştır.

Şimdi, $n=3$ farzedelim. $n=2$ halinden dolayı, $C_1,\ldots,C_k\varepsilon\Gamma$ cümleleri vardır, öyleki, $C_i \cap C_j = \varnothing$ $(i\neq j)$, ve A_1, A_2 birkaç C_i nin birleşimidir. Bu sefer, A_1, A_2, A_3 yerine

$$C_1,\ldots,C_k,\ A_3$$

cümlelerini ele alır, ve bu koleksiyonu,

$$C_1 \cap A_3,\ldots,C_k \cap A_3,\ C_1 - C_1 \cap A_3,\ldots,C_k - C_k \cap A_3,$$
$$A_3 - C_1 \cap A_3 - \ldots - C_k \cap A_3$$

cümlelerine ayırırsak, görürüz ki, herhangi iki cümlenin ortak noktası yoktur ve $A_3 = (A_3 - C_1 \cap A_3 - \ldots - C_k \cap A_3 \cup (C_1 \cap A_3 \cup C_2 \cap A_3 \cup \ldots \cup C_k \cap A_3)$. Üstelik $\Gamma 1$ – $\Gamma 3$ şartları bir kere daha sağlanmış bulunmaktadır.

$n > 3$ haline teşmili aşikârdır.

Teorem 10.4.7.1. Şayet A boş cümle ise $m(A)=0$; A, $(a_1b_1,\ldots,a_m, b_m]$ hücresi ise $m(A) = \pi_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$ olarak tarif edersek, bu takdirde $m(A)$, Γ *üzerinde* σ-sonlu *bir ölçüdür.*

İspat. M1 — M3 şartlarını tahkik etmekten ibarettir. Herhangibir $A\varepsilon\Gamma$ için $m(\varnothing) = 0$ ve $0 \leq m(A) \leq \infty$ şartları sağlanmıştır.

Şimdi, önce ispat etmeliyiz ki; $A\varepsilon\Gamma$; $A_n\varepsilon\Gamma$, $n = 1,\ldots,p$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i\neq j)$; ve A $\cup_1^p A_n$ yi örtüyorsa, bu takdirde, $m(A) \geq \Sigma_1^p m(A_n)$.

Üstteki lemmadan dolayı, $B_1,\ldots,B_q\varepsilon\Gamma$ cümleleri vardır, öyleki, $B_i \cap B_j = \varnothing$ $(i\neq j)$ ve A, $A_1,\ldots,A_p$ cümlelerinin herbiri birkaç B_j nin birleşimidir. Açık olarak buradaki misalde, $A = \cup_1^q B_j$, $m(A) = \Sigma_1^q m(B_j)$, ve A_i leri birleştirirken, bir A_i nin ilâvesinde kullanılan herbir B_k, diğer bir A_j nin ilâvesinde artık kullanılmamaktadır. Binaenaleyh,

$$m(A) = \Sigma_1^q m(B_j) \geq \Sigma_1^p m(A_j).$$

Sonra, göstermeliyiz ki, $A\varepsilon\Gamma$, $A_n\varepsilon\Gamma$, $n=1,2,\ldots$, ve $A \subset \cup_1^\infty A_n$ ise, bu takdirde

$$m(A) \leq \Sigma_1^\infty m(A_n).$$

Açık olarak farzedebiliriz ki, $\Sigma_1^\infty m(A_n) < \infty$. Aksini kabul edelim, yani $m(A) > \Sigma_1^\infty m(A_n)$. Bu takdirde bir $\alpha > 0$ sayısı vardır öyleki,

$$m(A) \geq \Sigma_1^\infty m(A_n) + 2\alpha. \qquad (10.4.7.1)$$

Şimdi A nın ihtiva ettiği bir F kapalı aralığını gözönüne alalım, öyleki,

$$m(A) < m(F_c) + \alpha.$$

Burada, F_c, F nin aynı uçlarını haiz hücredir. Şimdi herbir A_n ye bir O_n açık aralığını ve bir $B_n\varepsilon\Gamma$ cümlesini tekabül ettirelim, öyleki $A_n \subset O_n \subset B_n$, ve

$$m(B_n) < m(A_n) + \alpha/2^n.$$

Sınırlı ve kapalı F cümlesi $\cup O_n$ tarafından örtülmektedir. Heine-Borel teoreminden dolayı, sonlu sayıda O_n ler F yi örter. Binaenaleyh F_c hücresi, sonlu sayıda B_n hücreleriyle örtülmektedir. Böylece, yukardaki muhakeme tekrar edilerek, $m(F_c)$, sözü geçen B_n lerin ölçülerinin toplamını aşamaz. O halde evleviyetle,

$$m(F_c) \leq \Sigma m(B_n) < m(A_n) + \alpha.$$

Bu ise

$$m(A) < m(F_c) + \alpha < \Sigma m(A_n) + 2\alpha$$

eşitsizliklerini intaç eder; yani (10.4.7.1) e tezattır.

Nihayet, R^m-*Euclid uzayı, sayılabilir sonsuzlukta, birbirini kesmiyen sonlu ölçülebilir hücrelerin birleşimi olduğundan, $m(A)$ ölçüsü σ-sonludur.*

Yukarda belirtilen, Γ *yarı-halkası üzerinde tarifli $m(A)$ ölçüsü bütün ölçülebilir cümlelerin* Λ *σ-halkası üzerinde, tamamen toplanabilir bir ölçü olarak teşmil edilebilir.*

İşte, *bu σ-halkaya ait cümlelere Lebesgue ölçülebilir* denir, ve $E\varepsilon\Lambda$ *cümlesinin $m(E)$ ölçüsüne, E nin Lebesgue ölçüsü* denir.

10.4.8. **Stieltjes Ölçüsü.** R^1-reel ekseni üzerinde Stieltjes ölçüsünü tarif edebilmek için, reel x değişkeninin bir reel $g(x)$ fonksiyonunu gözönüne alıyoruz. Üstelik, $g(x)$ fonksiyonunu, monoton azalmıyan $(x_1 < x_2$ için $g(x_1) \leq g(x_2))$ ve sağdan sürekli (pozitif değerler üzerinden $h \to 0$ için, $g(x+) = \lim g(x+h) = g(x))$ farzediyoruz.

Birkere daha, Γ, bütün hücrelerden (sol açık aralıklar) ve $\varnothing$ cümleden müteşekkil bir *yarıhalka* olsun.

Teorem 10.4.8.1. $A = \varnothing$ ise $\mu(A) = 0$ ve $A = (a,b]$ ise $\mu(A) = g(b) - g(a)$ olarak tarif edildiği takdirde, $\mu(A)$, Γ üzerine σ-*sonlu* bir olçüdür.

İspat. Teorem 10.4.7.1. in aynıdır.

Γ yarı- halkası üzerinde bu şekilde tarif edilen $\mu(A)$ ölçüsü, bütün μ ölçülebilir cümlelerin $\Lambda\sigma$- halkasına, tamamen toplanabilir bir ölçü olarak teşmil edilebilir.

Bu σ halkanın cümlelerine ($g(x)$ e nazaran) Stieltjes ölçülebilir denir, ve $E \varepsilon \Lambda$ cümlesinin $\mu(E)$ ölçüsüne, ($g(x)$ e nazaran) E nin Stieltjes ölçüsü denir.

Açık olarak $g(x) = x$ için Stieltjes ölçüsü, Lebesgue ölçüsünün aynıdır.

Bir noktayı işaret ederek, $h \to 0$; $h < 0$, için, sol limit $g(x-) = \lim g(x+h)$ her x için var olmasına rağmen, bu limit $g(x)$ den farklı olabilir. Dolayısıyla, $[a, b]$ kapalı aralığının $g(b)-g(a-)$ ölçüsü, $(a, b]$ hücresinin $g(b) - g(a)$ ölçüsünden farklı olabilir.

Aynı şekilde, birtek x noktasından ibaret cümlenin $g(x) - g(x-)$ ölçusü, 0 dan farklı olabilir.

10.4.9. **μ–İntegrallenebilir fonksiyonlar.** Bu tarife, aşağıdaki kavram silsilesinin yardımı ile varacağız

İ1. **Ölçülebilir Fonksiyon.** $f(x)$, ölçülebilir bir $E \subset X$ cümlesinin bütün noktalarında tarifli reel bir fonksiyon olsun. Üzerinde, $f(x) > a$ şartının sağlandığı, E nin altcümlesini $E(f > a)$ ile gösterelim. *$f(x)$, E üzerinde ölçülebilir* diyoruz, şayet a nın her *sonlu değeri* için, *$E(f > a)$ cümlesi ölçülebiliyorsa.*

İ2. Farzedelim ki μ, X üzerinde σ-sonlu bir ölçü, ve m, R^1 y-ekseni üzerinde Lebesgue ölçüsüdür. Gösterilebilir ki, $\mu \times m$, ölçülerin çarpımını, ve $X \times R^1$, X ve R^1 in kartezyen çarpımını ifade ediyorlarsa, bu takdirde, $\mu x m$, $X \times R^1$ uzayında σ-sonlu bir ölçüdür. Bu ölçüyü $\bar{\mu}$ ile gösteriyoruz.

İ3. $S \subset X$ cümlesi üzerinde $f(x)$ tarifli ve negatif değilse, *$f(x)$ in F_0 pozitif ordinat cümlesi* diye, $x \varepsilon S$, $0 \leq y < f(x)$ şartlarını sağlıyan bütün $(x, y) \varepsilon X \times R^1$ noktalarının cümlesine denir.

Görülebilir ki, $E \subset X$ μ-ölçülebilir, ve $f(x) \geq 0$ E de tarifli ise, bu takdirde, $f(x)$ ölçülebilir, yalnız ve yalnız F_0, $\bar{\mu}$ ölçülebilirse.

İ4. $E \subset X$, μ-ölçülebilir, ve $f(x) \geq 0$, E üzerinde tarifli ve ölçülebilirse, $f(x)$ in E üzerinde integrali, F_0 pozitif ordinat cümlesinin $\bar{\mu}$-ölçüsü olarak tarif edilir, ve

$$\int_E f(x)\, d\mu = \bar{\mu}(F_0)$$

yazılır.

$\bar{\mu}(F_0) < \infty$ ise, diyoruz ki *$f(x)$, E üzerinde μ-integrallenebilir.*

X, m-boyutlu R^m-Euclid uzayı, ve μ bu uzayda Lebesgue ölçüsü ise

$$\int_E f(x)\, dx$$

yazıyoruz. Ancak, boyut sayısı tasrih edilmek isteniyorsa

$$\int \cdots \int_E f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m$$

yazılır.

X, R^1 x-ekseni, ve μ, R^1 üzerinde, (azalmıyan bir $g(x)$ fonksiyonuna nazaran) bir Stieltjes ölçüsü ise,

$$\int_E f(x)\, dg(x)$$

integraline, E üzerinde, $f(x)$ in Lebesgue-Stieltjes integrali denir.

İ5. İ4. deki tarifler yalnız $f(x) \geq 0$ için mütebcrdir. Şayet, ölçülebilir bir E cümlesi üzerinde, $f(x) \leq 0$ ise

$$\int_E f d\mu = -\int_E (-f)\, d\mu$$

tarif edilir.

Genel halde, aşağıda gösterildiği şekilde, $f^+(x)$ ve $f^-(x)$ fonksiyonları tarif edilir.

$$f^+(x) = \begin{cases} E(f \geq 0) \text{ üzerinde } f(x) \\ E(f < 0) \text{ üzerinde } 0 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} E(f \geq 0) \text{ üzerinde. } 0 \\ E(f < (0) \text{ üzerinde } f(x) \end{cases}$$

Bu fonksyonlar ölçülebilir ve sabit işaretlidirler, ve bütün $x \varepsilon E$ ler için

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) - f^-(x).$$

Binaenaleyh,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu$$

ve

$$\int_E |f|\, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

10.4.10. **İntegralin hassaları.** İntegralin bazı hassaları, integralin tarifinin direkt neticeleridir. Meselâ, *$f(x)$, μ-integrallenebilirse*, bu takdirde, *$f(x)$, hemen hemen her yerde*, E nin bütün noktalarında sonludur.

Diğer hassalar şunlardır:

1. $f(x)$, E üzerinde ölçülebilir, $\mu(E) < \infty$, ve bütün $x \varepsilon E$ ler için $a \leq f(x) \leq A$ ise,

$$a\mu(E) \leq \int_E f(x)\, d\mu \leq A\mu(E).$$

Özel olarak, $\int_E f d\mu = 0$, şayet bütün $x \varepsilon E$ için $f(x) = 0$, veya $\mu(E) = 0$ ise.

Üstelik, $\int_E \alpha d\mu = \alpha\mu(E)$ şayet α ve $\mu(E)$ ikisi de sonlu ise.

2. $f(x)$ ve $g(x)$ E üzerinde μ-integrallenebilir ve bütün $x \varepsilon E$ için $f(x) \geq g(x)$ ise,

$$\int_E f d\mu \geq \int_E g d\mu .$$

3. E üzerinde ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu, E üzerinde μ-integrallenebilir yalnız ve yalnız $|f(x)|$, E üzerinde μ-integrallenebilirse, ve bu takdirde

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu .$$

4. $f(x)$ ve $g(x)$ E üzerinde μ-integrallenebilirler, ve a, b reel sabitler ise, bu takdirde, $af(x)+bg(x)$, E üzerinde μ-integrallenebilir ve,

$$\int_E (af + bg)\, d\mu = a \int_E f d\mu + b \int_E g d\mu .$$

5. İntegralin en *mühim* hassası *Lebesgue teoremi* ile ifade edilen hassadır. Bu teoreme göre, $(f_n(x))$, E üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon dizisi; $g(x)$, E üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon, ve bütün n ler için $|f_n(x)| \leq g(x)$ ise, bu takdirde $\underline{lim}\, f_n(x)$ ve $\overline{lim}\, f_n(x)$ E üzerinde ölçülebilir, ve

$$\int_E \underline{\lim}\, f_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n\, d\mu \leq \overline{\lim} \int_E f_n\, d\mu \leq \int_E \overline{\lim}\, f_n\, d\mu .$$

Özel olarak $\lim f_n(x)$ mevcut ve $f(x)$ e eşit ise

$$\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n\, d\mu .$$

6. Şayet $D \subset E$ ölçülebilir, ve $k_D(x)$ karakteristik fonksiyon ise

$$\int_D f(x)\, d\mu = \int_E f(x) k_D(x)\, d\mu .$$

7. $E_n \subset E$, $n = 1, 2, \ldots$ ölçülebilir, $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \varnothing$, ve $E = \cup E_n$ ise

$$\int_E f\, d\mu = \Sigma \int_{E_n} f\, d\mu .$$

Teorem 10.4.10.1 Farzedelim ki $f_n(x)$, E üzerinde, negatif olmıyan ölçülebilir, ve her $x \varepsilon E$ için azalmıyan bir fonksiyon dizisidir. Şayet sonlu bir M sabiti varsa öyleki, bütün n ler için $\int_E f_n d\mu \leq M$, bu takdirde $f(x) = \lim f_n(x)$, E üzerinde, hemen hemen her yerde sonludur.

İspat. Şayet, ölçüsü pozitif olan bir $E_1 \subset E$ altcümlesinde, $f(x) = +\infty$ olsa idi, ${}_E\int f d\mu \geq {}_{E_1}\int f\, d\mu = +\infty$ olurdu. Halbuki Lebesgue teoreminden ve hipotezden dolayı

$$\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n\, d\mu \leq M .$$

Bu ise bir tezattır.

Bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki teoremi ispatsız ifade edebiliriz.

Teorem 10.4.10.2. Farzedelim ki $f_n(x)$, E üzerinde negatif olmıyan integrallenebilir bir fonksiyon dizisidir, ve $\Sigma_1^\infty {}_E\int f_n\, d\mu < \infty$. Bu takdirde, E üzerinde, hemen hemen heryerde, $f(x) = \Sigma_1^\infty f_n(x)$ sonludur.

10.4.11. **Ard arda integral.** Tâ Cauchy zamanından biliniyordu ki, R^m ve R^n uzaylarında, Δ_1 ve Δ_2 iki aralık ise, bu takdirde, $\Delta_1 \times \Delta_2 \subset R^{m+n} = R^m \times R^n$ aralığında sürekli herhangibir fonksyonun integrali, Δ_1 ve Δ_2 aralıkları üzerinde ard arda iki integrale müncerdir.

Bu usul tekrarlanırsa, görülür ki, R^m de bir aralık üzerinde herhangibir integral, lineer aralıklar üzerinde ard arda m integrale müncerdir.

Bu teoremin, μ-integrallenebilir fonksyonlara teşmili ilk defa olarak, 1907 de *Fubini* tarafından yapılmıştır.

Fubini teoremine göre, X_1 ve X_2 uzaylarında, μ_1 ve μ_2 σ-sonlu ölçüler; $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, $X_1 \times X_2$ de çarpım ölçü; ve nihayet $f(x, y)$, $X = X_1 \times X_2$ üzerinde μ ölçülebilir reel bir fonksiyon ise, bu takdirde,

1. hemen hemen herbir $y \varepsilon X_2$ için, $f(x, y)$, X_1 üzerinde integrallenebilir ve ${}_{x_1}\int f(x, y)\, d\mu_1$, X_2 üzerinde, y nin fonkyonu olarak integrallenebilir.

2. Hemen hemen herbir $x \varepsilon X_1$ için, $f(x,y)$, X_2 üzerinde integrallenebilir ve ${}_{x_2}\int f(x, y)\, d\mu_2$, X_1 üzerinde, x in fonksiyonu olarak integrallenebilir.

3. $$\int_x f(x, y)\, d\mu = {}_{x_2}\int \left\{ {}_{x_1}\int f(x, y)\, d\mu_1 \right\} d\mu_2 = {}_{x_1}\int \left\{ {}_{x_2}\int f(x, y)\, d\mu_2 \right\} d\mu_1 .$$

10.4.12. **L^p - Lebesgue Uzayı.** Üzerinde bir σ-sonlu μ ölçüsü tarif edilen bir X uzayı verilmiş olsun.

TARİF 48. Ölçülebilir $\Delta \subset X$ cümlesi üzerinde, *μ-ölçülebilir* bir $f(x)$ fonksyonu, $L^p(\Delta, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, Lebesgue uzayına aittir, diyoruz, şayet $|f(x)|^p$, Δ üzerinde *μ-integrallenebilirse.*

$f(x) \varepsilon L^p(\Delta, \mu)$ ise, $f(x)$ *in normu* denilen,

$$\|f\|_p = \left(\int_\Delta |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

sayısını ithal ediyoruz.

Yukardaki tarifte, Δ bütün reel eksen, ve μ-integral âdi Lebesgue integrali ise, $L^p(-\infty, \infty)$ yazıyoruz. Aynı şekilde, pozitif reel eksen ve sonlu bir aralık için, $L^p(0, \infty)$ ve $L^p(a, b)$ yazıyoruz.

$L^p(\Delta, \mu)$ sınıfının tarifinde $p = \infty$ *hariç tutulmuştur.* Yeniden bir *kabul* yaparak, Δ cümlesi üzerinde tarifli, μ-ölçülebilir bir $f(x)$ fonkyonu $L^\infty(\Delta, \mu)$ sınıfına aittir diyoruz, şayet bir $M > 0$ sayısı varsa öyleki, hemen hemen bütün $x \varepsilon \Delta$ için $|f(x)| \leq M$. A, bu hassayı haiz M lerin altsınırı ise, A aynı zamanda bu hassayı haiz en küçük sayıdır. Gerçekten, $\Delta(|f| > A) = \cup_{n=1}^{\infty} \Delta(|f| > A + n^{-1})$ cümlesinin ölçüsü sıfırdır. Bu halde, $f(x) \varepsilon L^\infty(\Delta, \mu)$ ise $\|f\|_\infty = A$ yazılır.

$L^p(\Delta, \mu)$ ve $L^q(\Delta, \mu)$ Lebesgue uzayları birbirlerinin *tamamlayıcılarıdırlar*, şayet

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ise. L^2 uzayı kendi kendinin tamamlayıcısıdır.

$L^p(\Delta, \mu)$ uzayı *lineerdir.* Yani $f(x)$, $g(x) \varepsilon L^p(\Delta, \mu)$ ise,

$$af(x) + bg(x) \varepsilon L^p(\Delta, \mu) \; ; \; a, b \varepsilon C.$$

Hölder Eşitsizliği: $f(x) \varepsilon L^p(\Delta, \mu)$, $g(x) \varepsilon L^q(\Delta, \mu)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ise, $f(x)\, g(x) \varepsilon L^1(\Delta, \mu)$ ve

$$\left| \int_\Delta fg \, d\mu \right| \leq \int_\Delta |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Schwarz Eşitsizliği: Yukardaki eşitsizlikte $p = q = 2$ vazetmek suretiyle elde edilir.

$$\left| \int_\Delta fg \, d\mu \right| \leq \int_\Delta |fg| \, d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Burada $f, g \varepsilon L^2(\Delta, \mu)$.

Minkowski Eşitsizliği: Çok kullanılan diğer bir eşitsizlik te, Minkowski eşitsizliğidir.

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

10.4.13. **Hilbert Uzayının $L^2(\Delta, \mu)$ tarafından tahakkuku.** Şayet iç çarpım, ve norm, sırasıyla,

$$(f, g) = \int_\Delta f(x)\, \bar{g}(x) \, d\mu, \; \|f\| = \left(\int_\Delta |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2}$$

şeklinde tarif edilir, ve *Riesz-Fischer teoremi* gözönünde tutulursa, derhal görülür ki, $L^2(\Delta, \mu)$ üstteki norma göre bir *tam* Hilbert uzayıdır. Gerçekten, $L^2(\Delta, \mu)$ uzayının bu norma göre tamlığı *Riesz-Fischer* teoremi tarafından temin edilmiştir. *Bu teorem, reel sayılar için bilinen Cauchy teoreminin benzeridir. Cauchy* teoremine göre, herhangibir (a_n) reel sayı dizisi; $m, n \to \infty$ için $\lim |a_n - a_m| = 0$ şartını sağlıyorsa, bir a reel sayısına yakınsaktır.

Teorem 10.4.13.1. (Riesz-Fischer). $f_n(x) \varepsilon L^p(\Delta, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, ve $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{m,n \to \infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$$

ise, bu takdirde $f(x) \varepsilon L^p(\Delta, \mu)$ vardır, öyleki

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Üstelik, ölçüsü 0 olan cümleler hariç, f birtekdir.

İspat. $p = \infty$ **hali.** Tariften dolayı ölçüsü sıfır sabit bir $E \subset \Delta$ cümlesi vardır öyleki, bütün $x \varepsilon \Delta - E$, ve bütün m, n için

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Bu demektir ki, her $\varepsilon > 0$ için bir $N(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki, $m, n \geq N(\varepsilon)$, ve bütün $x \varepsilon \Delta - E$ için,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Binaenaleyh, $\Delta - E$ üzerinde

$$f(x) = \lim f_n(x)$$

fonksyonu vardır ve aynı cümle üzerinde,

$$|f(x)| \leq |f_N(x)| + \varepsilon.$$

Üstelik E üzerinde $f(x) = 0$ tarif edersek, $f \varepsilon L_\infty(\Delta, \mu)$.

Diğer taraftan, $\Delta - E$ üzerinde, ve $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

O halde, $f_n(x) - f(x) \varepsilon L^\infty(\Delta, \mu)$ olduğundan, $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$.

$1 \leq p < \infty$ **hali.** Hipotez gereğince, $\lim \|f_n - f_m\|_p = 0$ olduğundan, bir n_k indeks dizisi vardır öyleki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty.$$

Gerçekten, n_1 en küçük n olsun, öyleki, $m > n_1$ için $\| f_{n_1} - f_m \|_p < 1$. Sonra, n_2 en küçük $n > n_1$ olsun, öyleki, $m > n_2$ için $\| f_{n_2} - f_m \|_p < 1/2$; n_3 en küçük $n > n_2$ olsun öyleki, $m > n_3$ için $\| f_{n_3} - f_m \|_p < 1/2^2$, v.s. Dolayısıyla, $\| f_{n_2} - f_{n_1} \|_p < 1, \ldots, \| f_{n_{k-1}} - f_{n_k} \|_p < \frac{1}{2^k}, \ldots,$ yazılabilir. Buradan ise netice görülür.

Ve, sonlu bir ölçüsü olan herbir $E \subset \Delta$ cümlesi üzerinde, Hölder eşitsizliği, yani

$$\int_E | f_{n_{k+1}} - f_{n_k} | \, d\mu \leq \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_p \left(\int_E d\mu \right)^{1/q},$$

gözönünde tutulursa, görülür ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E | f_{n_{k+1}} - f_{n_k} | \, d\mu < \infty .$$

Teorem 10.4.10.2 den dolayı, $f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]$ serisinin $f_{n_k}(x)$ kısmi toplamları, E üzerinde, hemen hemen her yerde, ölçülebilir bir $f(x)$ e yakınsaktır. Halbuki, μ σ-sonlu olduğundan $\Delta = \cup E_n$ yazabiliriz. Burada herbir E_n nin ölçüsü sonludur. Dolayısıyla, Δ üzerinde hemen hemen her yerde,

$$f(x) = \lim f_{n_k}(x).$$

Lebesgue teoreminden dolayı,

$$\| f \|_p = \lim \| f_{n_k} \|_p .$$

O halde $f \varepsilon L^p(\Delta, \mu)$. Dolayısıyla $f_{n_k} - f \, \varepsilon L^p(\Delta, \mu)$ ve $\lim (f_{n_k} - f) = 0$. Yine Lebesgue teoreminden ötürü,

$$\lim \| f_{n_k} - f \|_p = 0 .$$

Nihayet,

$$\| f_n - f \|_p \leq \| f_n - f_{n_k} \|_p + \| f_{n_k} - f \|_p$$

eşitsizliğinden,

$$\lim \| f_n - f \|_p = 0$$

bulunur.

Ölçüsü sıfır olan cümleler hariç, $f(x)$ in birtek olduğunu ispat etmek için, farzedelim ki

$$\lim \| f_n - f \|_p = \lim \| f_n - g \|_p = 0,$$

burada, $1 \leq p \leq \infty$. Fakat her n için,

$$\| f - g \|_p \leq \| f - f_n \|_p + \| f_n - g \|_p$$

olduğundan

$$\| f - g \|_p = 0 .$$

Bu da gösterir ki, hemen hemen her yerde, Δ üzerinde $f = g$.

Bu bahisi kapatırken şu nokta üzerinde önemle durmak isteriz.

Lebesgue integralinin, Riemann integralinin bir teşmili olduğu şu şekilde anlaşılmalıdır. Δ üzerinde bir Riemann integrali tarif edilmiş olsun. Bununla birlikte,

$$\| f \| = \int_\Delta | f | \, dx$$

normunu da tarif edelim. *Riemann integrallerinin* $R(\Delta)$ vektör uzayı bu norma nazaran *tam* değildir. Böylece bu uzayın tamamlanması meselesi ortaya çıkmaktadır. Bir uzayın tamamlanması ise, *ideal limit elemanlarının* ilâvesiyle daima mümkündür. Bu tamamlanma, yepyeni bir *ölçü kavramının* tarifi ile, ilk defa, *Lebesgue* tarafından yapılmıştır.

Tamamlanmış vektör uzayını $L(\Delta, \mu)$ ile gösterirsek, R, L de *yoğundur*. Yani $\overline{R} = L(\Delta, \mu)$.

Görülüyor ki rasyonel sayılardan, reel sayılara geçiş ne ise, Riemann integrallerinden Lebesgue integrallerine geçiş te o dur.

5. İdeal veya genelleştirilmiş fonksiyonlar veya dağılımlar. Mikuzinski ve Sikorskinin teorisi.

10.5.1. **İdeal elemanlar.** Yukarda da işaret ettiğimiz gibi, verilen bir cümleyi veya bir G uzayını, *ideal elemanlar* denilen yeni elemanlar katmak suretiyle genişletmek, *matematiğin temel usullerinden biridir.*

G ye katılan bu *ideal elemanlar* o şekilde tarif edilmelidir ki, *genişletilmiş* $\overline{G}$ uzayında, G deki temel operasyonlar için esas kaideler $\overline{G}$ de de muteber olsun.

Meselâ, projektif geometride, *sonsuzdaki ideal noktalar* paralel doğrular cümlesi ile tarif edilir. Başka hallerde ise, ilk G cümlesi, uygun bir *norm* tarifine dayanan *limit* usulü ile *ithal* edilen *ideal elemanlarla tamamlanır.* Meselâ, ve bilhassa, *genelleştirilmiş fonksyonların* tarifinde, *model* olabilecek bir tarif, Cantor'un *rasyonel sayılar esas dizilerinden* hareket eden reel sayıların tarifidir.

Fonksiyonlar Teorisi adlı kitapta veya bu eserin Reel Sayılar kısmında ele almış olduğumuz bu teoriyi burada kısaca hatırlatalım.

a_n rasyonel sayılarının (a_n) esas dizisi diye, Cauchy Kriterini (veya şartını) sağlıyan diziye denir. Yani, her rasyonel $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir N indeksi vardır, öyleki bütün $p, q > N$ indeksleri için

$$| a_p - a_q | < \varepsilon .$$

(a_n) ve (b_n) dizileri *eşdeğerdirler*, şayet $(a_n - b_n)$ dizisi sıfıra yakınsak ise, başka bir deyimle *sıfır-dizisi* ise. Notasyon olarak

$$(a_n) \sim (b_n)$$

yazılır. Bu eşdeğerlik şartı, eşdeğerlik aksyomlarını sağladığından, *esas dizilerin bütününü* ayrık sınıflara böler. Tarif olarak her bir sınıfa *reel sayı* denir.

Demek ki herbir reel sayı, eşdeğer esas dizilerin bir sınıfına eşittir. (a_n) bir esas dizi ise, (a_n) ye eşdeğer bütün esas dizilerin sınıfı $[a_n]$ ile gösterilir, ve $(a_n) \sim (b_n)$ ise

$$[a_n] = [b_n]$$

yazılır.

10.5.2. **İdeal Fonksyonların Tarifi.** Reel sayılarda olduğu gibi, burada da bir esas dizi tarif edeceğiz. Önce üniform yakınsaklığın tarifini hatırlatalım.

Bir *açık İ aralığında* tarifli bir $f_n(x)$ dizisi ve bir $f(x)$ fonksyonu verilmiş olsun. Diyoruz ki, *İ açık aralığında, $f_n(x)$ dizisi $f(x)$ fonksyonuna üniform yakınsaktır*, şayet İ ye ait her kapalı aralıkta, $f_n(x)$ dizisi $f(x)$ e üniform yakınsak ise. Notasyon olarak

$$f_n(x) \to f(x), \quad x \varepsilon İ,$$

yazacağız.

TARİF 49. Açık İ aralığında tarifli ve sürekli $f_n(x)$ fonksyonlarının dizisine *esas dizi* denir, şayet sürekli $F_n(x)$ fonksyonlarından müteşekkil bir dizi, ve bir $k \geq 0$ tam sayısı varsa öyleki

E1. $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$.

E2. $F_n(x)$ dizisi İ de ünidorm yakınsaktır.

Açık İ aralığında üniform yakınsak her sürekli fonksyon dizisi bir esas dizidir. Gerçekten, $k=0$ vazedildiği takdirde iddianın doğruluğu derhal anlaşılır.

TARİF 50. İki esas dizi, $\{f_n(x)\}$ ve $\{g_n(x)\}$ *eşdeğerdir* denir, şayet $\{F_n(x)\}$; $\{G_n(x)\}$ dizileri ve $k \geq 0$ varsa, öyleki,

F1. $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$; $G_n^{(k)}(x) = g_n(x)$.

F2. $F_n(x)$, $G_n(x)$ dizileri aynı fonksyona üniform yakınsaktır.

Bu eşdeğerlik

$$\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\}$$

notasyonu ile ifade edilebilir.

F1 ve F2 şartları, İ de tarifli $\{f_n(x)\}$ esas dizilerinin bütününü ayrık

sınıflara böler. $\{f_n(x)\}$ ve $\{g_n(x)\}$ iki *esas dizi* aynı eşdeğerlik sınıfına aittir yalnız ve yalnız *eşdeğer* iseler. Yani

$$\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\}.$$

TARİF 51. Herbir eşdeğerlik sınıfına *ideal fonksyon* veya genelleştirilmiş fonksiyon, veya *dağılım* denir. Notasyon olarak, $\{f_n(x)\}$ dizisine eşdeğer dizilerin sınıfının belirttiği ideal fonksyon $[f_n(x)]$ ile gösterilir.

$[f_n(x)]$, $[g_n(x)]$ ideal fonksyonları eşittirler, yani

$$[f_n(x)] = [g_n(x)],$$

yalnız ve yalnız $\{f_n(x)\}$ ve $\{g_n(x)\}$ *eşdeğer* iseler.

Sırası gelmişken söyliyelim ki bu Teoride, Dağılım yerine İdeal Fonksyon veya Genelleştirilmiş Fonksyon tâbirini kullanmak daha yerinde olur.

Teorem 10.5.2.1. $f_n(x)$ dizisi esas, ve m. mertebeden sürekli türevleri haiz ise, $f_n^{(m)}(x)$ türevleri bir esas dizi teşkil ederler.

İspat. Gerçekten E1 den dolayı

$$f_n^{(m)}(x) = F_n^{(m+k)}(x).$$

$f_n(x)$ dizisi esas olduğundan, $F_n(x)$ İ de üniform yakınsaktır, yani E2 sağlanmıştır.

Teorem 10.5.2.2. Sürekli fonksyonlardan müteşekkil bir $\{f_n(x)\}$ dizisi verilmiş olsun. Farzedelim ki $|f_n| < M$, ve (a, x_0), (x_0, b) açık aralıklarında, $f_n(x)$ dizisi üniform olarak $f(x)$ e yakınsaktır. Bu takdirde $İ = (a, b)$ aralığında üniform olarak

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\, dt \to \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Dolayısıyla, *$f_n(x)$ dizisi esastır.*

İspat. $[\alpha, \beta] \varepsilon İ$, x_0 ı ihtiva eden kapalı bir aralık olsun. Bir N indeksi tesbit edelim, öyleki $\varepsilon > 0$ verildiği ve

$$n > N$$

seçildiği takdirde,

$$\alpha \leq x \leq x_0 - \frac{\varepsilon}{4M}, \quad x_0 + \frac{\varepsilon}{4M} \leq x \leq \beta$$

aralıklarında,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}. \qquad (10.5.2.1)$$

Şimdi,

$$\left(\alpha, x_0 - \frac{\varepsilon}{4M}\right), \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{4M}, x_0\right), \left(x_0, x_0 + \frac{\varepsilon}{4M}\right), \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{4M}, \beta\right)$$

aralıklarını gözönüne alalım. Birinci ve sonuncu aralıklarda, (10.5.2.1) şartından dolayı $|f_n(x)-f(x)|$ in integrali $\varepsilon/2$ den küçüktür. Diğer aralıklarda ise sınırlılık şartından dolayı, $|f_n(x)-f(x)|$ in integrali $\varepsilon/2$ den küçüktür. Gerçekten, meselâ,

$$\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{4M}}^{x_0} |f_n(t)-f(t)|\,dt \leq \int_{x_0-\frac{\varepsilon}{4M}}^{x_0} |f_n(t)|\,dt + \int_{x_0-\frac{\varepsilon}{4M}}^{x_0} |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

O halde, $x > x_0$ için

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+\frac{4}{M}} \left| f_n(t)-f(t) \right| dt + \int_{x_0+\frac{4}{M}}^{x} \left| f_n(t)-f(t) \right| dt < \varepsilon$$

$x < x_0$ için aynı sonuca varılır, ve teorem ispatlanmıştır.

Hatırlatalım ki esas diziler üzerinde eşdeğerlik bağıntısı esas dizilerin bütününü, ortak elemanı olmayan eşdeğerlik sınıflarına böler. Herbir sınıfa ait herhangi iki dizi eşdeğerdirler. Bu sınıfların herbirine *ideal fonksyon, genelleştirilmiş fonksiyon* veya *dağılım* denir.

Reel sayıların tarifinde olduğu gibi burada da ideal fonkyon $[f_n(x)]$ notasyonu ile gösterilir. İki ideal fonksyonun eşitliği

$$[f_n(x)] = [g_n(x)],$$

$f_n(x)$ ve $g_n(x)$ dizilerinin eşdeğer olduklarını ifade eder, yani,

$$\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\}$$

Misal. Aşağıdaki

$$f_n(x) = (n/2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2/2}$$

dizisi esastır. Gerçekten statistikte *hata fonksyonları teorisinden* biliniyor ki, $n \to \infty$ için

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$$

1 ile sınırlıdır. Zira,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\infty) = 1.$$

Üstelik $(-\infty, 0)$ aralığında $g_n(x) \to 0$ ve $(0, \infty)$ aralığında $g_n(x) \to 1$. Teorem

10.5.2.2 den dolayı, $\{g_n(x)\}$ dizisi esastır, teorem 10.5.2.1 den dolayı da $\{f_n(x)\}$ dizisi esastır.

$\{g_n(x)\}$ esas dizisi, *Heaviside* birim fonksyonunu belirtir.

$\{f_n(x)\}$ esas dizisi ise *Dirac* dağılımını (veya Dirac ölçüsünü) belirtir.

10.5.3. **İdeal Fonksiyanların Türevi.** Eşdeğer iki esas dizi verilmiş olsun, yani,

$$\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\}.$$

Farzedelim ki, $f_n(x)$ ve $g_n(x)$ fonksyonlarının m. mertebeden sürekli türevleri vardır. Bu takdirde diyorum ki

$$\{f_n^{(m)}(x)\} \sim \{g_n^{(m)}(x)\}.$$

Gerçekten, eşdeğerliğin tarifinden dolayı, $\{F_n(x)\}$, $\{G_n(x)\}$ ve $k \geq 0$ vardır, öyleki

$$F_n^{(k+m)}(x) = f_n^{(m)}(x), \quad G_n^{(k+m)}(x) = g_n^{(m)}(x)$$

ve $F_n(x)$, $G_n(x)$ dizileri aynı fonksyona üniform yakınsaktır. Bu da gösterir ki $\{f_n^{(m)}(x)\}$ ve $\{g_n^{(m)}(x)\}$ dizileri eşdeğerdir. Binaenaleyh, $f_n^{(m)}(x)$ ve $g_n^{(m)}(x)$ dizileri aynı eşdeğerlik sınıfına aittirler. Tarif olarak,

$$[f_n^{(m)}(x)] \text{ veya } [g_n^{(m)}(x)]$$

ile gösterilen bu sınıfa, $[f_n(x)]$ ideal fonksyonunun *m. mertebeden türevi denir.*

Bu tarif, m. mertebeden türevin, $f_n(x)$ fonksyonlarının m. mertebeden sürekli türevleri haiz olmalarını öngörmektedir. Hakikatte, böyle bir tahdite lüzum yoktur. Zira Weierstrass'ın ünlü bir teoremine göre, $\{f_n(x)\}$ dizisine eşdeğer bir esas $\{P_n(x)\}$ polinom dizisi daima bulunabilir.

Weierstrass yaklaşık teoremine göre, kapalı bir $[a,b]$ aralığında tarifli, reel herhangibir sürekli fonksyon, üniform yakınsak bir polinom dizisinin limitidir.

Bu teorem, maksada uygun olması için şu şekilde ifade edilebilir.

Teorem 10.5.3.1. *(Weierstrass yaklaşık teoremi).* $F(x)$, (a, b) de sürekli ve $[\alpha_m, \beta_m] \subset I$, öyleki $m \to \infty$ için $\alpha_m \to a$, $\beta_m \to b$, verilmiş olsun. Bu takdirde bir $P_m(x)$ polinomu vardır, öyleki, bütün $x \varepsilon [\alpha_m, \beta_m]$ ler için

$$|F(x) - P_m(x)| < \frac{1}{m}.$$

Dolayısıyla (a, b) de

$$P_m(x) \to F(x)$$

Başka bir deyimle, $[a, b]$ de sürekli fonksiyonlar uzayında, polinomlar yoğundur.

İspat. Teoremin ispatı için $\alpha_m = 0$, $\beta_m = 1$ kabul etmek kâfidir. Zira,

$$G(x') = F([\beta_m - \alpha_m]\, x' + \alpha_m)$$

fonksyonu [0,1] de tarifli sürekli reel bir fonksyondur. [0,1] için teorem doğru ise, [0,1] de tarifli bir Q polinomu vardır öyleki bütün $x' \varepsilon$ [0,1] için $|G(x') - Q(x')| < \varepsilon$. Tekrar x e dönülürse bu eşitsizlik $|F(x) - P(x)| < \varepsilon$ şeklini alır. Burada,

$$P(x) = Q([x - \alpha_m]/[\beta_m - \alpha_m]),\ x \varepsilon\ [\alpha_m, \beta_m].$$

Şimdi, Bernstein polinomları denilen, F ye bağlı

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} F\left(\frac{k}{n}\right)$$

polinomlarını gözönüne alalım. Aşağıdaki

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1$$

özdeşliği gözönünde tutulursa,

$$F(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[F(x) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right],$$

ve dolayısıyla,

$$\left| F(x) - B_n(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| F(x) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

yazılabilir.

Fakat F, [0,1] de üniform sürekli olduğundan, $\delta > 0$ bulunabilir öyleki

$$|x - k/n| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(k/n)| < \varepsilon/2.$$

Nihayet, yukardaki eşitsizlikte sağdaki toplamı Σ ve Σ' ile gösterilen iki toplama ayıralım, öyleki, x keyfi fakat sabit olmak üzere Σ, $|x - k/n| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyan terimlerin toplamı, Σ' ise geri kalan terimlerin toplamıdır. Kolaylıkla görülür ki $\Sigma < \varepsilon/2$. Σ' ye gelince, n yeter derecede büyük seçilerek, x ne olursa olsun, $\Sigma' < \varepsilon/2$ yapılabilir. Gerçekten, birkere, F sınırlı olduğundan, $K > 0$ vardır öyleki $|F(x)| \leq K$, $x \varepsilon [0,1]$. Dolayısıyla

$$\Sigma' \leq 2\, K\, \Sigma \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Sağdaki toplam, $|x - k/n| \geq \delta$ eşitsizliğini sağlıyan bütün k lar üzerinedir. Saniyen, gösterelim ki n yeter derecede büyük alınırsa, Σ'' ile gösterilen bu toplam $\varepsilon/4K$ dan küçük yapılabilir. Aşağıdaki

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}$$

özdeşliğinden,

$$\delta^2 \Sigma'' \leq \frac{x(1-x)}{n}$$

bulunur. $x(1-x)$ in [0, 1] de en büyük değeri 1/4 olduğundan

$$\Sigma'' \leq \frac{1}{4\,\delta^2 n}$$

$n > K/\delta^2\varepsilon$ alındığı takdirde, $\Sigma'' < \varepsilon/4K$ ve dolayısıyla $\Sigma' < \varepsilon/2$.

Bu teoreme göre ideal fonksyonların türevi aşağıdaki şekilde tarif edilebilir.

TARİF 52. $[f_n(x)]$ *ideal fonksyonunun* veya *dağılımının* m. mertebeden türevi diye, $\{f_n(x)\}$ esas dizisine eşdeğer $\{P_n(x)\}$ esas polinom dizisine ait polinomların m. mertebeden türevlerinin teşkil ettikleri $\{P_n^{(m)}(x)\}$ esas polinom dizisinin tarif ettiği $[P_n^{(m)}(x)]$ ideal fonksyonuna denir.

Bu tarife göre, *ideal fonksyon anlamında* şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 10.5.3.2. Herhangibir ideal fonksyon herhangibir mertebeden türevi haizdir.

İdeal fonksyon anlamında, yukardaki tarif ve neticesi olan teorem 10.5.3.2 muteber olabilmeleri için, ideal fonksyonun bir fonksyon olması halinde şayet türev de mevcut ise, bu iki türevin çakışması lâzımdır. Yani,

Teorem 10.5.3.3. Bir $f(x)$ ideal fonksyonu, sürekli m. mertebeden türevi haiz ise, ideal fonksyon mânada m. mertebeden türevi âdi mânada $f^{(m)}(x)$ türevine eşittir.

İspat. Gerçekten, terimleri eşit olan $\{f(x)\}$ dizisi esastır ve $[f(x)]$ ideal fonksyonunu belirtir. Fakat $[f(x)] = f(x)$, çünki $\{f(x)\} = f(x)$.

Halbuki $[f(x)]$ in m. mertebeden türevi $[f^{(m)}(x)]$. Fakat $\{f^{(m)}(x)\}$ dizisi $[f^{(m)}(x)]$ ideal fonksyonunu belirtir ve $\{f^{(m)}(x)\} = f^{(m)}(x)$. Şu halde

$$[f^{(m)}(x)] = f^{(m)}(x).$$

Tarif olarak, bir ideal fonksyonun m. merteben türevi $[f_n(x)]^{(m)}$ veya $f^{(m)}(x)$ yazılır. Birinci türevler için $[f_n(x)]'$ veya $f'(x)$ yazacağız.

Teorem 10.5.3.4. Herbir ideal fonksyon, bir sürekli fonksyonun belli mertebeden türevidir.

İspat. Gerçekten, $f(x)$ bir ideal fonksyon ise, $f_n(x)$, $F_n(x)$ dizileri ve $k \geq 0$ sayısı vardır öyleki,

$$f(x) = [f_n(x)],\ f_n(x) = F_n^{(k)}(x),\ F_n(x) \to F(x).$$

Dolayısıyla,

$$F(x) = [F_n(x)]$$

ve

$$f(x) = [F_n^{(k)}(x)] = [F_n(x)]^{(k)} = F^{(k)}(x).$$

10.5.4. **Lokal İntegrallenebilir Fonksiyonlar.** Bu fonksyonların ithali ile, üstteki teoremi genelleştirmek mümkündür. Gördük ki, ideal fonksyon kavramı, sürekli fonksyonların bir teşmilidir. Şimdi göreceğiz ki, özel hal olarak daha geniş bir fonksyon sınıfını ihtiva etmektedir.

Biliniyor ki, $f(x)$ sürekli bir fonksyon ise

$$\left(\int_a^x f(t)\ dt\right)' = f(x).$$

Fakat $f(x)$ parça parça sürekli ise, veya daha da genel olarak $f(x)$ lokal integrallenebilirse, bu eşitlik *hemen hemen heryerde* doğrudur, yani, ölçüsü sıfır olan $f(x)$ in süreksiz olduğu nokta cümlesi hariç her yerde doğrudur.

İdeal fonksyonlar anlamında, eşitliğin sol tarafına, $\int_a^x f(t)dt$ sürekli fonkyonunun türevi nazarı ile bakılabilir. Bahis konusu eşitlik ise, *bu türevin, lokal integrallenebilir, $f(x)$* fonksyonuna özdeş olduğunu ifade etmektedir.

Binaenaleyh, *lokal integrallenebilir, f, g fonksyonları eşittir, yalnız ve yalnız, ideal fonksyon olarak eşitseler.* Yani, bütün x ler için

$$\int_a^x f(t)\ dt = \int_a^x g(t)\ dt.$$

Bu tariften anlaşılıyor ki, bu fonksyonlar eşittirler, şayet hemen hemen her yerde eşitseler.

Nihayet teorem 10.5.3.4 aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

Teorem 10.5.4.1. Bir ideal fonksyonun $f^{(m)}(x)$, $m > 0$, türevi integrallenebilirse, $f(x)$ fonksyonu süreklidir ve $f^{(m)}(x)$, $f(x)$, in âdi mânada m. mertebeden türevidir.

10.5.5. **Dirac İdeal Fonksyonu.** Yukardaki teoremi Heaviside fonksyonuna tatbik edeceğiz. Bu fonksyona § 10.5.2. de rastlamıştık. Burada ise tarifini hatırlatıyoruz.

TARİF 53. Heaviside fonksyonu diye

$$H(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ için } 0 \\ x > 0 \text{ için } 1 \end{cases}$$

fonksyonuna denir.

Diğer taraftan, bu fonksyonun integrali

$$G(x) = \int_0^x H(t)\ dt = \begin{cases} x < 0 \text{ için } 0 \\ x > 0 \text{ için } x \end{cases}$$

süreklidir. Heaviside fonksyonu, ideal fonksyonlar anlamında $G(x)$ in türevidir. Aynı zamanda, $x = 0$ hariç, âdi türevidir.

Fakat $G(x)$ fonksyonu,

$$\int_{-\infty}^x g_n(t)dt$$

integralinin limitidir. Burada,

$$f_n(x) = (n/2\pi)^{\frac{1}{2}}\ e^{-nx^2/2}$$

ve

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t)dt.$$

O halde

$$[g_n(x)] = G'(x) = H(x).$$

Dolayısıyla, $\{g_n(x)\}$ esas dizisi, Heaviside fonksyonunu temsil eder.

Halbuki, $\delta(x)$ Dirac ideal fonksyonunu gösterirse,

$$\delta(x) = [f_n(x)] = [g'_n(x)] = H'(x).$$

Yani, $\delta(x)$ ideal fonksyonlar anlamında, $H(x)$ in türevidir.

Binaenaleyh, Dirac ideal fonksyonu, $(-\infty, \infty)$ aralığında, lokal integrallenebilir bir fonksyon olmadığına dair bir misaldir. Zira, aksi halde,

$$H'(x) = \delta(x)$$

eşitliğinden, teorem 10.5.4.1 yardımıyla, $H(x)$ in sürekli olduğu neticesine varılırdı ki, bu da yanlıştır.

$\delta(x)$, lokal integrallenebilir bir fonksyonun türevi şeklinde belirmektedir, ve bir fonksyon değildir.

Umumiyetle, lokal integrallenebilir bir fonksyonun, ideal fonksyonlar anlamında türevi, *ölçü* denilen bir ideal fonksyon verir.

10.5.6. **Bir İdeal Fonksyonun İntegrali.** İ aralığında, $f(x)$ ideal fonksyonun belirsiz integrali diye, bir φ ideal fonksyonuna denir öyleki $\varphi'(x) = f(x)$.

Evvelki neticelerden anlaşılıyor ki, bir ideal fonksyonun integrali, veya başka bir deyimle *primitivi* mevcut ve bir sabit farkla belirlidir.

TARİF 54. Belirsiz İntegral diye

$$\int_a^b f(x + t)\ dt = \varphi(x + b) - \varphi(x + a)$$

integraline denir. Burada a, $b \varepsilon$ İ, ve $\varphi(x)$ ideal fonksyonu $f(x)$ in primitividir.

Klasik İntegral Hesap formülleri caridir. Diğer taraftan,

$$\left(\int_a^b f(x+t)\,dt\right)' = \int_a^b f'(x+t)dt = f(x+b) - f(x+a).$$

Üstelik ideal fonksyonların esas dizilerle tarifine dayanarak, aşağıdaki teorem ispat edilebilir.

Teorem 10.5.6.1. $\{f_n(x)\}$ bir ideal fonksyon dizisi olsun. Şayet

$$f_n(x) \to f(x)^{(1)}$$

ise,

$$\int_a^b f_n(x+t)\,dt \to \int_a^b f(x+t)\,dt.$$

Bu teoremden şu netice elde edilir:

Herbir yakınsak ideal fonksyon serisi için

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x+t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x+t)\,dt.$$

TARİF 55. $x = 0$ için, $\int_a^b f(x+t)dt$ ideal fonksyonunun *değeri*, şayet varsa,

$$\int_a^b g(t)\,dt$$

ile gösterilir. Bu sembol, mânası varsa, bir sayıyı temsil eder.

İdeal fonksyon, lokal integrallenebilir bir fonksyon ise

$\int_a^b f(t)dt$ âdi belirli bir integraldir.

Üstelik $\varphi(x), f(x)$ in bir primitivi, ve $\varphi(a), \varphi(b)$ değerleri mevcut ise

$$\int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

yazılır.

Şimdi, $\omega(x)$ sonsuz diferansyellenebilir bir fonksyon ve $f(x)$ bir ideal fonksyon ise, $\omega(x)\,f(x)$ in tarifi aşikârdır. Üstelik kolaylıkla gösterilebilir ki

$$(\omega(x)\,f(x))' = \omega'(x)\,f(x) + \omega(x)\,f'(x).$$

(1) Bir $\{f_n(x)\}$ ideal fonksiyon dizisine bir $f(x)$ ideal fonksiyonuna yakınsaktır denir, ve $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, veya $f_n(x) \to f(x)$ yazılır, şayet bir $k \geq 0$ tamı, sürekli fonksiyonlardan müteşekkil bir $\{F_n(x)\}$ dizisi, ve bir $F(x)$ fonksiyonu varsa öyleki.

$$F_n(x) \to F(x),\ F_n^{(k)}(x) = f_n(x),\ \text{ve}\ F^{(k)}(x) = f(x).$$

Bu formülde x yerine $x + t$ konur ve integrali alınırsa,

$$\int_a^b \omega(x+t)\,f'(x+t)\,dt + \int_a^b \omega'(x+t)\,f(x+t)\,dt =$$

$$\omega(x+b)\,f(x+b) - \omega(x+a)\,f(x+a).$$

Bu formülde $x = 0$ yapılırsa

$$\int_a^b \omega(t)\,f'(t)\,dt + \int_a^b \omega'(t)\,f(t)\,dt = \omega(b)\,f(b) - \omega(a)f(a)$$

bulunur.

6. L. Schwartz'ın Teorisi.

Lineer Fonksiyonel Metodu.

10.6.1. **Lineer Fonksyonellerin Vektör Uzayı.** $[a, b]$ aralığında tarifli x reel değişkeninin $\varphi(x)$ reel fonksyonlarının Φ uzayını gözönüne alalım. Farzedelim ki Φ, R reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzaydır. Yani, $\varphi_1, \varphi_2 \varepsilon \Phi$ ve $k \varepsilon R$ ise

$$\varphi_1 + \varphi_2 \varepsilon \Phi$$

$$k\varphi_1 \varepsilon \Phi.$$

TARİF 56. Φ üzerinde bir T *fonksyoneli* tarif edilmiştir denir, şayet verilen bir *kanunla* herbir $\varphi(x) \varepsilon \Phi$ ye R de bir c skaleri *tekabül* ettirilebiliyorsa. Notasyon olarak,

$$T(\varphi) = c$$

yazacağız. Yani T, φ ye tatbik edildiği takdirde c yi verir.

TARİF 57. T fonksyoneli lineerdir denir, şayet şu iki şart sağlanıyorsa

$$T1.\ T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$$

$$T2.\ T(k\varphi) = kT(\varphi).$$

Şimdi $f(x)$, $[a, b]$ aralığında tarif edilmiş olsun. $f(x)$ den hareket edilerek T_f fonksyoneli aşağıdaki şekilde tarif edilebilir.

$$T_f(\varphi) = \int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt \qquad (10.6.1.1)$$

şu şartla ki, $\varphi(x) \varepsilon \Phi$ keyfi için integral daima mevcuttur.

Bütün lineer fonksyoneller bu şekilde tarif edilmiş değildir.

Başka türlü de tarif edilebilir. Meselâ,

$$T(\varphi) = \varphi(0)$$

T_1, T_2, $\varphi(x)\varepsilon\Phi$ e tatbik edilen iki lineer fonksyonel olsun. Farzedelim ki,

$$T_1(\varphi) = c_1,\ T_2(\varphi) = c_2,\ c_1, c_2 \varepsilon R.$$

Şimdi, $k\varepsilon R$ bir skaler ve her $\varphi\varepsilon\Phi$ için S ve P lineer fonksyonellerini gözönüne alalim, öyleki,

$$S(\varphi) = c_1 + c_2,\ c_1 + c_2 \varepsilon R$$

ve

$$P(\varphi) = kc_1,\ kc_1 \varepsilon R\ .$$

Tarif olarak,

$$S = T_1 + T_2$$

ve

$$P = kT_1$$

vazedilirse, görülür ki Φ üzerinde tarifli lineer fonksyonellerin bütünü bir vektör uzay teşkil eder. Bu yeni vektör uzay Φ' ile gösterilirse Φ' ye Φ nin *ikilisi*dir *(dual)* denir.

10.6.2. **Sürekli Lineer Fonksyoneller.** φ fonksyonlarının Φ uzayında tarifli bir lineer fonksyonelin sürekliliğini tarif edebilmek için, hangi şartlar altında, iki elemanının φ_1, $\varphi_2\varepsilon\Phi$ komşu olduklarını söyliyebilmek lâzımdır. Yani Φ de bir topolojinin tesbiti gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki şartları sağlıyan ve $d(\varphi_1, \varphi_2)$ ile gösterilen iki eleman arasındaki uzaklığı tarif ediyoruz.

D1. $d(\varphi_1, \varphi_2) > 0,\ d(\varphi_1, \varphi_1) = 0$

D2. $d(\varphi_1, \varphi_2) = d(\varphi_2, \varphi_1)$

D3. $d(\varphi_1, \varphi_2) \leq d(\varphi_1, \varphi_3) + d(\varphi_2, \varphi_3)$

$d(\varphi_1, \varphi_2) = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ vazedersek D1, D2, D3 şartları sağlanır.

TARİF 58. Φ üzerinde tarifli T lineer fonksyoneli süreklidir denir şayet her $\varepsilon > 0$ için bir $\eta > 0$ varsa öyleki

$$|\ \varphi_2(x) - \varphi_1(x)\ | < \eta$$

ise

$$|\ T(\varphi_2) - T(\varphi_1)\ | < \varepsilon.$$

Yukardaki tarifler R^n-Euclid Uzayına teşmil edilebilir. Burada φ ler, $[a, b]$ yerine, kompakt bir cümlede tarifli farzedilir.

10.5.3. **İdeal Fonksyonlar veya Dağılımlar.** Φ üzerinde tarifli lineer fonksyonellerin incelenmesini kolaylaştırmak ve aynı zamanda en genel fonksyonelleri elde edebilmek maksadıyla, $\varphi(x)$ fonksyonlarını sonsuz diferansyellenebilir farzedeceğiz. Üstelik $[a, b]$ tarif aralıkları bir tahdide yol açmamaları için, yerlerine $[-\infty, \infty]$ aralığı yani R^1 ikame edilecektir. Nihayet, (10.6.1.1) gibi integrallerin bir mânası olabilmesi için $\varphi(x)$ fonksyonlarının $|x|$ sonsuz artarken, sür'atle sıfıra yaklaştığı farzedilecektir.

Bu şartları sağlıyan $\varphi(x)$ fonksyonlarının uzayını $\mathcal{D}$ ile göstereceğiz.

TARİF 59. *İdeal fonksyon* veya *dağılım* diye, $\mathcal{D}$ nin *ikilisi* olan $\mathcal{D}'$ uzayına ait bir sürekli lineer fonksyonele denir.

10.6.4. **Genelleştirilmiş Fonksyonların C_g Uzayı.** C_p, parça parça sürekli $F(x)$ fonksyonlarının vektör uzayı olsun. C_p nin herbir $F(x)$ elemanına, Φ nin ikilisi olan Φ' nün bir $T_F(\varphi)$ elemanı tekabül eder. Fakat Φ' vektör uzayına ait elemanlar vardır öyleki C_p de bunlara tekabül eden eleman yoktur. Bu mülâhazalar, bize, parça parça sürekli fonksyonları genelleştirme imkânını verecektir.

Bir T_n lineer fonksyonel dizisini gözönüne alalım. T_n herbir $\varphi\varepsilon\Phi$ ye tatbik edildiğinde

$$T_n(\varphi) = c_n$$

dizilerini verir. Farzedelim ki $n \to \infty$ için herbir dizinin bir c limiti vardır. Bu kaideye göre herbir $\varphi\varepsilon\Phi$ ye bir c sayısı tekabül etmekte ve c ler

$$T(\varphi) = c$$

limit fonksyonelini tarif etmektedir.

T_n lineer fonksyonelleri $F_n(x)$ fonksyonlarına ait iseler, yani

$$T_n = T_{F_n}$$

ise, *tarif olarak diyeceğiz ki* $F_n(x)$ *fonksyonunun limiti* F^* *genelleştirilmiş veya ideal fonksyondur*, öyleki

$$T_{F^*} = \lim T_{F_n}.$$

Burada genelleştirilmiş F^* fonksyonu, ya bir fonksyondur veya yeni bir *varlıktır*. Bu yeni varlığa *ideal fonksyon* veya *genelleştirilmiş fonksyon* diyoruz.

Bu şekilde tarif edilen genelleştirilmiş fonksyonların cümlesi, $F(x)$ fonksyonlarının C_p cümlesini ihtiva eder.

Yeni ideal fonksyonlar, C_g vektör uzayını teşkil edecek şekilde C_p yi tamamlarlar. Böylece C_g ile, Φ nin ikilisi olan lineer fonksyonellerin Φ' vektör uzayı arasındaki tekabül birebirdir.

Şu halde, ideal fonksyonlar C_g–C_p fark cümlesini teşkil ederler, yani $C_g = \overline{C}_p$ ve dolayısıyla C_g kapalı bir cümledir.

§ 10.6.3 teki ideal fonksyonun tarifine dönersek, görülür ki, C_g ile $\mathcal{D}'$ arasında birebir tekabül vardır, ve fonksyon dizilerinin limitlerinin tetkikleri suretiyle genelleştirilmiş fonksyonlar doğrudan doğruya tarif edilebilir. Nitekim 5. kısımda, Mikuzinski ve Sikorski'nin metodları inkişaf ettirilirken böyle yapılmıştı. Bu teorinin avantajı, genelleştirilmiş fonksyonların açık seçik teşkil edilebilmesindedir.

L. Schwartz metodunda ise, türev kavramının formülasyonu çok daha basittir.

10.6.5. **Türevin tarifi.** Farzedelim ki $f(x)$, R^1 de türevi haiz bir fonksyondur. Bu takdirde $T_f(\varphi)$ yerine $f(\varphi)$ yazacağız. T notasyonu ise herhangibir *dağılım* için kullanılacaktır.

Şimdi aşağıdaki *dağılımları* gözönüne alalım.

$$f(\varphi) = \int_{R^1} f(x)\varphi(x)\,dx$$

ve

$$f'(\varphi) = \int_{R^1} f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

İkinci integral kısmi integrasyonla,

$$f'(\varphi) = [f(x)\,\varphi(x)]_{R^1} - \int_{R^1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

şeklini alır. § 10.6.3 de φ hakkındaki hipotezden dolayı köşeli parantez sıfırdır. Geriye

$$f'(\varphi) = -f(\varphi')$$

kalır.

Bu tarifi herhangibir T dağılımı için örnek alıyoruz, ve R^1 üzerinde tarifli bir T dağılımı için $\frac{dT}{dx}$ türevini

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = -T(\varphi')$$

şeklinde tarif ediyoruz.

10.6.6 **Heaviside Birim Fonkyonunun Türevi ve Dirac ölçüsü.** § 10.5.5 de Heaviside birim fonksyonunu tarif etmiştik. Heaviside birim fonksyonu

$$H(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ için } 0 \\ x > 0 \text{ için } 1. \end{cases}$$

$x = 0$ da tarif edilmiş değildir. H bir dağılım olarak düşünülürse, yani

$$H(\varphi) = \int_{R^1} H(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Dağılım anlamında türev alınır ve φ nin tarifi gözönünde tutulursa,

$$\frac{dH}{dx}(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_{R^1} H(\varphi'(x))\,dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Halbuki *dağılım* olarak δ *Dirac ölçüsü*

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

şeklinde tarif edilirse,

$$\frac{dH}{dx} = \delta$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{d\delta}{dx}(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0).$$

Sol taraf $\delta'(\varphi)$ ile gösterilir, yeniden türev alınırsa,

$$\delta''(\varphi) = \frac{d\delta'}{dx}(\varphi) = -\delta'(\varphi') = \varphi''(0),$$

ve genel olarak, m tam için

$$\delta^{(m)}(\varphi) = (-1)^m\,\delta(\varphi^{(m)}) = (-1)^m\,\varphi^{(m)}(0).$$

10.6.7. **Sürekli bir fonksyon veya bir dağılımın desteği.** $f(x)$, R^1 de (veya umumiyetle R^n de) sürekli olsun. $f(x)$ in *desteği* diye *kapalı* bir F cümlesine denir, öyleki, F, $f(x) \neq 0$ olduğu R^1 re ait *bütün* x noktalarının cümlesinin *kapanışıdır*. Dolayısıyla, F nin bir noktası R^1 in bir noktasıdır öyleki o noktanın herbir civarında $f \not\equiv 0$, ve karşıt olarak R nin herbir noktası, öyleki o noktanın herbir civarında $f \not\equiv 0$, F ye aittir.

TARİF 60. Bir T dağılımı, R^1 in açık bir ω cümlesinde sıfırdır denir, şayet her ne zaman φ nin desteği ω nın içinde ise, $T(\varphi) = 0$.

$\Omega = \cup\,\omega$, T nin sıfır olduğu ω ların birleşimi ise, T nin *desteği* tarif olarak Ω nın R^1 re nazaran *tamamlayıcısıdır*.

10.6.8. **Dağılımların esas diziler ve lineer fonksyonellerle tariflerinin mukayesesi.** § 10.5.6 da $f(x)$ dağılımının belirsiz integralini tarif etmiştik. $f(x)$ yerine $\omega(x)\,f(x)$ dağılımını nazarı itibare alabiliriz. Burada farzedeceğiz ki, $\omega(x)$ sonsuz diferansyellenebilir ve

$$\int_a^b \omega(x+t)\,f(x+t)\,dt$$

belirsiz dağılım integralinin $x=0$ *için değeri*, şayet varsa,

$$\int_a^b \omega(t)\,f(t)\,dt \qquad (10.6.8.1)$$

sayısıdır.

$a \leq x \leq b$ aralığını ihtiva eden bir İ açık aralığında sonsuz diferansyellenebilir bütün $\omega(x)$ fonksyonlarının D vektör uzayını gözönüne alalım. $f(x)$, İ de bir ideal fonksyon (veya dağılım) ise, (10.6.8.1) sayısı, şayet mevcut ise, $f(x)$ e bağlı ve D de tarifli bir lineer fonksyoneli temsil eder. Bu fonksyonellerin tamamı D nin ikilisi olan D′ vektör uzayını teşkil eder.

Şayet (10.6.8.1) yerine, $-\infty$ ile ∞ arasında belirli integraller, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)\, f(t)\, dt$$

integralleri gözönüne alınmak isteniyorsa, bu integrallerin bir mânası olabilmesi için, $\omega(x)$ ve f dağılımlarının bazı şartları sağlamaları gerekir.

Gördük ki, dağılımlar, lineer fonksyonel metodu ile tarif edilirken, bu zorluklar, $\omega(x)$ yerine, sonsuz diferansyellenebilir ve sür'atle azalan $\varphi(x)$ fonksyonlarının ithaliyle bertaraf edilmişti. $\varphi(x)$ fonksyonlarının cümlesi $\mathcal{D}$ ile gösterilmişti. Aşikârdır ki $\mathcal{D}$, D nin bir altuzayıdır. Bu takdirde, $\varphi(x)$ için T dağılımının nümerik değeri $T(\varphi)$ ile göterilmişti. Nihayet gördük ki, T dağılımı, lokal integrallenebilir bir $f(x)$ fonksyonu ise, $T(\varphi)$ sayısı

$$f(\varphi) = \int_{R^1} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

şeklinde yazılabilir.

Fakat T dağılımının x deki değeri ne olduğu, fonksyonel metod'da tarif edilmediği için, T yerine $T(x)$ yazmadık, ne de $T(\varphi)$ yi

$$T(\varphi) = \int_{R^1} T(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad (10.6.8.2)$$

şeklinde ifade ettik. Çünki bu metod'da, bir dağılımın, bir esas dizi ile ifade edilebileceğini görebilmek güçtür.

Bunu kabul eder, desteği R^1 de olan $f(x)$ dağılımına $T(x)$ der, ve $\omega(x)$ fonksyonlarının D uzayı yerine $\varphi(x)$ fonksyonlarının $\mathcal{D}$ uzayını nazarı itibare alırsak, (10.6.8.2) bağıntısını kurabiliriz.

§ 10.5.6. daki formülü, $T(x)$ notasyonuna göre yazarsak,

$$\int_a^b \varphi(t) T'(t) dt + \int_a^b \varphi'(t)\, T(t)\, dt = \varphi(b)\, T(b) - \varphi(a)\, T(a).$$

Bu formülde $a = -\infty$, $b = \infty$ yapılır ve $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$ gözönünde tutulursa,

$$\int_{R^1} T'(t)\, \varphi(t)\, dt = -\int_{R^1} T(t)\, \varphi'(t) dt,$$

veya

$$T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

bulunur. Bu da gösterir ki farklı iki noktai nazar aynı neticeyi vermektedir.

7. Dağılımların Trigonometrik Serilere Açılımları.

10.7.1. **Peryodik dağılımlar.** R^1 üzerinde tarifli bir $f(x)$ dağılımına (veya ideal fonksyonuna) peryodik ve peryodu τ dur denir, şayet

$$f(x + \tau) = f(x)$$

bağıntısı cari ise.

Bundan sonraki tetkiklerimizde $\tau = 2\pi$ alacağız.

Teorem 10.7.1.1. Peryodu 2π olan her peryodik dağılım için

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \text{ integrali mevcuttur.}$$

İspat. $\varphi_0(x)$, $f(x)$ in bir *primitivi* ise

$$\varphi_0'(x) = f(x)$$

ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x + t)\, dt = \varphi_0(x + \pi) - \varphi_0(x - \pi) \qquad (10.7.1.1)$$

yazılabilir.

Bu dağılımın türevi

$$f(x + \pi) - f(x - \pi) = 0$$

olduğundan,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x + t)\, dt = \text{Sabit.}$$

Binaenaleyh, $x = 0$ yapılırsa

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

bulunur. Yani $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$ mevcuttur.

Bu integrallerin varlığından ve § 10.5.6 daki neticelerden istifade ederek şu teoremi ispatsız ifade edebiliriz.

Teorem 10.7.1.2. Peryodu 2π olan $g_n(x)$ periyodik dağılımların yakınsak serisi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)\, dt$$

bağıntısını sağlar.

Bu teoremlerden istifade ederek aşağıdaki teoremi ispat edelim.

Teorem 10.7.1.3. Şayet 2π peryodlu peryodik bir $f(x)$ dağılımının $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$ integrali sıfır ise, bu takdirde, periyodik bir $\varphi(x)$ primitivi vardır, öyleki $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0$.

İspat. Gerçekten

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = 0 \text{ ve } \varphi_0'(x) = f(x)$$

ise, (10.7.1.1) den dolayı

$$\varphi_0(x + \pi) - \varphi_0(x - \pi) = 0.$$

Binaenaleyh, $\varphi_0(x)$ dağılımı peryodik ve peryodu 2π dir, ve

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - c \qquad (10.7.1.2)$$

dağılımı, öyleki,

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t)\ dt$$

teoremin öngördüğü dağılımdır. Gerçekten, (10.7.1.2) nin $-\pi$ ile π arasındaki integrali

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t)\ dt - c = 0.$$

Şimdi farzedelim ki, $f(x)$ dağılımı aşağıdaki trigonometrik seriye açılabilir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (10.7.1.3)$$

Bu eşitliğin iki tarafı cosmx ile çarpıldıktan sonra, $-\pi$ ile π arasında integrali alınır ve teorem 10.7.1.2 gözönünde tutulursa,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt\ dt = \tfrac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\ dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\ dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\ dt\right) = \pi a_m.$$

Aynı şekilde,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt\ dt = \pi b_m$$

bulunur. Görülüyor ki (10.7.1.3) açılımı varsa *birtektir*.

L. Schwartz ve başka müellifler gösterdiler ki:

Teorem 10.7.1.4. 2π peryodlu her peryodik $f(x)$ dağılımı aşağıdaki tipte bir trigonometrik serinin toplamıdır:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

ve bu toplamda

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\ dt\ ,\ n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\ dt,\ n = 1,2,\ldots\ .$$

Üstelik *bu açılım* birtektir.

10.7.2. **Dirac dağılımının trigonometrik seriye açılımı.** Heaviside H fonksyonu ile ifade edilen $H^*(x)$ merdiven fonksyonunu gözönüne alalım:

$$H^*(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} H(x - 2n\pi) + \sum_{n=-\infty}^{0} (H(x + 2n\pi) - 1).$$

Bu fonksyonun türevi, 2π peryodlu, peryodik $\delta_{2\pi}$ Dirac dağılımıdır. § 10.6.6 gözönünde tutulursa, $\delta_{2\pi}$ nin trigonometrik seriye açılımının katsayıları,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta_{2\pi}(t) \cos nt\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos nt\ dt = \frac{1}{\pi}\cos 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = 0.$$

Dolayısıyla,

$$\delta_{2\pi}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots\right).$$

Sağdaki serinin n. kısmi toplamı, bilindiği üzere *Dirichlet çekirdeğine*, yani

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

ifadesine eşittir. Bu çekirdek, *dağılım anlamında*, $\delta_{2\pi}(x)$ e *yakınsaktır* deniyor.

BÖLÜM XI

GENEL TOPOLOJİ

1. Topolojik Uzaylar

11.1.1. **Uzay kavramı.** *TARİF* 1. Elemanlarına *nokta* denilen bir G cümlesine *uzay* denir.

TARİF 2. A, B, G nin iki alt cümlesi olsun, A ve B nin *birleşimi* diye, $A \cup B$ ile gösterilir, ya A, ya B, ya da ikisine birden ait A ve B nin bütün elemanlarından müteşekkil cümleye denir.

A ve B nin *arakesiti* diye, $A \cap B$ ile gösterilir, A ve B nin her ikisine birden ait elemanların cümlesine denir.

Hiç elemanı olmıyan cümleye, *boş cümle* denir ve $\varnothing$ ile gösterilir. $\varnothing$, G nin, boş olmıyan herbir $A \subset G$ altcümlesinde bulunduğu kabul edilebilir, zira $X \subset G$ herhangibir altcümle ise, $X \subset A$ (eşitlik mümkün) dır yalnız ve yalnız, G nin herbir y elemanı için: $y \notin A \Rightarrow y \notin X$. Fakat $X = \varnothing$ ve $A \neq \varnothing$ ise, $y \notin A \Rightarrow y \notin X$ daima sağlanmıştır.

A ve B cümlelerine *ayrıktır* denir, şayet $A \cap B = \varnothing$ ise.

A–B, A nın B ye ait olmıyan elemanlarının cümlesidir.

$A \subset G$ ise, $G - A$ cümlesine, A nın G deki *komplemanı* denir ve A^c ile gösterilir. c operasyonunun aşikâr hassaları: $(A^c)^c = A$, $\varnothing^c = G$, $G^c = \varnothing$, $A \cup A^c = G$, $A \cap A^c = \varnothing$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Misal olmak üzere, ikinci bağıntıyı ispat edelim: $p \varepsilon G$ bir elemanı gösterdiğine göre, $p \varepsilon (A \cup B)^c \Rightarrow p \notin A \cup B \Rightarrow p \notin A, p \notin B \Rightarrow p \varepsilon A^c, \ p \varepsilon B^c \Rightarrow p \varepsilon A^c \cap B^c \Rightarrow (A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Diğer taraftan, $q \varepsilon G$ ise,

$$q \varepsilon A^c \cap B^c \Rightarrow q \varepsilon A^c, q \varepsilon B^c \Rightarrow q \notin A, q \notin B \Rightarrow q \notin A \cup B \Rightarrow$$

$$q \varepsilon (A \cup B)^c \Rightarrow A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c.$$

$\hat{I}$, bir *indeks* (işaret) cümlesi olsun. Farzedelim ki her $i \varepsilon \hat{I}$, ye G de bir A_i alt cümlesi tekabül eder. Bu takdirde,

$$\bigcup_{i \varepsilon \hat{I}} A_i = \{ x : x \varepsilon A_i \text{ en az } i \varepsilon \hat{I} \text{ için} \}$$

$$\bigcap_{i \varepsilon \hat{I}} A_i = \{ x : x \varepsilon A_i \ \forall i \text{ ler için} \}.$$

Birtek p elemanından ibaret alt cümleler p ile gösterilecektir. Altcümledeki eleman sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise, altcümle $(p,q,...)$ şeklinde gösterilir.

11.1.2. **Topolojik Uzay.** G uzayında, veya onun bir parçasında, bir fonksyonun tarif edildiğini düşünelim. Bir noktada sürekliliği tarif edebilmek için, *limit* kavramına ihtiyaç olduğu şüphesizdir. Limit kavramının tarifi ise, aşağıda tarifini vereceğimiz, *bir topoloji* kavramı ile mümkün olabilecektir. Diğer bir ifade ile, G ye bir *topolojik strüktür* (yapı) verilmek suretiyle, limit kavramının tarifi mümkün olabilecektir. Bir uzaya, çeşitli şekillerde bir topolojik strüktür verilebilir. Aşağıda takdim edilen tarif, maksada en uygun olduğu kanaatindeyiz.

TARİF 3. $G \neq \varnothing$ bir uzay olsun. Farzedelim ki G ve $\varnothing$ dahil olmak üzere, G ye ait altcümlelerden bir $\mathcal{G}$ ailesi tefrik edilebilir, öyleki.

A1. $\mathcal{G}$ ye ait herhangibir altcümle koleksyonunun birleşimi yine $\mathcal{G}$ ye aittir.

A2. $\mathcal{G}$ ye ait herhangibir sonlu altcümle koleksyonunun ara kesiti yine $\mathcal{G}$ ye aittir.

Yani, $\mathcal{G}$ keyfi birleşim ve sonlu arakesitlerinin teşkillerine nazaran kapalıdır. Aynı zamanda şu iki husus ta kabul ediliyor: boş bir cümle koleksyonunun *birleşimi* boş cümledir, *arakesiti* ise bütün G dir. Bu takdirde diyoruz ki $\mathcal{G}$, G de bir *topoloji* tarif eder, veya G bir $\mathcal{G}$ *topolojik strüktürünü* haizdir. A1 ve A2 aksiyomlarını sağlıyan alt cümlelere *açık cümle* diyeceğiz ve umumiyetle O harfiyle göstereceğiz.

Görülüyor ki bir topolojik uzay iki şeyden müteşekkildir, boş olmıyan bir G cümlesinden ve bir $\mathcal{G}$ topolojisinden. Aslında bir G topolojik uzayını $(G, \mathcal{G})$ ile göstermek icab ediyorsa da, bir karışıklığa meydan vermedikçe sadece G ile göstereceğiz.

A1, A2 şartlarına ilaveten, bir G topolojik uzayı aşağıdaki, A3 şartını da *(ayırım şartı)* sağlıyorsa.

A3, $p_1, p_2 \varepsilon G$ verildiği takdirde, $\exists\, O_1, O_2 \ni p_i \varepsilon O_1, p_2 \varepsilon O_2$ ve $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, yani O_1, O_2 açık cümleleri p_1, p_2 noktalarını *ayırıyorsa*, bu takdirde G topolojik uzayına, *Hausdorff* uzayi denir.

11.1.3. **Topolojik Metrik Uzaylar.** Bir G uzayının, herhangi iki noktası arasında bir $f(p, q)$; $p, q \varepsilon G$; *mesafe* (uzaklık) fonksyonu tarif edilebilirse öyleki, aşağıdaki mesafe *aksyomları*, yani

M1. $f(p, q) \geq 0$,

M2. $f(p, q) = f(q, p)$,

M3. $f(p, r) \leq f(p, q) + f(q, r)$, $p, q, r \varepsilon G$,

M4. $f(p, q) = 0$, yalnız ve yalnız $p = q$ ise,

şartları sağlanmıştır, bu takdirde G ye *metrik uzay* denir.

G uzayında *açık cümleler* şu şekilde tarif edilebilir: bir $A \subset G$ cümlesi *açıktır* denir, şayet, $p \varepsilon A$ ise, p ye bir $\varepsilon > 0$ sayısı tekabül eder, öyleki, $f(p, q) < \varepsilon$ $\forall q \varepsilon A$, dır.

Görülür ki, açık cümlelerin bu tarifi ile, A1, A2, A3 sağlanmıştır.

Dolayısıyla, bir metrik uzay, aynı zamanda bir Hausdorff uzayıdır.

$p \varepsilon G$ ise, p nin *ε-civarı* diye, $f(p,q) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlıyan nokta cümlesine denir.

ε-civarlarının açık cümleler oldukları, mesafe aksyomlarından doğrudan doğruya tahkik edilebilir.

Euclid Uzayı. Belli bir sıra takib eden, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n reel sayı verilmiş olsun. Yukardaki şekilde, herbir sıralanmış reel sayı n-lisini, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ile gösterelim. Sıralanmış n-lilerin bütününe ise R^n diyelim. x n-lisine nokta denir ve, R^n uzayına ait, herhangi x, y, iki noktanın uzaklığı

$$f(x, y) = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} (x_m - y_m)^2}$$

şeklinde tarif edilirse, R^n *metrik uzayına n-boyutlu Euclid uzayı denir.*

Sıralanmış $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayıları kompleks iseler, C^n n-boyutlu kompleks Euclid uzayı benzer şekilde tarif edilir.

Misaller. 1. $G = (p,q)$ yalnız iki nokta ihtiva eden bir uzay olsun. $\mathcal{G} = \{p, q, G, \varnothing\}$ olsun. Görülüyor ki $\mathcal{G}$ A1 ve A2 aksyomlarını sağlıyor. Binaenaleyh, p, q, G, $\varnothing$ açık cümlelerdir. Üstelik $G = (p, q)$ Hausdorff uzayıdır, zira $p \neq q$ ve p, q açık cümlelerdir.

2. $G = (p, q)$ verilmiş olsun. Farzedelim ki $\mathcal{G} = \{G, \varnothing\}$. Görülüyor ki $\mathcal{G}$; $\cup$ ve $\cap$ teşkillerine nazaran kapalıdır. Fakat Hausdorff uzayı değildir. Çünkü $\mathcal{G}$ de, p ve q yu ihtiva eden ve arakesiti boş olan O lar mevcut değildir.

3. $G = (p, q, r)$ farzedelim. $\mathcal{G} = \{p, q, r, (p, q), (p, r), (r, q)), \varnothing, G\}$ olsun. $\mathcal{G}$, $\cup$ ve sonlu $\cap$ teşkillerine nazaran kapalıdır. Üstelik $G = (p, q, r)$ Hausdorff uzayıdır, zira herhangi iki eleman alınırsa, diyelim ki p, q; bunlar birer O (açık cümle) dur ve arakesiti boştur, çünkü $p \neq q$.

4. $G = (p, q, r)$ uzayını gözönüne alalım.

$\mathcal{G} = \{p, (p, q), (p, r), \varnothing, G\}$ şeklinde teşkil edilsin. Görülür ki $\mathcal{G}$, $\cup$ ve $\cap$ teşkillerine göre kapalıdır. Fakat Hausdorff uzayı değildir. Çünkü p, q noktaları gözönüne alındığı takdirde, bu noktaları ihtiva eden ve arakesitleri boş olan O lar mevcut değildir.

5. $0 \leq x < 1$ eşitsizliğini sağlıyan x lerin cümlesine G diyelim. $\mathcal{G} = \{0 \leq x < k; 0 < k \leq 1\}$ yi teşkil edelim. Görülür ki $\mathcal{G}$, $\cup$ ve sonlu $\cap$ teşkillerine nazaran kapalıdır. Binaenaleyh, $\mathcal{G}$, G de bir topoloji tarif eder. Fakat Hausdorff uzayı değildir.

TARİF 4. Bir G uzayında $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gibi iki topoloji tarif edilmiş olsun. $\mathcal{G}_1$ topolojisi $\mathcal{G}_2$ den *zayıftır* veya $\mathcal{G}_2$ topolojisi $\mathcal{G}_1$ den *kuvvetlidir* diyoruz şayet $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ ise.

Herhangibir G uzayı verilmiş olsun. *En zayıf topoloji* $\mathcal{G} = \{\varnothing, G\}$ dir. *En kuvvetli topoloji* ise, $\varnothing$ ve G dahil, G nin bütün altcümlelerinden müteşekkil $\mathcal{G}$ topolojisidir. $\mathcal{G}$ nin $\cup$ ve sonlu $\cap$ teşkillerine nazaran kapalı olduğu görülür. Dolayısıyla $\mathcal{G}$ nin herbir elemanı bir açık cümledir. En kuvvetli topolojiye *ayrık topoloji* denir.

Problem 1. Gösteriniz ki her ayrık topolojik uzay bir Hausdorff uzayıdır.

Problem 2. Yukardaki misallerde, hangileri ayrık *(diskret)* topolojilerdir.

TARİF 5. $A \subset G$, bir cümle olsun. A nın bir *civarı (komşuluğu)* diye bir $V \subset G$ cümlesine denir, öyleki V, bir O cümlesini ihtiva eder, O da A yı ihtiva eder. Yani

$$A \subset O \subset V.$$

Umumiyetle, civarın tarifinde A yerine bir p noktası gözönüne alınır. Bu takdirde p nin bir civarı $V(p)$ ile gösterilecektir.

TARİF 6. Bir $A \subset G$ cümlesi *kapalıdır* denir. şayet A^c açık ise.

A1 ve A2 aksyomlarının, komplemanları alınarak, bir topoloji tarif etmek mümkündür. Bu topolojide $\mathcal{G}$ açık cümle ailesi yerine bir $\mathcal{F}$ *kapalı cümle* ailesi tefrik edilerek, A1 in yerine.

A^c1. $\mathcal{F}$ ye ait herhangibir kapalı altcümle koleksyonunun arakesiti $\mathcal{F}$ ye aittir.

A2 nin yerine de.

A^c 2. $\mathcal{F}$ ye ait herhangibir sonlu kapalı alt cümle koleksyonunun birleşimi $\mathcal{F}$ ye aittir, aksyomları ikame edilir.

TARİF 7. Bir $A \subset G$ cümlesinin *kapanışı* diye, A yı ihtiva eden en küçük kapalı cümleye denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

$\bar{A}$ mevcuttur, çünki, $\bar{A}$, A yı ihtiva eden bütün kapalı cümlelerin ara kesitidir. A^c 1 den dolayı $\bar{A}$ kapalıdır.

TARİF 8. $p \varepsilon A$ olsun. p noktasına A nın *iç noktasıdır* denir, şayet A, p nin bir cıvarı ise. A nın *içi* diye iç noktaların cümlesine denir.

A nın *dışı* ise, A^C nın içi olarak tarif edilir.

TARİF 9. A nın *sınırı*, $\bar{A}$ ve A^C nın ortak noktalarının cümlesidir. Yani $\bar{A} \cap A^C = \partial A$, burada ∂A, A nın sınırını gösterir.

Görülüyor ki, herhangibir $A \subset G$ verildiğine göre, G, üç ayrık cümlenin birleşimidir: A nın içi, A nın dışı ve A nın sınırı. Netice olarak, ∂A, A nın içi ve dışının birleşiminin komplemanı olduğundan kapalıdır.

11.1.2. **Limit noktası.** Tıpkı kompleks düzlemde olduğu gibi, *Açık cümle*, ve *Civar* kavramlarının yardımlarıyla, *yığılma noktalarını* tarif etmek mümkündür. Bundan sonra da *limit noktayı* tarif edeceğiz.

$p \varepsilon G$ olsun. p nin *noktalanmış civarı* diye, p noktası kaldırılmış civara denir.

TARİF 10. Bir $p \varepsilon G$ noktası bir $A \subset G$ cümlesinin *yığılma noktasıdır* denir, şayet p nin herbir noktalanmış civarı, A nın en az bir noktasını ihtiva ediyorsa.

A nın yığılma noktalarının cümlesine A dan *türetilen* cümle denir ve A' ile gösterilir.

Bir noktaya, A ya *yapışıktır* denir yalnız ve yalnız bu nokta, ya A, ya da A' ye ait ise, o halde,

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

Şayet $p \varepsilon A$ fakat $p \notin A'$ ise p ye A nın bir *ayrık noktasıdır* denir.

Teorem 11.1.2.1. $A \subset G$ herhangibir cümle olsun. Bu taktirde $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$.

İspat. a, $\bar{A}$ nın bir papanış *(yapışık)* noktası olsun, $a \varepsilon \bar{\bar{A}}$. Bu demektir ki, a yı ihtiva eden herbir U açık cümlesi $\bar{A}$ ya ait bir nokta ihtiva ediyor, b diyelim. Diğer taraftan $b \varepsilon \bar{A}$, $b \varepsilon U \Rightarrow b$ yi ihtiva eden herbir U, A ya ait bir nokta ihtiva ediyor. Neticede, a yı ihtiva eden herbir U, A ya ait bir nokta ihtiva ediyor. Yani $a \varepsilon \bar{A}$. O halde $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$.

Diğer taraftan tariften dolayı daima $\bar{\bar{A}} \supset \bar{A}$.

Teorem 11.1.2.2 $A \subset G$ kapalıdır yalnız ve yalnız $A = \bar{A}$ ise.

İspat. Farzedelim ki A kapalıdır. $G-A$ açıktır. $x \varepsilon G-A$ herhangibir nokta olsun. Bu taktirde, x yi ihtiva eden ve A ya ait hiçbir nokta ihtiva etmiyen bir açık cümle vardır. Binaenaleyh $x \notin \bar{A}$. A kapalı idi, ohalde $\bar{A} \subset A$. Diğer taraftan, daima $A \subset \bar{A}$. Dolayısıyla, $A = \bar{A}$.

Karşıt olarak, farzedelim ki $A = \bar{A}$. $x \varepsilon G-A$ herhangibir nokta olsun. Bu taktirde $x \notin \bar{A}$. Dolayısıyla x yi ihtiva eden ve A yı kesmiyen bir U_x açık

cümlesi vardır. $V = \bigcup_{x \varepsilon G-A} U_x$ olsun. V açıktır, ve $G-A \subset V$ çünki her $x \varepsilon G-A$ bir U_x ye aittir. Diğer taraftan, V nin hiçbir noktası A ya ait değildir, zira hiçbir U_x A yı kesmiyor. Yani $V \subset G-A$. Dolayısıyla, $V = G-A$. O halde $G-A$ açıktır. Binaenaleyh A kapalıdır.

Yukardaki iki teoremin bir neticesi olarak $\bar{A}$ kapalıdır.

TARİF 11. Bir G topolojik uzayının bir $A \subset G$ alt cümlesine *yoğundur* (veya *heryerde yoğundur*) denir, şayet $\bar{A} = G$ ise.

Misal. Reel eksenin, rasyonel noktalarının cümlesi yoğundur.

TARİF 12. Bir G topolojik uzayına *ayrılabilir uzay* denir, şayet *sayılabilir* yoğun bir altcümle ihtiva ediyorsa.

Misal. Reel eksen ayrılabilir bir uzaydır.

Teorem 11.1.2.3. A, B bir G topolojik uzayının iki altcümlesi ise, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

İspat. $p \varepsilon \bar{A} \cup \bar{B}$ ise, p yi ihtiva eden herbir O_p, ya A, ya da B ye ait nokta ihtiva eder, ve dolayısıyla $A \cup B$ ye ait nokta ihtiva eder. O halde $p \varepsilon \overline{A \cup B}$. Diğer tarftan, $p \notin \bar{A} \cup \bar{B}$ ise, $p \notin \bar{A}$, $p \notin \bar{B}$. Dolayısıyla, $\exists\, O^*_p \ni O^*_p \cap A = \varnothing$, $\exists\, O_p^{**} \ni O_p^{**} \cap B = \varnothing$. O halde $O^*_p \cap O_p^{**} = O_p$ nin hiçbir noktası ne A ya ne de B ye aittir. Yani $O_p \cap (A \cup B) = \varnothing$. Binaenaleyh, $p \notin \overline{A \cup B}$.

I, tabii sayılar cümlesi olsun. Farzedelim ki I ile G arasında bir *tekabül* vardır öyleki bu tekabülde herbir $n \varepsilon I$ sayısının karşılığı bir $p_n \varepsilon G$ noktasıdır. Bu tekabüle *(p_n) dizisi* denir.

TARİF 13. Diyoruz ki *(p_n)* dizisi bir *p limitine yakınsaktır*, şayet herbir $V(p)$ civarna bir N tam sayısı tekabül ediyorsa $\ni n > N$ için, $p_n \varepsilon V(p)$.

Şayet G bir Hausdoff uzayı ise bir dizi iki ayrı limite yakınsayamaz. Aksini kabul ederek $p \neq q$, dizinin yakınsak olduğu iki limit noktası olsun. A3 den dolayı $\exists V(p), V(q) \ni V_p \cap V_q = \varnothing$. Şayet (p_n) dizisi p ye yakınsak ise $\exists N, \ni \forall n > N$ için $p_n \varepsilon V_p$. Dolayısıyla $\forall n > N$ için $p_n \notin V_q$, ve o halde q, p_n nin limiti değildir.

11.1.3. **Topolojik uzayların inşası.** Verilen bir topolojik uzaydan, çeşitli metotlarla yeni topolojik uzaylar inşa edilebilir.

A. Rölatif topoloji. $E \subset G$ bir alt cümle olsun. O, G nin açık cümlelerini gösterdiğine göre, E nin açık cümleleri $E \cap O$ olarak tarif edilirse, A1 ve A2 nin sağlandıkları görülür. Diğer taraftan G Hausdorff uzayı ise E de Hausdorff uzayıdır. E deki topolojiye, G deki topolojinin *intac* ettiği *rölatif topoloji* denir.

B. Özdeşleme metodu. G bir topolojik uzay olsun. Farzedelim ki G de bir $\mathfrak{R}$ eşdeğerlik bağıntısı tarif edilmiştir. $\mathfrak{R}$ bağıntısı G yi ayrık Q alt sı-

nıflarına parçalar: $G = \cup Q$. Noktaları Q olan uzayı gözönüne alalam. Aslında Q, $\mathcal{R}$ ye nazaran eşdeğer olan bütün noktaların özdeş oldukları kabul edilerek, meydana gelen noktadır. Noktaları Q olan uzay, mutad olduğu veçhile $G/\mathcal{R}$ ile gösterilir, ve G nin $\mathcal{R}$ ye nazaran bölüm uzayıdır. $G/\mathcal{R}$ nin bir topolojik uzay olması için gerek ve yeter şart $G/\mathcal{R}$ ye ait bir açık cümle, bu cümleye ait noktalarının temsil ettikleri sınıfların birleşimi G de bir açık cümle olmalıdır. A1 ve A2 aksyomları aşikar olarak sağlanmıştır, ancak G nin bir Hausdorff uzayı olması, $G/\mathcal{R}$ nin bir Hausdorff uzayı olmasını intac etmez.

C. Topolojik Çarpım. G_1, G_2 iki Hausdorff uzayı olsun. Bu iki uzayın $G_1 \times G_2$ *kartezyen çarpımını* teşkil edelim. $G_1 \times G_2$ uzayının noktaları, belli bir sıra takip eden (p_1, p_2), $p_1 \varepsilon G_1$, $p_2 \varepsilon G_2$, çiftleridir. $G_1 \times G_2$ de şu şekilde bir topoloji tarif edilebilir. $G_1 \times G_2$ nin *açık cümleleri*, $O_1 \times O_2$ şeklindeki cümlelerin birleşimleridir. Burada O_1, G_1 in, O_2, G_2 nin açık cümleleridir. A1, A2, A3 aksyomlarının sağlandığı tahkik edilebilir. Meselâ, A3 ün sağlandığını gösterelim. (p_1, p_2), (q_1, q_2), $G_1 \times G_2$ de farklı iki nokta olsun. $p_1 \neq q_1$ ise, $\exists A_1$, B_1 açık cümleleri, $\ni p_1 \varepsilon A_1$, $q_1 \varepsilon B_1$: $A_1 \cap B_1 = \varnothing$. Dolayısıyla, $(p_1, p_2) \varepsilon A_1 \times G_2$, $(q_1, q_2) \varepsilon B_1 \times G_2$ ve $A_1 \times G_2 \cap B_1 \times G_2 = \varnothing$. $p_1 = q_1$ ise, $p_2 \neq q_2$ dır, ve önceki muhakeme tekrarlanabilir.

11.1.4. **Kompaktlık.** *TARİF* 14. G bir uzay olsun. *Açık örtme* veya *açık örtü* diye bir *açık cümle* ailesine denir, öyleki bunların birleşimi G dir.

Örtme *sonludur* denir, şayet ailenin ihtiva ettiği açık cümleler sonlu sayıda ise

TARİF 15. Bir G uzayı *kompakt*tır denir, yalnız ve yalnız G nin herbir açık örtmesi *sonlu* bir altörme ihtiva ediyorsa.

Yani G yi örten herbir açık cümle ailesinde sonlu sayıda açık cümle vardır, öyleki bunların birleşimi G dir.

2. G nin bir altcümlesi kompakttır, şayet bu altcümle rölatif topolojide kompakt ise.

3. Bir *kapalı cümle* ailesine *sonlu arakesit hassasını* haizdir denir, şayet aileye ait herhangibir sonlu koleksyonun arakesiti boş değilse.

Teorem 11.1.4.1. Bir topolojik uzay kompakttır, yalnız ve yalnız, arakesiti boş olan her kapalı cümle ailesi, arakesiti boş olan sonlu bir altaile ihtiva ediyorsa.

İspat. Bahis konusu ailelerin komplemanı alınmak suretiyle derhal görülür.

Yukardaki teorem, *sonlu arakesit hassasına* göre tefsir edilirse, tatbik bakımından daha da elverişli bir şekilde ifade edilebilir:

Teorem 11.1.4.2. Bir G topolojik uzayı kompakttır, yalnız ve yalnız, *sonlu arakesit hassasını* haiz herbir kapalı cümle ailesinin arakesiti boş değilse.

İspat. Aksi farzedilerek, *sonlu arakesit hassasını haiz* bir $\mathcal{F}$ kapalı cümle ailesinin arakesiti boş ise, $\mathcal{F}^C$ komplemanı, birleşimi G olan açık cümlelerin ailesidir. G kompakt ise, $\mathcal{F}^C$ ailesine ait sonlu sayıda açık cümleler bulunabilir $\ni$ bu açık cümlelerin birleşimi G dir. $\mathcal{F}^C$ nin $\mathcal{F}$ komplemanı ise, arakesiti boş olan sonlu sayıda kapalı cümle ihtiva edecektir, ki, bu da *sonlu arakesit hassasına aykırıdır.*

11.1.5. **Taban ve alttaban kavramları.** Kompleks düzlemde, veya 2-boyutlu R^2-Euclid düzleminde açık cümleleri, *açık ε-dairelerin* yardımıyla tarif etmiştik. Dolayısıyla bir açık cümle, açık ε-dairelerin birleşiminden başka birşey değildir. Başka bir deyimle, açık cümleler, *iç noktaların* birleşiminden meydana gelen cümlelerdir. Binaenaleyh, bir fonksyonun *sürekliliği*, ister ε-dairelerlyle, ister açık cümlelerle tarif edilebilir. Bir *ölçünün (metrik)* tarif edilmediği mücerred uzaylarda, bu son noktai nazardan hareket edilerek, açık cümle kavramı *ilkel* kavram olarak kabul edilir. Bazı hallerde, topolojik uzayların tarifinde, veya teşkilinde, açık cümle olarak, alt cümlelerin arakesitlerinin birleşimleri gözönüne alınabilir. Bu hususta aşağıdaki teorem zikredilebilir. Önce birkaç tarif, ve bir de aydınlatıcı misal verelim.

TARİF 16. G bir topolojik uzay olsun. G nin *tabanı* diye, bir $\mathcal{T}$ açık cümle koleksyonuna denir, öyleki, G ye ait herbir açık cümle, $\mathcal{T}$ koleksyonuna ait açık cümlelerin birleşimidir. Başka bir deyimle, $A \subset G$ keyfi bir açık cümle, ve $p \varepsilon A$ ise, $\exists\, U \varepsilon \mathcal{T}$, $\ni p \varepsilon U \subset A$.

TARİF 17. G bir topolojik uzay olsun. *Alttaban* diye, bir açık cümle koleksyonuna denir, öyleki, koleksyona ait sonlu sayıda cümlelerin arakesitleri bir *taban* teşkil ederler.

Misal. R^2-Euclid düzlemini gözönüne alalım. Birbirine dik x_2, x_1-eksenleri bir referans sistemi olsun. Açık dik dörtgen diye, (x_2, x_1) noktalarına diyeceğiz, öyleki,

$$\{ (x_1, x_2) \ ; \ a_i < x_i < b_i \ , \ i = 1, 2 \} .$$

Açık şerit diye

$$\{ (x_1, x_2) \ ; \ a_1 < x_1 < b_1, \ x_2 \text{ keyfi} \} ,$$
$$\{ (x_1, x_2) \ ; \ a_2 < x_2 < b_2, \ x_1 \text{ keyfi} \}$$

nokta cümlelerine diyeceğiz. Bu açık şeritlerden birincisi, x_1-eksenine diktir (x_2-eksenine paralel), ikincisi ise, x_2-eksenine diktir (x_1-eksenine paralel). Görülüyor ki açık bir dikdörtgen, x_1-eksenine dik ve x_2-eksenine dik iki açık şeridin arakesitidir. O halde, bütün açık şeritlerin koleksyonu bir alttaban teşkil eder. Zira, herbir açık şerit bir açık cümledir, ve bu açık cümlelerin sonlu arakesitleri bir taban teşkil ederler. Bu taban, açık şeritlerden, açık dikdörtgenlerden, boş cümleden ve R^2 nin tamamından müteşekkildir.

Teorem 11.1.5.1. G boş olmıyan bir cümle, ve S, G ve $\varnothing$ dahil, G nin altcümlelerinden müteşekkil keyfi bir koleksyon olsun. S ye ait sonlu sayıda altcümlelerin arakesitlerinin bütününe B diyelim. $\mathcal{G}$ ise B ye ait keyfi sayıda arakesitlerin birleşimlerinin bütününü göstersin. Bu takdirde, $\mathcal{G}$, G de bir topoloji tarif eder.

İspat. Göstermeliyiz ki $\mathcal{G}$ keyfi birleşimlere ve sonlu arakesitlere nazaran kapalıdır. Gerçekten, $\mathcal{G}$ nin tarifinden dolayı, $\mathcal{G}$ keyfi birleşimlere nazaran kapalıdır. Şimdi, $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, $\mathcal{G}$ ye ait sonlu bir cümle olsun. Gösterelim ki $\bigcap^n_{i=1} G_i \varepsilon \mathcal{G}$. $x \varepsilon \bigcap^n_{i=1} G_i$ olsun. Yani x, herbir G_i dedir ve $\mathcal{G}$ nin tarifinden dolayı, herbir i ye B de bir B_i tekabül eder öyleki $x \varepsilon B_i \subset B$. Dolayısıyla $\bigcap^n_{i=1} G_i$, B ye ait B_i lerin birleşiminden meydana gelmektedir, yani $\bigcap^n_{i=1} G_i \subset \mathcal{G}$. Görülüyor ki bu topolojide, *açık cümleler*, B ye ait keyfi sayıda arakesitlerin birleşimleridir.

Teorem 11.1.5.2. Bir Hausdorff uzayının, herbir kompakt altcümlesi kapalıdır.

İspat. Farzedelim ki A bir kompakt cümledir. $p \varepsilon A^C$ olsun. $q \varepsilon A$ herhangibir nokta olduğuna göre, A3 aksyomundan dolayı $\exists O_q$, $q \varepsilon O_q$ ve O_p, $p \varepsilon O_p$ $\ni O_q \cap O_p = \varnothing$. Burada O_p, q ya tâbidir. Bütün O_q lar, A nın bir açık örtmesini teşkil ederler, ve A kompakt olduğundan, bu örtme sonlu bir örtme ihtiva eder: $O_{q_1}, O_{q_2}, \ldots, O_{q_N}$. Bunlara tekabül eden p nin $O_{q_1}, O_{q_2}, \ldots, O_{p_N}$ açık cümlelerinin arakesiti yine açık cümledir ve A yı kesmez. Binaenaleyh A^C açıktır ve dolayısıyla A kapalıdır.

Teorem 11.1.5.3. Bir kompakt topolojik uzayın herbir kapalı altcümlesi kompakttır.

İspat. A kapalı bir altcümle olsun. A nın herhangibir açık örtmesine A^C ilave edilirse topolojik uzayın bir açık örtmesi elde edilir. Uzay kompakt olduğundan, bu açık örtmenin, A^C yı da ihtiva eden sonlu bir altörtmesi vardır. Bu altörtmeden A^C çıkarılırsa, geriye kalan sonlu altörtme A yı örter. O halde A kompakttır.

Bu iki teorem biraraya getirilirse, görülür ki: Bir kompakt Hausdorff uzayında, kapalılık ve kompaktlık aynı mânaya gelir.

11.1.6. **Alexandroff kompaktifikasyonu.** *TARİF* 18. Bir uzaya *lokal kompakttır* denir, şayet herbir noktasının bir kompakt civarı varsa.

Lokal kompakt Hausdorff uzayların bir özelliği, bunlar, uygun bir şekilde tek bir noktanın ilâvesiyle kompakt Hausdorff uzaylarına çevrilebilir.

Meselâ, C kompleks düzlemi, *sonsuz nokta* denilen ve ∞ ile gösterilen bir noktanın ilâvesiyle genişletilebilir. Bu noktaya *ideal nokta* da denir. Bu ideal nokta, C ye ait olmıyan *harhangibirşey* olarak düşünülebilir, ve C ye dahil edildiği takdirde daha geniş olan ve C_∞ ile gösterilen $C_\infty = C \cup \infty$ cümlesini meydana getirir. Şayet ∞ noktasının civarları (C_∞ dan başka), C nin kapalı ve sınırlı altcümlelerinin (kompakt altuzayları) komplemanları olarak tarif edilirse, bu takdirde C_∞ a *genişletilmiş kampleks düzlem* denir. C kompleks düzlemine bir *ideal nokta* ilâve etmekle, bu düzlem hakkında daha fazla bir mâlumat edinilmiş olmaz, ancak, teoremlerin, ifade ve genellik bakımından, açıklık kazandıkları da inkâr edilemez. *Mermomorf fonksyonlar* hakkındaki teoremler birer misal olarak gösterilebilir.

Bu düşünceyi, herbangibir G lokal kompakt Hausdorff uzayına tatbik edebiliriz. Yukarda olduğu gibi, ∞, G de olmıyan herhangibirşey olsun, ve $G_\infty = G \cup \infty$ cümlesini teşkil edelim. Aşağıda gösterilen altcümleleri, *açık cümleler* olarak belirlemek suretiyle G_∞ da bir *topoloji* tarif etmek mümkündür.

(i) G nin açık cümleleri, G_∞ un açık cümleleridir.

(ii) G nin kompakt altuzaylarının G_∞ a nazaran komplemanları açık cümlelerdir.

(iii) G_∞ açık cümledir.

Görülür ki, bir topolojik uzay için aksyomlar sağlanmıştır.

G_∞ uzayının özellikleri.

1. G_∞ kompakttır. Farzedelim ki, bir İ indeks cümlesine tekabül eden $\{O_i\}$, $i \varepsilon İ$, ailesi G_∞ un bir açık örtmesidir. $\{O_i\}$ den sonlu bir açık örtme istihraç edilebileceğini gösterelim. $\{O_i\}$ ailesi G_∞ u ihtiva ediyorsa G_∞ istenilen açık örtmedir. Aksi halde O_i ler (i) veya (ii) tipindendir. O_i lerden en az biri, O_{i_0}, ∞ u ihtiva eder, ve bu suretle O_{i_0} (ii) tipindendir. Komplemanı $O^C_{i_0}$ ise kapalı ve kompakttır. Binaenaleyh $G \cap O_i$ şeklinde G nin açık cümlelerinden müteşekkil bir aile $O^C_{i_0}$ in bir açık örtmesidir. O halde, sonlu bir açık örtme, $(O_1 \cap G, O_2 \cap G, \ldots, O_n \cap G)$, $O^C_{i_0}$ ı örter. Dolayısıyla, $(O^C_{i_0}, O_1, O_2, \ldots, O_n)$, G_∞ u örter, ve G_∞ kompakttır.

2. G_∞ Hausdorff Uzayıdır. G, Hausdorff olduğundan, G_∞ a ait ve G de bulunan herhangi iki nokta, G ye ait iki açık cümle ile ayrılabilir, ve dolayısıyla G_∞ a ait ve (i) tipinde iki açık cümle ile ayrılabilir. Şimdi herhangibir $p \varepsilon G$ ile ∞ un, G_∞ a ait iki açık cümle ile ayrılabileceğini gösterelim. G lokal kompakt olduğundan, p nin G ye nazaran kompakt $\overline{V}(p)$ civarı vardır. Diğer taraftan $\overline{V}^C(p)$, ∞ u ihtiva eden G_∞ un açık bir cümlesidir. Civarın tarifinden dolayı, $p \varepsilon O \subset \overline{V}(p)$, O, G nin ve aynı zamanda G_∞ un bir açık cümlesidir. Fakat $O \cap \overline{V}^C(p) = \varnothing$.

G_∞ *a*, G nin *Alexandroff kompaktifikasyonu* denir.

Not. İlerde de göreceğimiz *Yüzey* Teorisinde, ∞ *ideal noktasına*, Yüzeyin *ideal sınırı* denir.

11.1.7. **İrtibatlılık.** *TARİF* 19. Bir G uzayı *irtibatlıdır* denir, şayet boş olmıyan iki ayrık açık cümlenin birleşimi olarak gösterilemez ise.

Farzedelim ki $G = O_1 \cup O_2$. Bu takdirde O_1 in komplemanı O_2 kapalıdır.

Binaenaleyh, tarif şu şekli de alabilir. G uzayı *irtibatlıdır* yalnız ve yalnız $\varnothing$ ve G den farklı, aynı zamanda açık ve kapalı bir altcümle ihtiva etmiyorsa.

Bir $A \subset G$ altcümlesi irtibatlıdır denir, şayet rölatif topolojide A irtibatlı bir uzay ise.

Binaenaleyh, A irtibatlıdır, yalnız ve yalnız, G de iki açık (kapalı) cümle O_1, O_2 bulunamazsa, öyleki $A \cap O_1 \neq \varnothing$, $A \cap O_2 \neq \varnothing$ ve $(A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = \varnothing$, ve $A \subset O_1 \cup O_2$.

Teorem 11.1.7.1.. $\{A_i\}$, $i \varepsilon I$, G de bir irtibatlı cümle koleksyonu olsun, öyleki, bütün A_i ler ortak bir p noktasını ihtiva etsinler. Bu takdirde, $A = \bigcup_{i \varepsilon I} A_i$ irtibatlıdır.

İspat. Farzedelim ki A irtibatlı değildir. Bu demektir ki G de O_1, O_2 iki açık cümle bulunabilir, öyleki $A \subset O_1 \cup O_2$ ve $A \cap O_1 \neq \varnothing$, $A \cap O_2 \neq \varnothing$, $(A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = \varnothing$. Herbir $A_i \subset O_1 \cup O_2$. O halde, A_i irtibatlı olduğundan, ya tamamen O_1 de dir veya tamamen O_2 de dir. Fakat $\cap_i A_i \neq \varnothing$ olduğundan, bütün A_i ler ya O_1 de dir veya O_2 de. Dolayısıyla A, ya tamamen O_1 de dir veya O_2 de. Meselâ tamamen O_1 de ise, $A \cap O_2 = \varnothing$. Bu tezat teoremi ispatlar.

TARİF 20. $p \varepsilon G$ olsun. G de, p yi ihtiva eden, bütün irtibatlı cümleleri gözönüne alalım Teorem 11.1.7.1 den dolayı bu irtibatlı cümlelerin A birleşimi yine irtibatlıdır, p yi ihtiva eden en büyük irtibatlı cümledir. Gerçekten, B, p yi ihtiva eden herhangibir irtibatlı cümle ise, B, A birleşiminin bir elemanıdır, ve $B \subset A$. p yi ihtiva eden en büyük irtibatlı cümleye, p tarafından belirtilen G nin *bileşini (komponent)* denir.

Teorem 11.1.7.2. Şayet $A \subset G$ irtibatlı ise ve $A \subset B \subset \bar{A}$, bu takdirde B irtibatlıdır. Özel olarak $\bar{A}$ irtibatlıdır.

İspat. Farzedelim ki B irtibatlı değildir. Bu demektir ki G de O_1, O_2 iki açık cümle vardır, öyleki $B \subset O_1 \cup O_2$, $B \cap O_1 \neq \varnothing$, $B \cap O_2 \neq \varnothing$, $(B \cap O_1) \cap (B \cap O_2) = \varnothing$. A irtibatlı ve B de olduğundan $A \subset O_1 \cup O_2$. O halde A, ya tamamen O_1 de dir veya O_2 de. Diyelim ki $A \subset O_1$. Yani $A \cap O_2 = \varnothing$. Binaenaleyh $\bar{A} \cap O_2 = \varnothing$, ve dolayısıyla $B \cap O_2 = \varnothing$. Bu ise mümkün değildir.

Bu teoremden dolayı herbir bileşen kapalıdır. İki bileşen ya ayrıktır, veya çakışır. Binaenaleyh her topolojik uzay birtek şekilde bileşenlere ayrılır.

Bir uzay irtibatlıdır, yalnız ve yalnız, birtek bileşenden ibaret ise. Bunun tam tersi olarak, bir uzay *tamamen irtibatsız*dır şayet herbir bileşeni bir noktaya müncer oluyorsa.

TARİF 21. Bir G topolojik uzayına *lokal irtibatlıdır* denir, şayet $p \varepsilon G$ herhangibir nokta, ve $V(p)$ herhangibir civar ise, $V(p)$, p nin bir *irtibatlı civarını* ihtiva ediyorsa.

Bu demektir ki, herbir noktanın bir *açık tabanı* vardır, öyleki tabanın bütün cümleleri irtibatlı uzaylardır.

O halde lokal irtibatlılık şu şekilde de tarif edilebilir.

Bir uzay *lokal irtibatlıdır*, şayet irtibatlı cümlelerden müteşekkil bir *tabanı* varsa.

Kompaktlık, lokal kompaktlığı intac eder, fakat, ne lokal irtibatlılık, irtibatlılığı, ne de irtibatlılık lokal irtibatlılığı intac eder.

Reel eksen üzerinde arakesiti boş olan iki açık aralığın birleşimi, lokal irtibatlı fakat irtibatlı olmıyan bir uzaydır, İrtibatlı olup ta lokal irtibatlı olmıyan bir uzay hakkında bir misal ilerde verilecektir (bk. § 11.2.1).

Teorem 11.1.7.3. Bir lokal irtibatlı uzayın bileşenleri aynı zamanda kapalı ve açıktır.

İspat. Yukarda gördük ki, lokal irtibatlılık şartına bağlı olmıyarak, her bileşen kapalıdır. Farzedelim ki $p \varepsilon C$, C bir bileşen. Diğer taraftan, $V(p)$, p nin bir irtibatlı civarı olsun. Teorem 11.1.7.1. den dolayı $C \cup V(p)$ irtibatlıdır, ve bileşenin tarifinden dolayı da $C \cup V(p) \subset C$, yani $V(p) \subset C$. O halde C açıktır.

Bu teorem, lokal irtibatlı bir uzayın bir açık alt cümlesine tatbik edilebilir. Binaenaleyh, bir *lokal irtibatlı uzayın, herhangibir açık cümlesi ayrık bölgelerin birleşimidir.*

Hatırlatalım ki, açık irtibatlı bir cümleye *bölge* denir. Birden fazla noktası bulunan kapalı irtibatlı bir cümleye de *kontinium* denir. *Boş* cümle ve *bir* noktadan ibaret herbir cümle aşikâr olarak *irtibatlıdır.*

Misal. Reel eksen irtibatlı bir uzaydır. Binaenaleyh herbir R^n-Euclid uzayı irtibatlıdır, zira R^n, başlangıç noktasından geçen bütün doğruların birleşimi olarak gösterilebilir. R^n aynı zamanda lokal irtibatlıdır.

11.1.8. **Kompakt tamamen irtibatsız uzaylar.** İlerde Yüzey Teorisi ele alındığı zaman, aşağıdaki teoreme ihtiyaç hasıl olacaktır.

Bu teoremin aşikâr olmadığını belirtmek maksadıyla, bir an için *tamamen irtibatsızlığı* şöyle tarif etmiş olalım. G uzayı *tamamen irtibatsızdır* diyeceğiz, şayet uzaya ait farkli herhangi p, q, iki nokta için $G = O_p \cup O_q$, $p \varepsilon O_p$, $q \varepsilon O_q$, $O_p \cap O_q = \varnothing$.

Gösterelim ki bu takdirde, *tamamen irtibatsız* bir uzayın bileşenleri, noktalarıdır. Şöyleki, G tamamen irtibatsız ise, bir noktadan fazla nokta ihtiva

eden G nin herhangibir X altuzayı irtibatsızdır. Gerçekten, $X \subset G$ ve $x, y \varepsilon X$, $x \neq y$ olsun. Tariften dolayı, $\exists O_x, O_y \ni G = O_x \cup O_y$, $x \varepsilon O_x$, $y \varepsilon O_y$, $O_x \cap O_y = \varnothing$, $X \subset O_x \cup O_y$. Dolayısıyla, X, § 10.1.7. deki tarife göre irtibatsızdır.

Bu neticeden, yani § 11.1.7. deki tariften hareket edilirse, yukardaki tarif değil de, ancak aşağıda ifade edilen söz konusu teorem elde edilir.

TARİF 22. a, b, G uzayına ait iki farklı nokta olsun. Şayet A, B açık cümleleri varsa $\ni G = A \cup B$, $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, $A \cap B = \varnothing$, bu takdirde $G = A \cup B$ ayrılımına, a, b, noktalarını *ayırıyor*, veya a yı b den, veya b yi a dan *ayırdediyor* denir.

Lemma 11.1.8.1. Farzedelim ki G kompakttır. Şayet bir $p \varepsilon G$ noktası, kapalı bir $C \subset G$ cümlesinin herbir noktasından ayırdedilebiliyorsa, bu takdirde p, C cümlesinin tamamından ayırdedilebilir.

İspat. $c \varepsilon C$ bir nokta olsun. Hipotezden dolayı $\exists O_p, O_c \ni G = O_p \cup O_c$. Burada O_p, c ye tâbidir. c noktası C yi taradığı takdirde, $\{O_c\}$ C nin bir açık örtmesini teşkil eder. G kompakt ve $C \subset G$ kapalı olduğundan, teorem 10.1.5.3. ten dolayı C kompakttır, ve dolayısıyla, $O_{c_1}, O_{c_2}, \ldots, O_{c_i}, \ldots, O_{c_N}$ açık cümlelerinden müteşekkil bir altörtme C yi örter. Herbir O_{c_i} ye bir $O_p(c_i)$ tekabül eder, öyleki,

$$G = O_p(c_i) \cup O_{c_i}$$

Şimdi

$$A = \bigcap_{i=1}^{N} O_p(c_i), \quad B = \bigcup_{i=1}^{N} O_{c_i}$$

vazedilirse, görülür ki

$$G = A \cup B$$

p ve C yi ayırır. Gerçekten, $A \cap B = \varnothing$. Diğer taraftan, G nin herhangibir noktası ya A da ya B de dir. Farzedelimki, $\exists\, x \varepsilon G$, $\ni x \notin A$, $x \notin B$. Fakat $x \notin B \Rightarrow x \notin O_{c_i}$, $i = 1, 2, \ldots, N \Rightarrow$ her i için $x \varepsilon O_p(c_i) \Rightarrow x \varepsilon A$.

Teorem 11.1.8.1. a, b, kompakt tamamen irtibatsız bir G uzayına ait iki farklı nokta olsun. Bu takdirde, G yi iki kapalı A, B altcümlelerine ayırmak mümkündür, şöyleki

$$G = A \cup B, \quad a \varepsilon A, \quad b \varepsilon B, \quad A \cap B = \varnothing.$$

Biliyoruz ki bu takdirde A, B aynı zamanda açıktır.

İspat. Aksini farzederek, a dan ayırdedilemiyen nokta cümlesine M diyelim. M nin a ya müncer olduğunu gösterebilirsek, teorem ispatlanmış olur. Birkere M *kapalıdır*. Gerçekten, $c \varepsilon A$ olmak üzere, $G = A \cup B$ bütün ayrılımları gözönüne alalım. $a \notin G - M \Rightarrow G - M = \cup B$. B ler açık olduklarından, $\cup B$ açık ve dolayısıyla G–M açıktır. Buradan, M kapalı olduğu anlaşılır. Diğer taraftan M *irtibatlıdır*. Aksi halde, $\exists\, M_1, M_2 \neq \varnothing$ ve kapalı,

$\ni M = M_1 \cup M_2$, ve $a \varepsilon M_1$. M kompakt olduğundan, teorem 11.1.4.1. den dolayı $\exists\, O_1, O_2 \ni O_1 \cap O_2 = \varnothing$, $M_1 \subset O_1$, $M_2 \subset O_2$, $O_1 \subset O_2$ M nin açık örtmesidir. Bu takdirde ∂O_1 ne M_1 *i* ne de M_2 yi kesmez. Üstelik ∂O_1 kapalıdır, ve herbir noktası a dan ayırdedilebilir. O halde lemma 11.1.8.1. den dolayı bir $G = A_1 \cup B_1$, $a \varepsilon A_1$, $\partial O_1 \subset B_1$ ayrılımı mevcuttur. $A = O_1 \cap A_1$ açıktır, zira, O_1, A_1 açıktırlar. Fakat, $\partial O_1 \cap A_1 = \varnothing$ olduğundan $O_1 \cup A_1 = \bar{O}_1 \cap A_1$. Binaenaleyh A aynı zamanda kapalıdır. O halde $G = A \cup (G-A)$ bir ayrılımdır. Üstelik $a \varepsilon A$, çünkü $a \varepsilon O_1$, $a \varepsilon A_1$; ve $M_2 \subset G-A$, çünkü $M_2 \cap O_1 = \varnothing$. Binaenaleyh a, M_2 den ayırdedilmiştir. Bu tezat gösteriyor ki M irtibatlıdır. Fakat G tamamen irtibatsız olduğundan M bir noktaya müncerdir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

11.1.9. **İkinci sayılabilme aksyomu.** Umumiyetle, taban kavramı, topolojik uzayların tetkikinde büyük kolaylıklar sağlıyabilir, ancak, tabana ait açık cümlelerin sayısı az olmak şartıyla.

TARİF 23. Bir topolojik uzaya *ikinci sayılabilir aksyomunu* sağlıyor, veya sadece *sayılabilir* denir şayet *sayılabilir* bir *tabanı* haiz ise.

Teorem 11.1.9.1. *Sayılabilir* bir topolojik uzayın herbir açık örtmesi *sayılabilir bir altörtme* ihtiva eder.

İspat. G topolojik uzay. $\mathfrak{T} = (U)$ sayılabilir bir taban ve $\mathcal{A} = \{O\}$ G nin bir açık örtmesi olsun.

Şimdi, $x \varepsilon G \Rightarrow x \varepsilon O \Rightarrow x \varepsilon U \subset O \Rightarrow$

$$\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots \varepsilon G \ni$$

bu noktaları ihtiva eden $U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots$ G yi örter. Fakat U_m ye bir O_m tekabül eder $\ni$

$$U_1 \subset O_1, \ldots, U_m \subset O_m, \ldots .$$

Binaenaleyh, $O_1, O_2, \ldots, O_m, \ldots \varepsilon \mathcal{A}$, G yi örter.

Teorem 11.1.9.2. *Sayılabilir* bir topolojik uzay *kompakttır*, yalnız ve yalnız, uzaya ait herbir (p_n) *sonsuz* dizisinin bir limit noktası varsa.

İspat. **Yeter şart.** G, sayılabilir bir uzay olsun. $\mathcal{A}$, G nin bir açık örtmesi ise, teorem 11.1.9.1. den dolayı, $\mathcal{A}$ sayılabilir bir (O_m), $m=1,2,\ldots$ örtmesini ihtiva eder. O_m lerin sayısı sonlu değilse, her m için,

$$O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_m$$

birleşiminin dışında bir $p_m \varepsilon G$ noktası vardır. Gösterelim ki (p_m) sonsuz dizisinin limit noktası yoktur. Olduğunu kabul edelim, ve bu limit noktasına p diyelim. (O_m), G yi örttüğünden, $\exists\, O_s \ni p \varepsilon O_s$. Fakat, O_s nin içinde en fazla $m \leq s$ sayıda p_m noktası bulunabilir. Bu tezat gösteriyor ki, G ye ait herbir sonsuz (p_m) dizisinin limiti varsa G kompakttır. **Gerek şart.** Farzedelim ki G kompakttır. (p_n) verilmiş *sonsuz* bir dizi olsun. İddia ediyoruz ki (p_n)

nin bir limit noktası vardır. Aksi halde $q \varepsilon G$ herhangibir nokta ise, q limit noktası olmadığından, q nun bir açık $V(q)$ civarında, (p_n) dizisinin en fazla *sonlu* sayıda elemanları olabilir. Şimdi, $V(q)$ lar G nin bir *açık örtmesini* teşkil ederler, ve G *kompakt* olduğundan *sonlu* sayıda $V(q)$ lar G yi örter. Bunların herbirinde ise en fazla *sonlu* sayıda p_n ler vardır. O halde (p_n) dizisi *sonludur*. Bu tezat iddiayı doğrular.

2. Topolojik Uzayda Sürekli Fonksiyonlar

11.2.1. **Süreklilik kavramı.** Bölüm I de fonksyonun tarifini en umumi bir şekilde verdik. Burada ise G den G'ye bir f fonksyonuna, G yi G' nün *içine tasvir* ediyor diyeceğiz. Şayet $f(G) = G'$ ise, bu takdirde f, G yi G' *üzerine tasvir* ediyor diyeceğiz.

$A \subset G$ olsun. A nın $f(A)$ resmi, $p \varepsilon A$ olmak üzere $f(p)$ *değerlerinin* bütününe denir.

$A' \subset G'$ nün *ters resmi* diye, $f(p) \varepsilon A'$ olacak şekilde bütün $p \varepsilon A$ noktalarının cümlesine denir, ve $f^{-1}(A')$ ile gösterilir.

Bir tasvire *birebir*dir denir, şayet $f(p_1) = f(p_2) \Rightarrow p_1 = p_2$, $p_1, p_2 \varepsilon G$.

Farzedelim ki f, G den G' nün içine ve g, G' den G'' nün içine tasvirlerdir, bu takdirde $g(f(p))$, G den G'' nün içine bir tasvirdir. Bu tasvire *mürekkep tasvir* denir ve $g \circ f$ şeklinde yazılır. *f ile g nin kompozisyonu da denir.*

TARİF 24. *Açık cümleler* ve *civarlar* vasıtasıyla *sürekliliği* en umumi bir şekilde derhal tarif etmek mümkün olacaktır.

f tasviri, $p_0 \varepsilon G$ noktasında *süreklidir* diyoruz, şayet $p_0' = f(p_0)$ noktasının herbir $V'(p_0')$ civarı için bir $V(p_0)$ civarı bulunabilir öyleki $f(V) \subset V'$.

f, G den G' üzerine bir tasvir olsun.

f tasviri, G de *süreklidir* denir, şayet bu uzayın herbir noktasında sürekli ise. Farzedelim ki f, $A \subset G$ den $A' \subset G'$ ye bir tasvirdir. f, A da süreklidir derken, A ve A' yü, G ve G' topolojik uzaylarının tevlid ettikleri rölatif topolojik uzaylar olarak düşünüyoruz. Bu itibarla, aşağıdaki teoremlerde, f tasvirini daima G den G' üzerine farzetmekle genelliğe halel getirmiş olmayız.

Teorem 11.2.1.1. Bir tasvir süreklidir, yalnız ve yalnız her açık cümlenin ters resmi açık ise.

İspat. f: $G \to G'$ tasviri sürekli olsun. Farzedelim ki $X' \subset G'$ açıktır. X' nün $X = f^{-1}(X')$ ters resmini gözönüne alalım. $x \varepsilon X$ bir nokta olsun $x' = f(x) \varepsilon X'$. X' açık olduğundan, x' nün bir $V'(x')$ civarı tamamen X' dedir. Süreklilikten dolayı $\exists V(x) \ni f(V) \subset V'$. Fakat $V' \subset X' \Rightarrow V \subset f^{-1}(X')$.

Karşıt olarak, farzedelim ki G' de her açık X' cümlesi için $f^{-1}(X')$ cümlesi G de açıktır. Şimdi, $x \varepsilon G$, ve $V'(x')$, $x' = f(x)$ in açık bir civarı olsun. V' açık olduğundan, hipotezden dolayı $f^{-1}(V')$, G de açıktır. Dolayısıyla, x in bir V civarı tamamiyle $f^{-1}(V')$ nün içindedir. O halde $f(V) \subset V'$. Yani f süreklidir.

Aynı şekilde, bir tasvir süreklidir, yalnız ve yalnız her kapalı cümlenin ters resmi kapalı ise.

Teorem 11.2.1.2. $f: G \to G'$, $g: G' \to G''$ sürekli tasvirler ise $h = gf: G \to G''$ süreklidir.

İspat. $W \subset G''$ açık bir cümle olsun. Bu taktirde, $h^{-1}(W) \subset G$ cümlesi o elemanlardan müteşekkildir ki, f altındaki resmi $g^{-1}(W) \subset G'$. Binaenaleyh,

$$h^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)).$$

Fakat $g^{-1}(W)$ açıktır, çünki g süreklidir. $f^{-1}(g^{-1}(W))$ açıktır, çünki f süreklidir. O halde h süreklidir.

Teoren 11.2.1.3. $f: G \to G'$ tasviri süreklidir yalnız ve yalnız herbir $A \subset G$ için $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ ise.

İspat. Farzedelim ki $f: G \to G'$ süreklidir (bu demektir ki, $V \subset G'$ açık ise $f^{-1}(V) \subset G$ de açıktır). $A \subset G$ herhangibir cümle olsun, ve $a \varepsilon \bar{A}$. Bu taktirde, a yı ihtiva eden herbir açık cümle A ya ait bir nokta ihtiva eder. Şimdi, V, $f(a)$ yı ihtiva eden G' de açık bir cümle olsun. Bu taktirde, $f^{-1}(V)$ a y ı ihtiva eder ve G de açık bir cümledir (teorem 11.2.1.1). Dolayısıyla $f^{-1}(V)$, A ya ait bir nokta ihtiva eder. Yani $f(a) \varepsilon \overline{f(A)}$, ve dolayısıyla, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Karşıt olarak farkedelim ki $f: G-G'$ tasviri herbir $A \subset G$ altcümlesi için $f(A) \subset \overline{f(A)}$ şartını sağlıyor. $V \subset G'$ açık bir cümle olsun. $U = f^{-1}(V)$ vazedelim. Bu taktirde,

$$f(G-U) = f(G) \cap V^c.$$

Hipotezden dolayı $f(\overline{G-U}) \subset \overline{f(G-U)}$, *yani* $f(\overline{G-U}) \subset \overline{f(G)-V^c}$.

Şimdi $x \varepsilon \overline{G-U}$ olsun. Şayet $x \varepsilon U$ ise, $f(x) \varepsilon V$. Fakat $f(x) \varepsilon \overline{f(G) \cap V^c}$, ve dolayısıyla $f(x)$ yi ihtiva eden herbir açık cümle, ve özel olarak V, $f(G) \cap V^c$ ye ve dolayısıyla V^c ye ait bir nokta ihtiva eder. Bu bir tezattır, zira V, V^c ye ait bir nokta ihtiva edemez. O halde $x \varepsilon G-U$. Binaenaleyh, $G-U$ bütün kapanış noktalarını ihtiva eder. Teorem 11.1.2.2. den dolayı $G-U$ kapalıdır. O halde $U = f^{-1}(V)$ açıktır, ve f süreklidir.

TARİF 25. Bir f tasviri birebir, f ve f^{-1} sürekli iseler, bu takdirde f ye *topolojik tasvir* veya *homeomorfizm* denir.

f: $G \to G'$ bir homeomorfizm ise, G ile G' *homeomorftur* denir.

Teorem 11.2.1.4. Birebir *(bijektif)* $f: G \to G'$ tasviri bir *homeomorfizmdir* yalnız ve yalnız G nin herbir $A \subset G$ altcümlesi için $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ ise.

İspat. Bu teorem bir önceki teoremin özel halidir.

$f: G \to G'$ bir *homeomeorfizm* olsun. Bu taktirde f süreklidir ve teorem 11.2.1.2 den dolayı herbir $A \subset G$ altcümlesi için $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Keza f^{-1} sürekli olduğundan herbir $B \subset G'$ altcümlesi için $f^{-1}(\bar{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$. Farzedelim ki B, f altında A nın resmidir. Bu taktirde $f^{-1}(B) = A$ ve dolayısıyla yukardaki şart $f^{-1}\overline{(f(A))} \subset \bar{A}$, veya $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$. Neticede, $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

Karşıt olarak farzedelim ki *bijektif* f tasviri herbir $A \subset G$ altcümlesi için $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ şartını sağlıyor. Bu taktirde f süreklidir, zira $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, ve f^{-1} süreklidir zira $f^{-1}(\bar{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$, $B = f(A)$. Şu halde f bir *homeomorfizmdir.*

Teorem 11.2.1.1*. f: G $\to$ G′, bir topolojik tasvir olsun. Bu takdirde f, açık cümleleri açık cümlelere, kapalı cümleleri kapalı cümlelere tasvir eder.

İspat. Teorem 11.2.1.1. in neticesidir.

Şimdi *Homotopi* Teorisinde çok sık kullanılan bir teoremi ispat edeceğiz.

G bir topolojik uzay ve $A_i \subset G$, $i=1,\ldots,n$, kapalı altuzaylar olsun, öyleki $G = \cup_{i=1}^{n} A_i$.

Farzedelim ki $f_i: A_i \to G'$, $i=1,\ldots,n$ birer tasvirdirler.

$f \mid A_i = f_i$ şartını sağlıyan bir $f: G \to G'$ tasviri vardır yalnız ve yalnız

$$f_i \mid A_i \cap A_j = f_j \mid A_i \cap A_j \quad i, j = 1,\ldots,n.$$

Bu taktirde görülecektir ki f süreklidir yalnız ve yalnız her f_i sürekli ise.

Homotopi Teorisinde bir $f: G \to G'$ tasvirinin sürekli olmasının ispatı gerekecektir. Bunun için de G nin A_i i=1,...,n, altuzaylarına o şekilde ayrılması gerekecektir ki, $f \mid A_i$ tahditleri aşikâr olarak süreklidirler.

Bundan sonra yapılacak tek şey $A_i \cap A_j$ ortak kısmımlarında f nin tahditlerinin eşit olduklarını göstermek olacaktır.

Teorem 11.2.1.5. Farzedelim ki G iki kapalı altuzayın birleşimidir: $G = A \cup B$. Şayet $f: A \to G'$, $g: B \to G'$ sürekli tasvirlerse öyleki $f \mid A \cap B = g \mid A \cap B$, bu taktirde, $h: G \to G'$ öyleki $h \mid A = f$, $h \mid B = g$, süreklidir.

İspat. $Q \subset G$ bir altcümle olsun. $Q_1 = Q \cap A$, $Q_2 = Q \cap B$ vazedelim. Bu taktirde $Q = Q_1 \cup Q_2$ ve dolayısıyla,

$$h(Q) = h(Q_1) \cup h(Q_2).$$

Teorem 11.1.2.1 den dolayı $\bar{Q} = \bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2$. O halde

$$h(\bar{Q}) = h(\bar{Q}_1) \cup h(\bar{Q}_2).$$

Şimdi, $x \varepsilon \bar{Q}_1 = \overline{Q \cap A}$ bir nokta olsun. Bu taktirde x yi ihtiva eden herbir açık cümle, $Q \cap A$ ve dolayısıyla A ya ait bir nokta ihtiva eder. Binaenaleyh $x \varepsilon \bar{A}$. Fakat A kapalıdır. O halde $x \varepsilon A$. Demek ki $\bar{Q}_1 \subset A$, ve dolayısıyla, $h(\bar{Q}_1) = f(\bar{Q}_1)$. Aynı şeilde $\bar{Q}_2 \subset B$ ve $h(\bar{Q}_2) = g(\bar{Q}_2)$. Fakat f ve g sürekli olduklarından, teorem 11.2.1.2 den ötürü $f(\bar{Q}_1) \subset \overline{f(Q_1)}$ ve $g(\bar{Q}_2) \subset \overline{g(Q_2)}$. Binaenaleyh,

$$h(\bar{Q}) = h(\bar{Q}_1) \cup h(\bar{Q}_2) = f(\bar{Q}_1) \cup g(\bar{Q}_2) \subset \overline{f(Q_1)} \cup \overline{g(Q_2)}$$
$$= \overline{h(Q_1)} \cup \overline{h(Q_2)}.$$

Halbuki teorem 11.1.2.1. den dolayı

$$\overline{h(Q_1)} \cup \overline{h(Q_2)} = \overline{h(Q_1) \cup h(Q_2)} = \overline{h(Q)}.$$

Binaenaleyh, $h(\bar{Q}) \subset \overline{h(Q)}$, yani h süreklidir.

Teorem 11.2.1.6. G irtibatlı, f: G $\to$ G′ sürekli bir tasvir ise, G′ irtibatlıdır.

İspat. G′ irtibatsız ise

$$\exists\ O'_1, O'_2 \neq \varnothing \ni G' = O'_1 \cup O'_2,\ O'_1 \cap O'_2 = \varnothing.$$

Bu takdirde $G = f^{-1}(O'_1) \cup f^{-1}(O'_2)$ bir ayırımdır, zira $f^{-1}(O'_1)$, $f^{-1}(O'_2)$, teorem 11.2.1.1 den dolayı açıktır ve $f^{-1}(O'_1) \cap f^{-1}(O'_2) = \varnothing$, aksi halde, $p \varepsilon f^{-1}(O_1') \cap f^{-1}(O'_2) \Rightarrow f(p) \varepsilon O'_1 \cap O'_2$. Fakat G irtibatlı olduğundan ya $f^{-1}(O'_1)$ ya da $f^{-1}(O'_2)$ boştur. Bu takdirde f, G den G′ *üzerine* bir tasvir olamaz.

Teorem 11.2.1.7. G kompakt, f: G $\to$ G′ sürekli bir tasvir ise, G′ kompakttır.

İspat. I, bir indeks cümlesi ve $\{O'_\alpha\}$, $\alpha \varepsilon$I, G′ nün bir açık örtmesi olsun. Bu takdirde, $\{f^{-1}(O'_\alpha)\}$ G nin bir açık örtmesidir. O halde, G nin sonlu bir altörtmesi, G′ de sonlu bir alt örtme tesbit eder, yani G′ kompakttır.

Özel olarak, G ile G′ homeomorf iseler, G irtibatlı ise G′ de irtibatlıdır, G kompakt ise G′ de kompakttır.

Bir homeomorfizmde, invarient kalan hassalara topolojik hassa denir.

Lokal irtibatlılık ve lokal kompaktlık birer topolojik hassadırlar.

Teorem 11.2.1.8. G kompakt, G′ Hausdorff uzayı olsun. Farzedelim ki f : G $\to$ G′ birebir ve süreklidir. Bu takdirde, f bir homeomorfizmdir.

İspat. Göstermemiz gereki ki f^{-1} süreklidir. Bunun için, teorem 11.2.1.1. i tatbik ederek göstermeliyiz ki f tasviri kapalı cümleleri kapalı cümlelere gönderir. Bu ise doğrudur, zira G kompakt olduğundan kapalı bir cümle aynı zamanda kompakttır. Teorem 11.2.1.7 den dolayı kompakt bir cümlenin tasviri kompakttır, halbuki G′, Hausdorff olduğundan bu tasvir aynı zamanda kapalı bir cümledir.

Şimdi, § 11.1.7. de işaret edilen, irtibatlı olup ta lokal irtibatlı olmıyan bir uzay hakkındaki misale dönelim.

G, R^2-Euclid düzleminde, $A = \{(x, y);\ x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ ve $B = \{(x, y);\ 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\}$, olmak üzere, $G = A \cup B$ olarak tarif edilmiş olsun.

B, $0 < x \leq 1$ aralığının, f sürekli tasvirinin: $f(x) = (x, \sin(1/x))$, resmi olduğundan, teorem 11.2.1.6 dan dolayı irtibatlıdır ve $G = \bar{B}$ olduğu için teorem 11.1.7.2 den dolayı G irtibatlıdır. Halbuki, G, lokal irtibatlı değildir, çünki, her $x \varepsilon A$ noktasının hiçbir irtibatlı civarı yoktur.

11.2.2. **Eğrisel irtibatlı uzaylar.** G, bir topolojik uzayı, ve [0, 1], kapalı aralığı göstersin. f, [0,1] den G nin içine *sürekli* bir tasvir olsun. Bu tasvirden mütevellit, [0,1] aralığının G deki resmine *eğri* veya *yay* denir.

Eğrinin parametrik denklemi

$$p = f(t), \quad t \varepsilon [0,1]$$

şeklinde yazılır.

(0, 1) açık aralığının *sürekli* tasviri bir *açık eğridir*.

Bir eğrinin içi, f, (0, 1) açık aralığına *tahdit* edildiği takdirde, açık eğridir.

Hatırlatalım ki, f, G üzerinde tarif edilen bir tasvir ise, $A \subset G$, G nin bir *parçası* (altcümle) ve f', A üzerinde tarif edilen bir tasvir ise, öyleki, herbir $x \varepsilon A$ için $f'(x) = f(x)$, bu taktirde f' ye f nin A ya *tahditidir* denir. Veya, f, A üzerinde tarif edilen f' nün *temditidir* denir.

TARİF 26. f bir *homeomorfizm* ise, eğriye, *Jordan eğrisi* denir,

$\gamma: t \to f(t)$, eğriyi gösterdiğine göre, $f(0)$, $f(1)$ γ nın *uçları*, $f(0)$, *başlangıç noktası* ve $f(1)$, *bitim noktasıdır*.

Başlangıç ve bitim noktası çakıştığı takdirde, eğriye *kapalı eğri* denir.

TARİF 27. Bir topolojik uzaya *eğrisel irtibatlıdır* denir, şayet herhangi iki noktası, uzaya ait bir eğrinin uçları ise.

Yukarda tarifini verdiğimiz $\gamma : t \to f(t)$ sürekli eğrilerine *Peano uzayları* da denir. Gösterilebilir ki, her Peano uzayı, aynı $f(0)$, $f(1)$, uç noktalarını haiz bir jordan eğrisini ihtiva eder.

Bu sebepten dolayı, *eğrisel irtibatlılık* için aşağıdaki tarifi verebiliriz.

TARİF 27*. Bir topolojik uzaya *eğrisel irtibatlıdır* denir, şayet herhangi iki noktası, uzaya ait bir *jordan eğrisi*nin uçları ise

TARİF 28. Bir topolojik uzay *lokal eğrisel irtibatlıdır*, şayet, herbir noktasının eğrisel irtibatlı bir civarı varsa.

Teorem 11.2.2.1. Lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay, *eğrisel irtibatlıdır*, yalnız ve yalnız, *irtibatlı* ise.

İspat. G, *lokal eğrisel irtibatlı* bir topolojik uzay olsun. $p_0 \varepsilon G$ sabit bir nokta olduğuna göre, bu noktaya, bir Jordan eğrisiyle birleştirilebilen bütün noktaların cümlesine A_1 diyelim. G, lokal eğrisel irtibatlı olduğundan A_1 cümlesi p_0 ı da ihtiva ediyor. Bu şekilde, p_0 a birleştirilemiyen bütün noktaların cümlesine de A_2 diyelim. $p_1 \varepsilon A_1$ ise,, p_1 in eğrisel irtibatlı bir $V(p_1)$ civarı vardır. $V(p_1)$ in bütün noktaları A_1 e aittir. Gerçekten, $p \varepsilon V(p_1)$ ise, p noktası p_1 e bir γ Jordan eğrisiyle, p_1 noktası p_0 a γ_1 Jordan eğrisiyle birleştirilebildiğine göre $\gamma \cup \gamma_1$, p yi p_0 a birleştiren bir Jordan eğrisidir. O halde A_1 açık bir cümledir. Aynı şekilde A_2 nin açık olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla

$$G = A_1 \cup A_2, \qquad A_1 \cap A_2 = \varnothing .$$

Fakat G irtibatlı ise, A_2 boştur ve $G = A_1$ eğrisel irtibatlıdır.

Karşıt olarak, G eğrisel irtibatlı ise, bu taktirde G, bir ucu p_0 da olan bütün Jordan eğrilerinin birleşimidir, ve teorem 11.1.7.1 den dolayı G irtibatlıdır.

11.2.3. **Bir kapalı eğrinin indeksi.** *TARİF* 29. C kompleks düzleminde γ, bir kapalı eğri olsun. a, γ üzerinde olmıyan C de bir nokta olduğuna göre, γ nın a ya nazaran indeksi diye, $n(\gamma, a)$ ile gösterilir, aşağıdaki integralin değerine denir:

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a} .$$

Önce, γ yı, merkezi a da bir çember farzedelim. $\log(z - a)$ nın herhangibir dalı gözönüne alındığı, ve γ pozitif olarak cihetlendirildiği takdirde,

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma d \log(z - a) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg(z - a) = 1 .$$

γ, aksi yönü taşıyorsa, $n(\gamma, a) = -1$. Her halükârda $n(\gamma, a) = \pm 1$.

Şayet a, γ çemberinin dışında ise, $n(\gamma, a) = 0$.

Şimdi a dan geçmemek şartıyla, γ sürekli olarak şekil değiştirirse (deforme) a içerde kaldıkça, $n(\gamma, a) = 1$ dir, a dışarda kaldıkça, $n(\gamma, a) = 0$.

Neticeyi aşağıdaki teoremde özetliyebiliriz.

Teorem 11.2.3.1. γ nın komplemanının herbir bileşeninde $n(\gamma, a)$ sabittir. a, sınırsız, yani ∞ u ihtiva eden bileşende ise, $n(\gamma, a) = 0$.

Şimdi farzedelim ki, γ nın başlangıç ve bitim noktaları $z = 1$ dir. γ, $z = 0$ etrafında m defa pozitif yöne doğru tasvir edildiği takdirde, başlangıç ve bitim noktaları $z = 1$ de olan, ve

$$\gamma\gamma \cdots \gamma = \gamma^m$$

ile gösterilen γ^m eğrisi elde edilir. Bu eğri için

$$n(\gamma^m, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^m} \frac{dz}{z-a} = \frac{m}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = m .$$

Aynı şekilde

$$n(\gamma^{-m}, a) = -m .$$

Nihayet, $z = 1$ den başlamak üzere γ, birkere pozitif yöne bir kere de negatif yöne tasvir edilirse, sonuç eğri, $z=1$ e homotoptur. a, $\gamma\gamma^{-1} = 1$ eğrisinin dışında kaldığından

$$n(1, a) = 0 .$$

Neticeyi aşağıdaki teoremde özetliyebiliriz.

Teorem 11.2.3.2. *Bir noktası kaldırılmış kompleks düzlemin esas grubu sonsuz devir grubudur. Bu grup tam sayılar grubuna izomorftur.*

Şimdi indeksin topolojik invarient olduğunu gösterelim. Önce bir özel hali tetkik edelim.

Teorem 11.2.3.3. Farzedelim ki $w = f(z)$, bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$. Bu takdirde γ, merkezi z_0 olan yeter derecede küçük pozitif yönlü bir çember ise

$$n(\gamma, z_0) = n(f(\gamma), f(z_0)) = 1 .$$

İspat. $n(f(\gamma), f(z_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w-w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)dz}{f(z)-f(z_0)} = N.$

Halbuki hipotezlerden dolayı N=1.

Farzedelim ki G bir bölge, ve $f(z)$ G yi G′ ye topolojik tasvir eden bir analitik fonksyondur. O halde, bütün G de $f'(z) \neq 0$. Dolayısıyla G nin her noktasında, $f(z)$ yönü muhafaza eder.

Teorem 11.2.3.4. Kompleks z düzleminde, G bir bölge, ve Φ bir homeomorfizm olsun. Farzedelim ki $\Phi(G)$ nin bir $\Phi(z_0)$, $z_0 \varepsilon G$, iç noktası vardır. Bu takdirde $\Phi(z_0)$ ı ihtiva eden $\Phi(G)$ nin bütün bir Δ bileşeninde, $n(\Phi(\gamma), \Phi(z)) = 1$. Burada, $z \varepsilon \Phi^{-1}(\Delta)$ ve γ, merkezi z de pozitif yönlü küçük bir çemberdir.

İspat. $\Phi(z_0)$ bir iç nokta olduğundan, merkezi $\Phi(z_0)$ da ve bütün noktaları $\Phi(G)$ ye ait olmak üzere küçük bir Ω' dairesi bulunabilir. $\Omega' - \Phi(z_0)$ bölgesinin $\pi_1(\Omega' - \Phi(z_0))$ esas grubu sonsuz devir grubudur. Şimdi, merkezi z_0 da küçük bir Ω dairesini gözönüne alalım. Φ, bir homeomorfizm olduğundan mütekabil esas gruplar izomorftur. Yani,

$$\pi_1(\Omega - z_0) \cong \pi_1(\Omega' - \Phi(z_0)),$$

ve $\Phi(\gamma) \sim \gamma'$. Burada γ, Ω nın ve γ', Ω' nün çemberleridir. Halbuki, $n(\gamma, z_0) = n(\gamma', \Phi(z_0)) = 1$. Dolayısıyla,

$$n(\Phi(\gamma), \Phi(z_0)) = 1 .$$

Diğer taraftan, Δ, $\Phi(z_0)$ ı ihtiva eden bir bileşen ise, eğrisel irtibatlıdır. O halde Δ nın herbir noktasında, esas grup, bir izomorfizm farkıyla, değişmez. Bu ise teoremi ispatlar.

3. Yüzey Teorisi

11.3.1. **Çokkatlılar.** Görüleceği üzere, yüzey, n-boyutlu bir çokkatlının özel bir halidir. *Çokkatlı*lara, *Çokluk*lar da *(Manifold)* denir.

TARİF 30. Bir Hausdorff uzayının bir *açık örtmesi* varsa, öyleki bu örtmenin herbir açık cümlesi, R^n-Euclid uzayında bir açık cümleye homeomorftur, bu takdirde, böyle bir Hausdorff uzayına *n-boyutlu çokkatlı (çokluk)* denir.

Tarif gereğince, herbir çokkatlı *lokal eğrisel irtibatlıdır*. Bileşenler irtibatlı olduklarından, teorem 11.2.2.1 den dolayı, *n-boyutlu bir çokkatlının* bileşenleri eğrisel irtibatlıdır.

TARİF 31. *Yüzey* diye, irtibatlı 2-boyutlu çokkatlılara denir.

Görülüyor ki herbir yüzey *eğrisel irtibatlıdır*. Bu itibarla, Bölüm VII, kısım 3 te izahını yaptığımız *homotopi teorisi* ve özellikle *esas grup kavramı*, yüzeyler için değişiksiz kabili tatbiktir. Aşağıdaki teoremin ispatını okuyuculara bırakıyoruz.

Teorem 11.3.1.1. Bir yüzeyin esas grubu topolojik invarienttir.

Yüzeyler, bir tasnife göre, iki gruba ayrılabilir: *kompakt yüzeyler* ve *kompakt olmıyan yüzeyler*. Sırf bir alışkanlık neticesi, kompakt yüzeylere, *kapalı yüzeyler*, kompakt olmıyan yüzeylere de, *açık yüzeyler* denir.

Misal. *Düzlem*, *küre* yüzeydirler. Sonlu kompleks düzelem bir açık yüzeydir. Küre ise, bir kapalı yüzeydir. *Tor*, yine bir kapalı yüzeydir.

11.3.2. **Cihetlilik.** Başka bir tasnife göre, yüzeyler iki kategoriye ayrılırlar. *Cihetli yüzeyler*, *cihetsiz yüzeyler*. Şimdi bu kavramları izah edelim.

Bir S yüzeyinin bir B *bölgesine*, *düzlemsel bölge* denir, şayet B, düzlemdeki bir Δ bölgesine *topolojik tasvir* edilebilirse.

Bu gibi homeomorfizmlere h diyelim. Bunlar iki sınıfa ayrılırlar: h_1, h_2 aynı sınıftadırlar, yalnız ve yalnız, $h_1 o h_2^{-1}$ *ciheti (yönü)* muhafaza ediyorsa. Diğer taraftan, h verildiği takdirde, $\bar{h}$ diye, $p \varepsilon B$ yi, $h(p)$ nin kompleks konjugesi olan $\bar{h}(p)$ noktasına dönüştüren tasvire denirse, $h o \bar{h}^{-1}$ ciheti değiştirir, ve dolayısıyla h ile $\bar{h}$ aynı sınıfta değildirler. Nihayet, h_1 herhangibir başka homeomorfizm ise, $h o h_1^{-1}$, $\bar{h} o h_1^{-1}$ tasvirlerinden yalnız birtanesi ciheti

muhafaza eder. Bu da gösteriyor ki tam iki sınıf vardır, yani, bir sınıfı temsilen B ye bir *yön* verildiği takdirde, ikinci mümkün yön, birincinin tersidir.

Bu sınıflardan birtanesini *pozitif cihetli* olarak seçersek, B de bir *yön* tarif etmiş, veya B yi *cihetlendirmiş* oluruz.

Açık olarak B nin cihetlendirilmesi, B nin pozitif cihetli tasvirleri *tahdit* edilerek herbir alt bölgenin cihetlendirilmesini istintaç eder.

Şimdi, B_1, B_2 birbirini kısmen örten iki düzlemsel bölge olsun. B_1 ve B_2 nin cihetlendirilmeleri *uygun (kabili telif)* dur denir, şayet, bütün ortak bölgelerde aynı cihetlendirmeyi istintaç ediyorlarsa.

TARİF 32. Bir yüzeye *cihetli*dir denir, şayet, birbirini kısmen örten düzlemsel bölgelerin cihetlendirilmelerini uygun kılacak şekilde herbir düzlemsel bölgeyi pozitif cihetlendirmek mümkün ise.

Cihetlilik bir topolojik hassadır, yani bir homeomorfizme nazaran invarienttir. O halde homeomorf yüzeylerin sınıfları iki kategoriye ayrılır. Bunlardan biri, bütün homemorf *cihetli yüzeyleri* ihtiva eder, diğeri ise bütün homeomorf *cihetsiz yüzeyleri* ihtiva eder.

Hatırlatalım ki, her cihetli yüzey, farklı iki şekilde cihetlendirilebilir. Bunlardan biri pozitif cihetli ise, diğerini elde etmek için, herbir düzlemsel bölgede, pozitif yön, aksi yön ile değiştirilir.

11.3.2. **Kenarlı yüzeyler.** Yüzeyin tarifine dönülecek olursa, görülür ki, her *açık yüzeyin*, ∞ ile gösterilen ve Alexandroff kompaktifikasyonu ile tarif edilen bir *ideal sınırı* vardır.

Bir S yüzeyinin ideal sınırını $\mathcal{J}$ ile göstereceğiz. S de herhangibir *kompakt* cümlenin komplemanı $\mathcal{J}$ nın bir civarıdır.

Kenarlı Riemann yüzeylerinin tetkinde, $\mathcal{J}$ ideal sınırının, Alexandroff kompaktifikasyonunda olduğu gibi birtek nokta ile değil, farklı noktalarla gösterilmesi, maksada daha uygun düşmektedir. Hatta bu gibi R yüzeyleri *bir açık cümle* olarak bir H kompakt Hausdorff uzayına *dahil* edilmek suretiyle, $\mathcal{J}$ nın, R nin H daki sınırı tarafından *tahakkuku sağlanabilir.*

Misal. Bir dairenin *ideal sınırı*, ve dolayısıyla sonlu düzlemin ideal sınırı, daireyi kapalı kompleks düzleme dahil etmek suretiyle bir çember ile *tahakkuk* ettirilebilir.

Yukardaki misal, tip olarak, gözönünde tutulursa, kenarlı yüzey kavramı kolayca anlaşılır.

TARİF 33. İrtibatlı bir $\bar{S}$ Hausdorff uzayına kenarlı yüzey denir şayet aşağıdaki şartlar sağlanmış iseler.

(i) $\bar{S}$ yüzey değildir.

(ii) $\bar{S}$ nin bir açık örtmesi vardır, öyleki bu örtmenin herbir cümlesi, kapalı yarı-düzlemde rölatif açık bir cümle ile homeomorftur.

Teorem 11.3.2.1. $\bar{S}$ bir kenarlı yüzey, h, homeomorfizmleri, ve $\bar{Z}$, z-kompleks düzleminin $y \geq 0$ üst yarı düzlemini göstersin. Şayet $h_1(p_0)$, $p_0 \varepsilon \bar{S}$, $\bar{Z}$ nin bir iç noktası ise, p_0 da tarifli bütün h homeomorfizmleri için de aynı şey doğrudur.

İspat. p_0 h ve h_1 in tarif bölgelerine ait olsun. Merkezi $z_0 = h_1(p_0)$ olan, yeter derecede küçük bir Ω dairesine *tahdit* edilmiş, $\Phi = hoh_1^{-1}$ homeomorfizmini gözönüne alalım. Dairenin $\Phi(\Omega)$ resmi, $\bar{Z}$ de rölatif açıktır, ve dolayısıyla, düzlemdeki *topolojiye nazaran* bir $\Phi(\zeta)$, $\zeta \varepsilon \Omega$, iç noktasını ihtiva eder. ζ noktası, z_0 a, Ω da bir eğri ile birleştirilebildiğinden, $\Phi(\zeta)$ da, $\Phi(\Omega)$ da, $\Phi(z_0)$ a bir eğri ile birleştirilebilir. Dolayısıyla $\Phi(z_0) = h(p_0)$ noktası, $\Phi(\zeta)$ yı ihtiva eden bileşendedir. Teorem 11.2.3.4. ten dolayı, γ, Ω nın çemberi ise, $n(\Phi(\gamma), h(p_0)) = 1$. Diğer taraftan, $h(p_0)$ reel eksen üzerinde ise, $\Phi(\gamma)$ ∞ noktayı ihtiva eden bileşende olup, $n(\Phi(\gamma), h(p_0)) = 0$. Bu tezat gösteriyor ki, $h(p_0)$, $\bar{Z}$ nin bir iç noktasıdır.

Görülüyor ki $\bar{S}$ de iki tip noktalar vardır, x-ekseni üzerine tasvir edilenler ve edilmiyenler. Birinci tip noktaları B, ikinci tip noktaları ise S ile göstereceğiz. S açık ve B kapalıdır. B nin herbir p_0 noktasının bir civarı vardır (S nin kompakt alt cümlelerinin $\bar{S}$ ye nazaran komplemanları) öyleki bu civar topolojik olarak, $|z| < 1$, $y \geq 0$, yarı kapalı yarım daireye tasvir edilebilir. Bu tasvirde p_0, başlangıç noktasına, B nin noktaları ise $y = 0$ çapı üzerine dönüşür. Demek ki $B \neq \varnothing$, aksi halde $\bar{S}$ yüzey olur. B nokta cümlesine $\bar{S}$ nin *kenarı*, B nin bileşenlerine ise çevre denir. Nihayet, $\bar{S}$ deki herbir noktanın civarı S ye ait noktalar ihtiva ettiğinden $\bar{S}$, S nin kapanışı ve B, S nin sınırıdır.

Teorem 11.3.2.2. S, bir yüzeydir.

İspat. S nin irtibatlı olduğunu göstermek kâfidir. İrtibatsız ise $\exists$ O_1, O_2 boş olmıyan ayrık açık cümleler, öyleki, $S = O_1 \cup O_2$. Dolayısıyla, $\bar{S} = \overline{O_1 \cup O_2} = \bar{O}_1 \cup \bar{O}_2$. Halbuki $\bar{S}$ irtibatlı olduğundan $\exists$ $p_0 \varepsilon B \ni p_0 \varepsilon$ $\bar{O}_1 \cap \bar{O}_2$. Fakat p_0 ın bir V civarı vardır, öyleki $V \cap S$, z-düzleminde bir açık yarım daire ile homeomorftur. Dolayısıyla, $V \cap S$ irtibatlıdır, ve $V \cap S = (V \cap O_1) \cap (V \cap O_2)$. Bu ayrılım ise mümkün değildir.

Not. $\bar{S}$ kompakt ise, B, $\mathcal{J}$ ideal sınırının bir tahakkukudur. $\bar{S}$ kompakt değilse, B, $\mathcal{J}$ nın bir kısmının tahakkukudur. $\mathcal{J}$ nın diğer kısmı ise Alexandroff noktasıyla temsil edilir.

Meselâ, z-kompleks düzleminde, merkezi $z = 0$ da bir halka düşünelim. B_1, B_2 bu halkanın çemberlerini göstersin. B_1 ve B_2 nin belirtmiş oldukları bölgeye S dersek, $\bar{S}$ kompakttır, ve S nin ideal sınırı, B_1 ve B_2 çemberleriyle tahakkuk ettirilmiştir.

Bu sefer, merkezi $z = 0$ da olan bir B çemberini gözönüne alalım. Sonlu düzlemde, B nin dışını S ile gösterelim. $\overline{S}$ kompakt değildir, ve B, S nin $\mathcal{J}$ ideal sınırının bir kısmını tahakkuk ettirir, $\mathcal{J}$ nın diğer kısmı ise Alexandroff'un ∞ noktası ile gösterilir.

Bu misallerden anlaşılıyor ki kenarlı yüzeylerle, çevrelerle sınırlanmış bölgeler arasında sıkı bir irtibat vardır.

TARİF 34, Ω, S yüzeyinin bir altbölgesi olsun, Ω ve $\overline{\Omega}$ S ye *düzgün olarak dahildir* diyoruz, şayet aşağıdaki şartlar sağlanmış ise

(i) Ω ve $\overline{\Omega}^c$ aynı sınırı haizdirler.

(ii) Herbir $p \varepsilon \partial\Omega$ nin bir V açık civarı, $V \cap \partial\Omega$ arakesiti $|z| < 1$ dairesinin reel çapına dönüşecek şekilde, bu dairenin içine topolojik tasvir edilebilir.

Teorem 11.3.2.3. *Düzgün olarak dahil* bir $\Omega \subset S$ bölgesi verildiğine göre, E, Ω^c nın bir bileşeni ise, $\Omega \cup E$ de *düzgün olarak dahil* bir bölgedir.

İspat. Önce $\Omega \cup E$ nin bir bölge olduğunu görelim. Bir kere $\Omega \cup E$ açıktır. Bunun için herhangi bir $p \varepsilon \partial E$ noktasının, $\Omega \cup E$ nin bir iç noktası olduğunu görmek kâfidir. Gerçekten, $p \varepsilon \partial E \Rightarrow p \varepsilon \partial\Omega \Rightarrow \exists\, V(p) \ni V \cap \Omega^c$, (ii) den dolayı irtibatlıdır. Dolayısıyla, $V \cap \Omega^c \subset E$. Yani $V \subset \Omega \cup E$. İkincisi, $\Omega \cup E$ irtibatlıdır. Filhakika, $\Omega \subset \Omega \cup (\overline{\Omega} \cap E) \subset \overline{\Omega}$. Teorem 11.1.7.2. den dolayı $\Omega \cup (\overline{\Omega} \cap E)$ irtibatlıdır. Teorem 11.1.7.1. den dolayı da, $\Omega \cup E$ irtibatlıdır.

Nihayet, $\Omega \cup E$ düzgün olarak dahil bir bölgedir. Zira, $\Omega \cup E$ nin sınırı, Ω nın E ye ait olmıyan çevreleridir. Dolayısıyla, (i) ve (ii) otomatik olarak sağlanmıştır.

Misal. S bir küre olsun. Küreye ait, C_1, C_2 iki parelelin belirttiği Ω bölgesi, düzgün olarak dahil bir bölgedir. Ω^c iki bileşenden ibarettir. Biri güney, diğeri ise kuzey kutbu ihtiva eder. Bu ikinci bileşeni E ile gösterelim. $\Omega \cup E$ nin *düzgün olarak dahil* bir bölge olduğu açıktır. C_1, Ω ile E nin ortak sınırı ise, C_2, $\Omega \cup E$ ile $(\Omega \cup E)^c$ nin ortak sınırıdır.

Bu misalde olduğu gibi, $\overline{\Omega}$ yi kompakt farzedelim. Bu takdirde Ω nın çevre sayısı sonludur ve dolayısıyla komplemanların sayısı sonludur. Kompakt olan bileşenlerin birleşimini yine E ile gösterelim. Dolayısıyla $\Omega \cup E$ kompakt ve düzgün olarak dahil bir bölgedir. Böyle bir bölgenin bir hususiyeti de, komplemanlarının kompakt olmayışıdır. Bu tip bölgelere *düzgün bölge* diyeceğiz. O halde

TARİF 35. Bir $\Omega \subset S$ bölgesine *düzgün bölge*dir diyoruz şayet aşağıdaki şartlar sağlanmış ise

D1. $\overline{\Omega}$ kompakt ve düzgün olarak dahil bir bölgedir.

D2. $S-\Omega$ nın bileşenlerinin hiçbirisi kompakt değildir.

Aynı zamanda göstermiş oluyoruz ki, *kompakt ve düzgün olarak dahil* bir bölge, bir *düzgün bölgeye tamamlanabilir.*

Kenarlı yüzeyler hakkında bütün söylediklerimizi aşağıdaki neticeye bağlayabiliriz. Bu netice, *kenarlı Riemann yüzeyleri* için çok önemlidir.

Teorem 11.3.2.4. Herbir *kenarlı yüzey*, *düzgün olarak* bir *yüzeye dahil edilebilir*, ve herbir kompakt kenarlı yüzey düzgün olarak bir kapalı yüzeye dahil edilebilir.

İspat. Kenarlı yüzeyi her zamanki gibi $\overline{S}$ ile gösterelim. $\overline{S}_1$, $\overline{S}$ ye homeomorf bir topolojik uzay olsun, $\varphi: \overline{S} \to \overline{S}_1$. B, $\overline{S}$ nin kenarı olduğuna göre, herbir $p \varepsilon B$ yi onun resmi olan $\varphi(p)$ ile özdeşliyelim. $\widetilde{S} = \overline{S} \cup \overline{S}_1$ nin bir Hausdorff uzayı, ve $\widetilde{S}$ nin her bir noktasının bir civarı, düzlemdeki bir açık cümle ile homeomorf olduğu kolayca görülür. Üstelik, $p_0 \varepsilon B$ ise, p_0 ın $\widetilde{S}$ ye nazaran bir V civarı topolojik olarak, $|z| < 1, y \geq 0$, yarı kapalı yarım daireye tasvir edilebilir. Bu tasvirde, p_0 noktası $z = 0$ a, $V \cap B$ ise dairenin çapına dönüşür. Diğer taraftan $\widetilde{V} = V \cup \varphi(V)$, $\widetilde{S}$ nin bir açık civarıdır. Zira, V nin tasvirini h ile gösterirsek, $p \varepsilon V$ yi, $h(p)$ ye ve $p^* = \varphi(p)$ yi, $\overline{h}(\varphi^{-1}(p^*))$ a tasvir etmek suretiyle $\widetilde{V}$ bir dairenin içine tasvir edilmiş olur. Burada $\overline{h}$, p yi $h(p)$ nin konjügesine tasvir eden fonksyondur. Şu halde $\widetilde{S}$ bir yüzeydir ve $\overline{S}$ düzgün olarak $\widetilde{S}$ ye dahil edilmiştir.

p^* ve p, B ye nazaran simetriktir diyeceğiz ve umumiyetle, $\varphi(S)$, S^* ile gösterilecektir.

$\overline{S}$ den $\widetilde{S}$ ye geçişe, *suret çıkarma*, $\widetilde{S}$ ye ise $\overline{S}$ nin *çiftidir* denir.

Böylece, kenarlı yüzeyler, ya doğrudan doğruya, ya da suretleri çıkarılarak, çiftleri vasıtasıyla tetkik edilebilir.

Misal. Bir dairenin çifti küre, bir halkanın çifti ise tordur.

Açık yüzeylerin tetkikinde gördük ki, Alexandroff kompaktifikasyonunda ideal sınırın tahakkuku birtek nokta ile, kenarlı yüzeylerin kompaktifikasyonununda ise, çevrelerle yapılır. Bir ara hal de, kenarlı yüzeylerde, ideal sınırın tahakkukunda, bütün çevrelerin birer nokta ile gösterilmesi halidir. Çevre kavramını, ideal noktalarla genelleştiren bu tip kompaktifikasyonu daha ilerde ele alacağız.

4. Örtme Yüzeyleri

11.4.1. **Pürüzsüz Örtme Yüzeyleri.** § 7.1.3. te fonksyon elemanların analitik temditleri vasıtasıyla z-kompleks düzlemin *örtme yüzeyi*ni tarif etmiştik. Bu kısımda ise, *örtme yüzeyini* sırf topolojik bilgilere dayanarak tarif

edeceğiz. Bir S yüzeyinin *örtme yüzeyi pürüzsüzdür*, şayet *dallanma noktaları* yok ise, ve pürüzsüz bir S* örtme yüzeyi *tahditsiz*dir şayet aşağıda tarif edileceği şekilde S* üzerinde bir $\gamma \subset S$ eğrisi *boyunca* temditte hiçbir sınıra rastlanmıyorsa, Nihayet, *Monodromi* teoremi vasıtasıyla, S nin esas grubu ile S* ın esas grubu arasındaki münasebeti inceliyeceğiz.

TARİF 36. İrtibatlı bir S* Hausdorff uzayı, bir S yüzeyi, ve S* dan S ye bir f tasviri verilmiş olsun. (S^*, f), S nin *pürüzsüz bir örtme yüzeyidir* denir, şayet f *lokal tapolojik* bir tasvir ise.

Tariften dolayı f süreklidir.

$p^* \varepsilon S^*$ ve $p = f(p^*)$ ise, p ye p^* ın, S ye de S* ın *izdüşümü* denir. İzdüşümü p olan p^* noktasına, p nin *üzerinde* bir *noktadır* tabiri de kullanılır.

Hatırlatalım ki bir topolojik tasvirde, *açık cümleler açık cümlelere dönüşür*. Dolayısıyla f tasvirinin önemli bir hususiyeti açık cümleleri, açık cümlelere dönüştürmesidir.

Örtme yüzeylerin inşasında, açık cümle olarak *Jordan bölgeleri* gözönüne alınmaktadır. Bu itibarla, bu kavramın tarifini şimdiden veriyoruz.

TARİF 37. S yüzeyinde bir Δ bölgesine *jordan bölgesi* denir, şayet Δ bir Ω açık daireye dönüşecek şekilde, $\overline{\Delta}$, $\overline{\Omega}$ ya topolojik tasvir edilebilirse.

Dolayısıyla $\partial \Delta$ basit kapalı bir Jordan eğrisidir. Düzlemin herbir noktası, kapalı bir dairenin merkezi olduğundan, herbir yüzeyin Jordan bölgeleriyle bir açık örtmesi vardır. *Herbir jordan bölgesine parametre dairesi denir.*

Şimdi, S* üzerinde $\gamma^*: t \to \varphi^*(t)$, $t \varepsilon I$, $I = [0,1]$: $0 \leq t \leq 1$, eğrisini gözönüne alalım. S üzerindeki $\gamma = f(\gamma^*)$ eğrisinin denklemi γ: $t \to f(\varphi^*(t))$ dir. γ ya γ^* ın izdüşümü denir.

Bu sefer γ: $t \to \varphi(t)$ nin verildiğini farzedelim. $p_0 = \varphi(t_0)$ olsun. Başlangıç noktası p_0^*, $p_0 = f(p_0^*)$, ve izdüşümü γ olan herhangibir $\gamma^* \subset S^*$ eğrisine, p_0^* dan başlıyan, γ boyunca *temditi* denir.

Temditin teşkil edilmesi usulüne ise, γ nın *yükseltilmesi* denir.

Şimdi aşağıdaki *birteklik* teoremini ispat edelim.

Teorem 11.4.1.1. Başlangıç noktası p_0 olan γ verildiğine göre, p_0^* dan itibaren γ boyunca temdit mümkün ise birtektir.

İspat. Başlangıç noktaları p_0^* olan, φ_1^*, φ_2^*, γ boyunca iki temdit olsun. $\varphi_1^*(t) = \varphi_2^*(t)$ eşitliğini sağlayan bütün t lerin cümlesine E diyelim. Önce, E nin kapalı olduğunu gösterelim. Limit noktası t_0 olan bir $(t_n) \subset E$ dizisi verilmiş olsun. Bu dizinin bir (t_{n_k}) alt dizisi için, meselâ, $\varphi_1^*(t_{n_k}) \to a^*$. Hipotezden dolayı $\varphi_1^*(t_{n_k}) = \varphi_2^*(t_{n_k})$, ve S*, Hausdorff olduğundan $\varphi_2^*(t_{n_k}) \to a^*$. Süreklilikten dolayı $\varphi_1^*(t_0) = a^*$, $\varphi_2^*(t_0) = a^*$. Yani $\varphi_1^*(t_0) = \varphi_2^*(t_0)$ ve $t_0 \varepsilon E$. Saniyen, E nin rölatif açık (I ye nazaran) olduğunu gösterelim. $t_0 \varepsilon E$ olsun. $\varphi_1^*(t_0) = \varphi_2^*(t_0)$ dır. Süreklilikten dolayı, $\varphi_1^*(t_0) = \varphi_2^*(t_0)$ ın bir V* civarı verildiği takdirde, t_0 ın bir v civarı vardır, öyleki, $\varphi_1^*(v) \subset V^*$, $\varphi_2^*(v) \subset V^*$. Diğer taraftan, V* o şekilde seçilebilir ki, V*, $\varphi(t_0)$ ın bir V civarıyla homeomorftur. Yani, izdüşümleri $V \cap \gamma$ olan, $V^* \cap \varphi_1^*(v)$ ve $V^* \cap \varphi_2^*(v)$ eğri parçaları çakışıyor. Dolayısıyla $v \subset E$. Hipotezden dolayı E, 0 noktasını ihtiva ediyor. Dolayısıyla, E aynı zamanda açık ve kapalı ve $E \neq \varnothing$ olduğundan, E bütün $0 \leq t \leq 1$ aralığıdır.

TARİF 38. Pürüzsüz bir örtme yüzeyine *tahditsizdir* denir, şayet γ, S de herhangibir eğri, p_0 da γ nın başlangıç noktası olduğuna göre, p_0 ın üzerindeki herhangibir p_0^* noktasından başlıyarak, γ boyunca temdit mümkünse.

11.4.2. **Asimtotik değer.** $\gamma \subset S$, ve p_0 başlangıç noktasının üzerinde p_0^* verilmiş olsun. $[0, t_0]$, $t_0 \varepsilon [0, 1]$, aralığına tekabül eden $\gamma_0 \subset \gamma$ eğri parçası boyunca γ_0^* temditini gözönüne alalım. Bu gibi temditlerin mümkün olduğu bütün t_0 ların cümlesine E diyelim. E, I ye nazaran açıktır. Gerçekten, 11.4.1.1. ın ispatında olduğu gibi, t_0 ın v civarı bulunabilir, öyleki $\varphi^*(t)$, t_0 ın ötesine temdit edilebilir. Farzedelim ki bütün γ boyunca temdit mümkün değildir. Bu demektir ki, bir τ, $0 < \tau \leq 1$, sayısı vardır, öyleki $\varphi^*(t)$, $[0, \tau)$ aralığında tariflidir.

Bu takdirde iddia ediyoruz ki, $t \to \tau$ için $\varphi^*(t)$, S* ın ideal sınırına yakınsar. Aksi halde, bir (t_n) dizisi bulunabilir öyleki $t_n \to \tau$ için $\varphi^*(t_n) \to a^*$. Süreklilikten dolayı, $f(a^*) = a = \varphi(\tau)$. Fakat (S^*, f) nin tarifi gereğince, $\exists V^*(a^*)$, $V(a)$, $\ni V^*$, V ye homeomorftur. Bu takdirde $\exists \tau' < \tau$, $\ni \tau' \leq t \leq \tau$ için $\varphi(t) \varepsilon V$. Dolayısıyla, $[\tau', \tau]$ da, $\varphi^* = f^{-1} \circ \varphi$ vazedilirse, φ^*, $[0, \tau']$ den $[0, \tau]$ ya temdit edilmiş olur. Bu ise τ nun tarifine aykırıdır. Tarif olarak, diyoruz ki $\varphi(\tau)$, f nin *bir asimtotik değeridir.*

$\varphi^*(t)$ nin, $0 \leq t < \tau$ aralığında çizdiği eğriye ise, *asimtotik yol* denir.

Dolayısıyla, tahditsiz bir örtme yüzeyi, pürüzsüz bir örtme yüzeyidir, öyle ki bu yüzey üzerinde, hiçbir *asimtotik yol* mevcut değildir.

Meselâ, kompakt (kapalı) bir yüzey, *ideal sınır* bulunmadığından, *pürüzsüz* bir örtme yüzeyidir.

11.4.3. **Monodromi.** Bu kavram, S deki bir homotopi grubunun (esas grup), (S^*, f) örtme yüzeyinde belirttiği homotopi grubu bakımından son derecede önemlidir.

Teorem 11.4.3.1.. **(Monodromi).** Farzedelim ki, (S^*, f) tahditsiz pürüzsüz bir örtme yüzeyidir. γ_1, γ_2, uçları a ve b de olan S yüzeyi üzerinde homotop iki eğri iseler, a nın üzerinde bir a^* noktasından başlıyan γ_1^*, γ_2^* temditleri, aynı b^* noktasında biterler, ve γ_1^* ile γ_2^* homotopturlar.

İspat. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ olduğundan, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq u \leq 1$ birim karesinde tarifli $(t, u) \to \varphi(t, u)$ deformasyonu vardır, öyleki $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Burada $\gamma_1 : t \to \varphi(t,0)$, $\gamma_2 : t \to \varphi(t, 1)$, $a = \varphi(0, u)$, $b = \varphi(1, u)$.

Şayet, $f o \varphi^* = \varphi$ olmak üzere, $(t, u) \to \varphi^*(t, u)$, $\varphi^*(0, u) = a^*$, fonksyonunun sürekli olduğu gösterilebilirse, teorem ispatlanmış olacaktır. Bu takdirde,

$$\varphi^*(1, u) = b^* \text{ ve } \gamma_1^* : t \to \varphi^*(t, 0),\ \gamma_2^* : t \to \varphi^*(t, 1),\ \gamma_1^* \sim \gamma_2^*.$$

u, keyfi fakat sabit olmak üzere, $\varphi^*(t, u)$ fonksyonu, a^* dan başlıyan, $t \to \varphi(t, u)$ eğrisi boyunca temditi tarif etmiş olsun. Göstermeliyiz ki $\varphi^*(t, u)$ iki değişkene nazaran süreklidir.

Bunun için, E, bütün $\tau \varepsilon I$ değerlerinin cümlesini göstersin, öyleki, $\varphi^*(t, u)$, $0 \leq t \leq \tau$, $0 \leq u \leq 1$ dikdörtgeninde süreklidir. $\varphi^*(0, u) = a^*$, $0 \leq u \leq 1$ aralığında sürekli olduğundan $t = 0$, E ye ait olup $E \neq \varnothing$.

E nin tarifi gereğince, $E = [0, t_0)$, veya $E = [0, t_0]$ dır.

Her halükârda, herbir u_0 değeri için, $\varphi^*(t_0, u_0)$, $\varphi(t_0, u_0)$ noktalarının, V^*, V gibi birer açık civarı seçilebilir, öyleki, V^* ve V homeomorfturlar.

O halde bir $\delta > 0$ sayısı vardır, öyleki, (i) $|t - t_0| < \delta$, $|u - u_0| < \delta$ için $\varphi(t, u) \varepsilon V$, (ii) $|t - t_0| < \delta$ için $\varphi^*(t, u_0) \varepsilon V^*$.

$E = [0, t_0]$, kapalı aralık ise $t_1 = t_0$, $E = [0, t_0)$ yarı açık aralık ise $t_1 \varepsilon (t_0 - \delta, t_0)$ seçelim.

E hakkındaki kabullerden dolayı, $\varphi^*(t_1, u)$ u nun sürekli bir fonksyonudur. Dolayısıyla, $0 < \eta \leq \delta$ sayısı bulunabilir öyleki, $|u - u_0| < \eta$ için, $\varphi^*(t_1, u) \subset V^*$. $|u - u_0| < \eta$ değerleri için $\varphi^*(t_1, u) = f^{-1}(\varphi(t_1, u))$.

Şimdi, $0 \leq t \leq t_0 + \delta$, $|u - u_0| < \eta$ dik dörtgenini gözönüne alalım. Burada $\Psi^*(t, u)$ fonksyonunu şöyle tarif edelim. $t \leq t_1$ için $\Psi^*(t, u) = \varphi^*(t, u)$, $t > t_1$ için $\Psi^*(t, u) = f^{-1}(\varphi(t, u))$. Bu takdirde, u sabit için $\Psi^*(t, u)$ süreklidir, ve $f o \Psi^* = \varphi$. Birteklik teoreminden (teorem 11.4.1.1.) dolayı da $\Psi^* = \varphi^*$. Neticede, u_0 keyfi alındığından, göstermiş olduk ki, $\varphi^*(t, u)$ her iki değişkene nazaran $0 \leq t \leq t_0 + \delta$, $0 \leq u \leq 1$ dik dörtgeninde süreklidir. Bu ise E nin tarifine aykırıdır. O halde $1 \varepsilon E$, ve teorem ispatlanmıştır.

Monodromi teoreminin aşağıda basit bir neticesini veriyoruz.

Teorem 11.4.3.2. (S^*, f) basit irtibatlı bir S yüzeyinin tahditsiz pürüzsüz bir örtme yüzeyi ise, $f: S^* \to S$ bir homeomorfizmdir.

İspat. f, lokal topolojik bir tasvirdir, teoremin ispatı için birebir olduğunu göstermek kâfidir. (i) S nin herbir a noktasına, S^* da, iz düşümü a olan bir a^* noktası tekabül eder. S^* da bir o^* başlangıç noktasını tesbit edelim. $o \varepsilon S$, o^* ın iz düşümü, ve $a \varepsilon S$ herhangibir nokta olsun. o yu a ya bir γ eğrisi ile birleştirelim. o^* dan itibaren, γ boyunca, γ^* temditi, a nın üzerinde bir a^* noktasında nihayet bulur. (ii) $b \varepsilon S$ herhangibir nokta olsun. Farzedelim ki b nın üzerinde iki nokta vardır: b_1^*, b_2^*. b_1 ı *, b_2^* a herhangibir γ^* eğrisiyle birleştirelim. γ^* ın γ izdüşümü, b yi b ye birleştiren kapalı bir eğridir. S basit irtibatli olduğundan, γ eğrisi 1 e homotoptur. Monodromi teoreminden dolayı da $b_1^* = b_2^*$.

11.4.4. **Esas grup ve altgruplar.** (S^*, f), S nin *tahditsiz* bir örtme yüzeyi olsun. S de bir o başlangıç noktasını seçelim. o nun *üzerinde* bir noktayı o^* ile gösterelim. S de, uçları o ve a olmak üzere γ_1, γ_2 eğrilerini gözönüne alalım. o^* dan başlıyan temditlerine γ_1^*, γ_2^* diyelim. Bunların bitim noktaları, *a üzerinde* a_1^*, a_2^* noktalarıdır. a_1^*, a_2^* noktalarının çakışmaları için, Monodromi teoremine göre $\gamma_1 \sim \gamma_2$ olması kâfidir.

γ eğrilerinin tetkikinde, bunların kapalı farzedilmeleri maksadımıza kâfi gelecektir. Zira, γ_1 ve γ_2 aynı a^* noktasını belirteceklerdir, yalnız ve yalnız, $\gamma_1 \gamma_2^{-1}$ boyunca, o^* dan başlıyan bir temdit o^* de nihayet buluyorsa.

Binaenaleyh, *tabanı o* olan homotop bütün kapalı γ eğrileri boyunca, o^* dan başlıyan bütün temditler, Monodromi teoreminden dolayı, kapalı ve homotopturlar. Aynı şekilde, tabanı o olan γ eğrisi boyunca temdit kapalı bir eğri ise, γ^{-1} boyunca temdit kapalı bir eğridir. Nihayet γ_1, γ_2 eğrileri boyunca temditler kapalı eğriler ise,, $\gamma_1 \gamma_2$ boyunca temdit kapalı bir eğridir.

Dolayısıyla, o^* dan *başlıyan kapalı temditleri haiz, tabanı o olan* γ *eğrilerinin homotopi sınıfları,* $\pi_1(S)$ *esas grubunun bir K altgrubunu teşkil ederler*

Şimdi, o_1^*, o nun *üzerinde* başka bir nokta olsun. o_1^* ı o^* a, bir σ^* eğrisiyle birleştirelim. σ^* ın σ izdüşümü o dan geçen bir kapalı eğridir. O halde, S de, o dan geçen kapalı bir γ eğrisi verildiği takdirde, γ, o_1^* dan geçen bir kapalı eğriyi belirtir, yalnız ve yalnız, $\sigma\gamma\sigma^{-1}$, o^* dan geçen bir kapalı eğriyi belirtiyorsa. *Binaenaleyh* K_1, $\sigma\gamma\sigma^{-1}$, $\gamma \varepsilon K$, *eğrilerinin bütün homotopi sınıflarından müteşekkil olup, K nın bir konjüge altgrubudur.*

Teorem 11.4.4.1. K, $\pi_1(S)$ nin bir altgrubu olsun. Bu takdirde, K, S nin tahdistiz pürüzsüz bir örtme yüzeyini belirtir.

İspat. S de bir o başlangıç noktasını seçelim. o da başlıyan ve $p \varepsilon S$ de biten bir γ eğrisini gözönüne alalım. Herbir (γ, p) çiftine bir p^* noktasını tekabül ettirelim. (γ_1, p_1) ve (γ_2, p_2) çiftlerine tekabül eden noktaları p_1^* ve p_2^* ile gösterirsek, $p_1^* = p_2^*$ yalnız ve yalnız $p_1 = p_2$ ve $\gamma_1 \gamma_2^{-1} \varepsilon K$ ise. p^* noktalarının bütününe S^* diyelim.

Şimdi, S^* da bir topoloji tarif edelim. $V \subset S$ bir Jordan bölgesi, ve γ, o yu $p \varepsilon V$ ye birleştiren bir eğri olsun. $q \varepsilon V$ ise, p yi q ya birleştiren eğriyi σ ile gösterelim. Dolayısıyla, $(\gamma\sigma, q)$ çiftine, $q^* \varepsilon S^*$ tekabül eder. q, V yi

taradığı zaman q^*, $V^*_{\gamma\sigma}$ ı tarar, ve V basit irtibatlı olduğundan $q \varepsilon V$ ile $q^* \varepsilon V^*_{\gamma\sigma}$ arasındaki tekabül birebirdir.

Yukardaki şekilde tarif edilen bütün $V^*_{\gamma\sigma}$ ların $\mathcal{T}$ ailesini gözönüne alalım. $\mathcal{T}$ nin bir alttaban, yani, $\mathcal{T}$ ye ait herhangibir sonlu cümle koleksyonun arakesitinin, $\mathcal{T}$ ye ait cümlelerin birleşimi olduğunu gösterebilirsek, S^* da bir topoloji tarif etmiş oluruz.

Bunun için gösterelim ki, $V^*_{\gamma_1\sigma_1}, V^*_{\gamma_2\sigma_2} \varepsilon \mathcal{T}$, birbirini kısmen örtüyorsa $V^*_{\gamma_1\sigma_1} \cap V^*_{\gamma_2\sigma_2}$, $V^*_{\gamma\sigma} \varepsilon \mathcal{T}$ lerin birleşimidir.

$V^*_{\gamma_1\sigma_1} \cap V^*_{\gamma_2\sigma_2} \neq \varnothing \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Fakat $V_1 \cap V_2$, $V \subset V_1 \cap V_2$ Jordan bölgelerinin birleşimidir. $q \varepsilon V \subset V_2 \cap V_1$ olmak üzere, $q^* \varepsilon V^*_{\gamma_1\sigma_1} \cap V^*_{\gamma_1\sigma_1}$ noktasını gözönüne alalım. $\sigma_1 \subset V_1$, $\sigma_2 \subset V_2$ olduğuna göre, $q \varepsilon V$, $\gamma_1\sigma_1$, $\gamma_2\sigma_2$ eğrileri tarafından belirtilmiştir. Halbuki, $V^*_{\gamma_1\sigma_1}$ ile $V^*_{\gamma_2\sigma_2}$ aynı cümleler olup $V^*_{\gamma\sigma}$ ile gösterilirse, $q^* \varepsilon V^*_{\gamma\sigma} \subset V^*_{\gamma_1\sigma_1} \cap V^*_{\gamma_1\sigma_1}$. Şu halde, arakesitin, $V^*_{\gamma\sigma}$ cümlelerinin birleşimi olduğundan, $\mathcal{T}$, bir topoloji tarif eder.

S^*, **Hausdorff uzayıdır.** Şayet $p_1 \neq p_2$ ise, $p_1^* \neq p_2^*$. Bu takdirde $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ seçilerek $V^*_{\gamma_1\sigma_1}$, $V^*_{\gamma_2\sigma_2}$ açık civarları bulunabilir, öyleki $V^*_{\gamma_1\sigma_1} \cap V^*_{\gamma_2\sigma_2} = \varnothing$. $p_1 = p_2$ ise, γ_1, γ_2 eğrilerini, $\gamma_1\gamma_2^{-1} \notin K$ olacak şekilde seçersek $p_1^* \neq p_2^*$. Bu takdirde, $p_1 = p_2$ yi ihtiva eden herhangibir V ye tekabül eden $V^*_{\gamma_1\sigma}$, $V^*_{\gamma_2\sigma}$ ların arakesiti boştur. Zira, $(\gamma_1\ \sigma)(\gamma_2\sigma)^{-1} = \gamma_1\sigma\ \sigma^{-1}\gamma_2^{-1} \sim \gamma_1\gamma_2^{-1} \notin K$.

S^* **irtibatlıdır.** Önce S^* ın *eğrisel irtibatlı* olduğunu gösterelim. $p_1^* = (\gamma_1, p_1)$ ve $p_2^* = (\gamma_2, p_2)$, S^* da iki nokta iseler, γ_1, γ_2, o noktasını, p_1, p_2 noktalarına birleştiren iki eğridirler. Dolayısıyla, $\gamma_2\gamma_1^{-1} = \sigma$, p_1 i p_2 ye birleştiren eğridir. σ üzerindeki herhangibir noktaya q, o yu q ya birleştiren σ nın parçasına da σ_q diyelim. O halde $q^* = (\sigma_q, q) \varepsilon S^*$. Görülüyor ki q, σ yı çizdiği zaman, q^*, p_1^* ı p_2^* a birleştiren bir eğri çizer. Teorem 11.2.2.1. den dolayı S^* irtibatlıdır.

S^* **tahditsiz ve pürüzsüzdür.** Yukardaki notasyonlar aynen muhafaza edilerek, f: $V^*_\gamma \to V$ tasviri topolojik olduğundan (S^*, f), S nin *pürüzsüz* bir örtme yüzeyidir.

$\gamma: t \to \varphi(t)$, o dan başlıyan herhangibir eğri olsun. $\varphi^*(t) = (\gamma, \varphi(t))$, 1 birim eğrisinin belirttiği o^* dan başlıyan γ boyunca temdittir. Yani S^* tahditsizdir.

Nihayet, (S^*, f), $\pi_1(S)$ esas grubun, K altgrubuna tekabül eder. Gerçekten, 1 eğrisinin belirttiği o^* dan başlıyan, γ boyunca temdit kapalı bir eğridir, yalnız ve yalnız, $\gamma \varepsilon K$.

Teorem 11.4.4.2. S^* ın esas grubu K ya izomorftur.

İspat. Tabanı o^* olan kapalı eğrilerin izdüşümleri, tabanı o olan kapalı eğrilerdir, yani K ya aittirler. Homotop eğrilerin iz düşümleri homotop eğriler olup, iki kapalı eğrinin çarpımının iz düşümü, iz düşümlerin çarpımıdır. Şu halde f izdüşümü, $\pi_1(S^*, o^*)$ esas grubunu homomorfik olarak K ya tasvir ediyor. Bu tasvir, *üzerine* bir tasvirdir, zira herbir $\gamma \varepsilon K$ nın *üzerinde* bir γ^* vardır. Nihayet, homomorfizm bir izomorfizmdir, çünki $\gamma \sim 1$ ise $\gamma^* \sim 1$.

TARİF 39. K_1, K_2, $\pi_1(S)$ nin iki altgrubu olsunlar. K_2 nin belirttiği tahditsiz pürüzsüz örtme yüzeyi, K_1 in belirttiği örtme yüzeyinden daha kuvvetlidir (veya ikincisi birinciden daha zayıftır) diyoruz, yalnız ve yalnız $K_2 \subset K_1$ ise.

S nin en zayıf örtme yüzeyi (S^*, e) dir. Burada, e, özdeş tasvirdir, ve K, $\pi_1(S)$ ile çakışır. En kuvvetli örtme yüzeyi ise, birim elemanından ibaret altgruba tekabül eder.

Birim elemandan ibaret altgrubun belirttiği örtme yüzeyine, S nin *üniversel örtme yüzeyi* denir ve S^*_∞ ile gösterilir.

Teorem 11.4.4.3.. Üniversel örtme yüzeyi basit irtibatlıdır.

İspat. Teorem 11.4.4.2. den dolayı S^*_∞ un esas grubu birim elemanından ibarettir. Dolayısıyla S^*_∞ basit irtibatlıdır.

11.4.5. **Örtü Transformasyonları.** Önceki kısımda gördük ki, S, S nin (S^*, f) tahditsiz örtme yüzeyi, $o \varepsilon S$ ve üzerinde $o^* = f(o) \varepsilon (S^*, f)$ verildiği takdirde temditleri o^* dan başlıyan ve o^* da biten kapalı eğriler olan, o tabanlı, kapalı γ eğrilerinin homotopi sınıfları, $\pi_1(S)$ esas grubunun bir $K \subset \pi_1(S)$ altgrubunu birtek olarak belirtir.

o, verildiğine göre, K altgrubu, o^* a tâbi olduğundan, $S = (S, o)$ nun örtme yüzeyini (S^*, f, o^*) ile gösterelim. Yine gördük ki, K_1, (S^*, f, o_1^*) ın belirttiği altgrup ise, K_1, K nın konjüge altgrubudur. Yani $K_1 = \sigma^{-1} K \sigma$. Burada, σ, o tabanlı kapalı bir eğri olup, o^* ı, o_1^* e birleştiren eğrinin izdüşümüdür.

TARİF 40. o_1^*, o_2^*, o nun *üzerinde* (S^*, f) ye ait iki nokta olsun. (S^*, f, o_1^*) ile (S^*, f, o_2^*) özdeştir diyoruz, şayet (S^*, f, o_1^*) i, (S^*, f, o_2^*) ye dönüştüren bir φ topolojik tasviri varsa, öyleki $o_2^* = \varphi(o_1^*)$.

Teorem 11.4.5.1. (S, o) nun (S^*, f, o_1^*), (S^*, f, o_2^*) örtme yüzeyleri özdeştirler yalnız ve yalnız $K \subset \pi_1(S)$ altgrubu aynı ise.

İspat. (S^*, f, o_1^*) ve (S^*, f, o_2^*) özdeş iseler K nın aynı kaldığı aşikârdır. Karşıt olarak farzedelim ki, (S^*, f, o_1^*) ve (S^*, f, o_2^*) aynı K yı belirtiyorlar. $p_1^* \varepsilon S^*$ olsun, ve o_1^* ı p_1^* e, γ_1^* eğrisiyle birleştirelim. γ_1^*, p_1^* in izdüşümlerine γ, p diyelim. o_2^* den başlıyan, γ boyunca, γ_2^* temditi p_2^* de nihayet bulur. p_2^*, p nin *üzerinde* bir noktadır. Üstelik γ_1^* yoluna tâbi değildir. Gerçekten, σ_1^* ve $\tilde{\sigma}_1$, o_1^* i p_1^* e birleştiren iki yol, ve σ, $\tilde{\sigma}$ izdüşümleri ise, $\tilde{\sigma}\sigma^{-1} \varepsilon K$, ve dolayısıyla, o_2^* den başlıyan σ_2^*, $\tilde{\sigma}_2^*$ temditleri, aynı p_2^* noktasında ni-

hayet bulur. Bu da gösteriyor ki p_1^* ile p_2^* arasında bir φ birebir tekabülü vardır.

φ ve φ^{-1} aşikâr olarak süreklidirler. Yani φ, müteakabil noktaların izdüşümleri aynı olmak üzere, S^* ı kendi üzerine dönüştüren topolojik bir tasvirdir. Özel olara $o_2^* = \varphi(o_1^*)$ ve dolayısıyla, (S^*, f, o_1^*) ile (S^*, f, o_2^*) özdeştirler.

Bu izahlardan sonra aşağıdaki tarifi verebiliriz. Aynı zamanda, sözkonusu gruplar için, Grup Teorisine ayrılan Bölüm IX a müracaat edilebilir.

TARİF 41, *Tahditsiz* (S^*, f) *örtme yüzeyinin örtü transformasyonu* diye, mütekabil noktaların iz düşümleri aynı olmak üzere, S^* ı kendi üzerine dönüştüren herhangibir *topolojik tasvire* denir.

Örtü transformasyonların bir Grup teşkil ettikleri aşikârdır. Şimdi bu grubun, K ile olan münasebetini tetkik edeceğiz.

Grup Teorisine ait aşağıdaki hususu hatırlatalım.

$\sigma \varepsilon \pi_1(S)$ kapalı eğrileri, öyleki $\sigma K \sigma^{-1} = K$, bir grup teşkil ederler.

Bu gruba K nın *normalizatörü* denir ve N ile gösterilir.

Şu halde bütün $\sigma \varepsilon N$ ler için, $\sigma K \sigma^{-1} = K$ olduğundan K, N nin bir *normal altgrubudur.*

Teorem 11.4.5.2. S^* ın örtü transformasyonlarının $\mathcal{T}$ grubu, N/K bölüm grubuna izomorftur.

İspat. Bunun için göstermeliyiz ki, N den $\mathcal{T}$ *üzerine* bir Ψ homomorfizmi *vardır* ve K bu homomorfizmin bir *çekirdeğidir.*

o ve o^* ı sabit seçelim. $\sigma \varepsilon \pi_1(S)$, σ^* ise, o^* dan başlıyan ve o_1^* de biten, σ boyunca temdit olsun. (S^*, f, o_1^*)e tekabül eden altgrup $K_1 = \sigma K \sigma^{-1}$ dir. $\sigma \varepsilon N$ ise $K_1 = K$ Teorem 11.4.5.1 den dolayı (S^*, f, o^*) ile (S^*, f, o_1^*) özdeştirler. Yani σ ya tekabül eden bir $T_\sigma \varepsilon \mathcal{T}$ vardır öyleki $T_\sigma(o^*) = o_1^*$. Karşıt olarak, $T \varepsilon \mathcal{T}$ veriliği takdirde, $o_1^* = T(o^*)$ o^* ı o_1^* e bir σ^* eğrisiyle birleştirelim. σ izdüşümü ise, (S^*, f, o_1^*) e tekabül eden altgrup $K_1 = \sigma K \sigma^{-1}$ dir. Yine teorem 11.4.5.1. den ötürü $K_1 = K$ ve dolayısıyla $\sigma \varepsilon N$. Üstelik $T = T_\sigma$. Diğer taraftan, $T_{\sigma\tau} = T_\sigma T_\tau$. O halde $\Psi: N \to \mathcal{T}$ bir homomorfizmdir.

En son gösterelim ki, K, Ψ nin çekirdeğildir. Yani Ψ, K yı $\mathcal{Q}$ nin *birim* elemanına tasvir eder. Halbuki T_σ birim elemandır, yalnız ve yalnız $o^* = o_1^*$ ise, yani $\sigma \varepsilon K$ ise.

Binaenaleyh, teorem 9.1.3.3. ün bütün şartları sağlandığından, $\mathcal{T} \cong N/K$.

11.4.6. **Normal örtme yüzeyi.** *TARİF* 42. $N = \pi_1(S)$ özel halinde, K, esas grubun bir normal altgrubudur. Bir normal altgruba tekabül eden *tahditsiz örtme yüzeyine, normal örtme yüzeyi* denir.

Meselâ, S_∞^* üniversel örtme yüzeyi normaldir, ve örtü transformasyonları, S nin esas grubuna izomorftur.

En son teoremin ispatında gördük ki, bir örtü transformasyonu özdeş transformasyondur, yalnız ve yalnız, o^* kendi üzerine dönüşüyorsa. O halde, özdeş tranformasyon hariç, hiçbir örtü tranformasyonun sabit noktası yoktur.

Bir *normal örtme yüzeyinde*, izdüşümü aynı olan, p^*, p_1^* noktaları verilmiş olsun. Diyorum ki, p^* ı p_1^* e dönüştüren bir örtü transformasyonu daima vardır. Gerçekten, o^*, o_1^* noktaları p^* ve p_1^* da alındığı takdirde, o^*, o_1^* bir eğriyle birleştirilirse, bu eğrinin σ izdüşümü daima N dedir, yani $K_1 = K$, ve teorem 11.4.5.1. den dolayı bir T_σ vardır, öyleki, $T_\sigma(o^*) = o_1^*$.

11.4.7. **Homoloji Grubu.** Bu bölümdeki notasyonları muhafaza ederek, Grup Teorisine ait bazı önemli hususları burada tekrarlıyoruz.

Komütatif olmıyan gruplarda, σ, τ elemanları vardır öyleki $\sigma\tau \neq \tau\sigma$. Bu gibi hallerde, $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ tipteki elemanların tetkiki grup yapısının incelenmesi bakımından ayrı bir hususiyet taşımaktadır.

$\mathcal{C}$, bir grup ve σ, $\tau \varepsilon \mathcal{C}$ ise, $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ elemanına σ ve τ nun *komütatörü* denir ve $[\sigma, \tau]$ ile gösterilir.

$[\sigma, \tau]$ elemanları bir grup teşkil ederler. Bu gruba *komütatör grup* denir ve $[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ ile gösterilir. $[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ nin önemli hususları şunlardır.

1. $[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$, $\mathcal{C}$ nin bir *normal altgrubudur.* Gerçekten, $\delta \varepsilon [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ ise, $\sigma\delta\sigma^{-1} = (\sigma\delta\sigma^{-1}\delta^{-1})\delta = [\sigma, \delta]\delta \varepsilon [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$. Şu halde bütün $\sigma \varepsilon \mathcal{C}$ ler için $\sigma[\mathcal{C}, \mathcal{C}]\sigma^{-1} = [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$.

2. $\mathcal{C}/[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ bölüm grubu *komütatiftir.* A, B, bölüm grubunun iki elemanı olsun. $[A, B]$ yı teşkil edelim. $\sigma \varepsilon A$, $\tau \varepsilon B$ olmak üzere $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \varepsilon [A, B]$. Fakat $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \varepsilon [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$. O halde $[A, B] = [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$. Halbuki $[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$, bölüm grubunun birim elemanıdır. Dolayısıyla $AB = BA$.

3. $\mathcal{K}$, $\mathcal{C}$ nin bir normal altgrubu, ve $\mathcal{C}/\mathcal{K}$ komütatif ise, bu takdirde $\mathcal{K} \supset [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$. Yani $[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$, $\mathcal{C}$ nin *en küçük normal alt grubudur*, öyleki $\mathcal{C}/[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ komütatiftir.

Şimdi bu hususları, S nin $\mathcal{J} = \pi_1(S)$ esas grubuna tatbik edelim. $[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$, $\mathcal{J}$ nin bir normal altgrubu olduğundan, $[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ ye tekabül eden örtme yüzeyi *normaldir.*

Bu yüzeye *homoloji örtme yüzeyi* denir. *Homoloji örtme yüzeyinin örtü transformasyonlarının* $\mathcal{T}$ grubu, $\mathcal{J}/[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ bölüm grubuna izomorf olduğundan *komütatiftir.*

$\mathcal{J}/[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$, bölüm grubuna, *S nin homoloji grubu* denir.

Şimdi, daha umumi örtme yüzeylerin bahsine geçiyoruz.

11.4.8. **Dallanmalı örtme yüzeyleri.** n pozitif tam sayı olmak üzere, $z' = z^n$ tasvirini gözönüne alalım. Bu tasvirde, z ve z' kompleks düzlemleri, aynı düzlemi gösterdikleri farzedilerek, $|z| < 1$ dairesi, kendi üzerine dönüşür, öyleki dairenin herbir $z' \neq 0$ noktasının ters resimleri, n sayıda, $z = (z')^{\frac{1}{n}}$ noktalarıdır. $z' = 0$ a ise birtek $z = 0$ noktası tekabül eder.

Bu tekabül, $|z'| < 1$ dairesinin bir örtme yüzeyini tarif eder. Burada, $z' = 0$, bir *dallanma noktasıdır*. $n > 0$ tam sayısı, dallanma noktasının *katlılığı*, n–1 ise *mertebesidir*.

$z' = z^n$ tasvirinin lokal hassaları gözönünde tutularak, dallanmalı örtme yüzeylerin tarifi aşağıdaki şekilde yapılabilir.

TARİF 42. f sürekli tasviri, S nin bir S* *dallanmalı örtme yüzeyini* tarif ediyor denir, şayet herhangi p_0, p_0^* mütekabil noktalar için, p_0^* ın bir V_0^* cıvarı varsa öyleki $(V_0^* - p_0^*, f)$, $S - p_0$ ın bir *tahditsiz pürüzsüz örtme yüzeyidir*.

V* yerine, Δ_0^* rölatif kompakt Jordan bölgeleri alınabileceği kolayca görülür.

Teorem 11.2.3.2 de gördük ki o noktası kaldırılmış kompleks düzlemin, veya o merkezli Ω dairesinin $\pi_1(\Omega)$ esas grubu sonsuz bir devir grubudur. Bu grubu tevlid eden Ω nın çemberini yine γ ile gösterelim. Δ_0, Ω ya homeomorf olduğundan, Δ^*_0 ın esas grubu, $\pi_1(\Delta_0) = \pi_1(\Omega)$ nın bir $\mathcal{K}$ altgrubuna izomorftur.

Halbuki $\pi_1(\Omega)$ nın altgrupları γ^m, $m \geq 0$, nin tevlid ettiği gruplardır.

$m = 0$ ise, altgrup birim elemana müncerdir. $\mathcal{K}$, bu birim eleman ise, Δ_0^*, Δ_0 ın üniversel örtme yüzeyi olur. Bu takdirde örtü transformasyonlarının sayısı sonsuz, ve dolayısıyla, izdüşümü aynı olan nokta sayısı da sonsuzdur. Bu husus Δ_0^* ın kompakt oluşu ile kabili telif değildir.

O halde, bütün n tam sayıları, ve bir $m \geq 1$ için, $\mathcal{K}$, bütün γ^{mn} lerden müteşekkildir. Dolayısıyla, $\pi_1(\Delta_0^*)$ sonsuz bir devir grubudur.

Bu takdirde de, Δ_0^* ın örtü transformasyonları, m mertebeli sonlu bir devir grubu teşkil ederler.

m sayısına p_0^* ın katlılığı denir. $m > 1$ ise, diyoruz ki p_0^*, m–1 mertebeden bir dallanma noktasıdır. Üstelik, dallanma noktaları ayrık noktalardır.

11.4.9. **Tam örtme yüzeyleri.** *TARİF* 43. Bir S* dallanmalı örtme yüzeyine *tam örtme yüzeyi* diyoruz, şayet her $p_0 \varepsilon S$ için, p_0 yi ihtiva eden bir Δ Jordan bölgesi varsa, öyleki, $f^{-1}(\Delta)$ nın herbir bileşeni kompakttır.

Teorem 11.4.9.1. S nin bir (S^*, f) tam örtme yüzeyi, S nin herbir noktasını *eşit* sayıda örter, ve dallanma noktalarının mertebe sayısı bu sayıya dahildir.

İspat. Önce herbir noktanın en az bir kere örtüldüğünü gösterelim. Aksi halde $f(S^*)$ izdüşümünün bir p_0 sınır noktası vardır. Tariften dolayı p_0 ı ihtiva eden bir Δ Jordan bölgesi vardır, öyleki, $f^{-1}(\Delta)$ nın herbir bileşeni kompaktır. $D^* \neq \varnothing$, $f^{-1}(\Delta)$ nın bir *bileşeni* olsun. Teorem 11.1.7.3. ten dolayı D^* aynı zamanda açık ve kapalıdır. f, lokal topolojik olduğundan, $f(D^*)$ aynı zamanda açık ve kapalıdır. Diğer taraftan $f(D^*) \subset \Delta$ ve $f(D^*) \neq \varnothing$. Δ irtibatlı olduğundan $f(D^*) = \Delta$. Bu ise p_0 ın tarifine aykırıdır.

Şimdi, farzedelim ki, bir $p \varepsilon S$ noktası en az n defa örtülmüş olsun. Yani farzediyoruz ki p nin üzerinde p_k^* noktaları vardır, öyleki, p_k^* noktalarının toplam katlılığı $\geq n$. Tariften dolayı, p ve p_k^* yı ihtiva eden Δ ve Δ_k^* bulunabilir, öyleki, $(\Delta^* - p^*, f)$, $\Delta - p$ nin bir tahditsiz pürüsüz örtme yüzeyidir. Δ_k^* lar birbirlerinden ayrık seçilebilirler. Bu takdirde, p den farklı her $q \varepsilon \cap_k \Delta_k$ nın *üzerinde* en az n nokta bulunur. Şu halde, en az n defa örtülmüş olan S ye ait noktaların M cümlesi *açıktır*.

Dolayısıyla, S–M, en fazla n–1 defa örtülen noktalardan müteşekkildir. $p \varepsilon S - M$, ve $\tilde{p}_k$, p yi örten, yani *üzerinde* bulunan noktalar olsun. Yukarda olduğu gibi, Δ_k ve Δ_k^* Jordan bölgelerini gözönüne alalım. $V \subset \cap_k \Delta_k$, p nin açık irtibatlı bir cıvarı olsun. $f^{-1}(V)$ nin herbir *bileşeni* V nin bir *tam örtme yüzeyidir*. O halde, V nin tamamı herbir *bileşenin* izdüşümüdür. Bundan ötürü de herbiri, p_k *üzerinde* bir p_k^* noktasını ihtiva edecektir. Dolayısıyla, bileşenler Δ_k^* ların içindedirler. O halde, herbir $q \varepsilon V$ noktasının ters resmi Δ_k^* da bulunmakta, ve q nun üzerindeki bu çeşit noktaların sayısı en fazla n–1 dir. Görülüyor ki S–M *açıktır*.

Binaenaleyh, $S = M \cup (S - M)$ *ayırımı* mevcuttur. S irtibatlı olduğundan, M veya S–M boş olmalıdır. Bu da gösteriyor ki, S nin bütün noktaları aynı sayıda noktalarla örtülüdür.

Bu sayıya, örtme yüzeyinin *yaprak sayısı* denir.

Bir örtme yüzeyinin yaprak sayısı sonsuz da olabilir.

Yüzeylerin topolojisi hakkında daha derin bir bilgiye sahip olabilmek için cebirsel topoloji metodlarına ihtiyaç vardır. Bu metodları Bölüm XII de ele alıyoruz.

BÖLÜM XII

CEBİRSEL TOPOLOJİ

1. Simpleks ve Kompleks

12.1.1. **Giriş.** *Cebirsel topoloji*, bilhassa *homoloji* (ve onun ikilisi kohomoloji) teorisi ile alakalıdır. Homoloji teorisi ise, *yüzeylerin tasnifinde* kullanılan *invarientlerin* hasaplanmasıyla ilgilidir. Homoloji teorisiyle elde edilen söz konusu invarientlerin hesaplanması her ne kadar güç değilse de, yüzeylerin tasnifi için yeterli olmadıkları bugün bilinmektedir.

Homoloji teorisinin ardında yatan düşünce, *üçgenleme*dir, yani, yüzeyin, bir üçgenin içine homeomorf parçalara bölünmesidir.

12.1.2. **Üçgenleme.** R^2-Euclid düzleminde bir üçgeni gözönüne alalım. Üçgenin kendisine, kenarlarına ve köşelerine yeni isimler vereceğiz.

TARİF 1. Bir Euclid düzleminde, açık bir üçgene, geometrik 2-simpleks; açık kenarlarına, 1-simpleks; köşelerine ise, 0-simpleks diyeceğiz.

TARİF 2. Bir S yüzeyi üzerinde, bir *m-simpleks* diye, s^m ile gösterilir, $m = 0,1,2$, R^2 - düzleminde geometrik bir e^m, m-simpleksinin topolojik tasvirine denir. s^m lerden müteşekkil herhangibir kolleksyona ise *kompleks* denir.

Bu tasvirde kapalı $\overline{e^2} = \bar{e}$ üçgeninin kenar ve köşelerinin resimlerine kapalı $\overline{s^2} = \bar{s}$ nin kenar ve köşeleri denir.

TARİF 3. Farzedelim ki S de bir $K = \{s\}$ *kompleksi* tefrik edilebilir, öyleki

A1. S (veya $\underset{\sim}{S}$ kenarlı yüzey) bütün s lerin birleşimidir.

A2. $i \neq j$ ise $s_i \cap s_j$ ya boştur, ya bir kenardır, ya da bir köşedir.

A3. $S(\bar{S})$ ye ait herbir noktanın, yalnız sonlu sayıda s üçgenlerini kesen bir civarı vardır.

Bu takdirde $K = \{s\}$, $S(\bar{S})$ de bir üçgenleme tarif ediyor denir.

Böyle bir K *strüktürünü* haiz $S(\bar{S})$ yüzeylerine, *polihidron* denir, ve $|K|$ ile gösterilir. $|K|$ bir nokta cümlesidir, yani S dir. K ise $|K|$ nın üçgenlerle bir *örtüsünü* teşkil eder.

2. Altbölmeler

12.2.1. **Elemanter Altbölme.** Bir polihidron verilmiş olsun. Çok defa, bu polihidronu daha küçük altüçgenlere bölmek icab edecektir. Bu alt bölme, *elemanter altbölme* dediğimiz, tek bir adımın tekrarlanmasından ibarettir şöyleki:

K kompleksine ait, ve ortak bir kenarı olan, s_1, s_2, 2-simplekslerini gözönüne alalım. Bu 2-simpleksler, R^2-Euclid uzayında ortak bir kenarı haiz e_1, e_2 üçgenlerine homeomorfturlar. e_1 in köşeleri P_1, P_2, P_3 ise,

$$e_1 = (P_1, P_2, P_3)$$

yazılır. $e_2 = (P_1, P_2, P_4)$ tür. P_3 ü P_4 e bir doğru ile birleştirirsek, P_3P_4 doğrusu P_1P_2 ortak kenarını bir P noktasında keser. Bu P noktası bir köşe olarak tasavvur edilirse, eski iki üçgen yerine dört yeni üçgen elde edilmiş olur. $e_1 \to s_1$, $e_2 \to s_2$ homeomorfizmleri, bu yeni adımı aynen K ya nakleder, ve bu (elemanter altbölme) adım tekrarlandığı takdirde, yeni bir K' kompleksi husule gelir. Aşikârdır ki, K', $|K|$ nın yeni bir *örtüsüdür*.

12.2.2. **Ağırlık merkezi koordinatları ve altbölmeler.** Bir kompleksin, ağırlık merkezi koordinatları usulüne göre altbölmelerine geçilebilme hususu, sonsuz kere, aynı şekilde tekrarlanabildiğinden, kompakt cihetli yüzeylerin, meselâ, *normal formlara* ircasında büyük avantaj sağlamaktadır. Bu itibarla, bu tip altbölmeler üzerinde biraz durmak faideden âri değildir.

Kolaylık olsun diye ağırlık merkezi koordinatları yerine merkezil koordinatlar diyeceğiz. Önce R^n-Euclid uzayına ait birkaç hususu burada yeniden hatırlatalım.

Lineer altuzaylar. R^n-Euclid uzayında, P_j, $(j=0, 1, 2, \ldots, m)$, $m + 1$ nokta gözönüne alalım. Burada $n > m$.

$P_0, P_1, \ldots, P_m$ noktaları lineer bağımsızdır denir şayet

$$\sum_{j=0}^{m} a_j P_j = 0, \; a_j \text{ reel},$$

yalnız ve yalnız, bütün a_j ler sıfır ise.

Veya, p_{ji}, $i = 1, 2, \ldots, n$, P_j nin koordinatları ise

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \, p_{ji} = 0, \; i = 1,2,\ldots, n.$$

Yukardaki, $m + 1$ bilinmiyenli, lineer homogen denklem sisteminin birtek çözümü olması için, (aşikâr çözüm), rankı $m + 1$ olmalıdır. Yani lineer bağımsız nokta sayısı, R^n nin boyutuna eşit olmalıdır.

R^n nin bir L altcümlesi, R^n nin bir altuzayıdır şayet, $P = (x_i)$ ve $Q = (y_i)$, L ye ait iki nokta iseler, $\lambda + \mu = 1$ olmak üzere, $\lambda P + \mu Q \varepsilon L$. $\lambda P + \mu Q$ noktasının koordinatları $(\lambda x_i + \mu y_i)$ dir.

t_j ler reel olmak kaydıyla, $X = (x_i)$ noktalarının cümlesi, öyleki,

$$x_i = \sum_{j=0}^{m} t_j p_{ji}, \quad \sum_{j=0}^{m} t_j = 1,$$

R^n nin bir altuzayını teşkil eder.

Üstelik, bu lineer altuzay, $P_0, P_1, \ldots, P_m$ noktalarını ihtiva etmektedir, zira $k \neq j$ için $t_k = 0$ ve $t_j = 1$ vaz edilirse P_j nin koordinatları elde edilir. Yani, bu altuzayın herbir noktası $P_0, \ldots, P_m$ lerin bir lineer kombinezonudur. Bundan dolayı, bu lineer altuzaya, $P_0, P_1, \ldots, P_m$ *noktalarının tevlid ettiği altuzay* denir.

t_j *sayılarına*, X *noktasının*, P_j *noktalarına nazaran, merkezil koordinatları* denir.

TARİF 4. R^n nin bir L altcümlesi, R^n nin bir *konveks lineer altuzayıdır*, şayet $P \varepsilon L$, $Q \varepsilon L$ ise, $\lambda P + \mu Q \varepsilon L$, $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.

O halde, $P \varepsilon L$, $Q \varepsilon L$ ise PQ doğru parçası da L ye aittir.

Geometrik e^m m-simpleksinin *aritmetik* tarifini verebiliriz.

Lineer bağımsız $P_0, P_1, \ldots, P_m$ noktaları cinsinden ifade edilen $X = (x_i)$ noktalarının cümlesidir. Burada

$$x_i = \sum_{j=0}^{m} t_j p_{ji}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=0}^{m} t_j = 1, \; 0 < t_j < 1, \; j = 0, 1, \ldots, m.$$

Dolayısıyla, e^m, $P_0, \ldots, P_m$ nin tevlid ettiği altuzayın bir konveks lineer altuzayıdır.

m sayısına simpleksin *boyutu* denir.

$m = 1, 2,$ için geometrik m-simpleksi sırasıyla, bir açık aralık, bir üçgenin içi (açık üçgen) dir.

12.2.3. **Simplekslerin cihetlendirilmeleri.** Gördük ki bir geometrik m-simpleksi, $P_0, P_1, \ldots, P_m$ köşeleri vasıtasıyla birtek olarak belirtilmiş, ve simpleksin tarifinde, köşelerin sırası dikkate alınmamıştır.

Halbuki, meselâ, cihetli yüzeylerin üçgenlenmesinde, simplekslerin cihetlendirilmeleri, yani köşelerin belli bir sıra takip etmeleri icab edecektir.

e^m, m-simplekslerinin cihetlendirilmeleri şu şekilde yapılabilir.

e^m nin bir *permütasyonu* sadece köşelerin permütasyonundan ibaret olduğuna göre, e^m nin permütasyonlarının sayısı $(m + 1)!$ dir.

İki permütasyon *eşdeğerdir* denir şayet ikisi de çift veya ikisi de tek ise. Aksi halde zıttır denir. Bu eşdeğerlik bağıntısı e^m geometrik m-simpleksinin bütün permütasyonlarının sınıfını, ayrık iki sınıfa böler. Bu altsınıflara, e^m nin cihetleri denir.

Bu cihetlerden biriyle cihetlendirilmiş bir e^m geometrik simpleksine, cihetli geometrik m-simpleksi denir.

Görülüyor ki her geometrik e^m simpleksi, cihetli iki geometrik m-simpleksi meydana getirir.

Cihetliliği tebarüz ettirebilmek için, cihetli bir m-simpleksini

$$P_{k_0} P_{k_1} \ldots P_{k_m}$$

şeklinde yazacağız. Cihetlilik, $k_0, k_1, \ldots, k_m$ sırası ile belirtilmiştir. Görülüyor ki, sadece iki ihtimal vardır, ve

$$1, 0, 2, 3, \ldots, m,$$
$$0, 1, 2, 3, \ldots, m$$

nin bir *tek* permütasyonu olduğundan $P_0, P_1, \ldots, P_m$ köşelerinin belirttiği *cihetli geometrik m-simpleksi*

$$(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m)$$

veya

$$(P_1, P_0, P_2, \ldots, P_m)$$

şeklinde yazılabilir. Tarif olarak

$$(P_1, P_0, P_2, \ldots P_m) = -(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m)$$

yazıyoruz. Dolayısıyla iki cihetli m-simpleksinden, biri e^m ise diğeri $-e^m$ dir.

12.2.4. **Tüketme.** Herhangibir sonsuz K polihidronunu tetkik edebilmek için, $|K|$ nın bir örtüsü olan K sonsuz kompleksini *yaklaşık* sonlu altkomplekslerle *tüketmek* zarureti vardır.[1]

Gayemiz, bir *açık polihidronun, kanonik* altpolihidronlarla *tüketilebileceğini* göstermektir.

$H \subset K$, sonlu bir altkompleks olsun, öyleki $|H|$ aynı zamanda bir polihidrondur H nın K ya nazaran K–H komplemanı bir kompleks olur şayet H nın kenar simpleksleri de ilâve edilirse. Bundan sonra, K–H bir nokta cümlesini değil bir kompleksi ifade edecektir. K–H nın bileşenleri, sonlu veya sonsuz kenarlı polihidronlardır. Çevreleri, H nın çevrelerinin aynıdır.

TARİF 5. H ya *kanonik altkompleks* denir, şayet şu şartları sağlıyorsa

A1. $|H|$ bir polihidrondur.

A2. K–H nın bütün bileşenleri sonsuzdur.

A3. Herbir bileşenin birtek çevresi vardır.

TARİF 6. $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ altkompleks dizisi K nın bir *tüketmesidir* şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa

(1) bk. S. Stoilow, Principes Topologiques, Paris 1956, pp. 85–92.

B1. $|H_n|$, $n = 1,2,\ldots$, bir polihidrondur.

B2. $H_n \subset H_{n+1}$.

B3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = K$.

B4. $K - H_n$ de, H_n nin iki çevresini birleştiren, 1-simplekslerden müteşekkil hiçbir basit poligon mevcut değildir.

TARİF 7. Herhangibir bölmede, bir *köşenin yıldızı* diye, o köşeyi ihtiva eden bütün simplekslerin birleşimine denir. Merkezil bir altbölmede, köşelerin yıldızına, *merkezil yıldız* denir.

Teorem 12.2.4.1. Üçgenlenebilen herbir yüzey *kanonik altpolihidronlar*la tüketilebilir.

İspat. $K = \{s\}$ üçgenlemesini gözönüne alalım. Göstermek istiyoruz ki, merkezil bir altbölme bulunabilir, öyleki, B1, B2, B3, B4 şartlarını sağlayan ve S yi tüketen

$$H_1,\ H_2\ldots,\ H_n,\ldots \qquad (12.2.4.1)$$

sonsuz bir altkompleks dizisi vardır.

Gerçekten, bir $s_0 \varepsilon \{s\}$ üçgeninini gözönüne alalım. s_0 ın köşelerine ait yıldızların birleşimi bir Q polihidronunu teşkil eder. Q, B4 şartını sağlıyorsa, Q yu H_1 olarak alırız. Aksi halde Q nun c_1, c_2 gibi iki çevresi vardır, öyleki c_1, c_2 de birer köşe bulunabilir, öyleki bu köşeler, $K - Q$ ya ait ve 1-simplekslerden müteşekkil basit bir σ poligonu ile birleştirilebilir. Hatta, σ yı teşkil eden 1-simplekslerden hiçbirinin c_1 ve c_2 ye ait olmadığı farzedilebilir. Gerçekten, σ, c_1 in üzerinde olan en son köşeye kadar takip edildikten sonra, bu köşeden devamla, σ, rastlanan ilk çevrenin ilk köşesine kadar devam edilir. Rastlanan bu ilk çevre c_2 ise mesele yok, aksi halde, rastlanan bu ilk çevre c_2 diyeceğiz.

K nın $K' = \{s'\}$ merkezil bir altbölmesini teşkil edelim. σ' üzerindeki köşelerin merkezil yıldızları, $K' - Q'$ de c_1' i c_2' ye birleştirir. Bu yıldızların birleşimini τ' ile gösterelim. τ' nün σ_1', σ_2' kenarları birbirini kesmiyen σ' gibi iki basit poligon olup c_1' i c_2' ye birleştirir.

$Q' \cup \tau'$ bir polihidrondur, ve çevre sayısı azalmıştır. Gerçekten, τ' nün c_1', c_2' ile ortak olan kenarları hariç, $c_1' \cup c_2' \cup \sigma_1' \cup \sigma_2'$ tek bir çevredir. O halde, Q' nün iki çevresi $Q' \cup \tau'$ de tek bir çevreye intikal etmiş olup, yeni bir çevre de ilâve edilmiş değildir. B4 şartı sağlanıncaya kadar bu operasyona devam edilir. Sonlu sayıda operasyondan sonra, B4 şartını sağlayan $K^{(r)}$ de, bir veya birden fazla h çevreli bir polihidron elde edilir. İşte bu en son polihidron H_1, $K^{(r)}$ ise yine K ile gösterilecektir.

c_h, H_1 in bir çevresi olduğuna göre, c_h nın köşelerine ait yıldızların birleşimi H_1 ile birlikte yeni bir polihidronu meydana getirirler. Bu polihidrona yukardaki muhakeme aynen tatbik edilerek $H_2 \supset H_1$ polihidronu elde edilir.

Böylece (12.2.4.1) sonsuz dizisi aranan bütün şartları haizdir ve S yi tüketir.

Bu dizinin inşasında, H_n, $K^{(r)}{}_n$ de kanonik bir polihidrondur, ve r_n sınırlı veya sınırsız olabilir.

H_n ler kanoniktir, zira B4 şartından dolayı, $S-H_n$ nin bileşenlerinin sayısı, H_n nin çevrelerinin sayısına eşittir. Dolayısıyla, herbirinin H_n ile ortak birtek çevresi vardır.

12.2.5. **Kompaktifikasyon.** § 11.3.2. de kenarlı yüzeyler bahsinde ileri sürdüğümüz, kompaktifikasyonu, yani kenarlı bir yüzeyin herbir çevresini birer nokta ile gösteren ideal sınırın tahakkukunu, bu kısımda ele alacağız.

TARİF 8. Bir S yüzeyi bir G topolojik uzayına dahildir denir, şayet S, G nin içine topolojik tasvir edilebilirse.

S nin G deki resmini S ile aynı tutmakta bir mahzur olmıyacağından S, G nin bir altuzayı farzedilebilir. Bu takdirde, § 11.1.3. te görüldüğü veçhile, S deki topoloji, G nin intac ettiği rölatif topolojidir.

TARİF 9. S nin yukardaki şekilde G ye dahil edilmesine, kompaktifikasyon denir şayet şu şartlar sağlanıyorsa

A1. G kompakttır.

A2. $\bar{S} = G$, yani S, G de yoğundur.

A3. S, G nin bir açık cümlesidir.

$\beta = G - S$, S nin $\mathcal{J}$ ideal sınırının bir tahakkuku olduğuna göre β, S nin *sınır bileşenleri*dir.

TARİF 10. S yi ihtiva eden G ve G' kompaktifikasyonlarına *eşdeğer*dir diyoruz, şayet S üzerinde *birim* tasvirine müncer olan, G den G' üzerine bir topolojik tasvir varsa.

S ye ait, kompakt bir sınırı haiz B bölgeleriyle S nin sınır bileşenlerini tarif edeceğiz.

TARİF 11. Bir *sınır bileşeni* diye, B lerden müteşekkil boş olmıyan bir $b = \{B\}$ kolleksyonuna denir öyleki

B1. $B_0 \varepsilon b$ ve $B \supset B_0$ ise $B \varepsilon b$.

B2. $B_1, B_2 \varepsilon b$ ise b ye ait bir $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ bölgesi vardır.

B3. Kolleksyona ait bütün B lerin $\bar{B}$ kapanışlarının arakesiti boştur.

En son şart, B lerin S de kompakt olmadıklarını istintaç eder. Gerçekten, aksi halde, bütün $\bar{B}$ lere ait, S de en az bir nokta vardır. Öte yandan, Δ verilen herhangibir kompakt cümle ise, $\exists\ B \varepsilon b \ni B \cap \Delta = \varnothing$. Gerçekten, $p \varepsilon \Delta$ ve $V(p)$, p nin bir civarı ise, B3 ten dolayı bir $B_p \varepsilon b$ bulunabilir öyleki

$B_p \cap V(p) = \varnothing$ Δ Kompakt olduğundan sonlu sayıda

$$V(p_1),\ V(p_2), \ldots,\ V(p_N)$$

Δ yı örter. Dolayısıyla Δ,

$$B_{p_1} \cap B_{p_2} \cap \ldots \cap B_{p_N}$$

arakesitini kesmez. B2 den dolayı $\exists\ B_0 \ni$

$$B_0 \subset B_{p_1} \cap \ldots \cap B_{p_N}.$$

O halde $\Delta \cap B_0 = \varnothing$.

TARİF 12. Bir $\beta \subset G$ nokta cümlesi, G de *ayırmıyor* denir, şayet $\Delta \subset G$ herhangibir bölge olup, β nın Δ ya ait bütün noktaları kaldırıldıktan sonra, Δ irtibatlı kalıyorsa.

Teorem 12.2.5.1. Aşağıdaki hassaları haiz birtek G kompaktifikasyonu vardır.

C1. G lokal irtibatlı bir Hausdorff uzayıdır.

C2. β tamamen irtibatsızdır.

C3. β, G de ayırmıyor.

İspat. $G = S \cup \beta$ nın doğrudan doğruya bir topolojisini inşa edeceğiz. β, S nin bütün sınır bileşenlerinin cümlesi olduğuna göre, herbir sınır bileşeni $b = \{B\}$ kolleksiyonu ile belirtilmiştir. B verilmiş ise, $B \varepsilon b$ olmak üzere, bütün $b \varepsilon \beta$ lerin cümlesine $\beta(B)$ diyelim. $b \varepsilon \beta(B)$ ile $B \varepsilon b$ aynı manaya gelirler. Şimdi farzedelim ki $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Bu takdirde $\beta(B_1) \cap \beta(B_2) = \varnothing$ Gerçekten, $\beta(B_1) \cap \beta(B_2) \neq \varnothing \Rightarrow \exists b \varepsilon \beta(B_1) \cap \beta(B_2) \Rightarrow B_1 \varepsilon b,\ B_2 \varepsilon b$. B2 den dolayı, $\exists B_0 \subset B_1 \cap B_2$, yani $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$.

S deki topolojiyi $S \cup \beta$ ya teşmil edebilmek için, $B \cup \beta(B)$ şeklindeki bütün cümleleri açık farzederek, bu cümlelerin, S nin bütün açık alt cümleleri ile birlikte G nin bir $\mathfrak{T}$ tabanını teşkil ettiklerini görmek kâfidir. Bunun için, göstermeliyiz ki $\mathfrak{T}$ ye ait herhangi iki cümlenin arakesiti, $\mathfrak{T}$ ye ait cümlelerin bir birleşimidir.

Aşikâr olmıyan hal, $B \cup \beta(B)$ tipinde cümleler için vuku bulmaktadır. O halde $b \varepsilon \beta(B_1) \cap \beta(B_2)$. Buradan, B_1, $B_2 \varepsilon b$, ve B2 den dolayı da $\exists\ B_3 \subset B_1 \cap B_2$, öyleki $B_3 \varepsilon b$, yani $b \varepsilon \beta(B_3)$. B1 den dolayı $\beta(B_3) \subset \beta(B_1) \cap \beta(B_2)$. Nihayet $B_3 \cup \beta(B_3) \subset [B_1 \cup \beta(B_1)] \cap [B_2 \cup \beta(B_2)]$.

G lokal irtibatlı bir Hausdorff uzayıdır. Hausdorff ayırma aksiyomu, a_1, $a_2 \varepsilon S$ için aşikâr olarak sağlanmıştır. $a \varepsilon S$, $b \varepsilon \beta$ için, B3 ten dolayı sağlanmıştır. Şimdi farzedelim ki b_1, b_2 iki farklı sınır bileşenleridir. Bu takdirde $\exists\ B_1 \varepsilon b_1$ ve $B_1 \notin b_2$. Üstelik $B_2 \varepsilon b_2$ bulunabilir öyleki B_2, B_1 in sınırını kesmez. Dolayısıyla, B_1 irtibatlı olduğundan, ya $B_2 \subset B_1$ veya $B_2 \cap B_1 = \varnothing$. Birinci ihtimalde B_1 den dolayı $B_1 \varepsilon b_2$. Binaenaleyh, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, yani $(B_1 \cup \beta(B_1)) \cap (B_2 \cup \beta(B_2)) = \varnothing$. Üstelik G, lokal irtibatlıdır, zira herbir $B \cup \beta(B)$ için $B \subset B \cup \beta(B) \subset \overline{B}$.

Tariften dolayı S açıktır. Üstelik, G de her açık cümle S ye ait nokta ihtiva ettiğinden $\overline{S} = G$.

β tamamen irtibatsızdır. Önce gösterilim ki, $\beta(B)$ hem açık hem kapalıdır. $B \cup \beta(B)$ açık farzedildiğinden $\beta(B)$, β da rölatif açıktır. Şimdi, b_0, $\beta(B)$ nin β ya nazaran $\beta(B)^C$ komplemanında bir eleman olsun. B nin sınırını kesmiyen bir $B_0 \varepsilon b_0$ temin edelim. Yukardaki muhakemeden dolayı $B_0 \cap B = \varnothing$, ve dolayısıyla $B_0 \cup \beta(B_0)$, $\beta(B)$ yi kesmez. O halde $\beta(B)^C$ açık ve $\beta(B)$ kapalıdır. Buradan β nın tamamen irtibatsız olduğuna hükmedebiliriz. Gerçekten, b_1, $b_2 \varepsilon \beta$ farklı iki eleman ise, $\exists\ \beta(B) \ni b_1 \varepsilon \beta(B)$ ve $b_2 \notin \beta(B)$. Öte yandan, b_1 ve b_2 yi ihtiva eden β nın bir bileşeni, β ya nazaran $\beta(B)$ nin rölatif sınırını keser. Halbuki $\beta(B)$ nin rölatif sınırı boştur.

β, G de ayırmıyor. Farzedelim ki β, $\Delta \subset G$ yi ayırıyor. Bu takdirde $S \cap \Delta = O_1 \cup O_2$ ayırımı yazılabilir. Herbir $b \varepsilon \Delta \cap \beta$ için, $\exists\ B \varepsilon b \ni B \subset \Delta$. Dolayısıyla $B \subset O_1$ veya $B \subset O_2$.

Halbuki B, $B \subset O_1$, ile bütün $B \cup \beta(B)$ cümlelerinin birleşimi açıktır.

Aynı şekilde, B, $B \subset O_2$ ile bütün $B \cup \beta(B)$ cümlelerinin birleşimi açıktır.

Dolayısıyla, bu iki birleşim, Δ nın bir ayırımını teşkil eder. B2 den dolayı, ya O_1 veya O_2 boş olmalıdır. O halde $S \cap \Delta$ irtibatlıdır.

G kompakttır. En genel halin ispatı, seçme aksiyomuna veya muadillerinden biri olan Zorn lemmasına ihtiyaç gösterdiğinden, bunu birtarafa bırakarak, S nin üçgenlenebilir hali için bir ispat vereceğiz.

Bu takdirde S, bir polihidrondur, ve bu polihidronun veya onun yeter derecede inceltilmiş merkezil bir K altbölmesinin kanonik bir $\{H_n\}$ tüketimi vardır. H_n nin çevrelerini b_{i_n}, $i = 1, 2, \ldots, q$, ve $K - H_n$ nin bileşenlerini de R_{i_n} ile gösterelim. Farzedelim ki G kompakt değildir, ve $\{O_\alpha\}$, G nin sonsuz bir açık örtmesidir. Bu takdirde,

$$R_{i_1} \supset R_{i_2} \supset \ldots \supset R_{i_n} \supset \ldots$$

iç içe bileşenler bulunabilir, öyleki herbiri sonsuz sayıda, O_α larla örtülmektedir. Bu sonsuz dizi bir *sınır bileşenini* belirtir. Gerçekten B1–B3 şartlarının sağlandığı kolaylıkla görülür. Hipotezden dolayı bir α_1 için $b \varepsilon O_{\alpha_1}$ ve bu O_{α_1} bir $B \varepsilon b$ yi ihtiva eder. O halde bir $R_{i_n} \subset B$ vardır, ve bu R_{i_n}, O_{α_1} tarafından örtülmektedir. Bu tezat iddiayı doğrular.

G birtektir. Farzedelim ki G_0, S nin ikinci bir kompaktifikasyonudur. Göstermeliyiz ki, G_0 dan G ye bir topolojik tasvir bulunabilir, öyleki, bu tasvir S de birim tasvirdir. Bunun için G hakkında aşağıdaki lemmalara ihtiyaç olacaktır.

Lemma 12.2.5.1. U $b_0 \varepsilon \beta$ nın herhangibir açık civarı olsun. Bu takdirde, sınırı S de olan bir Δ bölgesi bulunabilir, öyleki $b_0 \varepsilon \Delta \subset$ U. Yani, tabir caiz ise, her b_0 noktası için, sınırı S de olan *istenildiği kadar küçük* bir Δ bölgesi bulunabilir öyleki, $b_0 \varepsilon \Delta$.

İspat. β, tamamen irtibatsız olduğundan, § 11.1.8. den dolayı, b_0, $\beta \cap (G - U)$ dan ayırdedilebilir. Yani, bir $\beta = A \cup B$ ayırımı vardır öyleki, A, B kapalı ve ayrık ve $b_0 \varepsilon A$, $\beta \cap (G - U) \subset B$. A ve $B \cap (G - U)$ cümleleri, O_1, O_2 açık cümlelerinin içine alınabilir. O halde $b_0 \varepsilon O_1 \subset U$. A nın noktaları O_1 in iç noktalarıdır, ve B nin noktaları da dış noktalardır. Dolayısıyla O_1 in β üzerinde sınır noktaları yoktur. Binaenaleyh, b_0 ı ihtiva eden, O_1 in Δ bileşeni U ya dahil bir bölgedir ve sınırı S dedir.

Lemma 12.2.5.2. Verilen bir $b_0 \varepsilon \beta$ için, Δ nın, yukardaki lemmada belirtilen bütün bölgeleri taradığını farzedelim. $B = \Delta \cap S$ vazedelim. Bu takdirde B cümleleri S nin bir *b sınır bileşenini* tarif eder.

İspat. Birkere C3 ten dolayı B irtibatlıdır ve dolayısıyla bölgedir. İkincisi, B nın S ye nazaran rölatif sınırı kompakttır. Gerçekten, rölatif sınır $(\overline{\Delta} \cap S) - \Delta = (\overline{\Delta} - \Delta) \cap S = \overline{\Delta} - \Delta$ dır, yani Δ nin sınırıdır. Bu sınır ise S dedir, yani kompakttır. Üçüncüsü, B nın S ye nazaran rölatif kapanışı yani $\overline{B} \cap S = \overline{\Delta} \cap S$ kompakt değildir, zira aksi halde G de kapalı olurdu. Bu takdirde, $\overline{\Delta} = (\overline{\Delta} \cap S) \cup (\overline{\Delta} \cap \beta)$ iki kapalı cümleye ayrılarak yazılabilirdi. Halbuki $\overline{\Delta}$ irtibatlıdır.

Şimdi B lerin B1, B2, B3 şartlarını sağladıklarını tahkik edelim. B2, B3 şartlarının sağlandıkları yukardaki muhakemelerden kolayca görülebileceğinden B1 in üzerinde duruyoruz. $B_0 = \Delta_0 \cap S$ ve $B \supset B_0$ farzedelim. $\Delta = B \cup (\overline{B} \cap \beta)$ vazedelim. Δ bir bölgedir. Gerçekten, $B \subset \Delta \subset B$ olduğundan Δ irtibatlıdır. Ayrıca, $\overline{\Delta} = \overline{B}$, ve $b_0 \varepsilon \Delta$. Şimdi Δ nın açık olduğunu gösterelim. Bunu ispat edebilmek için göstermeliyiz ki, herbir $b \varepsilon \overline{B} \cap \beta$ nin Δ da bir civarı vardır. Farzedelim ki V, b nin açık irtibatlı bir civarıdır ve B nin S ye nazaran rölatif sınırını kesmiyor. $V \cap S$ irtibatlı ve B ye ait noktalar ihtiva ettiğinden, $V \cap S \subset B$. S, V de yoğun olduğundan, $V \subset \overline{B}$. Dolayısıyla, $V = (V \cap S) \cup (V \cap \beta) \subset B \cup (\overline{B} \cap \beta) = \Delta$. Nihayet, Δ nın sınırı S dedir. Gerçekten, $\Delta \cap S = B \cap S = B$. Neticede $B \varepsilon b_0$.

Şimdi birteklik hassasını ele alalım. $f : G_0 \to G$ tasviri, $p \varepsilon S$ ise $p = f(p)$, $b_0 \varepsilon \beta_0$ ise $b = f(b_0)$ şeklinde tarif edilmiş olsun. Tasvir birebirdir, zira farklı b_0 ların ayrık civarları vardır. Açık cümleler açık cümlelere dönüşür. Gerçekten, G_0 da Δ, $B = \Delta \cap S$ şeklinde tarif edilirse $f(\Delta) = B \cup \beta(B)$. f süreklidir, zira $b = f(b_0)$ ın herbir civarı bir $B \cup \beta(B)$ ihtiva eder, ve B1 için yukardaki muhakeme tekrar edilerek, gösterilebilir ki, b_0 ın B ye tekabül eden bir civarı vardır. f, G_0 dan G nin içine bir tasvir idi, fakat $f(G_0)$ aynı zamanda açık ve kapalı olduğundan, G nin *üzerine* bir tasvirdir. Neticede f nin G_0 dan G üzerine bir topolojik tasvir olduğunun ispatı tamamlanmıştır.

3. Homoloji Grupları

12.3.1. **Kompakt ve cihetli yüzeylerin Kanonik formları.** Bazı topolojik invarientler, Kanonik formlarla derhal elde edilir. Bu invarientler ise, kapalı ve cihetli yüzeyleri tamamen karakterize ederler.

Önce aşağıdaki lemmayı ispat edelim.

Lemma 12.3.1.1. Kompleks düzlemde, sınırı C ile gösterilen bir W Jordan bölgesini gözönüne alalım. C yi kendi üzerine dönüştüren bir φ topolojik tasviri verilmiş olsun. Bu takdirde W yi kendi üzerine dönüştüren bir f topolojik tasviri bulunabilir öyleki C de $f = \varphi$ dir.

İspat. § 11.4.1. Tarif 37 den dolayı, W bir Ω dairesine dönüşmek üzere, $\overline{W}$, $\overline{\Omega}$ ya topolojik tasvir edilebilir. Şu halde lemmayı Ω için ispat etmek kâfidir. σ ile gösterilen bu tasvirde, φ, Ω nın Γ çemberini kendi üzerine topolojik tasvir eden bir τ tasvirine dönüşür. $a \varepsilon \Gamma$ herhangibir nokta olsun. O halde $\tau : a \to a'$. Şimdi Ω nın o merkezini a ve a' noktalarına birleştirelim. oa ve oa' üzerinde b ve b' noktalarını tesbit edelim, öyleki $ob = ob'$. a, Γ yı taradığı takdirde $b \to b'$, Ω yı kendi üzerine dönüştüren bir t topolojik tasvirini tarif eder. Açık olarak Γ üzerinde $t = \tau$ dur. Neticede, t, σ^{-1} vasıtasıyla, aranılan f topolojik tasvirine intikal etmiş olur.

S, kompakt ve cihetli bir yüzey olsun. S, sonlu sayıda üçgenlere ayrılabilir, ve bu üçgenlerin $K = \{s\}$ heyet'i umumiyesi $|K| = S$ polihidronunu tarif eder.

S cihetli, diyelim pozitif cihetli, olduğundan, bitişik her iki s_1, s_2 üçgenleri pozitif olarak cihetlendirilmiştir. Dolayısıyla $s_1 \cup s_2$ dörtgeninin sınırı pozitif cihetlidir. Lemma 12.3.1.1. den dolayı, $s_1 \cup s_2$, s_1, geometrik e_1, s_2, geometrik e_2, üçgenine homeomorf olacak şekilde, bitişik ve birbirini kesmiyen e_1, e_2 üçgenlerinin $e_1 \cup e_2$ birleşimi üzerine topolojik tasvir edilebilir. Yine aynı lemma ile, $e_1 \cup e_2$ bir kare şekline getirilebilir. Bu karenin kenarı pozitif cihetlidir.

Bu şekilde devamla, K, kompleks düzlemde eşkenar ve eşaçılı, pozitif cihetli düzgün bir π poligonuna topolojik tasvir edilmiş olur.

K yı teşkil eden üçgenlerin sayısı n ise, matematik indüksiyonla (tüme varım metodu ile) kolayca görülür ki π nin kenarlarının sayısı $n + 2$ dir.

Öte yandan, K ya ait herbir kenar, yalnız ve yalnız iki üçgenin ortak kenarı olduğundan, π de yalnız ve yalnız iki kenar, K da aynı kenara tekabül eder.

Binaenaleyh, π nin kenarlarının sayısı çifttir.

K da aynı kenara tekabül eden, π nin her iki kenarı özdeş farzedilerek biraraya getirilirse, S nin bir *topolojik modeli* elde edilmiş olur.

Bu modellere *kanonik formlar* veya *normal formlar* denir.

Teorem 12.3.1.1. Kompakt Cihetli bir yüzeyin *kanonik formu*,

(1) aa^{-1}, veya

(2) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$,

sembolü ile ifade edilen düzgün bir poligondur. Burada, a ve b ler poligonun kenarlarıdır.

İspat. π nin iki kenarına tekabül eden K ya ait kenarı $s^1 = (p, q)$ ile gösterelim. Bu takdirde s^1 in p köşesi, π nin iki köşesine tekabül eder. Bu köşelere P diyelim. Aynı şekilde q ya tekabül eden π nin iki köşesinin herbirine Q diyelim. π nin sınırı pozitif yöne doğru takib edilerek, s^1 e tekabül eden kenarlardan ilk rastlanan kenar P den Q ya doğru PQ kenarı ise, diğeri Q dan P ye doğru QP dir. PQ ya, a dersek QP, a^{-1} ile gösterilir.

K da, ortak kenarı s^1 olan (o_1pq), (o_2qp) üçgenlerine π de (O_1PQ) ve (O_2QP) üçgenleri tekabül eder. Bu üçgenlerin herbirisi pozitif cihetlidir.

Şimdi, PQ kenarları üst üste getirilecek olursa, görülür ki (O_1PQ) ve (O_2QP) üçgenleri *uygun* olarak cihetlendirilmiştir, yani PQ ortak kenarı, bir kere P den Q ya, bir kere de Q dan P ye doğru cihetlendirilmiştir.

π nin kenarları, yukarda izah edildiği şekilde adlandırılır, ve bir kenardan başlıyarak diğerleri pozitif yön sırasında arka arkaya yazılırsa π için bir sembol elde edilmiş olur.

Meselâ altı kenarlı bir π poligonu için,

$$abcb^{-1}a^{-1}c^{-1}$$

sembolü yazılabilir.

Bununla beraber, öngörülen normal form henüz elde edilmiş değildir. Birçok hallerde π poligonu basite irca edilebilir.

1 inci basitleştirme. Önce şuna işaret edelim ki, π nin herhangibir sembolünde, harfler üzerinde bir devir permütasyonu yapılırsa aynı π için başka bir sembol yazılmış olur. Şimdi farzedelim ki π nin en az dört kenarı vardır ve

$$\ldots aa^{-1}\ldots$$

π nin bir sembolüdür. Bu demektir ki Q, PQ ve QP kenarlarının ortak bir köşesidir. Bu takdirde, K nın topolojik tasvirinde p, bir tek P köşesine pq ise bir tek PQ kenarına dönüşür, ve dolayısıyla bu kenar, P ler birleştirilerek elde edilen π' poligonunun içindedir. Binaenaleyh, yukardaki sembolden aa^{-1} sembolü kaldırılabilir.

2 inci basitleştirme. Bu basitleştirmede, π o şekilde değiştirilecektir ki, yeni poligonun bütün köşeleri, S de bir noktaya, daha doğrusu K da bir köşeye tekabül etsin.

S deki aynı noktaya tekabül eden π nin bütün köşelerini P ile gösterelim. π nin sınırına ait bir a kenarının P ile gösterilmiyen bir köşesi varsa, o köşeye Q diyelim. Q ya eşdeğer, π nin diğer bütün köşelerine, yine Q diyelim. Şimdi, Q köşelerinin sayısını 1 adet küçülterek, P köşelerinin sayısının 1 adet kadar arttırılabileceğini göstereceğiz.

$a = PQ$ vazedelim, ve b, ortak köşesi Q olan π nin diğer bir kenarı olsun. Biliyoruz ki b, a^{-1} değildir, zira 1 inci basitleştirmede aa^{-1} ler yok edilmiştir.

$b = QR$, (R, P veya Q olabilir) vazedelim. P yi R ye bir c doğrusu ile birleştirelim. c, π nin bir köşegenidir. a, b, c kenarlarından müteşekkil üçgene Δ diyelim. Δ yı, c boyunca keserek, π den ayıralım, ve Δ nın b kenarını b^{-1} in üzerine getirerek, Δ yı, π nin arta kalan kısmına ekliyelim. Böylece yeni π' poligonunun kenar sayısı eskisinin aynıdır. Üstelik, Δ ayırdedilmekle, eski π poligonunda Q kaldırılmış, yenisine ise P ilâve edilmiştir.

Bu şekilde devamla, bütün köşeleri eşdeğer olan, ve P ile gösterilen bir π poligonu elde edilir.

3 üncü basitleştirme. a, b kenarları *birbirine raptedilmiştir*: denir, şayet π nin sembolünde, a, b kenarları

$$\ldots a\ldots b\ldots a^{-1}\ldots b^{-1}\ldots \qquad (12.3.1.1)$$

sırasında bulunuyorlar ise.

Gösterelim ki π nin sınırına ait herbir kenar, yine π nin sınırına ait bir kenera *raptedilebilir*. Aksi farzedilirse, bir c kenarı bulunabilir, öyleki c ile c^{-1} arasında herbir kenarın eşdeğeri yine c ile c^{-1} arasındadır. Bu takdirde c kenarı üzerinde ve P den farklı bir nokta tesbit edelim ve bu noktayı, c^{-1} üzerinde eşdeğeri olan noktaya bir d doğru parçasıyla birleştirelim.

d doğrusu π poligonunu, π_1, π_2 poligonlarına ayırır, öyleki, bu poligonlarda, d nin noktaları, P ile özdeşleştirilmiştir. Fakat, bu takdirde, c nin bir P köşesi, π_1 de, diğer P köşesi de π_2 de bulunmaktadır. Bu ise mümkün değildir, zira, S de, P ye tekabül eden noktanın hiçbir civarı, c nin P köşelerinin bir ε-*civarına* homeomorf değildir.

4 üncü basitleştirme. Nihayet gösterelim ki, raptedilen kenar çiftleri biraraya getirilebilir. Yani (12.3.1.1) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\ldots cdc^{-1}d^{-1}\ldots$$

Gerçekten, π:$\ldots a\ldots b\ldots a^{-1}\ldots b^{-1}\ldots$ poligonunda, a nın, pozitif yöne doğru rastlanan, ilk P köşesini, a^{-1} in son köşesine bir c doğru parçasıyla birleştirelim. π *yi* c boyunca keserek, π_1, π_2 poligonlarına bölelim. Bu poligon-

lardan biri, diyelim π_1, b yi ihtiva eder, diğeri ise b^{-1} i ihtiva eder. b, b^{-1} in üzerine getirilirse, $\pi_1 \cup \pi_2 = \pi'$ nün sembolü

$$\pi' : \ldots c \ldots a^{-1}c^{-1}a \ldots$$

olur. Aynı şekilde π' de, pozitif yöne doğru rastlanan c nin son köşesini, bir d doğru parçasıyla, c^{-1} in ilk köşesine birleştirelim. π' yü d boyunca keserek, π_1', π_2' poligonlarına bölelim. Bu poligonlardan biri, diyelim π_1', a yı, diğeri ise a^{-1} i ihtiva eder. a^{-1}, a nın üzerine getirilirse, $\pi_1' \cup \pi_2' = \pi''$ poligonunun sembolü

$$\pi'' : \ldots cdc^{-1}d^{-1} \ldots$$

olduğu görülür.

Raptedilmiş diğer çiftler için aynı operasyon tatbik edilir. Üstelik müteakip operasyon önceki operasyonun neticesini bozmadığından, teoremin ispatı tamamlanmıştır.

TARİF 13. (1) halinde *kanonik formun cinsi sıfırdır* diyoruz, (2) halinde ise kanonik formun *cinsi* g dir.

Cinsi sıfır olan kanonik formda a, a^{-1} kenarları biraraya getirilirse (yapıştırılırsa) topolojik olarak bir küreye muadil bir yüzey elde edilir.

Cinsi 1 olan kanonik form ise, $aba^{-1}b^{-1}$ sembolüne tekabül eden bir karedir, a ve a^{-1} kenarları *yapıştırılırsa*, kenar çevreleri b, b^{-1} olan bir silindir elde edilir. Nihayet, b ve b^{-1} yapıştırılarak, cinsi 1 olan kanonik formun topoljik modeli yani tor elde edilir.

Tor ise, topolojik olarak, birtek kulplu küreye muadildir. Hakikatte aşağıdaki genel teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 12.3.1.2. g cinsli bir kanonik form, topolojik olarak, g adet kulp takılmış bir küredir.

Göstermiş oluyoruz ki, herbir kompakt cihetli yüzey, g cinsli bir kanonik forma, ve dolayısıyla g kulplu bir küreye homeomorftur.

g cinsi kanonik formu tamamen belirttiğinden, iki üçgenlenebilen yüzey homeomorfturlar şayet bu yüzeylerin kanonik formlarının cinsi aynı ise.

Diğer taraftan, kanonik formu elde edebilmek için, yüzeyin belli bir üçgenlemesini nazarı itibare aldık. Farklı bir üçgenleme, aynı cinsi haiz bir kanonik form verir mi? Başka bir deyimle, farklı cinsleri haiz kanonik formlar homeomorf olabilirlermi?

Bu suallere cevap şudur ki, kanonik formların cinsi üçgenlemeye değil, sadece yüzeye tâbidir. Yani homeomorf iki kanonik formun cinsi aynıdır. Dolayısıyla, kompakt cihetli bir yüzeyin cinsi, yüzeye homeomorf kanonik formun cinsi olarak tarif edilebilir.

Bütün bunları ispat edebilmek için, cinsi, yüzey bir topolojik transformasyona tâbi tutulduğunda, topolojik invarient sayıları tesbit ederek, bu sayılar cinsinden ifade edeceğiz.

Bu sayılar *Betti* sayılarıdır.

12.3.2. **Homoloji grupları ve Betti sayıları.** Üçgenlenebilen bir S yüzeyini veya muadili olan bir K polihidronunu gözönüne alalım. 1-simpleksler den müteşekkil bir eğriye, şayet kapalı ise, 1-*devir* denir.

Şayet bir 1-devir bir bölgenin sınırı ise, bu takdirde 1-devire *sınırlıyan 1-devir* denir.

İki 1-devir homologdur denir, şayet birlikte sınırlıyan bir 1-devir teşkil ediyorlarsa, yani birlikte bir bölgeyi sınırlıyorlarsa.

Bütün 1-devirlerin cümlesi gözönüne alınırsa, yukarda sözü geçen bağıntı, bu cümlenin elemanları arasında bir eşdeğerlik bağıntısı tarif eder, ve dolayısıyla cümleyi ayrık sınıflara ayırır, öyleki herbir sınıfta herhangi iki 1-devir homologdurlar.

Bu sınıflara homoloji sınıfları denir, ve homoloji sınıfların cümlesinde *tabii şekilde* bir toplam operasyonu tarif edilirse, bir grup elde edilir, ve bu gruba 1-boyutla homoloji grubu denir.

Homoloji gruplarının önemi, *topolojik invarient* oluşlarındandır. Yani homeomorf yüzeyler, *izomorf* homoloji gruplarını haizdirler.

Homoloji birçok yönden homotopiye benzer. Meselâ, *tor* üzerinde iki 1-devir homologdurlar, yalnız ve yalnız homotop iseler.

Fakat bu hassa yüzeyler için umumiyetle doğru değildir. Meselâ, basit irtibatlı bir B bölgesinin noktaları kaldırılmış bir toru gözönüne alalım. Bu yüzey üzerinde B yi sınırlıyan eğri (sıfıra) 1 e homotip değildir, yani sürekli bir deformasyonla yüzey üzerinde bir noktaya müncer olamaz. Fakat sıfıra homologdur, zira bütün yüzeyin sınırıdır.

Bu bahis, sonlu telid edilen (sonlu sayıda generatörleri olan) Abel gruplarla ilgili olduğundan, okuyucunun önce bu bahsi görmesi tavsiye olunur.

Şimdi, yukarıda özeti yapılan bahisleri teker teker ele alacağız.

Kolaylık olsun diye, Teorem 10.1.1.2. nin burada ispatını veriyoruz.

Lemma 12.3.2.1. G bir Abel grubu olsun. $H \subset G$ altcümlesi G nin bir altgrubudur, yalnız ve yalnız $a \varepsilon H$, $b \varepsilon H$ ise $a - b \varepsilon H$.

İspat. Farzedelim $a \varepsilon H$, $b \varepsilon H \Rightarrow a - b \varepsilon H$. Bu takdirde *(i)* $0 \varepsilon H$, zira $a \varepsilon H \Rightarrow a - a = 0 \varepsilon H$; *(ii)* $a \varepsilon H \Rightarrow -a \varepsilon H$, zira *(i)* den dolayı $0 \varepsilon H$, ve $0 - a = -a \varepsilon H$; *(iii)* a, $b \varepsilon H$, *(ii)* den dolayı $\Rightarrow a, -b \varepsilon H$, dolayısıyla $a - (-b) = a + b \varepsilon H$; *(iv)* asosyatiflik sağlanmıştır, zira H nın elemanları G nin elemanlarıdır.

Karşıt olarak $H \subset G$ bir altgrup ise $a, b \varepsilon h \Rightarrow a, -b \varepsilon H \Rightarrow a - b \varepsilon H$.

A, m-zincir. K, 2-boyutlu bir kompleks olsun. K daki m-simplekslerin, $m=0,1,2$, sayısını α_m ile gösterelim. Bir *m-zincir* diye, c^m ile gösterilir, aşağıdaki lineer forma denir.

$$c^m = u_1 s_1{}^m + u_2 s_2{}^m + \ldots + u_{\alpha_m} s^m{}_{\alpha_m} = \sum_{i=1}^{\alpha_m} u_i \, s_i{}^m.$$

Burada u_i ler tam sayılardır.

Üstelik, $-s^m$ simpleksi $(-1)s^m$ şeklinde yazılacaktır.

K, sonsuz bir polihidron ise, m-zinciri bütün $s^m \subset K$ simpleksleri üzerinde tarif edilir, ancak lineer formda, sonlu sayıda s^m simpleksleri hariç, diğerlerin u-katsayıları sıfırdır.

$c_1{}^m$, $c_2{}^m$ iki m-zinciri iseler, bunların *toplamı* yine bir m-zincirdir ve

$$c_1{}^m + c_2{}^m = \Sigma(u_i + v_i) \, s_i{}^m$$

şeklinde tarif edilir.

Diğer taraftan asosyatif kanunu sağlanmıştır, zira tam sayılar asosyatiftir.

Katsayıları sıfır olan m-zincir, sıfır m-zincirdir ve *özdeş* veya *birim* elemandır.

$\Sigma u_i s_i{}^m$ nin ters elemanı $\Sigma(-u_i)s_i{}^m$ dir.

O halde

Teorem 12.3.2.1. K nın bütün m-zincirlerinin cümlesi, C^m ile gösterilir, bir Abel grubu teşkil eder.

B. Sınır ve sınır operatörü. Önce simpleksler için tarif edeceğiz, sonra lineerlikten istifade ederek m-zincirlere teşmil edeceğiz.

Cihetli (P_0), 0-simpleksin sınırı $\partial(P_0) = 0$ diye tarif edilir.

Cihetli (P_0, P_1) 1-simpleksin sınırı,

$$\partial(P_0, P_1) = (P_1) - (P_0)$$

0-zinciridir.

Nihayet, cihetli (P_0, P_1, P_2) 2-simpleksin sınırı

$$\partial(P_0, P_1, P_2) = (P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1)$$

1-zinciridir. Kolayca görülür ki cihetli bir simpleksin sınırı, cihet ne olursa olsun değişmez, ve dolayısıyla ∂ operatörü cihetli yüzeylerde tek anlamda tarif edilmiştir. Diğer taraftan herbir s^m için

$$\partial(-s^m) = -\partial s^m$$

∂ operatörü, ve dolayısıyla *sınır* kavramı,

$$\partial c^m = \sum_i u_i \, \partial s_i{}^m$$

yazmak suretiyle, derhal bir zincire teşmil edilmiş olur.

TARİF 14. $\partial c^m = 0$ eşitliğini sağlıyan c^m, m-zincirine, *m-devir* veya *kapalı m-zincir* denir.

Bu tâbirin gerekçesi şudur: 1-simplekslerden müteşekkil kapalı bir poligon çizgisi verilmiş olsun. Bu kapalı poligon çizgisi bir 1-zincirdir ve

$$c^1 = \sum_{i=0}^{n-1} (P_i, P_{i+1}), \qquad P_n = P_0$$

şeklinde yazılır.

Görülüyor ki

$$\partial c^1 = \sum_{i=0}^{n-1} \partial (P_i, P_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1}) - (P_i) = 0.$$

Teorem 12.3.2.2. $\partial\partial c^m = 0$. Yani bir m-zincirin sınırının sınırı sıfırdır.

İspat. ∂ operatörü lineer olduğundan, teoremi simpleksler için ispat etmek kâfidir. Bir s^0, 0-simpleksi için $\partial s^0 = 0$ ve dolayısıyla, $\partial\partial s^0 = 0$. $s^1 = (P_0, P_1)$ için $\partial s^1 = (P_1) - (P_0)$ ve $\partial\partial s^1 = \partial(P_1) - \partial(P_0) = 0$. Son olarak, $s^2 = (P_0, P_1, P_2)$ için $\partial s^2 = (P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1)$, ve

$$\partial\partial s^2 = ((P_2) - (P_1)) - ((P_2) - (P_0)) + ((P_1) - P_0)) = 0.$$

Şimdi, $c_1{}^m$, $c_2{}^m$ iki m-zincir iseler.

$$\partial(c_1{}^m + c_2{}^m) = \partial c_1{}^m + \partial c_2{}^m.$$

Yani, *∂ operatörü C^m den C^{m-1} in içine bir homomorfizmdir.*

Teorem 12.3.2.3. m-devirlerin Z^m cümlesi, C^m nin bir altgrubunu teşkil eder.

İspat. $c_1{}^m$, $c_2{}^m \varepsilon Z^m$ ise $\partial c_1{}^m = 0$, $\partial c_2{}^m = 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\partial(c_1{}^m - c_2{}^m) = \partial c_1{}^m - \partial c_2{}^m = 0.$$

Yani $c_1{}^m - c_2{}^m \varepsilon Z^m$. Lemma 12.3.2.1 den dolayı $Z^m \subset C^m$, C^m nin bir altgrubudur.

Teorem 12.3.2.4. Bir *$(m+1)$-zincirin sınırı bir m-devirdir.*

İspat. Gerçekten, $c^m = \partial c^{m+1}$ ise, teorem 12.3.2.2 den dolayı $\partial c^m = 0$. Yani c^m bir m-devirdir.

Bununla beraber, bir m-devir, mutlaka bir $(m+1)$-zincirin sınırı değildir.

TARİF 15. Bir c^{m+1}, $(m+1)$-zinciri için c^m, m-zinciri, $c^m = \partial c^{m+1}$ şartını sağlıyorsa, c^m, m-zincirine *sınırlıyan m-devir* denir.

Teorem 12.3.2.5. Sınırlıyan m-devirlerin B^m cümlesi, Z^m nin bir altgrubudur.

İspat. Gerçekten, $c_1^m = \partial c_1^{m+1}$ ve $c_2^m = \partial c_2^{m+1}$ ise,

$$c_1^m - c_2^m = \partial c_1^{m+1} - \partial c_2^{m+1} = \partial (c_1^{m+1} - c_2^{m+1}).$$

Şu halde $c_1^m - c_2^m \varepsilon B^m$. Lemma 12.3.2.1 den dolayı $B^m \subset Z^m$ alt cümlesi Z^m nin bir altgrubudur.

Son teoremlerdeki neticeler biraraya getirilirse, görülür ki

$$B^m \subset Z^m \subset C^m.$$

Biraz önce gördük ki ∂ operatörü C^m den C^{m-1} in içine bir homomorfizmdir. Yani $\partial(c_1^m + c_2^m) = \partial c_1^m + \partial c_2^m = c_1^{m-1} + c_2^{m-1}$. Halbuki teorem 12.3.2.2 den dolayı, $\partial c_1^{m-1} = 0$, $\partial c_2^{m-1} = 0$. Yani c_1^{m-1}, c_2^{m-1}, sınırlıyan $(m-1)$ devirlerdir, ve dolayısıyla B^{m-1} e aittirler.

Şu halde ∂ operatörü C^m den B^{m-1} in içine bir homomorfizmdir. Üstelik $c^m \varepsilon Z^m$ ise, $\partial c^m = 0$. Yani Z^m homomorfizmin çekirdeğidir. Dolayısıyla,

Teorem 12.3.2.6. $B^{m-1} \cong C^m/Z^m$. Veya, $C^m - Z^m$ fark grubu B^{m-1} e izomorftur.

Grup operasyonu *toplam* olduğu halde, *fark* yerine, *bölüm notasyonu* ve *bölüm grubu* tabiri kullanılır.

C. Homoloji grupları. c_1^m, c_2^m iki m-zincir olsunlar. Şayet $c_1^m - c_2^m$ *sınırlıyan bir m-devir* ise $c_1^m \approx c_2^m$ yazıyor ve c_1^m *homolog* c_2^m okuyoruz.

Özel olarak, c^m sınırlıyan bir m-devir ise $c^m \approx 0$ yazıyor, ve c^m homolog sıfır okuyoruz. $\approx$ bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Gerçekten

(i) *reklefsiftir*, zira, $c^m - c^m = 0$ ve dolayısıyla herhangibir m-zincir kendine homologdur.

(ii) *simetriktir*, zira, $c_1^m - c_2^m = \partial c^{m+1}$ ise $c_2^m - c_1^m = \partial(-c^{m+1})$.

(iii) *tranzitiftir*, zira, $c_1^m - c_2^m = \partial c_1^{m+1}$ ve $c_2^m - c_3^m = \partial c_2^{m+1}$ ise $c_1^m - c_3^m = \partial(c_1^{m+1} + c_2^{m+1})$.

Binaenaleyh, $\approx$ bağıntısı, bütün m-zincirlerin cümlesini, *m-boyutlu homoloji sınıfları* denilen, ayrık sınıflara böler.

Şimdi, özel olarak Z^m grubunu, yani m-devirlerin cümlesini gözönüne alalım. Yukardaki $\approx$ bağıntısı Z^m yi ayrık sınıflara böler.

$[z_1^m]$ ve $[z_2^m]$, m-devirlerin homoloji sınıflarını gösteriyorsa, bu sınıfların toplamı

$$[z_1^m] + [z_2^m] = [z_1^m + z_2^m]$$

şeklinde tarif edilir.

Toplamın bu tarifi, sınıfları temsil eden elemanlara tâbi olmadığından tek anlamlı olduğu kolayca görülür.

Sınırlayan m-devirlerin B^m sınıfını $[0]$ ile gösterirsek,

$$[z^m] + [0] = [z^m]$$

ve

$$[z^m] + [-z^m] = [0].$$

Nihayet toplam operasyonu asosyatiftir, çünkü m-devirlerin toplamı assosyatiftir.

O halde, m-devirlerin m-boyutlu $[z^m]$ homoloji sınıfları, H^m ile gösterilen, bir grup teşkil ederler ve bu grup $Z^m - B^m$ fark grubundan başka bir şey değildir. Bu neticeyi bir teorem ile ifade edelim.

Teorem 12.3.2.6. Bir K polihidronu verilmiş olsun. K nın m-inci H^m Homoloji grubu, Z^m nin B^m ye nazaran bölüm grubudur (veya sadece $Z^m - B^m$ fark grubudur). Yani $H^m = Z^m/B^m$.

D. Betti sayıları. Umumiyetle, homoloji gruplarının sonlu sayıda *genaratörleri* yoktur, yani gruba ait herhangibir eleman, yine gruba ait sonlu sayıda elemanların bir lineer kombinezonu olarak yazılamaz. Bu gibi hallerde Betti sayıları başka şekilde tarif edilir.

Biz burada, H^m grubunu *sonlu tevlid edilen* bir Abel grubu farzedeceğiz. Yani H^m nin sonlu sayıda generatörleri haiz bulunduğunu kabul edeceğiz.

Bu takdirde biliyoruz ki, H^m grubu, b_m sayıda sonsuz (serbest) devir grupların, ve mertebeleri $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_\rho^m$ olan ρ sayıda devir grupların *direkt toplamı* şeklinde gösterilebilir.

Burada, b_m sayısına, K nın *m-inci Betti sayısı*, $a_1^m, \ldots, a_\rho^m$ katsayılarına ise, K nın *m-boyutlu bükülme katsayıları* denir. K, cihetli ise, bükülme katsayıları daima sıfırdır.

Betti sayılarının muadil bir tarifi, doğrudan doğruya H^m homoloji grubunun tarifinden istihraç edilebilir.

Farzedelim ki, b_m sayıda z_i^m, $i=1, 2, \ldots, b_m$, m-devirleri bulunabilir, öyleki aşağıdaki şartlar sağlansın.

A1. z_i^m ler homolojiye nazaran lineer bağımsızdır. Yani, u_i ler tam sayılar olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{b_m} u_i z_i^m \approx 0$$

gibi herhangibir bağıntı, bütün u_i lerin sıfır olmasını intac eder.

A2. Her $z^m \varepsilon Z^m$ m-devir için, u_i ler tam olmak üzere,

$$z^m = \sum_{i=1}^{b_m} u_i z_i^m$$

yazılabilir.

Burada, b_m sayısına K polihidronunun Betti sayısı denir.

Hatta, Betti sayısının tarifi daha da direkt olarak H^m homoloji grubuna bağlanabilir, şöyleki, $[z^m] \varepsilon H^m$ olduğuna göre, H^m de $[z_i^m]$, $i = 1, 2, \ldots, b_m$, gibi b_m sayıda eleman bulunabilir, öyleki,

B1. $\sum_{i=1}^{b_m} u_i [z_i^m] = 0$, yalnız ve yalnız, u_i, $i = 1, \ldots, b_m$, tam sayıları sıfır ise.

B2. Herbir $[z^m] \varepsilon H^m$ elemanı $[z^m] = \sum_{i=1}^{b_m} u_i [z_i^m]$ şeklinde yazılabilir, bu takdirde b_m sayısına, K nın m-inci Betti sayısı denir.

$[z_i^m]$ elemanlarına gelince, bunlar, H^m Abel grubu için bir generatör sistemi, başka bir deyimle, bir *homoloji tabanı* teşkil ederler.

Kanonik formların H^1 homoloji grubunun bir homoloji tabanı, a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, g$, kenarlarından (1-devirler) teşkil edilebileceği ilerde görülecektir. Bu takdirde $b_1 = 2g$.

Tatbikatta, Betti sayılarını hesaplıyabilmek için, ilk yapılması gereken şey, homoloji sınıflarını tesbite çalışmaktır. Ancak en umumi hallerde bu tip bir araştırma müsbet bir netice vermiyebilir.

4. Homoloji Gruplarının İnvarientlik Hassaları

m. homoloji grubunun ve m-Betti sayısının tariflerinden, bunların S yüzeyinin üçgenlemesine tâbi oldukları görülür. Halbuki, farklı üçgenlemelere tekâbül eden m-inci homoloji gruplarının, aralarında izomorf oldukları şayanı dikkattir, ve neticede Betti sayıları aynıdır. Binaenaleyh, ilerde de görüleceği gibi, homoloji grupları ve Betti sayıları doğrudan doğruya üçgenlenebilen yüzeye bağlıdır.

Şu halde, aynı *üçgenlenebilen yüzeyi* temsil eden iki polihidron K, K' homeomorf olduklarından, bütün homeomorf *üçgenlenebilen yüzeyler* birtek polihidronla, meselâ *Kanonik bir polihidronla* temsil edilebilir.

Bu tip bir polihidron için hesaplanan homoloji grupları ve Betti sayıları topolojik invarienttirler.

Kompakt olmıyan üçgenlenebilen bir yüzey için *Kanonik polihidronlar veya formlar* umumiyetle tesbit edilmiş değildir.

H^0, H^2 homoloji gruplarının invarientliklerinin ispatlanmaları, ve b_0, b_1 Betti sayılarının hesaplanmaları nisbeten kolaydır. H^1in invarientliğinin ispatı çok daha güçtür.

12.4.1. **H^0 homoloji grubu.** Herhangibir K polihidronu verilmiş olsun. Bir kere her c^0 0-zinciri bir 0-devirdir. Şimdi hangi şartlar altında bir *sınırlayan 0-devirdir*, yani hangi şartlar altında $c^0 = \partial c_1$. Bunun için

$$c^1 = \sum_i u_i s_i^1$$

vazedelim.

$$\partial c^1 = \sum_i u_i \partial s_i^0 = \sum_i u_i (s_i^0 - \tilde{s}_i^0).$$

Burada

$$\partial s_i^1 = s_i^1 - \tilde{s}_i^0$$

vazedildi. Halbuki

$$\sum_i u_i (s_i^0 - \tilde{s}_i^0) = \sum_i u_i s_i^0 - u_i \tilde{s}_i^0$$

şeklinde yazılırsa, görülür ki u_i katsayıları bir kere *artı* bir kere de *eksi* işaretlerini taşımaktadır. Binaenaleyh Σ_i toplamındaki *katsayıların toplamı* sıfırdır.

Dolayısıyla, c^0 ın, *sınırlayan bir 0-devir* olması için *gerek* şart Σ_i toplamındaki *katsayıların toplamının* sıfır olmasıdır.

O halde, birtek s^0 0-simpleksinden ibaret bir 0-devir, *sınırlamıyan bir 0-devirdir*, yani B^0 a ait değildir.

Şimdi gösterelim ki, s^0_1 herhangibir başka 0-simpleks ise

$$s^0 \approx s^0_1.$$

Gerçekten K irtibatlı olduğundan, s^0, s^0_1 a, kenarları, $s_1^1, s_2^1, \ldots, s_k^1 \varepsilon K$ simpleksleri ile gösterilen, bir poligon çizgisiyle birleştirilebilir.

Dolayısıyla,

$$\partial \sum_{i=1}^{k} s_i^1 = s_1^0 - s^0.$$

Halbuki

$$\partial\partial \sum_{i=1}^{k} s_i^1 = \partial(s_1^0 - s^0) = \partial s_1^0 - \partial s^0 = 0$$

olduğundan $s_1^0 \approx s^0$. Binaenaleyh s^0 ı ihtiva eden homoloji sınıfı, H^0 ın bir homoloji tabanıdır, yani H^0 homoloji grubunu tevlid eder.

Dolayısıyla,

Teorem 12.4.1.1. Üçgenlenebilir bütün yüzeyler için $b_0 = 1$.

12.4.2. H^2 *homoloji grubu.* Cihetli bir K polihidronunu gözönüne alalım, ve

$$c^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i s_i^2$$

herhangibir 2-zincir olsun.

c^2 nin bir 2-devir olması için ya herbir $u_i = 0$ olmalıdır, bu takdirde c^2, bir 0 2-devirdir, veya

$$\partial c_2^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \partial s_i^2$$

yazıldığı takdirde, herbir s_i^2 üçgenine, kenarları boyunca bitişik üçgenler bulunmalıdır ki, üstteki toplamda, ortak kenarların u_i katsayıları bir kere pozitif bir kere de negatif olsun, ve bundan dolayı da $\partial c^2 = 0$ olabilsin. Bu keyfiyet ise, $\sum_{i=1}^{n} u_i s_i^2$ toplamının, ayni katsayı ile K nın bütün üçgenleri üzerine teşmilini intaç eder. Yani

$$c^2 = u \sum_K s^2 \ , \ s^2 \varepsilon K.$$

K kompakt değilse, K sonsuz sayıda üçgenler ihtiva eder, c^2 ise daima sonlu bir toplamdır. O halde 0 2-devirden başka K da 2-devir olamaz. Binaenaleyh $b_2 = 0$.

K kompakt ise, $c^2 = u \sum_K s^2$ bir 2-devirdir, ve $c^2 \approx 0$ değildir, zira c^2, *üç boyutlu* bir zincirin sınırı olamaz. Başka bir deyimle $B^2 = 0$, ve $Z^2 = H^2$.

Dolayısıyla, c^2 nin homoloji sınıfı, H^2 homoloji grubunun bir homoloji tabanıdır. O halde $b_2 = 1$. Neticeleri aşağıdaki teoremde toplıyalım.

Teorem 12.4.2.1. Kompakt cihetli üçgenlenebilir bütün yüzeyler için $b_2 = 1$. Kompakt olmıyan cihetli üçgenlenebilir bütün yüzeyler için $b_2 = 0$.

12.4.3. **H^1 homoloji grubu.** Bahisin başlangıcında, *homotop eğrilerle homolog eğriler* arasındaki sıkı münasebe işaret ettik. Diğer taraftan, H^1 homoloji grubu üçgenlemeye tâbi görünürken, yüzeyin $\mathcal{J}$ esas grubu bu üçgenlemeye tâbi değildir. Nihayet H^1 *komütatif* bir grup olduğu halde $\mathcal{J}$ umumiyetle *komütatif bir grup değildir.* $\mathcal{J}$ yerine $\mathcal{J}/[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ grubu gözönüne alınarak, $\mathcal{J}$ bir Abel grubuna irca edilmiş, ve böylece en son engel ortadan kalkmış olacaktır. Nihayet $H^1 \cong \mathcal{J}/[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ gösterilerek, H^1 in topolojik invarient olduğu anlaşılacaktır.

Basit 1-devirler. $S = |K|$, üçgenlenebilen bir yüzey olsun. K nın bir P_0 köşesini gözönüne alalım. P_0 da başlıyan, $s_i^1 = (P_i, P_{i+1})$, $i = 0,1,2,\ldots, n-1$, 1-simplekslerinden müteşekkil ve $P_n = P_0$ da biten basit kapalı eğriye S üzerinde *basit bir 1-devir* denir, ve

$$\gamma^1 = \sum_{i=0}^{n-1} s_i^1 = (P_0, P_1) + (P_1, P_2) + \ldots + (P_{n-1}, P_0)$$

ile gösterilir.

Lemma 12.4.3.1. Herhangivir c^1 1-devri, basit 1- devirlerin, katsayılar tam olmak üzere, bir lineer kombinezonu şeklinde yazılabilir.

İspat. Gerçekten, farzedelim ki

$$c^1 = \sum_{i=1}^{r} u_i s_i^1 = \sum_{i=1}^{r} u_i \, (P_i, P_{i+1}),$$

bir 1-devirdir. Buradan

$$\partial c^1 = \sum_{i=1}^{r} u_i \partial s^1{}_i = \sum_{i=1}^{r} u_i((P_{i+1}) - (P_i)) = 0$$

yazabiliriz.

Şimdi, $s_1^1 = (P_1, P_2)$ ise, $\partial c^1 = 0$ olduğundan, ∂c^1 in ifadesinde P_2 mevcut değildir.

Bu da $c^1 - u_1 s_1^1$ zincirinde, (P_2, P_3) kenarının bulunmasını intaç eder. Bu şekilde devamla, görülür ki c^1 de

$(P_1, P_2), (P_2, P_3), \ldots, (P_k, P_{k+1}), \ldots$ kenarları mevcuttur. Halbuki c^1 in ifadesinde 1-simplekslerin sayısı sonlu olduğundan, P_1 de başlıyan bu kenarların dizisi P_1 da nihayet bulacaktır. O halde aşağıdaki zinciri teşkil edebiliriz,

$$c_1^1 = c^1 - u_1 \sum_{i=1}^{m} s_i^1, \ p_{m+1} = p_1$$

Görülür ki c_1^1 de, s_1^1 bulunmamakta, c^1 de olmıyan simpleks te bulunmamaktadır, ve

$$\partial c_1^1 = 0 \ .$$

Birtek s^1 simpleksini ihtiva eden bir 1-devir, yani $0s^1 = 0$ 1-devirini elde edinceye kadar aynı muhakeme c_1^1 ve müteakip zincirler üzerinde tekrarlanabilir. Nihayet P_1, P_0 a, K ya ait bir poligon çizgisi ile birleştirilebilir.

Şimdi H^1 ile $\mathcal{J}/[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ arasında bir münasebetin kurulabilmesi için, $S = |K|$ üzerindeki bir kapalı eğriden, K ya ait bir devire sürekli bir deformasyonla geçilebilmelidir.

Herbir kapalı s^1 1-simpleksi, eski parametreden yeniye geçerek I birim aralığına φ vasıtasıyla topolojik tasvir edilirse, bilindiği üzere, s^1 simpleksi aynı uçları haiz bir Γ eğrisine homotoptur, yani s^1,

$$\Gamma : t \to \varphi(t)$$

eğrisini temsil eder.

Dolayısıyla,

$$\gamma^1 = s^1_0 + s^1_1 + \ldots + s^1_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (P_i, P_{i+1}), \; P_n = P_0$$

basit 1-deviri, P_0 dan geçen kapalı

$$\gamma = \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}$$

eğrisini, ve

$$c^1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i^1$$

1–deviri de, kapalı

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{m} \gamma_1^{\lambda_i}$$

eğrisini gösterir.

Diyeceğiz ki K ya ait c^1 1–deviri, kapalı bir Γ eğrisini temsil ediyor.

Lemma 12.4.3.1. *K bir polihidron ve P_0, K ya ait bir köşe olsun. P_0 dan geçen herhangibir Γ kapalı eğrisi bir köşesi P_0 da olan, bir 1-devire homotoptur.*

İspat. K ya ait herbir Q köşesinin yıldızını (açık cümle) *Q ile gösterelim. Bütün *Q ların $\{{}^*Q\}$ cümlesi K nın açık bir örtmesidir.

Diğer taraftan Γ: $t \to \varphi(t)$, $t \varepsilon I$, kompakt olduğundan, sonlu sayıda $\Gamma \cap {}^*Q$ lar Γ yı örter. Dolayısıyla sonlu sayıda $\varphi^{-1}(\Gamma \cap {}^*Q)$ açık aralıkları I yi örter. Bu taktirde I aralığı,

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = 1$ noktalarıyla bölünebilir, o şekilde ki, herbir $[t_i, t_{i+1}]$ kapalı aralığı, i yi örten açık cümlelerden birtanesinin içinde bulunsun. Bu demektir ki, $[t_i, t_{i+1}]$ aralığının $P_iP_{i+1} \subset \Gamma$ resmi bir $^*Q_i$ nin içindedir. Özel olarak $P_0P_1 \subset \Gamma$ yayı tamamen $^*Q_0$ ın içindedir. $P_0 = Q_0$.

Şimdi, $P_i\ P_{i+1}$ yayını $Q_i\ Q_{i+1}$ 1-simpleksinin üzerine dönüştüren *homotopiyi* tarif edelim.

$^*Q_i$, Euclid düzleminde bir açık cümleye homeomorf olduğundan $I \times I$ karesine homeomorftur.

Lemma 12.3.1.1 den dolayı, bir

$$\Theta_i(t, s) : I \times I \to {}^*Q_i$$

deformasyonu bulunabilir öyle ki

$$\Theta_i(t, 0) = \varphi_i(t) : I \to P_iP_{i+1}$$
$$\Theta_i(t, 1) = \psi_i(t) : I \to Q_iQ_{i+1}$$

$$\Theta_i(0, s) = \xi_i(s) : I \to P_iQ_i$$
$$\Theta_i(1, s) = \eta_i(s) : I \to P_{i+1}Q_{i+1}.$$

Burada, $P_iP_{i+1} \subset \Gamma$, $Q_iQ_{i+1} \varepsilon K$, Q_i, Q_{i+1} eşit veya farklı olabilir. P_iQ_i, $P_{i+1}Q_{i+1}$, $^*Q_i$ yıldızına ait yay parçasıdır. Üstelik $\Theta_{i-1}(t, s) : I \times I \to {}^*Q_{i-1}$ ise, P_iQ_i yayı üzerinde $\Theta_{i-1} = \Theta_i$ seçilebilir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmıştır.

Lemma 12.4.3.2. *K ya ait bir noktaya homotop bir 1-devir, sıfıra homologdur.*

İspat. Göstermemiz gerekir ki, yukardaki şartları haiz bir 1-devir, *sınırlıyan 1-devirdir.* Bir köşesi P_0 da olan c^1 1-devrini gözönüne alalım. Yukarda gördük ki c^1 deviri P_0 dan geçen bir $\Gamma : t \to \varphi(t)$, $t \varepsilon I$, $\varphi(0) = \varphi(1) = P_0$, eğrisini temsil eder. Γ, bir noktaya homotop olduğundan, sürekli bir $\Phi = \Phi(t, s)$ tasviri bulunabilir, öyle ki,

$$\Phi : I \times I \to S = |K|,$$

ve

$$\Phi(t, 0) = \varphi(t), \; \Phi(t, 1) = P_0.$$

Şimdi $I \times I$ birim karesini, Ω: $|z| < 1$ birim dairesine, $z = (1-s)^{2\pi i t}$ vasıtasıyla, tasvir edelim. Bu tasvirde, karenin $s = 0$ kenarı dairenin $|z| = 1$ birim çemberine, $s = 1$ kenarı ise, dairenin $z = 0$ merkezine dönüşür. Dolayısıyla,

$$\Phi(t, s) = \psi(z) = \psi((1 - s)\, e^{2\pi i t})$$

Ω dan S ye sürekli bir tasvirdir.

Bu tasvirde, Ω nın γ çemberi Γ ya, merkezi ise P_0 a dönüşür, ve görülür ki çemberin yarı-çapı sıfıra gittiği, yani çember merkeze doğru daraldığı takdirde Γ, P_0 a homotoptur.

c^1 1-devirini teşkil eden 1-simplekslerin köşeleri, γ yı sonlu sayıda

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = 2\pi$$

yay parçalarına böler.

Ω nın $z=0$ merkezini $z = e^{i\theta_k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, noktalarına birleştiren yarıçaplar Ω nın bir ürçgenlemesini meydana getirir.

Bu üçgenlemenin yeter derecede ince merkezil bir Δ altbölmesini teşkil edelim, öyleki, Ψ tasvirinde, Δ ya ait herbir köşenin yıldızının kapanışı, K nın $\{{}^*Q\}$ açık örtmesinin bir *Q açık cümlesinin tamamen içinde olsun.

Δ altbölmesinden mütevellit, γ üzerinde, $e^{i\theta_k}$ ile $e^{i\theta_{k+1}}$ arasında husule gelen yeni köşeleri $e^{i\theta_{k,j}}$, $0 \leq j \leq m_k$,

$$\theta_k = \theta_{k,0} < \theta_{k,1} < \ldots < \theta_{k,m_k} = \theta_{k+1},$$

ile gösterelim.

Şimdi $\Psi : \Omega \to S$ tasvirinden, Δ ya ait herbir σ^2 üçgenini K ya ait bir s^2 üçgenine dönüştürecek tarzda, bir $\Theta : \Omega \to S$ sürekli tasvirine aşağıda izah edileceği şekilde geçilebilir.

Önce $\Theta(e^{i\theta_k}) = \Psi(e^{i\theta_k})$ vazedelim. Şayet $\theta_{k,j}$, $\theta_k < \theta_{k,j} < (\theta_k + \theta_{k+1})/2$ şartını sağlıyorsa, $\Theta(e^{i\theta_{k,j}}) = \Theta(e^{i\theta_k})$, aksi halde $\Theta(e^{i\theta_{k,j}}) = \Theta(e^{i\theta_{k+1}})$ vazedelim. Sonra, Δ nın herbir $re^{i\theta}$, $r < 1$, köşesi için

$$\Theta(re^{i\theta}) = Q$$

vazedelim. Burada Q, $re^{i\theta}$ ya ait bir yıldızın kapanışının tasvirini ihtiva eden *Q a ait köşedir. Bu tasvir birden fazla *Q ya ait olabilir, ve dolayısıyla birden fazla Q tekabül edebilir. Bu takdirde Q lardan bir tanesi seçilir.

Nihayet, Θ tasviri, Δ nın bütün üçgenlerine, Lemma 12.3.1.1 uyarınca teşmil edilir.

Δ ya ait bir σ^2 üçgeninin köşeleri q_1, q_2, q_3 ise, bu köşelere, K da bir s^2 üçgeninin $\Theta(q_1)$, $\Theta(q_2)$, $\Theta(q_3)$ köşeleri tekabül eder.

Binaenaleyh, Θ tasviri herbir σ^2 üçgenini, bir s^2 üçgenine (bu üçgen dejenere bir üçgen olabilir) ve kenarları kenarlara tasvir eder. Üstelik, herbir $e^{i\theta}$, $\theta_k \leq \theta \leq \theta_{k+1}$, çember yayının resmi, bu yaya tekabül eden $\Psi(e^{i\theta})$, $\theta_k \leq \theta \leq \theta_{k+1}$ 1-simpleksini bir kere örter.

Şimdi Ω nın pozitif cihetlendirildiğini farzedersek,

$$\gamma^2 = \Sigma(q_1, q_2, q_3)$$

2-zincirini teşkil edebiliriz. Bu toplamda, herbir 2-simpleks, bir tek defa, $+1$ işaretiyle sayılmış olup, Ω nın içinde bulunan ortak her bir σ^1 kenarı ise bir kere $+1$, bir kere de -1 işaretleriyle iki defa sayılmıştır. Bu itibarla

$$\partial\gamma^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_k-1} (e^{i\theta_{k,j}}, e^{i\theta_{k,j+1}}).$$

Öte yandan σ^2 nin cihetliliği, s^2 nin bir cihetlendirilmesini intaç ettiğinden, formel olarak,

$$\partial c^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_k-1} (\Theta(e^{i\theta_{k,j}}), \Theta(e^{i\theta_{k,j+1}}))$$

yazılabilir.

Formel diyoruz, çünki, aslında ne c^2 ne de ∂c^2 birer zincir olabilirler. Bu hal, Θ tasvirinde, bazı (Q_1, Q_2, Q_3) simplekslerinde iki veya ikiden fazla köşelerin eşit, yani üçgenin dejenere olması halidir.

Fakat, meselâ $Q_1 = Q_2$ ise

$$\partial(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q_1, Q_1) - (Q_1, Q_3) + (Q_2, Q_3) = 0.$$

Aynı şekilde, $Q_1 = Q_2 = Q_3$ ise

$$\partial(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q_1, Q_1) - (Q_1, Q_1) + (Q_1, Q_1) = 0.$$

Binaenaleyh dejenere 2-simpleksler sınıra tesir etmediğinden, c^2 nin teşkilinde bunları nazarı itibara almıyabiliriz, daha doğrusu sıfır ile gösterebiliriz.

Bu özdeşleme ile,

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} (\Theta(e^{i\theta_{k,j}}), \Theta(e^{i\theta_{k,j+1}}))$$

toplamı

$$(\Theta(e^{i\theta_k}), \Theta(e^{i\theta_{k+1}}))$$

1-simpleksinden ibarettir. Diğer taraftan *dejenere* üçgenlerden arınmış c^2 formel toplamı $\tilde{c}^2$ ile gösterilirse, $\tilde{c}^2$ bir 2-zincirdir, ve

$$\partial\tilde{c}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\Theta(e^{i\theta_k}), \Theta(e^{i\theta_{k+1}})) = c^1.$$

Yani c^1 sınırlıyan bir 1-devirdir ve dolayısıyla, $c^1 \approx 0$.

Bu iki lemma ispat edildikten sonra esas gayemiz olan aşağıdaki teoremin ispatına geçebiliriz.

Teorem 12.4.3.1. $H^1 \cong \mathcal{F}/[\mathcal{F}, \mathcal{F}]$.

İspat. Önce, $\mathcal{F}$ den H^1 e bir homomorfizm tarif edebilmeliyiz. Taban olarak P_0 köşesini seçelim. Γ, P_0 dan geçen S ye ait herhangibir kapalı eğri, ve c^1, P_0 dan başlıyan K da bir 1-devir olsun.

Şayet $c^1 \sim \Gamma$ ise $c^1 = h(\Gamma)$ yazacağız. Γ^{-1} ve $\Gamma_1\Gamma_2$ eğrileri için

$$h(\Gamma^{-1}) = -h(\Gamma), \quad h(\Gamma_1\Gamma_2) = h(\Gamma_1) + h(\Gamma_2)$$

vazedelim.

Şimdi, $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, yani $\Gamma_1\Gamma_2^{-1} \sim 1$ ise h nın tarifinden ve lemma 12.4.3.2 den dolayı, $h(\Gamma_1\Gamma_2^{-1}) \approx 0$ veya $h(\Gamma_1) \approx h(\Gamma_2)$. Binaenaleyh h, $\mathcal{F}(P_0)$ dan H^1 e bir homomorfizmdir. h nın H^1 in *üzerine* bir homomorfizm olduğunu göstermek için, herhangibir c^1 1-devirini gözönüne alalım. Gördük ki

$$c^1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i^1$$

basit γ_i^1 1-devirlerinin lineer kombinezonudur. Herbir γ_i^1 ise P_0 dan geçen kapalı bir γ_i eğrisini temsil eder, ve $h(\gamma_i) = \gamma_i^1$.

Dolayısıyla

$$h\left(\prod_{i=1}^{m} \gamma_i^{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h(\gamma_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i^1 = c^1.$$

Yani c^1 1-deviri verildiği taktirde, S ye ait bir

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{m} \gamma_i^{\lambda_i}$$

eğrisi bulunabilir öyleki,

$$h(\Gamma) = c^1.$$

Saniyen, göstermeliyiz ki, $[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ komütatör grubu, $h: \mathcal{J} \to H^1$ homomorfizminin çekirdeğidir. Yani $\Gamma \varepsilon \mathcal{J}(P_0)$ ve $h(\Gamma) \approx 0$ ise Γ, $[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ nin bir elemanını temsil eder.

Halbuki $h(\Gamma) \approx 0$ demek, $h(\Gamma) = c^1$ ve c^1 sınırlıyan bir 1-devir demektir, O halde

$$h(\Gamma) = \partial \sum_{i=1}^{n} u_i s_i^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i \partial s_i^2.$$

Şimdi herbir $s^2 = (Q_0, Q_1, Q_2)$ 2-simplekslerine, tabanı P_0 olan 1-simplekslerden müteşekkil aşağıdaki eğriyi tekabül ettirelim.

$$\gamma = \sigma_0 . Q_0Q_1,\ Q_1Q_2 . Q_2Q_0 . \sigma_0^{-1}.$$

Burada, σ_0, P_0 ı Q_0 a birleştiren poligon çizgisinin ihtiva ettiği 1-simplekslerin çarpımıdır.

Fakat,

$$h(\gamma) = h(\sigma_0) + \partial s^2 - h(\sigma_0) = \partial s^2.$$

Diğer taraftan $A = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i^{\lambda_i}$ eğrisini gösönüne alalım. Burada

$$h(A) = h\left(\prod_{i=1}^{n} \gamma_i^{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(\gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial s_i^2 = h(\Gamma).$$

Yani

$$h(\Gamma) - h(A) = h(\Gamma A^{-1}) = 0.$$

Tarif gereğince ΓA^{-1}, tabanı P_0 olan kapalı eğrilerin çarpımı olup, h-resmi sıfır 1-deviridir. Şu halde ΓA^{-1} eğrisini teşkil eden herbir kapalı eğrinin üstlerinin toplamı sıfırdır, dolayısıyla $\Gamma A^{-1} \sim 1$ ve lemma 12.4.3.2 den ötürü $\Gamma A^{-1} \approx 0$, yani ΓA^{-1} $[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ nin bir elemanını belirtir Üstelik, herbir $\gamma_i \sim 1$ olduğundan $A \sim 1$, ve $\Gamma A^{-1} \sim \Gamma$. Yani Γ da $[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ nın bir elemanını belirtir. Bu ise ispatı tamamlar, ve aynı zamanda, $\mathcal{J}/[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, topolojik invarientliğinden dolayı, H^1 in topolojik invarient olduğunu gösterir.

Kompakt yüzeyler ilerde de bizi meşgul edeceğinden, bu yüzeylerin H^1 homoloji gruplarını hesaplamakta fayda vardır.

12.4.4. **Kompakt yüzeylerin H^1 homoloji grubları.** Cihetli K polihidronları için H^0 ve H^2 homoloji gruplarını, bu bölümün 4 üncü kısımında

hesaplamıştık. Burada ise, kompakt cihetli yüzeylerin H^1 homoloji gruplarını hesaplıyacağız. Bunun için de bu yüzeylerin

$$a_1b_1\ a_1^{-1}b_1^{-1}\ a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} \qquad (12.4.4.1)$$

sembolü ile gösterilen Kanonik formlarını kullanacağız.

Hatırlatalım ki (12.4.4.1.) kanonik formu *4g kenarlı düzgün bir π poligonunu* temsil eder. Herbir köşesi P_0 ile gösterilen bu poligonun,

$$a_1,\ b_1,\ a_1^{-1},\ b_1^{-1},\ \ldots,\ a_i,\ b_i,\ a_i^{-1},\ b_i^{-1}, \ldots,\ a_g,\ b_g,\ a_g^{-1},\ b_g^{-1}$$

kenarları pozitif yöne doğru sıralanmış olup, a_i, b_i kenarları pozitif cihetli ise, a_i^{-1}, b_i^{-1} kenarları aksi cihettedir.

a_i, a_i^{-1}; b_i, b_i^{-1} kenar çiftleri, yüzeyde, sırayla A_i B_i 1-devirlerine tekabül ederler. Böylece, iki aksi yönde rastlanan poligonun kenar noktaları özdeşleştirilmiştir.

Söz konusu yüzeyin, topolojik bir modeli g kulplu bir küre ise, A_i 1-deviri, i inci kulpu *boydan boya* kat'eden, B_i 1-deviri ise, kulpa dik istikamette kapalı eğrilerdir.

Nihayet π nin bir K üçgenlemesini tarif edelim. π nin merkezini 0 ile gösterelim ve 0 yu bütün P_0 noktalarına yarı-doğrularla birleştirelim. Merkezi 0 da ve π nin yarı nisbetinde, benzer bir Π poligonunu çizelim. Bu benzer poligonun bütün köşeleri OP_0 yarı-doğrularının üzerindedir. Π nin kenarlarını iki, π nin a_i, b_i, a_i^{-1}, b_i^{-1} kenarlarını ise, aynı pozitif yönü takip eden

$$P_0,\ Q_{i,1},\ Q_{i,2},\ P_0,\ Q'_{i,3},\ Q_{i,4},\ P_0,\ Q_{i,2},\ Q_{i,1},\ P_0,\ Q_{i,4},\ Q_{i,3},\ P_0$$

noktaları vasıtasıyla üç eşit parçaya ayıralım.

π ve benzeri Π nin köşeleri, π ve Π nin kenarlarını eşit parçalara bölen noktalar, ve nihayet π ve Π nin ortak merkezi 0, köşeleri bulundukları üçgenlemeyi tamemen belirtirler.

Şimdi aşağıdaki teoremleri ispat etmeye hazırız.

Teorem 12.4.4.1. $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_g, b_g$ kapalı eğrileri kompakt yüzeyin $\mathcal{J}(P_0)$ esas grubunu tevlid ederler.

İspat. Yüzeyde ve dolayısıyla π de, tabanı P_0 olan herhangibir Γ eğrisini gözönüne alalım. Lemma 12.4.3.1 den dolayı Γ, K ya ait ve P_0 dan geçen bir c^1 1-devirine homotoptur. Bir parametre değişimi ile c^1, $\gamma: t \to \alpha(t)$ eğrisini temsil eder. Q, π nin içinde ve γ nın üzerinde olmıyan bir nokta olsun. Q yu $\alpha(t)$ ye birleştiren yarı-doğru, π nin, a_i, b_i kenarlarından müteşekkil sınırını $\beta(t)$ noktasında keser. $\alpha(t)$ yi $\beta(t)$ ye birleştiren doğru parçasını, $s/(1-s)$ oranında bölen $\Theta(t, s)$ noktası

$$\Theta(t, s) = (1 - s)\ \alpha(t) + s\beta(t)\ .$$

Binaenaleyh $\Theta(t, s)$, γ yı, uçları P_0 da olan ve tamamen π nin sınırı üzerinde bulunan bir Γ' eğrisine sürekli bir deformasyonla dönüştürür. Yine aynı lemmadan dolayı Γ', uçları P_0 da olan, a_i, b_i, $i=1,2,\ldots, g$, kenarlarına ait K nın 1-simplekslerinden müteşekkil bir c'^1 1-devirine homotoptur. Yani

$$c'^1 = \sum_{i=1}^{g} [u_{i,1}(P_0, Q_{i,1}) + u_{i,2}(Q_{i,1}, Q_{i,2}) + u_{i,3}(Q_{i,2}, P_0)$$
$$+ u_{i,4}(P_0, Q_{i,3}) + u_{i,5}(Q_{i,3}, Q_{i,4}) + u_{i,6}(Q_{i,4}, P_0)]$$

ve

$$\partial c'^1 = \sum_{i=1}^{g} [(u_{i,1} - u_{i,2})(Q_{i,1}) + (u_{i,2} - u_{i,3})(Q_{i,2}) + (u_{i,4} - u_{1,5})(Q_{i,3})$$
$$+ (u_{i,5} - u_{i,6})(Q_{i,4}) + (u_{i,6} - u_{i,4} + u_{i,3} - u_{i,1})(P_0)].$$

Fakat $\partial c'^1 = 0$ olduğundan,

$$u_{i,1} = u_{i,2} = u_{i,3};\ u_{i,4} = u_{i,5} = u_{i,6}.$$

Diğer taraftan,

$$a_i = (P_0, Q_{i,1}) + (Q_{i,1}, Q_{i,2}) + (Q_{i,2}, P_0)$$

ve

$$b_i = (P_0, Q_{i,3}) + (Q_{i,3}, Q_{i,4}) + (Q_{i,4}, P_0)$$

eşitlikleri gözönünde tutulursa

$$c'^1 = \sum_{i=1}^{g} u_{i,1}a_i + u_{i,4}b_i$$

bulunur.

Halbuki $\Gamma \sim c'^1$ olduğundan, görülür ki Γ, katsayıları tam olan a_i ve b_i lerin bir lineer kombinezonuna homotoptur, yani a_i ve b_i ler S nin esas grubunu tevlid ederler.

Üstelik şu noktaya işaret edelim ki, $a_1b_1\, a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_g\, b_g\, a_g^{-1}\, b_g^{-1}$ basit irtibatlı bir bölgenin sınırını teşkil ettiğinden

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} \sim 1.$$

Teorem 12.4.4.2. $a_1b_1,\ldots, a_g$, b_g 1- devirleri H^1 homoloji grubunun bir homoloji tabanını teşkil ederler.

İspat. $H^1 \cong \mathcal{J}/[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$, yani H^1, $\mathcal{J}$ grubunun Abelleştirilmiş bir şekli olduğundan a_i, b_i, $i = 1, 2,\ldots, g$, H^1 homoloji grubunu da tevlid eder. Göstermemiz gerekir ki, a_i ve b_i ler *homolojiye* nazaran lineer bağımsızdırlar. Yani

$$\sum_{i=1}^{g} u_ia_i + v_ib_i \approx 0 \qquad (12.4.4.2)$$

yalnız ve yalnız

$$u_i = v_i = 0,\ i = 1, 2,\ldots, g.$$

Gerçekten, (12.4.4.2) nin tarifinden dolayı, bir s^2 2-simpleksi bulunabilir öyleki,

$$\sum_{i=1}^{g} u_ia_i + v_ib_i = \partial s^2.$$

Burada,

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} w_is_i^2,\ s_i^2 \varepsilon K.$$

s^2 nin ifadesinde, s_1^2, w_1 katsayısıyla bulunuyorsa, aynı katsayıyla, π nin içinde, ∂s_1^2 ile ortak kenarı olan K ya ait bir 2-simpleks de bulunmalıdır, zira ∂s^2 nin ifadesinde, π nin içinde bulunan bir kenar yoktur. Binaenaleyh, görülüyor ki, s^2 nin toplamında, K ya ait herbir üçgen aynı w katsayısı ile bir ve birkere bulunmalıdır. Yani

$$s^2 = w \sum_{i=1}^{n} s_i^2,$$

ve

$$\partial s^2 = w \sum_{i=1}^{g} a_i + b_i - a_i - b_i = 0.$$

O halde

$$\sum_{i=1}^{g} u_ia_i + v_ib_i = 0.$$

Buradan

$$u_i = v_i = 0,\ i=1,2,\ldots, g$$

istihraç edilir. O halde, a_i, b_i, $i = 1,2,\ldots, g$, H^1 in bir homoloji tabanını teşkil eder, ve birinci b_1 Betti sayısı $2g$ ye eşittir.

12.0.5. Cihetli Kompakt yüzeylerin Euler karakteristiği.

Yüzeyleri üçgenlemek suretiyle, bu üçgenlemeye tâbi olmıyan, *Euler sayısı* denilen, topolojik invarient bir sayı daha elde edeceğiz.

TARİF 16. Cihetli kompakt bir S yüzeyinin keyfi bir K üçgenlemesi verilmiş olsun. K ya ait m-simplekslerin, $m = 0,1,2$, sayısını yine α_m ile gösterelim. S nin Euler karekteristiği diye

$$\sum_{m=0}^{2} (-1)^m \alpha_m = \chi$$

toplamına denir.

Teorem 12.4.5.1. $S = |K|$, cinsi g olan bir yüzey olsun. Bu takdirde χ, üçgenlemeye tâbi olmayıp topolojik invarient bir sayıdır, Üstelik

$$\chi = 2 - 2g.$$

İspat. α_m sayıda m-simpleksler, m-zincirlerin C^m grubunun bir tabanını teşkil ederler. Dolayısıyla C^m nin r rankı (lineer bağımsız elemanların maksimum sayısı, veya tabanı teşkil eden generatörlerin sayısı) α_m dir. Hatırlatalım ki G bir Abel grubu ve F onun bir altgrubu ise $r(G/F) = r(G) - r(F)$.

Şimdi $Z^m \subset C^m$ olduğundan, Z^m de $z_1^m, z_2^m, \ldots, z^m\zeta_m$ gibi bir taban seçilebilir ve bu taban C^m nin tabanına tamamlanabilir.

Halbuki, $B^{m-1} \cong C^m/Z^m$ olduğundan

$$r_{m-1} = r(B^{m-1}) = r(C^m) - r(Z^m) = \alpha_m - \zeta_m. \qquad (12.4.5.1.)$$

Üstelik $C^0 = Z^0$ dan $r_{-1} = r(B^{-1}) = 0$.

Diğer taraftan $H^m = Z^m/B^m$ eşitliğinden

$$b_m = \zeta_m - r_m \qquad (12.4.5.2)$$

bağıntısı istihraç edilir. ζ_m, (12.4.5.1) ve (12.4.5.2) arasında yok edilirse

$$\alpha_m = b_m + r_m + r_{m-1}$$

bağıntısı bulunur. O halde,

$$\chi = \sum_{m=0}^{2} (-1)^m \alpha_m = \sum_{m=0}^{2} (-1)^m b_m + r_0 - r_1 + r_2 + r_{-1} - r_0 + r_1.$$

Yani,

$$\chi = \sum_{m=0}^{2} (-1)^m b_m + r_2.$$

Ancak, B^2 nin elemanları *sınırlıyan 2-devirler* olduğundan, ve fakat 3-zincirler bulunmadığından, $B^2 = 0$. Dolayısıyla, $r_2 = 0$, ve neticede aşağıdaki Euler-Poincaré formülü elde edilir.

$$\chi = \sum_{m=0}^{2} (-1)^m b_m. \qquad (12.4.5.3)$$

Betti sayıları üçgenlemeye tâbi olmayıp topolojik invarient olduklarından, üstteki formüle göre χ aynı hassaları haizdir.

Diğer taraftan, cinsi g olan kompakt cihetli yüzeyler için

$$b_0 = 1,\ b_1 = 2g,\ b_2 = 1$$

değerleri, (12.4.5.3.) formülünde yerlerine koyulursa

$$\chi = 2 - 2g$$

bulunur.

S nin kanonik formu gözönüne alındığı takdirde, *homoloji tabanının*

$$a_1,\ b_1\ ;\ a_2,\ b_2\ ;\ldots;\ a_g,\ b_g,$$

basit 1-devirlerden müteşekkil bir sistem olduğu, ve bu sistemin π yi *bölmediği* görülür, çünki π nin içi irtibatlıdır.

Kesin olarak şu tarifi verebiliriz.

TARİF 17. Ortak 1-simpleksi olmıyan, sonlu sayıda, *basit* 1-devirlerden müteşekkil bir *C sistemi* S yi *böler* diyoruz, şayet S–C *irtibatlı* değilse.

Yukarda göstermiş oluyoruz ki, cinsi g olan bir S yüzeyi verildiğine göre, S yi *bölmiyen*, $2g$ adet, ortak 1-simpleksi olmıyan, basit 1-devirler bulunabilir.

Şimdi göstermek istiyoruz ki,

Teorem 12.4.5.2. Cinsi g olan bir yüzeyde, yüzeyi bölmiyen basit 1-devirlerin maksimum sayısı 2g dir.

İspat. $z_1, z_2, \ldots, z_r$, $r > 2g$, ortak 1-simpleksi olmıyan basit 1-devirlerden müteşekkil bir C sistemi olsun. İddia ediyoruz ki bu sistem S yi böler. Yani

$$S - C,\ C = z_1 \cup z_2 \cup \ldots \cup z_r,$$

irtibatsızdır.

$b_1 = 2g$ olduğundan biliyoruz ki $z_1, z_2, \ldots, z_r$ homolojiye nazaran bağımlıdır. Yani hepsi sıfır olmıyan $u_1, u_2, \ldots, u_r$ tamları bulunabilir öyle ki,

$$u_1z_1 + u_2z_2 + \ldots + u_rz_r \approx 0.$$

Bu demektir ki bir c^2 2-zinciri vardır öyleki,

$$u_1z_1 + u_2z_2 + \ldots + u_rz_r = \partial c^2.$$

Şimdi, herhangi iki z nin ortak 1-simpleksi bulunmadığından $\partial c^2 \neq 0$. Dolayısıyla $|c^2| \neq \varnothing$. Bu takdirde

$$c^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i s_i^2$$

vazedebiliriz. Diğer taraftan $|c^2| \neq S$ farzedebiliriz. Aksi halde

$$\gamma^2 = c^2 - \lambda_1 s_1^2$$

bağıntısını teşkil ederiz.

$$\partial\gamma^2 = \partial c^2 - \lambda_1 \partial s_1^2 = \partial c^2 \neq 0.$$

Binaenaleyh,

$$u_1z_1 + u_2z_2 + \ldots + u_rz_r = \partial\gamma^2$$

ve $|\gamma^2|$ ne boştur, ne de bütün S dir. O halde,

$$O_1 = |\gamma^2| - |\partial\gamma^2| \text{ ve } O_2 = S - |\gamma^2|$$

boş değildirler, ve

$$O_1 \cup O_2 = S - |\partial\gamma^2|.$$

Burada, O_1, O_2 açık ve $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Dolayısıyla $S - |\partial\gamma^2|$ irtibatsızdır.

Fakat $|\partial\gamma^2| \subset C$ olduğundan, S – C itribatsızdır.

5. Arakesit Sayısı

12.5.1. **K*-Polihidronu.** Bir K polihidronu verilmiş olsun. Bu polihidronun üzerinde herhangibir x, y *devirlerinin* $x \times y$ *arakesit sayısını* tarif etmek arzusundayız. Bu sayı, bildiğimiz, iki poligonun birbirini kaç defa katettiği sayıdır. Ancak ortak kenarların bulunması halinde, bu sayının tesbiti güçlük arzetmektedir. Bu güçlüğü bertaraf edebilmek için K nın, *ikilisi* dediğimiz, bir *K*-polihidronunu* inşa ediyoruz. Şöyleki, K, cihetli bir polihidron, ve K′ onun merkezil bir altbölünmesi olsun. K nın cihetli 1-simplekslerini a_i ile gösterelim. K′ de bu simpleks

$$a_i = a_i' + a_i''$$

zinciri olur. Aynı şekilde, ortak kenarı a_i olan, bitişik 2-simplekslerin ağırlık merkezlerini rapteden, b_i kenarı K′ de

$$b_i = b_i' + b_i''$$

zinciri olur. Binaenaleyh, K nın, *kenar simpleksi* olmıyan herbir a_i simpleksine, onu *kesen* bir b_i tekabül eder. Fakat a_i, kenarlı bir polihidronun, *kenar üzerindeki bir simpleks ise*, bu takdirde b_i mevcut değildir.

TARİF 18. K′ üzerinde bir x zincirine, bir *K-zincir* diyoruz, şayet, x,

$$x = \Sigma\, x_i a_i \qquad (12.5.1.1)$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa. K′ üzerinde bir y^* zincirine bir K*-zincir ediyoruz, şayet y^*,

$$y^* = \Sigma\, y_i b_i \qquad (12.5.1.2)$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa.

Görülüyor ki bütün zincirler K′ üzerinde teşkil edilmektedirler. Ancak, bu zincirler, yukarda da izah edildiği gibi (12.5.1.1) veya (12.5.1.2) nev'indendirler.

K-üçgenlemesinde, herbir köşenin belirtmiş olduğu *merkezil yıldız* bir kapalı poligon meydana getirir. Binaenaleyh, K* a bir *polihidron* nazarı ile bakılabilir, şöyleki, K* ın *yüzleri*, merkezil yıldızlardır. K* a K nın *ikilisi* denir.

TARİF 19, $a_i \times b_i = 1$, ve $i \neq j$ ise $a_i \times b_j = 0$ vazedelim. Keyfi verilen bir K-zincirin ve yine keyfi verilen bir K*-zincirin $x \times y^*$ arakesit sayısı diye,

$$x \times y^* = \Sigma\, x_i a_i \times \Sigma\, y_j b_j = \Sigma\, x_i y_j a_i \times b_j = \Sigma\, x_i y_i$$

sayısına denir. Görülüyor ki $x \times y^*$, bir *bilineer formdur.*

x ve y^*, K da birer *devir* iseler, $x \times y^*$ sayısı özel bir anlam taşır, şöyleki, $x \times y^*$ yalnız *homoloji sınıflarına* tâbidir.

Zincir yerine, devir bahis konusu olursa, notasyonlara göre, x bir K-devir ve y^* bir K*-devirdir. Üstelik, bütün *homoloji*ler K′ ye nazarandır.

Gösterelim ki $x \times y^*$ sayısı yalnız homoloji sınıflarına tâbidir.

Lemma 12.5.1.1. x ve y^*, homologları olan K ve K*-devirleriyle değiştirildikleri takdirde, $x \times y^*$ sayısı değişmez.

Sadece göstermeliyiz ki, $x \approx 0$ ve $y^* \approx 0$, $x \times y^* = 0$ eşitliğini intac eder. $x = \partial s_j^2$ farzedebiliriz. Bu taktirde $\partial s_j^2 \times y^* = 0$ şartının basit bir tefsiri vardır. O da şudur: y^*, s_j^2 nin ağırlık merkezinde *başlıyan* b_i lerin *sayısı*, s_j^2 nin ağırlık merkezinde *biten* b_i lerin sayısına eşittir. Bu ise bir gerçektir, çünki y^* bir devirdir. Aynı muhakeme y^* için de yürütülebilir, şu farkla ki, s_j^2 nin yerine, bu sefer bir merkezil yıldız almaktadır.

12.5.2. **Kanonik homoloji tabanı.** Arakesit sayısı kavramını kullanarak, kanonik homoloji tabanını tarif edeceğiz.

Sonlu veya sonsuz, a_i, b_i *devir* çiftlerinin dizisine *kanonik* denir, şayet

$$a_i \times a_j = b_i \times b_j = 0,$$

ve

$$a_i \times b_i = 1 \text{ ve } i \neq j \text{ için } a_i \times b_j = 0.$$

Bir kanonik dizinin elemanları, homolojiye nazaran daima lineer bağımsızdır. Gerçekten,

$$\Sigma\, (x_i a_i + y_i b_i) \approx 0$$

bağıntısının, a_j ve b_j ile arakesitini teşkil edersek, bütün j ler için

$$y_j = x_j = 0$$

buluruz.

Bir kanonik dizi aynı zamanda bir taban ise, bu diziye *kanonik homoloji tabanı* denir.

Bahis konusu homolojiler, K polihidronları kapalı polihidronlar ise, mutlak homolojilerdir; K polihidronları kenarlı veya açık polihidronlarsa, kenar veya ideal sınıra nazaran homolojilerdir, yani *modülo kenar* veya *modülo ideal sınır*, homolojilerdir; bunlara kısaca *rölatif homoloji*ler denir.

TARİF 20. K üzerinde bir z devirine, *bölen devir* denir, şayet K nın herhangibir L sonlu altkompleksi için, z, L nin *dışında* bir devire homolog ise. Veya, başka bir deyimle, z bir *bölen devir*dir, şayet, *modülo ideal sınır*, sıfıra homolog ise.

Üstteki lemmaya göre, x sıfıra homolog bir devir ise bütün y devirleri için, $x \times y = 0$. Aynı bağıntı, x bir kenar devire homolog ise doğrudur. Zira bir kenar devirin herhangibir K-devirle arakesiti sıfırdır. Nihayet, K açık ise, *modülo ideal sınır*, sıfıra homolog bir x deviri için sonuç aynıdır, zira x yerine,

y^* ı kesmiyen bir devir ikame edilebilir. Şimdi gösterelim ki tersi de doğrudur. Yani,

Lemma 12.5.2.1. Şayet x bir devir ise, öyleki bütün y devirleri için $x \times y = 0$, bu takdirde,

(1) $x \approx 0$, şayet K kapalı ise.

(2) $x \approx 0$ modülo kenar, şayet K sonlu ve kenarlı bir polihidron ise.

(3) $x \approx 0$ modülo ideal sınır, şayet K açık ise.

İspat. Önce K yı sonlu farzedelim. $x = \Sigma \xi_i a_i$ bir devir ve bütün y devirleri için $x \times y = 0$ olsun. $K = \cup_j s_j^2$ ve β_j, s_j^2 nin ağırlık merkezi olsun. Herbir j için bir y_j^* K*-zinciri vardır, öyleki,

$$\partial y_j^* = \beta_j - \beta_1.$$

y_j^* zinciri birtek değildir, fakat $x \times y_j$ *arakesit sayısı* tamamiyle belirlidir. Gerçekten, aynı j ye tekabül eden iki y_j^* nin farkı bir devirdir ve hipotezden dolayı bu fark ile x in arakesiti 0 dır.

Şimdi $\eta_j = x \times y_j$ vazedelim ve aynı zamanda,

$$u = \Sigma\, \eta_j ds_j^2$$

sınırını gözönüne alalım. Burada farzediyoruz ki, a_i ve b_i arasındaki bağıntının tarifinde kullanılmış olan K nın cihetliliği s_j^2 leri de *uygun olarak* cihetlendirmiştir.

a_i, K üzerinde bir iç 1-simpleks olsun, ve farzedelim ki

$$\partial b_i = \beta_k - \beta_l.$$

Bu takdirde, u nun ifadesinde, a_i nin katsayısı $\eta_k - \eta_l$ dir.

Öte yandan, $y_l^* + b_i - y_k^*$ bir devirdir, ve tarif gözönünde tutulursa

$$x \times (y_l^* + b_i - y_k^*) = \eta_l + \xi_j - \eta_k = 0.$$

Veya,

$$\xi_i = \eta_k - \eta_l\ .$$

Binaenaleyh, a_i, gerek u da gerekse x de aynı katsayıyı haizdir. Bu demektir ki x–u K nın *kenarı* üzerindedir. u ise bir *sınır* olduğundan, lemma, K *sonlu* için ispatlanmıştır.

K sonsuz ise, $u = \Sigma\, \eta_j\, ds_j^2$ sonlu bir kısmi toplam olarak seçilir. Bu kısmi toplam, 2-simplekslerden müteşekkil herhangibir sonlu cümleyi ihtiva edecek şekilde seçilebildiğinden, yukardaki aynı muhakeme tatbik edilirse, derhal görülür ki x herhangibir altkompleksin dışında bulunan bir devire homologdur. Yani $x \approx 0$, modülo ideal sınır.

Şayet bir x deviri bir x' devirinin, $m > 1$ bir tam olmak üzere, bir mx' katına homolog ise, bu takdirde açık olarak $x \times y$ arakesit sayıları m ile bölünür. Karşıt olarak,

Lemma 12.5.2.2. Bir x deviri; modülo K nın kenarı veya ideal sınırı, başka bir devirin katına homolog değilse, bu taktirde bir y deviri vardır, öyleki, $x \times y = 1$.

İspat. Bütün $x \times y$ arakesit sayıları bir *modül* (aditif grup) teşkil ettiklerinden, herbiri bir m tam sayısının katıdır. $m = 0$ ise gördük ki

$x \approx 0$, modülo kenar, K sonlu ise; modülo ideal sınır, K açık ise. Şayet $m \geq 1$ ise, lemma 12.5.2.1 deki ispat tekrarlanabilir, şu şartla ki, bütün katsayılar modülo m kalanlarına indirgenmiştir. Dolayısıyla *sonlu halinde* x, katsayıları m ile bölünen, modülo kenar, bir devire homologdur. Yani $x \approx mx'$ modülo kenar, ve hipotezden dolayı $m = 1$. Binaenaleyh bir y deviri vardır öyleki $x \times y = 1$.

Sonsuz halinde, farzedelim ki x, bir $K_0 \subset K$ altkompleksine aittir. K_0 ın tamamlayıcısının sonlu sayıda bileşenleri vardır. Herbirinde, sabit bir β_{jn} ağırlık merkezini seçelim. Yeniden $y_j^* = \beta_j - \beta_1$ zincirlerini seçelim. β_j, K_0 da ise, $u_j = x \times y_j^*$ modülo m. y^*_{jn} zincirleri de keyfi olacaktır, ancak, β_{jn} yi ihtiva eden bileşende bulunan bir β_j için, y_j^*, y^*_{jn} ve K_0 ın dışında bir zincirin toplamı, ve sınırı $\beta_j - \beta_{jn}$ olduğu gözönünde tutulacaktır. Bundan böyle, herbir bileşende, u_j sabittir. Lemma 12.5.2.1. deki aynı muhakeme gösterir ki, x deviri, $mx'+z$ şeklinde bir devire homologdur. Burada x', K_0 da sabit bir devir, ve z, herhangibir sonlu altkompleksin dışında seçilebilir. Yani $x \approx mx'$ modülo ideal sınır, ve hipotezden dolayı $m = 1$ eşitliğini intac eder. Dolayısıyla bir y deviri vardır öyleki $x \times y = 1$.

Teorem 12.5.2.1. *Herbir cihetli kapalı polihidronun bir kanonik homoloji tabanı vardır*, ve *herbir cihetli kenarlı sonlu polihidronun, veya açık polihidronun, modülo kenar veya ideal sınır, bir kanonik homoloji tabanı vardır.*

İspat. Sadece *sonlu* hali tetkik edeceğiz. *İndüksyon* metodunu kullanarak, ve ilk adım $k = 0$ olmak üzere farzedelim ki,

$$a_1,\ b_1; \ldots;\ a_k\ b_k,$$

bir *kanonik* dizidir. H^1, hallere göre, mutlak veya rölatif (modülo kenar) homoloji grubunu göstersin. $G \subset H^1$, $a_1, b_1; \ldots; a_k, b_k$ nın homoloji sınıflarının tevlid ettikleri altgrup olsun. H^1/G nin sıfırdan farklı elemanları, sonsuz mertebedendirler. Gerçekten, farzedelim ki,

$$mz \approx x_1 a_1 + y_1 b_1 + \ldots + x_k a_k + y_k b_k.$$

Bu takdirde,

$$x_i = m(z \times b_i),\quad y_i = -\,m(z \times a_i),$$

ve H^1 elemanları *sonsuz mertebeden* olduklarından, $z \varepsilon G$. Üstelik H^1/G sonlu tevlid edildiğinden, bir $([z_n])$ tabanı vardır. Burada $[z_n]$ işareti G nin yan cümlelerini gösterir.

$H^1 = G$ ise, bir kanonik taban bulunmuş demektir. Aksi halde, $[z_1]$ yan cümlesine ait bir z_1 elemanını seçer, ve

$$a_{k+1} = z_1 - \sum_{i=1}^{k} (z_1 \times b_i)\, a_i + \sum_{i=1}^{k} (z_1 \times a_i)\, b_i$$

yi teşkil ederiz.

Görülür ki, a_{k+1} in $a_1, b_1; \ldots; a_k, b_k$ ile arakesiti sıfırdır. Diğer taraftan a_{k+1}, bir devirin katına homolog olamaz. Olduğunu farzedelim, yani

$$a_{k+1} \approx my.$$

Bu takdirde,

$$[z_1] = m[y] = m(a_1[z_1] + \ldots + a_r[z_r]),$$

ve dolayısıyla $ma_1 = 1$, $m = \pm 1$. Lemma 15.5.2.2 den dolayı, y_1 bulunabilir öyleki,

$$a_{k+1} \times y_1 = 1.$$

Üstelik,

$$b_{k+1} = y_1 - \sum_i (y_1 \times b_i) a_i + \sum_i (y_i \times a_i) b_i$$

vazedilirse,

$$a_1, b_1; \ldots; a_{k+1}, b_{k+1}$$

kanonik dizisi bulunur.

Sonlu sayıda adımlardan sonra

$$a_1, b_1; \ldots; a_g b_g$$

kanonik tabanı elde edilir. Burada g sayısı K nın cinsidir. Kapalı bir polihidron için 1-boyutlu Betti sayısı $2g$ dir. K nın çevre sayısı h ise, Betti sayısı $2g + h - 1$ dir, ve Euler karekteristiği

$$\chi = 2g + h - 2.$$

Not. § 12.3.2 de m-zincirin tarifinde, katsayılar tam sayılar idi. Bunların yerine, herhangibir Abelyen G grubunun elemanları da alınabilir. Bu taktirde $g_1, \ldots, g_{\alpha_m} \varepsilon G$ ise, G üzerinde bir m-zincir,

$$c^m = g_1 s_1^m + \ldots + g_{\alpha_m} s^m_{\alpha_m}$$

şeklinde tarif edilir. Homoloji gruplar aynı şekilde tarif edilir.

İlk başta işaret edildiği gibi, Homolojinin düali Kohomoloji bölüm XVII de ele alınacaktır. Bu teoride ko-sınır, bir m+1-zincirdir. Yani sınır operatörü bir m-zincirin boyutunu bir fazla yükseltmektedir.

B Ö L Ü M XIII

RIEMANN YÜZEYLERİ

1. Riemann Yüzeylerinin İnşası

13.1.1. **Riemann Yüzeylerinin tarifi.** Riemann yüzeyleri, *belli bir topolojik ve konfom strüktürü* haiz yüzeylerdir.

TARİF 1. Bir $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ *Riemann yüzeyi, irtibatlı bir* W Hausdorff uzayından, ve W de tarifli *lokal homeomorfizmlerin bir* Φ *ailesin*den ibarettir, şöyle ki, O_α, O_β birbirini kısmen örten W ye ait iki açık cümle, ve $h_\alpha, h_\beta \varepsilon \Phi$ ise, $h_\beta o h_\alpha^{-1}$ fonksiyonu tarif bölgesinde, *direkt konform*, yani *analitiktir*.

$p \varepsilon W$ yi ihtiva eden, ve $h \varepsilon \Phi$ nin tarif bölgesinde olan herhangibir $O \subset W$ açık cümlesine p nin *parametre civarı* denir.

Özel olarak $h(O)$ kompleks düzlemde bir daire ve $h(p)$, dairenin merkezi ise, bu taktirde, O ya *parametre dairesi* ve p ye de O nun *merkezi* denir.

Keza, bir $V \subset W$ açık cümlesine, *parametre dairesi* diyoruz, şayet $V \subset O$, O bir *parametre civarı* ve $h(V)$ bir daire ise.

Şimdi bir Riemann yüzeyinin tarifinin tahliline geçelim.

İrtibatlı bir W Hausdorff uzayını bir Riemann yüzeyi yapan Φ ailesi Ψ strüktür sınıfı ve Φ ile Ψ arasındaki bağıntı aşağıda üç grupta toplanılan aksyomları sağlarlar.

$\Phi 1$. Herbir $h \varepsilon \Phi$, bir $O \subset W$ açık cümlesini kompleks düzlemde bir açık cümleye tasvir eder.

$\Phi 2$. $h \varepsilon \Phi$ nin tarif bölgesi O ise, h nın herhangibir $O' \subset O$ açık cümlesine tahdidi yine Φ ye aittir.

$\Phi 3$. h nın bir $O \subset W$ açık cümlesini kompleks düzlemde bir açık cümleye tasvir ettiğini düşünelim. Farzedelim ki $O, O' \subset O$ açık cümleleriyle örtülüdür. h nın herbir O' ye tahdidi Φ ye ait ise h nın O' lerden O ya temdidi de Φ ye aittir.

$\Phi 4$. Bütün $h \varepsilon \Phi$ lerin tarif bölgeleri W nin bir açık örtmesini teşkil ederler.

Gelelim Ψ strüktür sınıfının sağladığı aksiyomlara. Tarif ve değer bölgeleri kompleks düzlemde olan lokal homeomorfizmlerin Ψ ailesine strüktür sınıfı denir şayet aşağıdaki aksyomlar sağlanıyorsa

$\Psi 1$, Özdeş tasvir Ψ ailesine aittir.

$\Psi 2$. $g \varepsilon \Psi$ ise $g^{-1} \varepsilon \Psi$

$\Psi 3$. $g_1, g_2 \varepsilon \Psi$ ise, tarif edilmiş olmak şartıyla, $g_2 o g_1$ mürekkep tasviri de Ψ ye aittir.

Hatırlatalım ki, $g_2 o g_1$ tarif edilmiştir diyoruz, şayet g_1 in değer bölgesi, g_2 nin tarif bölgesinin içinde ise.

Nihayet, Φ ailesi, Ψ sınıfına nazaran bir *strüktür* tarif eder, şayet Φ ile Ψ arasındaki bağıntı şu aksyomları sağlıyorsa.

S1. $h_1, h_2 \varepsilon \Phi$ aynı bölgeye tahditleri iseler, $h_2 o h_1^{-1} \varepsilon \Psi$.

S2. $h \varepsilon \Phi$, $g \varepsilon \Psi$ ise, tarif edilmiş olmak şartıyla $g o h \varepsilon \Phi$.

Lokal değişken. $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ bir Riemann yüzeyi ve O_α herhangibir *parametre civarı* olsun. Herbir $p \varepsilon O_\alpha$ noktası, $z_\alpha = h_\alpha(p)$ *parametre değeri* tarafından birtek olarak belirtilmiştir. Farklı z ler farklı p ler belirttiklerinden, z ye bir *lokal değişken* nazarıyla bakabiliriz. Hatta *lokal olarak* p yerine $z \varepsilon W$ noktasından bahis edebiliriz.

$h_\alpha \varepsilon \Phi$ homeomorfizmi O_α da bir koordinat sistemi tayin eder. O_α, O_β gibi kesişen iki civara ait bir nokta iki farklı z_α, z_β koordinat sistemleri tarafından örtülmekte olup bu sistemler birbirine *direkt konform* olarak bağlıdırlar.

Teorem 13.1.1.1. Herbir $p_0 \varepsilon W$, bir parametre dairesinin merkezidir.

İspat. $p_0 \varepsilon O$ ve $h(p_0) = z_0$ olsun. Ω: $|z - z_0| < r$ dairesini tarif edelim. Burada r yeter derecede küçük seçilmiştir, öyleki $\Omega \subset h(O)$. Bu taktide $V = h^{-1}(\Omega)$ bir *parametre dairesi* ve p_0 *merkezidir*.

Misal. z-kompleks düzlemi bir Riemann yüzeyidir. Burada Φ özdeş tasvirlerin ailesi, O lar da birim dairelerdir. Ψ *strüktür sınıfı* ise, özdeş tasviri ihtiva eden z-düzleminin *ötelemelerinden* ibarettir.

13.1.2. **Analitik tasvirler.** Bu kısımda bir Riemann yüzeyinden diğer bir Riemann yüzeyine analitik tasvirileri tarif etmek istiyoruz. Önce, Riemann yüzeylerinden birinin kompleks düzlem olması halini gözönünde tutalım.

TARİF 2. Kompleks değerli bir f fonksiyonuna, $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ yüzeyi üzerinde *analitiktir* denir, yalnız ve yalnız, tarif bölgesi O olan herbir h için, $f o h^{-1}$, klasik mânada $h(O)$ üzerinde analitik ise.

Herhangi iki Riemann yüzeyi için bu tarif aşağıdaki şekli alır.

TARİF 3. $\mathfrak{R}_1 = (W_1, \Phi_1)$ Riemann yüzeyinden diğer bir $\mathfrak{R}_2 = (W_2, \Phi_2)$ Riemann yüzeyine, sürekli bir f tasvirine *analitik*tir denir şayet $h_1 \varepsilon \Phi_1$, $h_2 \varepsilon \Phi_2$ için herbir $h_2 o f o h_1^{-1}$ fonksiyonu, tarif bölgesinde, analitik ise.

h_1, h_2 homeomorfizmleri, sırasıyla, O_1, O_2 de tarif edilmiş iseler, $h_2 o f o h_1^{-1}$ mürekkep fonksiyonu $h_1(O_1 \cap f^{-1}(O_2))$ de tariflidir. f sürekli olduğundan bu tarif bölgesi açıktır.

Şayet h_2 özdeş tasvir ise, bu tarif ilk tarifi verir.

f, birebir ise, bir *konform tasvir* bahis konusudur. Yani f, $\mathfrak{R}_1$ den $\mathfrak{R}_2$ ye bir konform tasvirdir.

f nin sürekli ve birebir olması halinde, herbir $h_2 o f o h_1^{-1}$ tasvirinin değer bölgesi açık, ve $h_1 o f^{-1} o h_2^{-1}$ ters fonksiyonu analitiktir. Dolayısıyla, $f(O_1 \cap f^{-1}(O_2)) = f(O_1) \cap O_2$ açıktır, ve O_2 ler bir açık örtme teşkil ettiklerinden, $f(O_1)$ açıktır. f birebir olup açık cümleleri açık cümlelere dönüştürdüğünden f^{-1} süreklidir.

Neticede f bir homeomorfizm ve f^{-1} analitiktir.

TARİF 4. İki Riemann yüzeyi birbirine konform tasvir edilebilirse, bu Riemann yüzeylerine *konform eşdeğer* denir.

Riemann yüzeyleri Teorisinin önemli problemlerinden biri, *konfom eşdeğerlik şartlarını* tesbit etmektir.

13.1.3. **Kenarlı Riemann Yüzeyleri.** Bu yüzeyler hakkında, kenarlı yüzeyler bahsinde söylediklerimize fazla birşey ilâve edecek değiliz.

Kenarlı Riemann yüzeylerinin tarifinde, irtibatlı Hausdorff uzayı $\overline{W}$ ile gösterilir. h lokal homeomorfizmlerin Φ ailesinin tarifine gelince, $h(O)$, kapalı üst yarı düzlemde rölatif açık bir cümledir. Ψ strüktür sınıfı, kapalı üst yarı düzlemde tarifli, lokal homeomorfizmlerden müteşekkil bir ailedir. Bu değişiklikler göz önünde tutularak, Ψ sınıfına nazaran Φ strüktürü eskisi gibi tarif edilir.

B kenarı boş olmamak şartıyla, W nin haiz olduğu strüktür konform ise, $\overline{W}$ ye *kenarlı Riemann yüzeyi* denir. W ise bir Riemann yüzeyidir.

Farzedelim ki $g \varepsilon \Psi$ nin V tarif bölgesi açık üst yarı düzlemde olup değer bölgesi kapalı üst yarı düzlemdedir. 11.3.2 de gösterildiği gibi V nin hiçbir noktası reel eksen üzerinde bir noktaya dönüşmez. Kenar noktalarının bu iç karakterizasyonunu Kenarlı Riemann yüzeylerinde müşahade etmek çok daha kolaydır. Netekim, g sabit olmadığına göre, harmonik fonksiyonların *maksimum prensibinden* dolayı (bk. konform tasvir[1], $\operatorname{Im} g(z) \geq 0$ hipotezi V de sadece $\operatorname{Im} g(z) > 0$ eşitsizliğini intaç ettirir.

(1) Cengiz Ulucay, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları Um. 70 — Matematik 21, Şirketi Mürettibiye Basımevi, İstanbul, sahife 64–65, 1955.

TARİF 5. Bir $\Gamma \subset W$ altcümlesine, (W, Φ) de 1-*boyutlu altçokluk* denir, şayet herbir $p \varepsilon \Gamma$ noktasının bir V açık civarı, $V \cap \Gamma$ reel çapa dönüşecek tarzda, bir $h \varepsilon \Phi$ homeomorfizmi tarafından, $|z| < 1$ dairesine tasvir edilebilirse.

(W, Φ) bir Riemann yüzeyi, başka bir deyimle Φ bir konform strüktürü haiz ise, Γ ya *analitik bir altçokluk*, ve *bileşenlerine* de *analitik eğriler* denir.

Hatırlatalım ki, bir $\Omega \subset (W, \Phi)$ altbölgesi, (W, Φ) ye *düzgün olarak dahildir* diyoruz, şayet Ω nın ve dışının ortak sınırı 1- boyutlu bir altçokluk ise.

(W, Φ), bir Riemann yüzeyi ise, Ω nın analitik eğrilerle sınırlı olduğu açıktır.

Nihayet bölüm XI, tarif 35 te olduğu gibi, *düzgün bölge* diye, kapanışı kompakt, ve komplemanının bileşenlerinin hiçbirisi kompakt olmıyan, herhangibir *düzgün olarak dahil bölgeye* diyoruz. Hatta kısaca, Ω, *analitik olarak dahildir* diyoruz.

$(\overline{W}_1, \Phi_1)$ ve $(\overline{W}_2, \Phi_2)$ kenarlı Riemann yüzeyleri olsun. Farzedelim ki B_1, B_2 kenarları homeomorfturlar. Mütekabil sınır noktalarını özdeşlemek suretiyle, verilen iki Riemann yüzeyini *birleştirerek* tek bir Riemann yüzeyi haline hetirmek istiyoruz. Bunun için, $\overline{W}_1$ den $\overline{W}_2$ ye bir φ homeomorfizminde B_1 in B_2 ye dönüşmesinde, özdeşlenen noktalar mütekabil noktalar olmalıdırlar. Üstelik *birleşmenin* mümkün olabilmesi için φ, *(i)* analitik, ve *(ii) yön tersinir* olmalıdır.

Bu şartları izah edebilmek için, $q_1 \varepsilon B_1$, $q_2 = \varphi(q_1) \varepsilon B_2$, $\varphi: B_1 \to B_2$ homeomorfizminde mütekabil sınır noktaları olsun. $h_1 \varepsilon \Phi_1$, $h_2 \varepsilon \Phi_2$ homeomorfizmlerini seçelim, öyleki, V_1, V_2 tarif bölgeleri sırasıyla, q_1, q_2 noktalarını ihtiva etsinler.

$h_1(V_1 \cap B_1)$ reel eksen parçasına tahdit edilmiş olan $w = h_2 o \varphi o h_1^{-1}$ fonksiyonu reeldir.

(i) şartı, ω nın $x_1 = h_1(q_1)$ noktasında reel mânada, analitik olmasını gerektirir. Bu şart gerçeklenir gerçeklenmez, ω, merkezi x_1 de olan bir Ω_1 dairesine analitik temdit edilebilir. Aynı muhakeme ω^{-1} için de yürütülebilir. Dolayısıyla $\omega'(x_1) \neq 0$.

(ii) şartının sağlanması için $\omega'(x_1) < 0$ olmalıdır.

Nihayet, Ω_1 yeter derecede küçük alınırsa, ω, Ω_1 i, reel eksene nazaran simetrik bir Ω_2 bölgesine dönüştürür, öyleki, bu tasvirde Ω_2 nin alt kısmı, Ω_1 in üst kısmına tekabül eder.

Bundan sonra, $(\overline{W}_1, \Phi_1)$ ve $(\overline{W}_2, \Phi_2)$ kenarlı Riemann yüzeylerinin $B_2 = \varphi(B_1)$ boyunca birleştirilmeleri aşağıdaki şekilde tahakkuk ettirilebilir.

Önce, kenarlı yüzeylerde yaptığımız gibi, burada da $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$ topolojik toplamını teşkil ederek, ve p_1, $p_2 = \varphi(p_1)$ mütekabil noktaları özdeşleyerek W uzayını inşa edelim. W nin irtibatlı bir Hausdorff uzayı olduğu kolayca görülür.

W nin bir Riemann yüzeyine tahvili, Φ strüktürünün, özdeşlenen q_1, q_2 nokta çiftlerinde tarifi ile mümkün olabilecektir. Zira bu strüktür, W_1 kısmında Φ_1 e, W_2 kısmında ise Φ_2 ye eşittir.

q_1, q_2 özdeşleştirilen herhangibir nokta çifti, ve ω, Ω_1, Ω_2 yukardaki gibi olsun. Ω_i, $i = 1, 2$, nin üst ve alt kısımlarını sırasıyla, Ω_i^+, Ω_i^- ile gösterelim ve $\Omega_i^+ \subset h_i(V_i)$ farzedelim $V = h_1^{-1}(\Omega_1^+) \cup h_2^{-1}(\Omega_2^+)$ vazedelim. Bu birleşimin ilk cümlesi için $h = h_1$, ikincisi için h, $h(p) = \omega^{-1}(h_2(p))$ seçilirse görülür ki, bu tarifler birleştirilen sınırda uymaktadır, zira orada $\omega^{-1} o h_2 = h_1 o \varphi^{-1}$.

(W, Φ) nin, bir Riemann yüzeyi için koşulan bütün strüktür şartlarını sağladığını görmek bir mesele değildir.

Kısaca, $(\overline{W}_1, \Phi_1)$ ve $(\overline{W}_2, \Phi_2)$, (W, Φ) ye *analitik olarak dahil*dir, ve Φ strüktürü, Φ_1 ve Φ_2 strüktürlerinin intaç ettikleri strüktürdür.

Yukarda izah edilen *birleştirme* usulü, verilen kenarlı bir Riemann yüzeyinin *çiftinin* teşkili için kullanılabilir.

Gerçekten, (W, Φ) herhangibir Riemann yüzeyi ise, herbir $h \varepsilon \Phi$ yerine $h^*: p \to -\bar{h}(p)$, $p \varepsilon W$, vazetmek suretiyle (W, Φ) nin konjügesi olan (W, Φ^*) yüzeyi teşkil edilebilir. Yeni strüktür konformdur, zira

$$h_2^* o h_1^{*-1} : z \to -\overline{h_2 o h_1^{-1}}(-z)$$

direkt konformdur.

$(\overline{W}, \Phi)$ kenarlı bir Riemann yüzeyi ise, $(\overline{W}, \Phi^*)$ konjügesi de kenarlı bir Riemann yüzeyidir. φ yi özdeş tasvir almak suretiyle $(\overline{W}, \Phi)$ ile $(\overline{W}, \Phi^*)$ kenar boyunca birleştirilebilir. Bir kenar noktanın civarında $\omega = h^* o\, h^{-1}$ ve $\omega(z) = -\bar{z}$, z reel için $\omega(z) = -z$ dir. Binaenaleyh, tekabül hem *analitik* hem de *yön tersinir* olduğundan *birleştirme* mümkündür.

13.1.4. **Riemann Yüzeylerine, Örtme Yüzeyleri olarak bakış.** Riemann yüzeylerine örtme yüzeyleri olarak bakıldığı taktirde, örtü transformasyonlarıyla ilgili çok önemli sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 13.1.4.1. $\mathcal{R}_1 = (W_1, \Phi_1)$, $\mathcal{R}_2 = (W_2, \Phi_2)$ Riemann yüzeyleri verilmiş olsun. Farzedelim ki $f: \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ sabit olmıyan analitik bir tasvirdir. Bu takdirde (W_1, f), W_2 nin bir örtme yüzeyidir.

İspat. p_1, $p_2 = f(p_1)$ mütekabil noktalar olsun. p_1, p_2 nin civarında tarifli $h_1 \varepsilon \Phi_1$, $h_2 \varepsilon \Phi_2$ homeomorfizmlerini seçelim. $\Psi = h_2 o f o h_1^{-1}$ fonksyonu $z_1 = h_1(p_1)$ noktalarında analitiktir. $\Psi'(z_1) \neq 0$ ise, Ψ, z_1 in bir civarında bir homeo-

morfizmdir ve dolayısıyla f lokal topolojiktir. Bölüm XI tarif 36 dan dolayı (W_1, f), W_2 nin pürüzsüz bir örtme yüzeyidir. $\Psi'(z_1) = 0$ ise, z_1, ayrık bir sıfır yeridir. O halde, p_1 in bir V_1 civarı bulunabilir, öyle ki, $p \varepsilon V_1 - p_1$ için $f(p) \neq p_2$ ve $(V_1 - p_1, f)$, $W_2 - p_2$ nin pürüzsüz örtme yüzeyidir. Binaenaleyh, Bölüm XI, tarif 42 de gözönünde tutulursa, görülür ki, (W_1, f), W_2 nin bir örtme yüzeyidir.

Şimdi karşıt teoremi inceliyelim.

Teorem 13.1.4.2. Farzedelim ki, (W_1, f), W_2 nin bir örtme yüzeyidir, ve W_2, bir Φ_2 konform strüktürünü haizdir. Bu taktirde, W_1 in tek bir Φ_1 konform strüktürü vardır, öyleki, f, (W_1, Φ_1) den (W_2, Φ_2) ye bir analitik tasvirdir.

İspat. Diyoruz ki Φ_1 strüktürü, Φ_2 strüktürü tarafından intaç edilmiştir. Φ_1 mevcut ise, $h_1 \varepsilon \Phi_1$ lokal homeomorfizmleri o şekildedir ki, $\psi = h_2 o f o h_1^{-1}$ bütün $h_2 \varepsilon \Phi_2$ ler için analitiktir.

Bu en son hassayı haiz bütün h_1 lerin ailesini Φ_1 ile gösterelim.

Φ_1 in, Φ aksiyomlarını, ve direkt konform Ψ strüktür sınıfına nazaran S1, S2 aksiyonmlarını sağladığını gösterebilirsek, Φ_2 tarafından intaç edilen Φ_1 konform strüktürünün bir ve birtek olduğunu ispat etmiş oluruz.

$\Phi 1 - \Phi 3$ aksiyomlarının sağlandığı aşikardır. $\Phi 4$ e gelince, q_1, $(W_1 f)$ üzerinde keyfi fakat sabit bir nokta olsun. $q_2 = f(q_1)$ vazedelim ve $h_2 \varepsilon \Phi_2$, tarif bölgesi q_2 yi ihtiva eden bir homeomorfizm olsun. $h_2(q_2) = 0$ farzedebiliriz. q_1 dallanma noktasının *çok katlılığı* n ise, bu noktanın bir civarında

$$h_2(f(p_1)) = h_1(p_1)^n \qquad (13.1.4.1)$$

yazılabilir. Gerçekten, $z_1 \to z_1^n$, $\Omega : |z_1| < 1$ dairesini, başlangıç noktasında katlılığı n olan, kendi kendisinin bir örtme yüzeyi olarak tarif eder. h_2 yi o şekilde tahdit edebiliriz ki, Δ_2 tarif bölgesi, merkezi q_2 de olan bir parametre dairesidir. Dolayısıyla h_2, $\tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 - q_2$ bölgesini $\Omega_0 : 0 < |z| < 1$ bölgesine tasvir eder. Bu taktirde,

$$(f^{-1}(\tilde{\Delta}_2),\ h_2 o f)$$

Ω_0 ın pürüzsüz bir örtme yüzeyidir, ve $z_1 \to z_1^n$ tasvirine tekabül eden aynı K grubunu belirtir. Dolayısıyla, Bölüm XI tarif 40 ve teorem 11.4.5.1 den dolayı, $f^{-1}(\tilde{\Delta}_2)$ den Ω_0 a bir h_1 topolojik tasviri vardır öyleki $p_1 \neq q_1$ için (13.1.4.1) sağlanmıştır. Fakat süreklilikten ötürü, (13.1.4.1) $p_1 = q_1$ için de muteberdir.

Diğer taraftan (13.1.4.1) denklemi

$$h_2 o f o h_1^{-1} = \psi$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\psi(z_1) = z_1^n$.

Şimdi, $k_2 \varepsilon \Phi_2$ başka herhangibir tasvir olsun. $f o h_1^{-1} = h_2^{-1} o \psi$ gözönünde tutulursa

$$k_2 o f o h_1^{-1} = (k_2 o h_2^{-1}) o \psi$$

yazılabilir.

Halbuki, tarif bölgesinde, $k_2 o h_2^{-1}$ direkt konformdur, ve $\Psi(z_1) = z_1^n$ gözönünde tutulursa, $k_1 o f o h_1^{-1}$ tarifli bulunduğu heryerde analitiktir.

Binaenaleyh, $h_1 \varepsilon \Phi_1$, ve tarif bölgeleri W_1 in bir örtmesini teşkil ederler.

Gelelim S-aksiyonlarına. Farzedelim ki h_1, $k_1 \varepsilon \Phi_1$ ve V_1 ortak tarif bölgeleridir. Üstelik farzedelim ki, $h_2 \varepsilon \Phi_2$ nin tarif bölgesi $f(V_1)$ i ihtiva ediyor ve

$$h_2 o f o h_1^{-1} = \psi, \qquad h_2 o f o k_1^{-1} = \varphi$$

vazedelim.

f, V_1 de topolojik ise

$$h_1 o k_1^{-1} = (\varphi^{-1} o h_2 o f) o (f^{-1} o h_2^{-1} o \varphi) = \psi^{-1} o \varphi,$$

ve $\psi^{-1} o \varphi$ analitik olduğundan $h_1 o k_1^{-1}$ direkt konformdur ve dolayısıyla S1 sağlanmıştır.

f, V_1 de topolojik değilse, dallanma noktası olmıyan, $k_1(V_1)$ in herhangibir noktasının bir civarı için sonuç aynıdır. Yani, $h_1 o k_1^{-1}$, ayrık singüler noktalar hariç, $k_1(V_1)$ de analitiktir. Fakat $h_1 o k_1^{-1}$ süreki olduğundan bu singüler noktalar *kaldırılabilir singüler noktalardır*. Dolayısıyla S1, her halukârda sağlanmıştır.

En son, g kompleks analitik ve $h_1 \varepsilon \Phi_1$ ise $g o h_1 \varepsilon \Phi_1$. Gerçekten,

$$h_2 o f o (g o h_1)^{-1} = \psi o g^{-1}.$$

Sağdaki ifade iki analitik fonksiyonun terkibi olduğundan, soldaki ifade analitiktir, ve dolayısıyla $g o h_1 \varepsilon \Phi_1$, yani S2 sağlanmıştır.

Göstermiş olduk ki, Φ bir konform strüktür, ve onun bir neticesi olarak f, $\mathcal{R}_1$ den $\mathcal{R}_2$ ye bir analitik tasvirdir.

13.1.5. **Örtü transformasyonlarının süreksiz grubu.** Bu kısımda, $\mathcal{R}_1 = (W_1, \Phi_1)$ Riemann yüzeyi verildiğine göre, Φ_1 konform strüktürünü intaç ettiren bir Φ_2 konform strüktürünün mevcut olup olmadığını inceleyeceğiz.

Farzedelim ki (W_1, f), bir W_2 uzayının bir örtme yüzeyi, ve $\mathcal{G}$, (W_1, f) nin örtü transformasyonlarının grubudur. Yani $\varphi \varepsilon \mathcal{G}$, W_1 i kendi üzerine dönüştüren topolojik bir tasvir ise $f o \varphi = f$.

$p \varepsilon W_1$ dallanma noktası olmıyan bir nokta olsun. p nin bir V civarı vardır öyleki f, V de topolojiktir. Aynı şekilde, f, $\varphi(p)$ nin $\varphi(V)$ civarında topolojiktir.

O halde, f_1, f_2, f nin sırasıyla, V ve $\varphi(V)$ ye tahditleri ise V de

$$\varphi = f_2^{-1} o f_1$$

yazılabilir.

Bir an için Φ_2 strüktürünün konform olduğu kabul edilirse, görülür ki φ herbir noktada iki analitik fonksiyonun terkibidir. Yani φ analitiktir. *Binaenaleyh, Φ_2 nin mevcut olması için gerek şart φ nin analitik olmasıdır.*

TARİF 6. $q \varepsilon W_1$ noktası, $\mathcal{G}$ grubunun bir *limit noktasıdır* diyoruz, şayet bir $p \varepsilon W_1$ noktası ve farklı $\varphi_n \varepsilon \mathcal{G}$ lerden müteşekkil bir dizi bulunabilirse öyleki, $\varphi_n p \to q$.

$\mathcal{G}$ nin limit noktalarının tamamı L ile gösterilir ve L ye $\mathcal{G}$ nin *limit cümlesi* denir.

Şayet $q \varepsilon W_1$ bir limit noktası değilse, $q \varepsilon W_1$, $\mathcal{G}$ nin bir *âdi noktasıdır*, ve âdi noktaların tamamı $\mathcal{A}$ ile gösterilir.

Binaenaleyh, $W = L \cup \mathcal{A}$, $L \cap \mathcal{A} = \varnothing$.

Yani, L ve $\mathcal{A}$, W_1 de birbirinin *komplemanıdırlar*.

TARİF 7. $\mathcal{G}$ grubu *süreksiz*dir denir, yalnız ve yalnız $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

Bu tarif şöyle de tefsir edilebilir. A, B $\subset W_1$ gibi iki kompakt cümle verildiğine göre, en fazla sonlu sayıda $\varphi \varepsilon \mathcal{G}$ ler için $\varphi(A) \cap B \neq \varnothing$.

TARİF 8, p, $q \varepsilon W_1$ *eşdeğer*, veya *$\mathcal{G}$-eşdeğer*dir denir, yalnız ve yalnız bir $\varphi \varepsilon \mathcal{G}$ varsa öyleki, $\varphi p = q$.

Bu bir *$\mathcal{R}$-eşdeğerlik bağıntısıdır*, ve bu bağıntı W_1 *i, mahrek* adı verilen, *ayrık eşdeğerlik sınıflarına* böler.

$p \varepsilon W_1$ in *mahreki*, p yi ve p ye $\mathcal{G}$-eşdeğer bütün noktaları ihtiva eden cümledir.

p nin mahreki $\mathcal{G}_p$ ile gösterilir. Yani

$$\mathcal{G}_p = \{\varphi\, p \mid \varphi \varepsilon \mathcal{G}\}.$$

$\mathcal{G}$ süreksiz ise, hiçbir mahrek âdi bir noktaya yığılamaz.

Şimdi Φ_2 nin mevcut olması için gerek şartın yeterliğini ifade eden teoremi ispat edelim.

Teorem 13.1.5.1. $\mathcal{R}_1 = (W_1, \Phi_1)$ Riemann yüzeyinin kendi üzerine φ konform tasvirlerinin $\mathcal{G}$ grubu *süreksizse*, bir $\mathcal{R}_2 = (W_2, \Phi_2)$ Riemann yüzeyi ve $\mathcal{R}_1$ den $\mathcal{R}_2$ ye bir f analitik fonksiyonu bulunabilir öyleki (W_1, f) nin örtü transformasyonları $\mathcal{G}$ nin bizzat kendisidir. Üstelik $\mathcal{R}_2$, *konform tasvir hariç*, birtek olarak belirlidir.

İspat. § 11.1.3 te gördük ki, herbir $p_1 \varepsilon W_1$ noktasının belirttiği $\mathcal{G}_{p_1}$ mahrekinin noktalarını özdeşlemek suretiyle $W_1/\mathcal{R} = \{\mathcal{G}_{p_1}\}$ uzayını tarif etmek mümkündür, Bu topolojik uzaya W_2 diyelim.

Herbir $p_1 \varepsilon W_1$ noktasını, bu noktanın belirttiği $\mathcal{G}_{p_1}$ noktasına dönüştüren tasvire f diyelim. Hatırlatalım ki (§ 11.1.3), W_2 ye ait bir cümle açıktır yalnız ve yalnız ters resmi açık ise.

Biliyoruz ki, bu takdirde f süreklidir. Şimdi aşağıdakileri tek tek ispat edelim.

W_2 bir Hausdorff uzayıdır. p, $q \varepsilon W_1$ ve $f(p) \neq f(q)$ olsun. q nun bir kompakt civarını düşünelim. $\mathcal{G}$ süreksiz olduğundan, burada yalnız sonlu sayıda φp ler bulunabilir, ve dolayısıyla V_q kompakt civarı vardır öyle ki, V_q de hiçbir $\varphi\, p$ yoktur. Aynı şekilde V_p kompakt civarı bulunabilir, öyle ki, V_p de hiçbir φq yoktur.

Binaenaleyh, $\varphi(V_p)$ resimleriyle $\varphi(V_q)$ resimleri kesişmezler. Gerçekten, meselâ, $\varphi_1(V_p)$, $\varphi_2(V_q)$ ile kesişirse, $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(V_q)$, V_p ile kesişir. Bu da gösterir ki $f(V_p) \cap f(V_q) = \varnothing$. Diğer taraftan $f(V_p)$, $f(V_p)$ sırasıyla, $f(p)$, $f(q)$ nun birer civarıdır. Gerçekten, bir O açık cümlesi vardır öyle ki, $p \varepsilon O \subset V_p$. O halde, $f(p) \varepsilon f(O) \subset f(V_p)$. $f(O)$ açık olduğundan $f(V_p)$ bir civardır. Dolayısıyla, W_2 bir Hausdorff uzayıdır.

W_2 bir yüzeydir. Bir kere W_1 irtibatlı ve f sürekli olduğundan W_2 irtibatlıdır. § 4.8.5 te görüldüğü üzere, özdeş tasvir olmıyan bir konform tasvirde, sabit noktalar ayrık noktalardır, ve dolayısıyla $\mathcal{G}$ süreksiz olduğundan, önceden verilmiş bir noktayı sabit nokta kabul eden $\varphi \varepsilon \mathcal{G}$ lerin sayısı sonludur.

φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sabit noktası q_1 olan tasvirler olsun. Bunlar $\mathcal{G}$ nin bir alt grubunu teşkil ederler.

Bir V_{q_1} kompakt civarı verildiği taktirde, yalnız sonlu sayıda φ ler için $\varphi(V_{q_1})$, V_{q_1}, i keser. Binaenaleyh, V_{q_1} i o şekilde seçebiliriz ki, $\varphi(q_1) = q_1$ eşitliğini sağlıyan φ_i lerin dışında hiçbir $\varphi(V_{q_1})$, V_{q_1} i kesmez. Dolayısıyla, q_1 in bir U_{q_1} açık civarı bulunabilir öyleki U_{q_1}, q_1 den başka hiçbir sabit nokta ihtiva etmez ve $\varphi_i(U_{q_1})$ in dışında, hiçbir $\varphi\,(U_{q_1})$, U_{q_1} i kesmez.

Şimdi,

$$V_1 = \varphi_1(U_{q_1}) \cap \ldots \cap \varphi_n(U_{q_1})$$

cümlesi, φ_i tarafından kendi üzerine tasvir edilir, ve diğer bütün $\varphi \varepsilon \mathcal{G}$ ler için

$$V_1 \cap \varphi(V_1) = \varnothing.$$

Binaenaleyh, V_1 *de herbir $p_1 \neq q_1$ noktasına eşdeğer, yine V_1 de tam n nokta vardır.*

U_{q_1} keyfi *küçük* seçilebildiğinden, V_1 de tarifli bir $h_1 \varepsilon \Phi$ tasviri vardır, ve $h_1(q_1) = 0$ farzedilebilir. Diğer taraftan

$$\prod_{i=1}^{n} h_1(\varphi_i(p_1)), \quad p_1 \varepsilon V_1$$

çarpımı, V_1 in eşdeğer noktalarında aynı değeri taşır. Bu sebeple, bu çarpım, $V_2 = f(V_1)$ de bir fonksiyon tarif eder. Yani V_2 de tarifli bir h_2 fonksiyonu vardır öyleki,

$$h_2(f(p_1)) = \prod_{i=1}^{n} h_1(\varphi_i(p_1)), \ \forall\ p_1 \in V_1.$$

Üstteki ifade göz önünde tutulursa

$$g = h_2 o f o h_1^{-1} = \prod_{i=1}^{n} h_1 o \varphi_i o h_1^{-1}$$

yazılır. Bu çarpımdaki herbir çarpanın analitik ve birtek sıfırı olduğu görülür. Dolayısıyla, g, $h_1(V_1)$ de analitik, ve $z = 0$ başlangıç noktası, g nin n-katlı bir sıfır yeridir.

$z = 0$ noktası g nin n-katlı bir sıfır yeri olduğundan, merkezi $z = 0$ noktasında olan bir $\Omega_1 \subset h_1(V_1)$ dairesi bulunabilir öyleki Ω_1 yeter derecede küçük seçilirse g, Ω_1 de n den fazla değer almaz.

Şimdi U_{q_1} i o şekilde tahdit edelim ki, $U_{q_1} \subset h_1^{-1}(\Omega_1)$. Bu taktirde $V_1 \subset U_{q_1}$ olduğundan $V_1 \subset h_1^{-1}(\Omega_1)$.

Bu suretle, h_2 ve g daha küçük tarif bölgelerine tahdit edilerek, h_2 nin *birebir*liği sağlanmış olur.

Gerçekten, V_2 ye ait herbir $p_2 \neq f(q_1)$ noktasına V_1 de $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$, gibi n farklı nokta tekabül eder, öyleki,

$$f(p_{1i}) = p_2. \qquad (13.1.5.1)$$

Diğer taraftan,

$$g o h_1 = h_2 o f \qquad (13.1.5.2)$$

özdeşliği gözönünde tutulursa,

$$g(z) = h_2(p_2) \qquad (13.1.5.3)$$

denkleminin kökleri, hepsi Ω_1 de olmak üzere, $h_1(p_{1i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dir.

Gerçekten, (13.1.5.3) de p_2 yerine (13.1.5.1) vazedilir ve (13.1.5.2) gözönünde tutulursa, (13.1.5.3) aşağıdaki şekli alır.

$$g(z) = g o h_1(p_{1i}),$$

ve $z = h_1(p_{1i})$ bu denklemin kökleridir.

Başka da kök olmadığına göre, $h_2(p_2)$ değeri, p_{1i} ve dolayısıyla p_2 tarafından tamamen belirtilmiştir. 0 değeri ise, yalnız $p_2 = f(q_1)$ e tekâbül eder. Neticede, h_2 nin birebir olduğu ispatlanmıştır.

h_2 nin bir homeomorfizm olduğunu gösterebilmek için, açık cümlelerin direkt ve ters resimlerinin açık cümleler olduklarını göstermemiz kâfidir.

O_2, $V_2 = f(V_1)$ in herhangibir açık cümlesi olsun. f nin değer bölgesi V_2 yi ihtiva ettiğinden f^{-1}, O_2 de tariflidir. Dolayısıyla,

$$f(f^{-1}(O_2)) = O_2$$

ve

$$h_2(O_2) = h_2(f(f^{-1}(O_2))) \qquad (13.1.5.4)$$

yazılabilir. (13.1.5.2) özdeşliği de ayrıca gözönünde tutulursa (13.1.5.4),

$$h_2(O_2) = g(h_1(f^{-1}(O_2)))$$

şeklini alır. Burada ise, f^{-1}, h_1, g açık cümleleri, açık cümlelere dönüştürür. O halde $h_2(O_2)$ ve özel olarak $h_2(V_2)$ açıktırlar.

Aynı şekilde, O'_2, $h_2(V_2)$ nin herhangibir açık cümlesi olsun. Bu takdirde,

$$h_2^{-1}(O'_2) = h_2^{-1}(g(g^{-1}(O'_2))) = f(h_1^{-1}(g^{-1}(O'_2)))$$

açıktır.

Binaenaleyh, h_2, V_2 yi topolojik olarak, düzlemde bir açık cümleye dönüştürür. Bu da W_2 nin bir yüzey olduğunu gösterir.

(W_1, f), **W_2 nin bir örtme yüzeyidir.** V_1 yerine, q_1 i ihtiva eden onun V_1^* irtibatlı bileşenini gözönüne alalım, $V_2^* = f(V_1^*)$ vazedelim, ve yukarda da izah edildiği veçhile $V_1^* \subset h_1^{-1}(\Omega_1)$ farzedelim.

$(\Omega_1, h_2 o f o h_1^{-1})$ düzlemin bir örtme yüzeyi olduğundan,

$$(V_1^*, g o h_1) = (V_1^*, h_2 o f)$$

$h_2(V_2^*)$ ın ve dolayısıyla da

$$(V_1^*, f)$$

V_2^* nin bir örtme yüzeyidir.

Binaenaleyh, (W_1, f), W_2 nin bir örtme yüzeyidir. Dallanma noktaları, yani $\varphi \varepsilon \mathcal{T}$ transformasyonlarının sabit noktaları, $n > 1$ için vuku bulur.

(W_1, f) **nin örtü transformasyonlarının grubu $\mathcal{T}$ nin kendisidir.** Φ_2, W_2 de bir konform strüktür tarif eder. Üstelik (W_1, f), W_2 nin bir örtme yüzeyi olduğundan, teorem 13.1.4.2 den ötürü f, $\mathcal{R}_1$ den $\mathcal{R}_2$ ye analitiktir.

Diğer taraftan, herbir $\varphi \varepsilon \mathcal{T}$ için $f o \varphi = f$, yani φ bir örtü transformasyonudur.

Karşıt olarak, farzedelim ki ψ bir örtü transformasyonudur, yani ψ bir homeomorfizm ve aynı zamanda $f o \psi = f$ dir.

Bu şarttan dolayı herbir $q_1 \varepsilon W_1$ noktasında, bir $\varphi \varepsilon \mathcal{T}$ için

$$\psi(q_1) = \varphi(q_1) \ .$$

q_1 ve dolayısıyla $\varphi(q_1)$ bir dallanma noktası değilse, $\varphi(q_1)$ in bir civarında f topolojiktir.

Binaenaleyh, q_1 in bir civarında, $f o \psi = f o \varphi$ de gözönünde tutulursa,

$$\psi(p_1) = \varphi(p_1) \ .$$

Süreklilikten dolayı bütün W_1 de $\varphi = \psi$.

$\mathcal{R}_2$, **konform tasvir hariç, birtek olarak belirlidir.** Farzedelim ki f^* aynı şekilde tarif edilmiştir, ve $\mathcal{R}_1 = (W_1, \Phi_1)$ Riemann yüzeyini bir $\mathcal{R}_2^* = (W_2^*, \Phi_2^*)$ yüzeyine tasvir ediyor. f ve f^* altında eşdeğer noktaların resimleri çakıştığından, W_2 yi W_2^* ın üzerine dönüştüren bir birebir g tasviri vardır ve $g \circ f = f^*$.

Şayet $O^* \subset W_2^*$ açıksa, $g^{-1}(O^*) = f(f^{*-1}(O^*))$ açıktır. Dolayısıyla g süreklidir.

Aynı şekilde g^{-1} süreklidir. O halde g bir homeomorfizmdir. Üstelik, g, bir dallanma noktasının izdüşümü olmayan her noktada analitiktir. g, aynı zamanda topolojik olduğundan, W_2 den W_2^* a bir konform tasvirdir.

Misal 1. W_1 kompleks düzlemi, ve ω/ω' oranı reel olmıyan, ω, ω' kompleks sayıları verilmiş olsun. m, m' birer tam olmak üzere

$$w \to w + m\omega + m'\omega'$$

transformasyonları W_1 i kendi üzerine dönüştüren süreksiz bir $\mathcal{G}$ grubunu teşkil ederler.

W_1 i kendi üzerine dönüştüren bu tasvirler, örtü transformasyonları olabilmeleri için, W_1 tarafından örtülmesi düşünülen W_2 yüzeyinin herbir noktası, *üzerinde* tâbir edilen, ve $\mathcal{G}$ altında eşdeğer olan bütün noktaların *izdüşümü* olmalıdır.

Böylece, W_2 nin herbir noktası bir ve birtek *mahreki* temsil eder. Başka bir deyimle, W_2 yüzeyi, herbir mahrekin noktaları özdeşleştirilmek suretiyle meydana gelen yüzeydir. Bu yüzey, bildiğimiz *tor*dur ve teoremin ifadesine göre, bu torun, W_1 e bir konform strüktür sağlıyan birtek konform strüktürü vardır.

Misal 2. W_1 birim dairesi, ve birim dairesini kendi üzerine dönüştüren lineer transformasyonların bir $\mathcal{G}$ grubu verilmiş olsun. *Farzedelim ki* $\mathcal{G}$ *süreksizdir*, yani bir *Fuchs grubudur*. Yukarda ispat edilen teoremden dolayı, *eşdeğer noktaların* özdeşleştirilmesinden mütevellid bir $\mathcal{R}_2 = (W_2, \Phi_2)$ Riemann yüzeyi meydana gelir.

Şayet $\mathcal{G}$ eliptik sübstitüsyonlar ihtiva etmiyorsa, birim dairesinin içinde sabit noktalar bulunmamaktadır ve bundan dolayı da W_1, W_2 nin pürüzsüz ve tahditsiz örtme yüzeyidir.

Üstelik, W_1 basit irtibatlı olduğundan, W_2 nin *üniversel bir örtme yüzeyidir*, ve görülüyor ki $\mathcal{G}$, W_2 nin esas grubu ile aynıdır.

Üniformizasyon teorisi ele alındığı zaman görülecektir ki, bazı haller hariç, bir Riemann yüzeyinin üniversel örtme yüzeyi daima *birim dairesine konform olarak tasvir edilebilir*. Bu taktirde Riemann yüzeyinin esas grubu *sabit noktasız bir Fuchs* grubudur.

Bu noktai nazardan, Riemann yüzeylerinin teorisi ile Fuchs gruplarının teorisi arasında esaslı bir fark yoktur.

Ancak, Riemann yüzeylerinin tetkikinde bu benzerlikten faydalanmayı daima gözönünde tutucağız.

2. İntegral ve Diferansyel

13.2.1. **Birimin bölünmesi metodu.** Bir $\mathcal{R} = (W, \Phi)$ Riemann yüzeyi üzerinde bir integralin tarifinde iki husus dikkate alınmalıdır.

(i) tarifi öngörülen integralin, değişken değişiminde invarient kalması.

(ii) W yi küçük bölgelere ayırarak, integralin tarifinin bu bölgelerden W ye teşmili.

Hatırlatalım ki $O \subset W$, $p \varepsilon W$ yi ihtiva eden, ve bir $h \varepsilon \Phi$ nin tarif bölgesi ise, O ya p nin bir parametre civarı, ve $z = h(p)$ ye lokal değişken denir.

Şimdi, farzedelim $O' \subset W$, O yu kısmen örtüyor ve $k \varepsilon \Phi$ nin tarif bölgesidir. $p \varepsilon O \cap O'$ ise, $z' = k(p)$ ve

$$z' = k(h^{-1}(z))$$

analitiktir. Dolayısıyla tarifi öngörülen integral, değişken değişiminde konform invarient olmalıdır.

İntegralin, lokal bir tariften W ye (veya W de herhangibir bölgeye) geçişinde, akla gelen ilk usul, W yi, *kenarları yeter derecede pürüzsüz*, yani kenarları *yeteri kadar diferansiyellenebilen* üçgenlere ayırmaktır.

Ancak, Riemann yüzeylerinin üçgenlenebilir yüzeyler olduklarını henüz göstermiş değiliz. Sayılabilir bir tabanı haiz oldukları gösterelir gösterilmez, Riemann yüzeylerinin *üçgenlenebilir* neticesine varılabilir. Buna rağmen, integralin W ye teşmilinde bazı güçlüklerle karşı karşıya kalınabilir.

Topolojik bir uzayda integralin tarifi için, ilk defa ve aynı zamanda Dieudonné ve Bochner tarafından ileri sürülen ve son derecede basit olan *birimin bölünmesi metodu*nun izahına geçiyoruz.

TARİF 9. G topolojik bir uzay olsun. Farzedelim ki sonlu sayadı e_i fonksiyonları G de tarifli $e_i \geq 0$ şartını sağlıyor. Bu takdirde

$$1 = \Sigma\, e_i \qquad (13.2.1.1)$$

ifadesine, *birimin bölünmesi* denir. Aşikâr olarak $0 \leq e_i \leq 1$.

e_i ler sürekli iseler, bu ifadeye *birimin sürekli bölünmesi* denir.

Farzedelim ki $G = \cup\, O_i$, G nin sonlu bir açık örtmesidir. (13.2.1.1) bölünmesine $\{O_i\}$ örtmesinin bir *tâbisi*dir denir şayet, $\{e_i\}$ ve $\{O_i\}$ lerin indeks cümleleri aynı, ve her e_i, tekâbülü olan O_i nin dışında sıfır ise.

Bu metodu doğrudan doğruya Dirichlet integraline tatbik edeceğiz.

13.2.2. **Dirichlet integrali.** Bu integral konform invarient olduğundan, bir Riemann yüzeyi üzerine herhangibir kompakt bölgede tarifi mümkündür.

Önce hatırlatalım ki, bir reel fonksiyon C^n *sınıfındandır* denir, şayet bu fonksiyonun n.mertebesine kadar kısmi türevleri mevcut ve sürekli iseler.

TARİF 10. G, kompleks düzlemde bir bölge olsun. Farzedelim ki $u=u(x,y)$ G de tarifli ve C^1 sınıfındandır. G üzerinde u nun Dirichlet integrali diye

$$D_G[u] = \int\int_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy,\ u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y},$$

integraline denir. $D_G[u]$ ya sonlu pozitiftir veya $+\infty$ dur. $D_G[u] = 0$ yalnız ve yalnız u sabit ise

Teorem 13.2.2.1. $D_G[u]$ konform invarienttir.

İspat. Farzedelim ki $x = x(x', y'), y = y(x', y')$ G yi G' nün üzerine konform tasvir ediyor.

Cauchy-Riemann denklemlerinden dolayı

$$u^2_{x'} + u^2_{y'} = (u^2_x + u^2_y)\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')}.$$

Burada, $\partial(x, y)/\partial(x', y') = |dz/dz'|^2$, $z = x + iy$ den $z'=x'+iy'$ ye koordinat değişiminin *fonksiyonel determinantı*, veya başka bir deyimle, *jacobi determinantı*, denir.

O halde,

$$\int\int_G (u^2_x + u^2_y)\, dxdy = \int\int_{G'} (u^2_{x'} + u^2_{y'})\, dx'dy'$$

Üstteki neticeden,

$$D_G[u, v] = \int\int_G (u_x v_x + u_y v_y)\, dxdy$$

bir konform tasvire nazaran invarient olduğu anlaşılır. Gerçekten,

$$4\, D_G[u, v] = D_G\,[u + v] - D_G\,[u - v]$$

özdeşliği bu görüşü doğrular.

Schwarz eşitsizliği. Bu çok önemli eşitsizlik Dirichlet integralinin negatif olamıyacağı hassasından derhal istihraç edilir. Gerçekten λ, μ herhangi iki reel sayı olduğuna göre,

$$D_G[\lambda u + \mu v] = \lambda^2 D_G[u] + 2\lambda\mu D_G[u, v] + \mu^2 D_G[v] \geq 0.$$

O halde

$$D_G[u, v]^2 \leq D_G[u]\, D_G[v].$$

Derhal görülür ki $D_G[u]$, $D_G[v]$ sonlu iseler $D_G[u, v]$ de sonludur.

13.2.3. **Dirichlet integralinin $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ Riemann yüzeyi üzerinde tarifi.** $G \subset W$ bölgesi bir parametre civarına dönüşüyorsa, konform invarientlikten dolayı, Dirichlet integrali belirlidir.

Dirichlet integralinin W ye teşmili için, şimdilik W yi kapalı veya kompakt kenarlı farzedeceğiz.

g, W de sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\int\int_W (u_x^2 + u_y^2) g dxdy$$

integralini gözönüne alalım. Bu integral, her O parametre civarında, ve g bu civarın dışında sıfır olur olmaz, konform invarienttir, ve dolayısıyla tariflidir.

Farzedelim ki $W = \cup_i O_i$ ve $g = \Sigma_i g_i$, öyleki, g_i, O_i nin dışında özdeş olarak sıfırdır. Bu takdirde

$$\int\int_W (u_x + u^2_y)\, g dxdy = \sum_i \int\int_W (u^2_x + u^2_y) g_i dxdy$$

yazılabilir.

Şimdi göstereceğiz ki, g_i lerin yerine § 13.2.1. de tarif edilen $e_i \geq 0$, $\Sigma_i e_i = 1$, yani $g = 1$, alınabilir.

O_i leri parametre daireleri farzederek, $|z| < 1$ de g yi, meselâ,

$$g(z) = (1 - |z|^2)^3$$

şeklinde tarif edelim.

$|z| \geq 1$ için $g(z) = 0$ vazedilmek suretiyle, tarif bütün kompleks düzleme teşmil edilirse görülür ki $g \varepsilon C^2$.

Dolayısıyla, O_i de $g_i = g o h_i$ ve O_i nin dışında sıfır olan fonksiyon W de C^2 sınıfındandır. Burada $h \varepsilon \Phi$ ve $h(O)$, $|z| < 1$ birim dairesidir.

Binaenaleyh, *birimin bölünmesini elde etmek için*

$$e_i(p) = g_i(p)/\Sigma_j g_j(p)$$

vazedilir ve bu bölünme ile $D_W[u]$ ve $D_W[u, v]$ integrallerinin tarifi mümkün olur. Bu tarif, kullanılmış olan birimin bölünmesine tâbi değildir. Nitekim $\{e_i\}$ ve $\{e'_j\}$ birimin iki farklı bölünmeleri ise

$$\sum_i \int_W\int (u_x^2 + u^2_y)e_i \; dxdy = \sum_{i,j} \int_W\int (\quad) \, e_i \, e'_j \, dx \, dy$$

$$= \sum_j \int_W\int (\quad) \, e'_j \, dx \, dy.$$

13.2.4. **Diferansyel hesap.** $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ bir Riemann yüzeyi olsun.

Birinci dereceden diferansyel. *TARİF* 11. Birinci dereceden diferansyel diye

$$\omega = a \, dx + b \, dy$$

şeklindeki lineer ifadeye denir. Burada $a, b, z = x + iy$ *lokal değişkenin* fonksiyonlarıdır. Farzediliyor ki $a, b \in C^1$. Herbir lokal değişken için böyle bir ifade vardır. Ankak, a, b, lokal değişkene o şekilde tâbidirler ki, değişken değişiminde ω invarienttir.

İnvarientlik kavramını, ehemmiyetine binaen tekrar izah edelim. Tarif gereğince herbir $h \in \Phi$ ye, bir $\omega = a \, dx + b \, dy$ lineer formu tekabül eder. O, h nın tarif bölgesi olduğuna göre, a, b, katsayıları $h(O)$ da C^1 sınıfındandır, ve h, h'lerin O, O′ tarif bölgeleri birbirini örtüyorlarsa, tekâbül eden $a \, dx + b \, dy$, $a' \, dx' + b' dy'$ lineer formları aynı diferansyeli ifade edebilmeleri için, katsayılar,

$$a' = a \frac{\partial x}{\partial x'} + b \frac{\partial y}{\partial x'}$$

$$b' = -a \frac{\partial y}{\partial x'} + b \frac{\partial x}{\partial x'} \qquad (13.2.4.1)$$

bağıntılarını sağlamalıdırlar.

Gerçekten, değişken değişimi

$$x = x(x', y') \qquad y = y(x', y') \qquad (13.2.4.2)$$

olduğuna göre

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy', \; dy = \frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy'$$

birinci diferansyelde yerine koyulur, ikinci ile karşılaştırılırsa

$$a' = a \frac{\partial x}{\partial x'} + b \frac{\partial y}{\partial x'} \qquad (13.2.4.3)$$

$$b' = a \frac{\partial x}{\partial y'} + b \frac{\partial y}{\partial y'}$$

bulunur. Cauchy-Riemann denklemleri de gözönünde tutulursa (13.2.4.1) elde edilir.

(13.2.4.2) transformasyonlarının Jacobi determinantı

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x'} & \dfrac{\partial x}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x'} & \dfrac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix}.$$

Cauchy-Riemann denklemleri gözönünde tutulursa

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)^2 = |dz/dz'|^2$$

z den z' ye geçiş konform olduğundan $|dz/dz'| \neq 0$ ve dolayısıyla, (13.2.4.1) konform olduğundan $|dz/dz'| \neq 0$ ve dolayısıyla, (13.2.4.1) den a', b' katsayıları a, b cinsinden hesaplanabilir.

(13.2.4.1) transformasyon kaidesi a, b ye nazaran lineer olduğundan, iki diferansyel taraf tarafa toplanabilir. Üstelik bir f fonksyonu ile çarpılabilir, şöyleki

$$f\omega = \omega f = fa \, dx + fb \, dy.$$

Yani $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ üzerinde diferansyeller, *skalerler* kompleks fonksyonlar *halkası* olmak üzere, bir vektör uzay teşkil ederler.

Tam diferansyel. Bir $f \in C^1$ fonksyonunun diferansyeli

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (13.2.4.4)$$

şeklinde tarif edilir. Bu tarif (13.2.4.1) invarientlik kaidesini sağlar.

(13.2.4.4) tipindeki diferansyellere *tam diferansyel* denir.

İki tam diferansyelin toplamı ve *bir skalerin bir tam diferansyelle çarpımı* yine bir *tam diferansyel* verdiğinden, *tam diferansyeller, kompleks sayılar cismi üzerinde bütün diferansyellerin* bir *lineer alt uzayını* teşkil ederler.

İkinci mertebeden differansiyel. *TARİF* 12. ikinci mertebeden diferansyel diye

$$\Omega = c \, dx \, dy$$

şeklindeki ifadeye denir.

Yukarda olduğu gibi, burada da transformasyon kaidesi

$$c' = c \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')}. \qquad (13.2.4.5)$$

Dış Çarpım. Birinci mertebeden iki diferansyelin *dış çarpımı* için şu kabuller yapılır.

$$dxdx = 0, \; dydy = 0, \; dxdy = -dydx \qquad (13.2.4.6)$$

Bu takdirde,

$$\omega_1 = a_1 dx + b_1 dy \qquad \omega_2 = a_2\, dx + b_2\, dy$$

iki diferansyel verildiği taktirde[1]

$$\begin{aligned}\omega_1\omega_2 &= (a_1 dx + b_1 dy)\,(a_2 dx + b_2\, dy)\\ &= a_1 a_2\, dxdx + a_1 b_2 dxdy + b_1 a_2 dydx + b_1 b_2 dydy\\ &= (a_1 b_2 - b_1 a_2)\, dx\, dy,\end{aligned}$$

ve $\omega_1\omega_2$ komütatif değildir, yani ω_1, ω_2 yer değiştiremez. Aslında,

$$\omega_1\omega_2 = -\,\omega_2\omega_1 .$$

Şimdi, $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeyi üzerinde tarifli

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy$$

lineer operatörünü ithal edelim.

Bu operatör (13.2.4.1) transformasyon kaidesini sağlar, yani başka bir deyimle invarienttir. $f \varepsilon C^1$ ise, derhal

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

yazılabilir, ve $\omega \varepsilon C^1$ için

$$d\omega = da dx + db dy$$

tarif edilirse,

$$d\omega = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\, dx + \frac{\partial a}{\partial y}\, dy\right) dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x}\, dx + \frac{\partial b}{\partial y}\, dy\right) dy = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy.$$

Yani,

$$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (13.2.4.7)$$

d-operatörünü ikinci mertebeden Ω diferansyeline tatbik eder ve

$$d\Omega = (\mathrm{dc})\, dxdy$$

tarif edilirse,

$$d\Omega = \left(\frac{\partial \mathrm{c}}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \mathrm{c}}{\partial y}\, dy\right) dxdy = 0.$$

d-operatörün diğer özellikleri. Kolayca tahkik edilebilir ki

$$d(f\omega) = (df)\omega + f d\omega = -\,\omega df + f d\omega . \qquad (13.2.4.8)$$

Ayrıca,

$$d(df) = 0,\ f \varepsilon C^2 .$$

[1] $\omega_1\omega_2$ yerine $\omega_1 \wedge \omega_2$ sembolü de kullanılır. $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\,\omega_2 \wedge \omega_1$.

Gerçekten, (13.2.4.7) ifadesinde $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ vazedilirse

$$d(df) = 0 . \qquad (13.2.4.9)$$

TARİF 13. ω kapalıdır denir, şayet $d\omega = 0$ ise.

(13.2.4.9) dan dolayı bütün *tam diferansyeller kapalıdırlar*. Yani, tam diferansyeller, kapalı diferansyellerin bir alt uzayını teşkil ederler.

Kapalı bir diferansyel lokal tam dır. Yani bir noktanın küçük bir civarında $\omega = df$ yazılabilir.

Konjüge diferansyel. *TARİF* 14. Riemann yüzeyinde ω diferansyeli verildiği taktirde, $*\,\omega$ ile gösterilen, *konjüge diferansyel* veya $*$ *operatörü* diye

$$*\omega = -\,b dx + a dy$$

ifadesine denir.

Bu ifade bir diferansyeldir, zira, (13.2.4.1) de a yerine $-\,b$, b yerine a, a' yerine $-b'$ ve b' yerine a' vazedilirse, transformasyon değişmez.

Dolayısıyla, $\omega = a dx + b dy$ nin invarientliği $*\omega$ nın invarientliğini intac eder.

$*$ operatörünün hassaları:

$*\,(\omega_1 + \omega_2) = *\,\omega_1 + *\,\omega_2$, yani $*$ operatörü lineerdir.

$*\,(f\omega) = f(*\,\omega)$

$**\,\omega = *\,(*\,\omega) = -\,\omega$

$*\,\omega_1 * \omega_2 = \omega_1\, \omega_2$

$\omega_1 * \omega_2 = \omega_2 * \omega_1 = (a_1 a_2 + b_1 b_2)\, dxdy.$

Öteyandan

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy$$

operatörünün konjügesi

$$*d = -\,\frac{\partial}{\partial y}\, dx + \frac{\partial}{\partial x}\, dy$$

operatörünü tarif edebiliriz.

Bu takdirde $f\ \varepsilon\ C^1$ ise

$$*(df) = *\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right) = -\,\frac{\partial f}{\partial y}\, dx + \frac{\partial f}{\partial x}\, dy = (*\,d)\, f.$$

Buradan, hiçbir karışıklığa mahal vermeden,

$$*(df) = (*\,d)\, f = *\,df$$

yazabiliriz.

TARİF 15. Şayet $f \varepsilon C^2$ için $\omega = *\,df$ ise, ω ko-tamdır diyoruz.

Şimdi, $*$ operatörü yalnız birinci mertebeden diferansyellere tesir ettiğinden $* d\omega$ nın mânası $(* d)\,\omega$ dır. O halde (13. 2.4.6) şartları da gözönünde tutulursa,

$$* d\omega = \left(-\frac{\partial}{\partial y}\,dx + \frac{\partial}{\partial x}\,dy\right)(adx+bdy) = \left(-\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x}\right) dxdy,$$

ve

$$d * \omega = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)(-bdx+ady) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) dxdy.$$

Binaenaleyh,

$$* d\omega = - d * \omega$$

TARİF 16. Şayet $\omega \varepsilon C^1$ için $d * \omega = 0$ ise, ω *ko-kapalı* dır diyoruz.

Teorem 13.2.4.1. Farzedelim ki $* \omega$ *tamdır*. Bu takdirde ω *ko-kapalıdır*.

İspat. Hipotezden dolayı bir f fonksyonu vardır öyleki, $*\omega = df$. Fakat $d * \omega = ddf = 0$, yani ω *ko-kapalıdır*.

Laplace operatörü. Diğer önemli bir operatör

$$\Delta = d * d$$

$f \varepsilon C^2$ ye tatbik edilirse

$$\Delta f = d * df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx\, dy.$$

Laplace operatörü diye Δ operatörüne, veya aynı notasyon ile gösterilen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

operatörüne denir.

Bu operatörlerin tatbiklerinden önce $\mathfrak{R}$ üzerinde integralin tarifine geçelim.

13.2.5. **İntegral hesap.** 1-simplekslerden müteşekkil 1-devirlerin *homoloji* gruplarıyla, kapalı eğrilerin homoloji grupları arasındaki paralelliği tebarüz ettirmek bakımından, W üzerindeki bir *eğriyi* şöyle tarif edelim.

TARİF 17. *Singüler* σ^1 1-*simpleks* diye, kapalı I birim aralığından W ye sürekli $t \to \alpha(t)$ tasvirine denir.
σ^1 diferansyellenebilir denir, şayet

$$\alpha(t) = x(t) + iy(t) = z(t)$$

z lokal değişkenine göre C^1 sınıfından ise.

Bu tarifler gözönünde tutularak, diferansyellenebilir 1-simpleksi boyunca ω nın integrali

$$\int_{\sigma^1} \omega = \int_0^1 (ax'(t) + by'(t))\, dt$$

şeklinde tarif edilir.

Bu tarif birtek adımda mümkündür, şayet σ^1 tekbir *parametre civarında* ise.

Aksi halde I aralığı sonlu sayıda parçalara bölünür:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1, \qquad (13.2.5.1)$$

öyleki, herbir I_i: $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ parçasının σ_i^1 resmi birtek parametre civarının içindedir.

Bu sefer

$$\int_{\sigma^1} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma_i^1} \omega$$

şeklinde tarif edilir ve bu tarif (13.2.5.1) bölünmesine tâbi olmadığı gösterilebilir.

Gerçekten, (13.2.5.1) bölünmesine yeni noktalar ilâve etmek suretiyle, σ_i^1 , $\sigma^1_{i_1}, \sigma^1_{i_2}, \ldots, \sigma^1_{i_k}$ parçaya ayrılır. $\int_{\sigma_i^1} \omega$ koordinat değişimlerine nazaran invarient ve aynı zamanda *toplanabilir* (aditif) olduğundan

$$\int_{\sigma^1_i} \omega = \int_{\sigma^1_{i_1}} \omega + \ldots + \int_{\sigma^1_{i_k}} \omega.$$

Şimdi,

$$0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_m = 1,$$

I nin herhangibir başka bölünmesi ise, bu iki bölünme üst üste getirildiği takdirde, herbirinin *sıklaştırılmış* bir bölünmesi meydana gelir. Bu son bölünmeden mütevellit integral, ilk bölünmelerden mütevellit integrallere eşit olduğundan ilk iki integral eşittirler.

Nihayet, singüler 1-zincirler lineer olduklarından, şayet bu zincirin herbir süngüler 1-simpleksi diferansyellenebilirse, integralin tarifi bu singüler 1-zincire *toplama* ile teşmil edilebilir.

Teorem 13.2.5.1. Bir ω diferansyeli *tam* dır yalnız ve yalnız herbir c^1 1-deviri için

$$\int_{c^1} \omega = 0$$

ise.

İspat. **Gerek şart:** ω tam ise $\omega = df$. Dolayısıyla,

$$\int_{c^1} \omega = \int_{c^1} df = f(p_2) - f(p_1).$$

Burada $\partial c^1 = p_2 - p_1$. c^1, bir devir olduğundan uç noktalardaki değerler birbirini götürür.

Yeter şart: z_0 ı z ye birleştiren eğri üzerinde

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \omega$$

integralini gözönüne alalım. Bu integral herbir devir boyunca sıfır ise, $f(z)$ belirlidir, ve $\omega = df$ olduğu görülür.

TARİF 18. *Singüler 2-simpleks* diye, kapalı e^2 : $0 \leq u \leq t \leq 1$ üçgeninden W ye tasvire denir. Bu tasvir diferansyellenebilir şayet C^1 sınıfından ise.

İkinci mertebeden $\Omega = cdxdy$ diferansyelinin integrali, şayet e^2 resmi tekbir parametre civarı içinde ise

$$\int_{e^2} \Omega = \int_{e^2} c \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)} dtdu$$

şeklinde tarif edilir.

Bu integral değişken değişimine nazaran invarienttir, ve tarifi e^2 yi bölmek suretiyle, *keyfi diferansyellenebilir 2-simplekslere*, ve lineerlik hassasından dolayı da keyfi 2-zincirlere teşmil edilebilir.

13.2.6. **Green formülü.** Önce bu formülü bir R : $-\alpha < x < \alpha$ - $\beta < y < \beta$ dikdörtgeni için yazalım. $\bar{R}$ de $\omega = adx + bdy \in C^1$ olduğuna göre,

$$\int_R\int \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial R} adx + bdy.$$

veya

$$\int_R\int d\omega = \int_{\partial R} \omega. \qquad (13.2.6.1)$$

Gerçekten,

$$\int_R\int \frac{\partial b}{\partial x} dxdy = \int_{-\beta}^{\beta} dy \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\partial b}{\partial x} dx = \int_{-\beta}^{\beta} [b(\alpha, y) - b(-\alpha, y)] dy$$

$$= \int_{-\beta}^{\beta} b(\alpha, y)dy - \int_{-\beta}^{\beta} b(-\alpha, y) dy = \int_{\partial R} b(x, y) dy$$

ve

$$\int_R\int \frac{\partial a}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial R} a(x, y) dx.$$

Green formülünün kullanışa elverişli başka bir şekli, $\bar{R}$ de $f \in C^1$ olmak şartıyla, ω yerine $f\omega$ vazetmek suretiyle elde edilir.

O halde (13.2.1.8) formülü gözönünde tutulursa, kısmi integralin benzeri olan

$$\int_R\int (df)\, \omega = \int_{\partial R} f\omega - \int_R f d\omega \qquad (13.2.6.2)$$

bağıntısı bulunur.

W de keyfi bir c^2 2-*zincirini* gözönüne alalım. Bu zincirin herbir singüler 2-simpleksini, § 12.2.1 de izah edildiği şekilde, iki altüçgene bölelim. Böylece herbir singüler 2-simpleks, bir köşenin ilâvesiyle, düzlemde bir dikdörtgene homeomorf, ve bir tek parametre bölgesinde bulunan, bir dörtgen meydana getirir.

Dolayısıyla, (13.2.5.1) ve (13.2.5.2) formülleri bir değişkenden diğer bir değişkene geçişte invarient kaldığından, derhal singüler 2-zincirlere teşmil edilebilir. O halde,

$$\int_{c^2} d\omega = \int_{\partial c^2} \omega, \int_{c^2} (df)\, \omega = \int_{\partial c^2} f\omega - \int_{c^2} f d\omega.$$

Teorem 13.2.6.1. Bir ω diferansyeli kapalıdır yalnız ve yalnız, 0 a homolog herbir c^1 deviri için $\int_{c^1} \omega = 0$.

İspat. ω kapalı, yani $d\omega = 0$ ise, Green teoreminden dolayı $\int_{c^1} \omega = 0$.

Yeter şarta gelince, c sürekli olmak üzere $d\omega = cdxdy$ yazabiliriz, ve bir noktada $c \neq 0$ ise bütün bir civarda c ya pozitif ya da negatiftir. e^2 den bu civara diferansyellenebilir bir birebir tasvir vardır ve hipotez gereğince

$$\int_{e^2} c \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)} dtdu = 0.$$

Fakat bu mümkün değildir, zira ne c ne de $\partial(x,y)/\partial(t,u)$ e^2 de işaret değiştirmez. O halde $d\omega = 0$.

TARİF 19. ω *kapalı* ise ($d\omega = 0$), $\int_{c^1} \omega$ integraline, ω nın c^1 boyunca *periodu* denir.

Yukarda ispat edilen teoreme göre, period, c^1 in yalnız homoloji sınıfına tâbidir. Yani $c^1 \approx c'^1$ ise $\int_{c^1} \omega = \int_{c'^1} \omega$, ve özel olarak $c^1 \approx 0$ ve $d\omega = 0$ ise $\int_{c^1} \omega = 0$.

Bahsi geçen homoloji sınıfların aynı H^1-homoloji grubunu teşkil ettikleri, Lemma 12.4.3.1 deki aynı muhakeme tatbik edilmek suretiyle gösterilebilir.

Teorem 13.2.5.1 den dolayı, ω diferansyeli tam ise, $\int_{c'} \omega = 0$, ve teorem 13.2.6.1 den dolayı $\int_{c'} \omega = 0$ ise $d\omega = 0$.

Neticede, *bir tam diferansyelin periyodları sıfırdır.*

Daha doğrusu, bir kapalı diferansyel tamdır yalnız ve yalnız bütün periodları sıfır ise.

13.2.7. **Ω diferensiyelinin integralinin $\mathfrak{R}$ ye teşmili.** Farzedelim ki $\mathfrak{R}$ kapalı veya kompakt kenarlı bir Riemann yüzeyidir. Bu taktirde bütün yüzey, bir kenarlı yüzey halinde kenar çevreleri pozitif cihetli olmak şartıyla, bir 2-zincir farzedilebilir, ve

$$\int_W cdxdy,$$

bu 2-zincir üzerindeki integral olarak tarif edilebilir.

Kompakt olmıyan yüzeyler için, limit mevcut olduğu taktirde,

$$\int_W cdxdy = \lim_{G \to W} \int_G cdxdy. \qquad (13.2.7.1)$$

Burada G düzgün bölgeleri gösterir.

$\mathfrak{R}$ cihetli olduğundan, $|c|\, dxdy$ ikinci mertebeden bir diferansyeldir, zira Jacobi determinantı pozitif ise, c ve c' yerine bunların mutlak değerleri alındığı taktirde (13.2.4.5) muteber kalır. Görülür ki (13.2.7.1) mevcuttur yalnız ve yalnız

$$\int_W |c|dxdy = \lim_{G \to W} \int_G |c|\, dxdy$$

limiti sonlu ise. Dolayısıyla, $cdxdy$ nin integrali tariflidir yalnız ve yalnız mutlak yakınsak ise.

13.2.8. **Harmonik ve analitik diferansyel.** Önce, bir Riemann yüzeyi üzerinde harmonik fonksiyonları tarif edelim.

TARİF 20. Verilen bir $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ Riemann yüzeyi üzerinde reel değerler alan bir u fonksiyonuna *harmonik*tir denir şayet her $h \varepsilon \Phi$ için uoh^{-1} mürekkep fonksiyonu, O h nın tarif bölgesi olmak üzere $h(O)$ da harmonik ise.

Harmonik fonksiyonlar lokal değişken değişiminde konform invarient olduklarından, bu fonksiyonları $u(z)$ ile gösterebiliriz.

Bir analitik fonksiyonun reel ve imajiner kısımları harmoniktirler. *İmajiner kısma* ise, *reel kısmın konjüge harmoniği* denir.

Reel kısmın konjügesi şayet mevcut ise v ile gösterilir. v, bir sabit fark ile belirlidir.

Herhangibir harmonik fonksiyonun, herbir noktanın civarında bir konjügesi vardır. Fakat, umumiyetle, bu lokal konjügelerin hey'eti umumiyesi u nun konjügesini vermez.

Böyle olmakla beraber, W *basit irtibatlı ise Monodromi teoreminden* dolayı u nun konjügesi vardır.

TARİF 21. Farzedelim ki, u, $\mathfrak{R}$ de harmoniktir ve v konjügesidir. Bu taktirde,

$$du = u_x\, dx + u_y dy$$
$$dv = * du = - u_y dx + u_x dy$$

ifadelerine *harmonik diferansyeller denir.*

TARİF 22. $du + i * du = (u_x - iu_y)dz$ lineer kombinezonuna *analitik diferansyel* denir.

$\Delta u = 0$ gösteriyor ki $d * du = 0$, yani $* du$ kapalıdır.

TARİF 23. Bir ω diferansyeline *harmoniktir* denir, şayet ω hem *kapalı hem de ko-kapalı* ise.

$*$ operatörünün hassalarından şu neticeler hasıl olur: ω ve $* \omega$ diferansyelleri aynı zamanda harmoniktirler, ve

$$* (\omega + i * \omega) = * \omega + i ** \omega = * \omega - i\omega = - i (\omega + i * \omega).$$

Bu hassdan faydalanarak aşağıdaki tarifi verebiliriz.

TARİF 24. Bir φ diferansyeli, $* \varphi = - i\varphi$ bağıntısını sağlıyorsa φ ye *sırf diferansyel* denir.

Bir sırf diferansyele, aynı zamanda harmonik ise, *analitik* denir.

Bir sırf diferansyel $a(dx + idy)$ tipindedir, ve analitiktir yalnız ve yalnız

$$\frac{\partial a}{\partial x} = - i \frac{\partial a}{\partial y}.$$

Bu şart Cauchy-Riemann şartıdır ve a nın, lokal olarak, z nin bir analitik fonksiyonu olduğunu ifade eder.

3. Diferansyellerin Hilbert Uzayı

13.3.1. **İç çarpım.** Okuyucular, Hilbert Uzayı hakkındaki gerekli bilgileri Gruplar Teorisine tahsis edilen bölümde bulabilirler. Bu itibarla diferansyellerin iç çarpımlarının hemen tarifine geçiyoruz.

Bir $\omega = adx + bdy$ diferansyeli verilmiş olsun $\overline{\omega} = \bar{a}dx + \bar{b}dy$ diferansyeline ω nın *kompleks konjügesi* denirse (Konjüge diferansyel ile karıştırmamak gerekir),

$$\omega * \overline{\omega} = (|a|^2 + |b|^2)\, dxdy$$

ikinci mertebeden bir diferansyeldir ve katsayısı negatif değildir. Dolayısıyla,

$$\int_W \omega * \overline{\omega} \qquad (13.3.1.1)$$

integralini teşkil edebiliriz, ve bu integralin değeri ya pozitiftir (sonlu) ya da $+\infty$.

TARİF 25. ω nın normu diye, $\|\omega\|$ ile gösterilir, (13.3.1.1) integralinin karaköküne denir. Yani,

$$\|\omega\| = \left(\int_W \omega * \overline{\omega}\right)^{1/2}.$$

$\|\omega\| = 0$ yalnız yalnız $\omega = 0$ ise.

Şayet $\mathcal{R}$ kapalı bir Riemann yüzeyi ise, bütün diferansyellerin normu sonludur. $\mathcal{R}$, açık bir yüzey ise, bu taktirde, *normu sonlu olan diferansyeller*, birinci mertebeden bütün diferansyellerin sadece bir alt uzayını teşkil ederler.

Bu ve müteakıp kısımlarda, *normu sonlu* olan diferansyellerle iştigal edeceğiz.

Notasyonlar. Farzedeceğiz ki $\omega \in C^1$ ve $\|\omega\| < \infty$ ve bu şartları sağlıyan $\mathcal{R}$ üzerindeki birinici mertebeden bütün diferansyellerin uzayını $\Omega^1(\mathcal{R})$ veya sadece Ω^1 ile göstereceğiz.

Ω^1 e ait kapalı, tam ve harmonik diferansyeller birer lineer altuzay teşkil ederler. Bu altuzaylar, sırasıyla

$$\Omega^1_c,\ \Omega^1_e,\ \Omega^1_h$$

ile gösterilir.

Ω^1_c, Ω^1_e uzaylarına ait diferansyellerin konjüge diferansyelleri yine birer altuzay teşkil ederler ve bu altuzaylar, sırasıyla,

$$^*\Omega^1_c,\ ^*\Omega^1_e$$

ile gösterilir.

Harmonik diferansyeller hem *kapalı* hem *ko-kapalı* olduklarından, *konjüge diferansyeller* için ayrı bir notasyona lüzum yoktur. Hakikatte, tarif gereğince,

$$\Omega^1_h = \Omega^1_c \cap {}^*\Omega^1_c.$$

Diğer taraftan, § 13.2.6 da gördük ki

$$\Omega^1_e \subset \Omega^1_c$$

İç çarpım. Ω^1 e ait diferansyeller için

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_W \omega_1 * \overline{\omega}_2 = \int_W (a_1\bar{a}_2 + b_1\bar{b}_2)\, dxdy$$

integraline, ω_1 ve ω_2 nin *iç çarpımı* denir.

$*$ operatörünün beşinci hassasından dolayı

$$(\omega_2, \omega_1) = \int_W \omega_2 * \overline{\omega}_1 = \int_W \overline{\omega}_1 * \omega_2 = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$$

ve $*$ operatörünün üçüncü ve dördüncü hassalarından dolayı

$$(*\omega_1, *\omega_2) = -\int_W *\omega_1\, \overline{\omega}_2 = -\int_W **\omega_1 * \overline{\omega}_2 =$$

$$= \int_W \omega_1 * \overline{\omega}_2 = (\omega_1, \omega_2).$$

İlerde kullanılmak üzere Schwarz ve Üçgen eşitsizliklerini hatırlatıyoruz.

Schwarz eşitsizliği

$$|(\omega_1, \omega_2)| \leq \|\omega_1\| \cdot \|\omega_2\|.$$

Minowski eşitsizliği (Üçgen)

$$\|\omega_1 + \omega_2\|^2 = \|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\omega_1, \omega_2)$$

$$\leq \|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2 + 2\|\omega_1\|\,\|\omega_2\| = (\|\omega_1\| + \|\omega_2\|)^2$$

ve

$$\|\omega_1 + \omega_2\| \leq \|\omega_1\| + \|\omega_2\|.$$

Aşağıdaki tarifleri hatırlayıroruz.

TARİF 26. İki diferansyel $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1$ *ortogonal*dir diyor ve $\omega_1 \perp \omega_2$ yazıyoruz, şayet $(\omega_1, \omega_2) = 0$ ise. ω, Ω^1_1 altuzayına ortogonaldir diyoruz şayet bütün $\omega_1 \in \Omega^1_1$ ler için $(\omega, \omega_1) = 0$ ise. Ω^1_1 ile Ω^1_2 ortogonaldir şayet bütün $\omega_1 \in \Omega^1_1$, $\omega_2 \in \Omega^1_2$ için $(\omega_1, \omega_2) = 0$ ise. Ω^1_1, Ω^1_2 nin ortogonal tamamlayıcısı (komplemanı) dır diyoruz şayet Ω^1_1, yalnız Ω^1_2 elemanlarına ortogonal elemanlardan müteşekkil ise.

$\mathcal{R}$ kapalı bir Riemann yüzeyi ise aşağıdaki teorem vârittir.

Teorem 13.3.1.1. Kapalı bir $\mathcal{R} = (W, \Phi)$ Riemann yüzeyi üzerinde Ω^1_c, $^*\Omega^1_e$ nin ortogonal tamamlayıcısdır (ve $^*\Omega^1_c$, Ω^1_e nin ortogonal tamamlayıcısıdır).

İspat. $\omega \in \Omega^1_c$ ve $*df \in {}^*\Omega^1_e$ nin iç çarpımını teşkil edelim.

$$(\omega, *df) = -\int_W \omega\overline{df} = \int_W \overline{df}\omega = \int_{\partial W} \overline{f}\omega - \int_W \overline{f}d\omega.$$

W kapalı bir yüzey olduğundan $\int_{\partial W} = 0$, ve ω kapalı olduğundan $d\omega = 0$. Yani $(\omega, *df) = 0$.

Karşıt olarak farzedelim ki bütün $f \varepsilon C^2$ fonksiyonları için

$$\int \bar{f} d\omega = 0.$$

Bir V_q parametre dairesini gözönüne alalım, ve farzedelim ki f, V_q ya ait ve q yu ihtiva eden bir kompakt cümlenin dışında özdeş olarak sıfırdır. Bu takdirde diyoruz ki, *f nin V_q da bir kompakt desteği* vardır.

Şimdi, V_q yu $|z| < 1$ dairesine tasvir edelim, ve bu parametre cinsinden $dw = cdxdy$ yazalım. O halde, V_q da *kompakt bir desteği olan* bütün f ler için

$$\int_{|z|<1} \bar{f} c dxdy = 0 . \qquad (13.3.1.1)$$

Gösterelim ki bu şarttan dolayı $c = 0$. Farzedelim ki W nin bir q noktasında $c \neq 0$. q nun V_q parametre dairesini gözönüne alalım. Hipotezden dolayı q nun $z=0$ resminde $c(0) \neq 0$, ve süreklilikten dolayı $z = 0$ ın bütün bir civarında, c ya pozitif ya da negatiftir. Şimdi, f yi şöyle tarif edelim. $0<\rho<1$ için

$$f(z) = \begin{cases} (\rho^2 - |z|^2)^3 , & |z| \leq \rho \\ 0 , & |z| > \rho . \end{cases}$$

Dolayısıyla $f \varepsilon C^2$ ve $z = 0$ ın bir civarında pozitiftir. O halde (13.3.1.1), $z = 0$ ın bir civarında ya pozitif ya da negatiftir. Bu tezat gösteriyor ki $c = 0$ ve W nin bütün noktalarında $d\omega = 0$.

13.3.2. **Kenarlı Riemann Yüzeyleri.** Kenarlı bir Riemann yüzeyinin kenarını β ile gösterelim. Tarif gereğince β nın herbir noktasına bir $z = x+iy$ parametresi tekabül eder, öyleki, β üzerinde $y = 0$, z ye göre yazılan $\omega = adx + bdy$ diferansyeli β boyunca adx e eşittir ve sıfırdır yalnız ve yalnız $a = 0$ ise.

Kenarlı bir Riemann Yüzeyi için yine $\overline{W}$ notasyonunu kullanıyor. ve $\Omega^1{}_c(\overline{W})$, $\Omega^1{}_e(\overline{W})$ altsınıflarının, sırasıyla iki önemli altsınıfını ithal ediyoruz.

Diyoruz ki, *kapalı bir ω diferansyeli $\Omega^1{}_{co}$* altsınıfına aittir *şayet β boyunca* $\omega = 0$ ise.

Aynı şekide, $\omega = df$, $\Omega^1{}_{eo}$ sınıfındandır diyeceğiz *şayet β boyunca $f = 0$.*

Dikkat edilirse ikincide $df = 0$ dır demedik. Şayet β boyunca $df = 0$ ise, bundan sadece, herbir çevrede $f =$ sabit neticesi çıkar.

Diğer taraftan β boyunca $f = 0$, $\omega=0$ neticesini intac eder.

Şimdi bir önceki teoremi kenarlı Riemann yüzeylerine teşmil edelim.

Teorem 13.3.2.1. *Kompakt kenarlı bir Riemann yüzeyi* üzerinde, $\Omega^1{}_{co}$, $*\Omega^1{}_e$ nin ortogonal tamalayıcısıdır, ve $\Omega^1{}_c$, $*\Omega^1{}_e$ ın ortogonal tamamlayıcısıdır.

İspat. Kısmi integral formülü tatbik edilirse, teorem 13.3.1.1 de olduğu gibi,

$$(\omega, *df) = \int_\beta \bar{f}\omega - \int_W \int \bar{f} d\omega. \qquad (13.3.2.1)$$

Burada W bilindiği üzere $\overline{W}$ nin *içini gösterir.*

(13.3.2.1) formülüne göre, $d\omega = 0$ ve β üzerinde ya $\omega = 0$ ya da $f=0$ ise, $(\omega, *df) = 0$. Yani $\omega \perp *df$. O halde,

$$\Omega^1{}_{co} \perp *\Omega^1{}_c, \ \Omega^1{}_c \perp *\Omega^1{}_{eo}.$$

Karşıt olarak, $\omega \perp *\Omega^1{}_{eo}$ ise, $(\omega, *df) = 0$ ve β üzerinde $f = 0$. Bu takdirde

$$\int_W \int \bar{f} d\omega = 0.$$

Teorem 13.3.1.1 deki muhakeme aynen tekrarlanabilir ve $d\omega=0$ bulunur.

Halbuki $\omega \perp *\Omega^1{}_e$ ise, $(\omega, *df) = 0$ ve W de $d\omega = 0$. Bu takdirde

$$\int_\beta \bar{f}\, \omega = 0, \ \forall f \varepsilon C^2$$

Gösterelim ki $\omega = 0$. Yukarda olduğu gibi burada da bir parametre tasviri düşünülebilir, şöyle ki bu tasvir β nın bir parçasını reel eksenin içine dönüştürsün. Bu parametreye göre β üzerinde $\omega = adx$. Yukardaki şarttan dolayı da lokal olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}\, a\, dx = 0. \qquad (13.3.2.2)$$

Burada f, izah edildiği şekilde, reel eksen üzerinde bir kompakt desteği haizdir. Binaenaleyh, bütün W de $a = 0$, ve dolayısıyla $\omega \varepsilon \Omega^1{}_{co}$.

Pek tabii olarak $(-\infty, \infty)$ aralığı yerine herhangibir sonlu açık aralık ta alınabilirdi. Fakat f, kompakt bir cümlenin dışında sıfır olduğundan, $(-\infty, \infty)$ aralığını almakta bir beis yoktur.

TARİF 27. $\Omega^1{}_c$ ile $\Omega^1{}_{co}$ sınıfları arasında bir sınıf daha düşünülebilir. *Bu sınıf kenarlı bir Riemann yüzeyinin çevreleri boyunca periodları sıfır olan kapalı diferansyellerin sınıfıdır.*

Bu tip diferansyellere *yarı-tam* diyeceğiz, ve $\Omega^1{}_{se}$ ile göstereceğiz.

Teorem 13.3.2.2. $\Omega^1{}_{se}$, $*\Omega^1{}_{co} \cap *\Omega^1{}_e$ in ortogonal tamalayıcısıdır.

İspat. Yine (13.3.2.1) formülünü gözönüne alalım. Şayet $\omega \varepsilon \Omega^1_{se}$ ve $df \varepsilon \Omega^1_{co}$ ise (13.3.2.1) den dolayı $(\omega, *df) = 0$. Yani $\omega \perp *df$, ve dolayısıyla,

$$\Omega^1_{se} \perp (*\Omega^1_{co} \cap *\Omega^1_e).$$

Karşıt olarak, farzedelim ki,

$$\omega \perp (*\Omega_{co} \cap *\Omega^1_e).$$

Bu ortogonallik $\omega \perp *\Omega^1_{eo}$ ortogonalliğini intac eder. Bu da, teorem 13.3.2.1 in son kısmından dolayı $\omega \varepsilon \Omega^1_c$ yani $d\omega = 0$ eşitliğini intac eder.

Şimdi f, çevrelerin birinde 1, diğerlerinde ise sıfır değerini alan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için, (13.3.2.1) formülü, $d\omega = 0$ tutulduğu taktirde,

$$(\omega, *df) = \int_\beta \omega$$

şeklini alır. Fakat $df \varepsilon \Omega^1_{co} \cap \Omega^1_e$, ve $\omega \perp *df$ hipotezlerinden dolayı

$$\int_\beta \omega = 0.$$

O halde, $\omega \varepsilon \Omega^1_{se}$.

13.3.3. **Açık Riemanu Yüzeyleri.** Şüphesiz, açık $\mathcal{R}$ Riemann yüzeylerine ait, Ω^1_{co} ve Ω^1_{eo} sınıflarının tarifleri, mümkün olduğu kadar kompakt kenarlı Riemann yüzeyleri için verilen tariflere yakın olmalıdırlar. Bu itibarla, ideal sınır civarında, söz konusu diferansyellerin sıfır olma keyfiyetleri gözönünde tutulmalıdır. Bu noktai nazardan hareket ederek bir ω diferensiyelinin *desteğini* tarif edeceğiz. Destek kavramının tarifini hatırlatalım.

TARİF 28. W üzerinde bir *f fonksiyonunun desteği* diye, f nin, üzerinde sıfırdan farklı olduğu cümlenin *kapanışına* denir.

Başka bir deyimle, f nin desteği, dışında özdeş olarak sıfır olduğu bütün kapalı cümlelerin arakesitidir.

Bizi ilgilendirecek fonksiyonlar, *kompakt destekli fonksiyonlardır*, yani kompakt bir cümlenin dışında sıfır olan fonksiyonlardır.

Destek kavramı, ω diferansyellerine de tatbik edilebilir, zira bir diferansyelin bir noktada sıfır oluşu lokal değişkene tâbi değildir.

Dolayısıyla, bir ω *diferansyelinin desteği*, dışında sıfır olduğu *en küçük kapalı cümle*dir.

TARİF 29. $\omega \varepsilon \Omega^1_c$ kapalı diferansyeli Ω^1_{co} altısınıfına aittir yalnız ve yalnız kompakt bir desteği varsa.

$\omega = df \varepsilon \Omega^1_e$ tam diferansyeli, Ω^1_{eo} altsınıfına aittir yalnız ve yalnız f nin kompakt bir desteği varsa.

Teorem 13.3.3.1. Herhangibir Riemann yüzeyi için $\Omega^1_{co} \perp *\Omega^1_e$, ve Ω^1_c, $*\Omega^1_{eo}$ nun ortogonal tamamlayıcısıdır. Yani $\Omega^1_c \perp *\Omega^1_{eo}$ ve üstelik $\omega \perp *\Omega^1_{eo} \Rightarrow \omega \varepsilon \Omega^1_c$.

İpat. Ortogonalliği göstermek için, (13.3.2.1) formülü yerine göre, ω veya f nin desteklerini ihtiva eden bir altbölgeye tatbik edilir.

Ω^1_c, $*\Omega^1_{eo}$ nun ortogonal tamamlayıcısı olduğu keyfiyetine gelince, aynı formülde, $\omega \perp *\Omega^1_{eo}$ hipotezi gözönünde tutulursa, desteği bir V_q parametresinde bulunan herhangibir f için

$$\int_W \bar{f}\, d\omega = 0.$$

Teorem 13.3.1.1 deki muhakeme aynen tatbik edilebilir ve $d\omega = 0$, yani $\omega \varepsilon \Omega^1_c$ bulunur.

Dikkat edilirse, Teorem 13.3.3.1, teorem 13.3.2.1 in tam benzeri değildir. Nitekim, bu teoremde, $\omega \perp *\Omega^1_e$ farzedilirse, yukardaki tariflerden $\omega \varepsilon \Omega^1_{co}$ neticesini istihsal etmek mümkün değildir.

13.3.4. Ω^1 **uzayının tamamlanışı.** $\| \omega \|$ normu Ω^1 uzayını bir metrik uzay olarak ifade eder, şöyle ki, ω_1 ile ω_2 arasındaki uzaklık $\| \omega_1 - \omega_2 \|$ dir.

Bu metriğe (ölçüye) göre, bir (ω_n) dizisi ω ya yakınsaktır denir yalnız ve yalnız $\| \omega - \omega_n \| \to 0$ ise.

Hatırlatalım ki bir diziye *Cauchy dizisi* denir, şayet $m, n \to \infty$ için $\| \omega_m - \omega_n \| \to 0$ ise, ve *normlu* bir uzay *tam dır* şayet herbir Cauchy dizisi yakınsak ise, yani (ω_n) bir Cauchy dizisi ise, bir $\omega \varepsilon \Omega^1$ vardır öyle ki, $\| \omega - \omega_n \| \to 0$.

Bu durumda Ω^1 *tam değildir.* Bununla beraber, herhangi bir metrik uzay gibi, Ω^1 de tamamlanabilir.

Kesin olarak, Ω^1, katsayıları lokal koordinatlar cinsinden, C^1 sınıfından değil de, sadece *Lebesgue manada ölçülebilir* farzedilen $\omega = adx + bdy$ diferansyellerini Ω uzayına genişletmek suretiyle *tamamlanabilir.*

Ölçülebilen bir diferansyelin $\| \omega \|$ normu eskisi gibi tarif edilir. Üstelik farzedeceğiz ki, Ω yalnız *sonlu normlu* diferansyeller ihtiva ediyor.

Mutat olduğu veçhile, *iki diferansyle eşdeğer diyeceğiz*, yalnız ve yalnız, herbir koordinat sisteminde, katsayıları, en fazla, ölçüsü sıfır olan bir cümle üzerinde farklı iseler.

Bu kabule göre, bir parametre civarında,

$$\| \omega \| = 0 \text{ yalnız ve yalnız } \omega = 0,$$

ifadesinden, ölçüsü sıfır olan bir cümle hariç denilmek istenildiği anlaşılmalıdır.

Dolayısıyla, ω sembolü, eşdeğer diferansyellerin sınıfını temsil eder.

Nihayet, Ω nın tam olduğu gösterilebilirse, Ω nın bir Hilbert uzayı olduğu neticesine varılır.

Halbuki ω diferansyelleri üzerinde yapılan kabullerden ötürü, $\Omega = L^2(W)$. Yani, Ω, Lebesgue L^2 uzayıdır. Dolayısıyla, Ω tamdır. Zira, $(\omega_n) \subset \Omega$, bir Cauchy dizisi ise, $L^2(W)$ de Riesz-Fischer teoremi muteberdir. Bu teoreme göre, (bk. teorem 10.4.13.1)

$$\omega_n \varepsilon L^2(W),\ n = 1,2,\ldots,$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \| \omega_n - \omega_m \| = 0,$$

ise, bu takdirde $\omega \varepsilon L^2(W)$ bulunabilir, öyle ki,

$$\lim_{n\to\infty} \| \omega_n - \omega \| = 0.$$

4. Ortogonal izdüşüm metodu ve Weyl lemması

13.4.1. **Problemin tarihçesi.** Keyfi olarak verilmiş bir $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ Riemann yüzeyine ait birçok varlık problemlerinin ispatı *Dirichlet Prensibine* dayanmaktadır.

Farzedelim ki, $f \varepsilon C^1 \cap L^2(W)$, ve df nin normunun karesi

$$\| df \|^2 = \iint_W df * \overline{df}.$$

Burada, lokal olarak,

$$df * \overline{df} = | f_x |^2 + | f_y |^2,$$

ve bilindiği üzere

$$D_W[f] = \iint_W df * \overline{df},$$

f nin W üzerindeki *Dirichlet integrali*dir.

Dirichlet prensibine göre umumiyetle, belli bir fonksiyon sınıfı için Dirichtlet integralini minimum kılan, $\mathfrak{R}$ üzerinde harmonik bir fonksiyon vardır.

Bu prensibe dayanarak, 1851 de Riemann, ilk defa olarak, *$\mathfrak{R}$ üzerinde singüler noktaları önceden verilen harmonik ve analitik diferansyellerin varlığı* problemini ifade ve *ispat* etmiştir.

Ancak, 1870 de, *Weierstrass*, bir misal ile, Riemann'ın Dirichlet prensibi metoduna dayanan ispatının doğru olmadığını gösterdi.

1900 yılında, Dirichlet prensibine dayanan ilk doğru ispat *Hilbert* tarafından yapılmıştır.

Nihayet, 1940 ta Weyl, Riemann'ın bizzat kendi metodunun modern bir şekli olan *ortogonal izdüşümü* metodunu kullanarak çok daha uygun bir ispat vermiştir.

Artık son zamanlarda anlaşılmıştır ki, harmonik diferansyellerin varlık ispatları, integrasyon teorisinin basit hususlarıyla Hilbert Uzayı teorisinin basit neticelerinin bir arada mütalâa edilmelerinin direkt bir sonucudur.

13.4.2. **Ω sınıfının alt sınıfları.** Tam ve kapalı diferansyel kavramlarını Ω ya teşmil, ve aynı zamanda Ω^1_{eo} ve Ω^1_{co} altsınıflarının karşılığı olan Ω_{eo}, Ω_{co} alt sınıflarını tarif edeceğiz.

Bu tariflerin bir kısmı tamlığa, bir kısmı ise ortogonalliğe dayanmaktadır.

TARİF 30. Ω_e ve Ω_{eo} altsınıfları, Ω^1_e ve Ω^1_{eo} altsınıflarının Ω da kapanışlarıdır. Bunların aksine, Ω_c ve Ω_{co}, sırasıyla, $^*\Omega_{eo}$ ve $^*\Omega_c$ nın ortogonal tamamlayıcılarıdır.

Bu tariflere aşağıdaki dört ortogonal ayırımlar *postüle (kabul)* edilmiştir.

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_c \oplus {}^*\Omega_{eo} = {}^*\Omega_c \oplus \Omega_{eo} \\ \Omega &= \Omega_c \oplus {}^*\Omega_{co} = {}^*\Omega_e \oplus \Omega_{co}. \end{aligned} \qquad (13.4.2.1)$$

Derhal görülür ki $\Omega^1_{eo} \subset \Omega^1_e \Rightarrow \Omega_{eo} \subset \Omega_e$ ve ortogonal tamamlamalara geçerek $\Omega_{co} \subset \Omega_c$. Özel olarak, en son teoremden ötürü, $\Omega^1_e \perp {}^*\Omega^1_{eo}$. Dolayısıyla $\Omega_e \perp {}^*\Omega_{co}$ ve bu ortogonellikten dolayı, $\Omega_e \subset \Omega_c$ ve $\Omega_{eo} \subset \Omega_{co}$.

Yani Ω^1 sınıfına ait bütün *ihtiva bağıntıları*, Ω^1, Ω ya tamamlandığı taktirde, aynen muhafaza edilmektedirler.

Yine en son teoremin neticeleri olarak

$$\Omega^1_c \subset \Omega_c,\ \Omega^1_{co} \subset \Omega_{co}$$

ve teoremin son kısmından dolayı

$$\Omega_c \cap \Omega^1 = \Omega^1_c. \qquad (13.4.2.2)$$

Diğer taraftan,

$$\Omega_e \cap \Omega^1 = \Omega^1_e. \qquad (13.4.2.3)$$

Fakat bu son bağıntının aşikâr olmadığı *periodların* bahsinde görülecektir.

13.4.3. **Düzgünleştirme operatörü.** Bu kısımda bir operatör tarif edeceğiz, öyle ki bu operatör L^2 ye ait bir diferansyele tatbik edildiği takdirde bu diferansyel C^1 sınıfına ait bir diferansyele dönüşsün. Daha doğrusu ilk tatbikte, diferansyel, sürekli bir diferansyele dönüşüp ikinci tatbikte, C^1 e ait bir diferansyele dönüşecektir.

Farzediyoruz ki bütün f fonksiyonları düzlemin tamamında tariflidir, aksi halde, tarif bölgesinin dışında $f = 0$ vazedilerek f nin tarifi bütün düzleme teşmil edilmiş olur.

İntegrallenebilir bir f fonksiyonunu, ρ–yarıçaplı D-dairesi üzerinde

$$M_\rho f(z) = \frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^\rho\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})\,rdrd\theta = \frac{1}{\pi\rho^2}\int_D\int f(x+\xi,y+\eta)d\xi d\eta$$

ortalama değeri ile değiştirilen operatöre M_ρ diyelim.

M_ρ operatörü aşağıdaki hassaları haizdir, integraller bütün düzlem üzerinedir.

M1. $M_{\rho_1} M_{\rho_2} f = M_{\rho_2} M_{\rho_1} f$, yani M_ρ operatörü yer değiştirir.

M2. f veya g nin kompakt desteği varsa,

$$\int\int (M_\rho f)\,dxdy = \int\int f\,(M_\rho\, g)\,dxdy. \qquad (13.4.3.1)$$

M3. Şayet bir $\omega = adx + bdy$ diferansyeli için,

$M_\rho\omega = (M_\rho a)\,dx + (M_\rho b)\,dy$ yazılır, ve $f\varepsilon C^1$ ise, görülür ki

$$M_\rho(df) = d(M_\rho f).$$

M4. (13.4.3.1) yardımıyla,

$$(M_\rho\omega,\ df) = (\omega,\ M_\rho df) = (\omega,\ dM_\rho f).$$

M5. Herhangibir integrallenebilir f için, hemen hemen heryerde (Lebesgue ölçüsü sıfır bir cümle hariç demektir),

$$f(z) = \lim_{\rho\to 0} M_\rho\, f(z).$$

Veya $\omega\varepsilon L^2$ için

$$\lim_{\rho\to 0} \|\ \omega - M_\rho\ \omega\ \| = 0.$$

Bu hassalardan bazılarının ispatını verelim. Diğerleri aşikârdır.

M3 ün ispatı: Tarif gözönünde tutulursa, göstermemiz gerekir ki,

$$(M_\rho\, f_x)\,dx + (M_\rho\, f_y)\,dy = (M_\rho\, f)_x\,dx + (M_\rho f)_y\,dy.$$

Yani,

$$M_\rho\, f_x = (M_\rho\, f)_x,\ M_\rho\, f_y = (M_\rho\, f)_y.$$

Şimdi, $f\varepsilon C^1$ olduğundan, integral içerisinde türev almak için Leibnitz kaidesini tatbik edebiliriz, ve

$$(M_\rho\, f)_x = \frac{1}{\pi\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial x}\int_D\int f(x+\xi,\ y+\eta)\ d\xi\ d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi\rho^2}\int_D\int \frac{\partial}{\partial x} f(x+\xi,\ y+\eta)\ d\xi\ d\eta = M_\rho\, f_x.$$

M5 in ispatı: Bunun için göstermeliyiz ki $\rho \to 0$ için

$$\|\ \omega - M_\rho\ \omega\ \|^2 = \iint_{D_\rho} (|\ a - M_\rho\ a\,|^2 + |\ b - M_\rho\ b\,|^2)\ dxdy \to 0.$$

Veya,

$$\lim_{\rho\to 0}\ \iint_{D_\rho} |\ a - M_\rho a\,|^2\ dxdy = 0, \qquad \lim_{\rho\to 0}\ \iint_{D_\rho} |\ b - M_\rho b\,|^2\ dxdy = 0. \qquad (13.4.3.2)$$

Diğer taraftan, $a = a_1 + ia_2$ vazedilirse,

$$\iint_{D_\rho} |\ a - M_\rho\ a\ |^2\ dxdy = \iint_{D_\rho} (|a_1 - M_\rho\ a_1\ |^2 + |a_2 - M_\rho\ a_2\ |^2)\ dxdy.$$

Buradan da görülüyor ki $\rho\to 0$ için

$$\iint_{D_\rho} |a_1 - M_\rho\ a_1|^2\ dxdy \to 0$$

limitini ispat etmek kâfidir. Neticede, (13.4.3.2) de a ve b yi reel farzetmek kâfidir.

Halbuki, $a\varepsilon L^2$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ önceden verilirse, $\bar{D}$ de a ya *yaklaşık* sürekli bir g fonksiyonu bulunabilir, öyle ki

$$\iint_D |\ g - a\ |^2\ dxdy < \varepsilon^2.$$

Bu taktirde,

$$\left(\int_{D_\rho}\int (|\ a - M_\rho a\,|^2\ dxdy)^{1/2} \le \int_{D_\rho}\int |\ a - g\ |^2\ dxdy\right)^{1/2}$$

$$+ \left(\int_{D_\rho}\int |\ g - M_\rho\ g\ |^2\ dxdy\right)^{1/2}$$

$$+ \left(\int_{D_\rho}\int |\ M_\rho g - M_\rho a\ |^2\ dxdy\right)^{1/2}.$$

g, $\bar{D}$ de üniform sürekli olduğundan, bir $\delta > 0$ bulunabilir, öyle ki, $(x - x')^2 + (y - y')^2 < \delta^2$ ise

$$|\ g(x',\ y') - g\ (x,\ y)\ | < \varepsilon.$$

O halde, $\rho < \delta$ ise

$$|M_\rho\, g(x,y) - g(x,y)| = \left|\frac{1}{\pi\rho^2}\int_{D_\rho}\int (g(x+\xi,\ y+\eta) - g(x,\ y))\ d\xi d\eta\right|$$

$$\le \frac{1}{\pi\rho^2}\int_{D_\rho}\int |\ g(x+\xi,\ y+\eta) - g(x,\ y)\ |\ d\xi d\eta \le \varepsilon.$$

Bu eşitsizlik gözönünde tutulursa,

$$\left(\int\int_{D_\rho} | g - M_\rho g |^2 \, dxdy \right)^{1/2} < \sqrt{\pi}\, \varepsilon\rho .$$

Nihayet,

$$| M_\rho(g-a) |^2 = \left| \frac{1}{\pi\rho^2} \int\int_{D_\rho} (g(x+\xi, y+\eta) - a(x+\xi, y+\eta)) d\xi d\eta \right|^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{\pi\rho^2}\right)^2 \int\int_{D_\rho} | g(x+\xi, y+\eta) - a(x+\xi, y+\eta) |^2 \, d\xi d\eta < \left(\frac{\varepsilon}{\pi\rho^2}\right)^2,$$

ve dolayısıyla,

$$\left(\int\int_{D_\rho} | M_\rho g - M_\rho a |^2 \, dxdy \right)^{1/2} < \varepsilon .$$

Buradan, (13.4.3.2) limitlerinin doğru oldukları anlaşılır.

Weyl lemması. Farzedelim ki $\omega \varepsilon L^2(D)$, D: $| z | < 1$, ve D de *kompakt desteği* olan bütün $f \varepsilon C^2$ ler için $(\omega, df) = (\omega, * df) = 0$. Bu takdirde, hemen hemen heryerde, $\omega \varepsilon C^1$.

İspat. Desteği $| z | < 1 - \rho_1 - \rho_2$ de olan bir $f \varepsilon C^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım. M4 ve hipotezden dolayı

$$(M_{\rho_1} M_{\rho_2} \omega, df) = (\omega, d M_{\rho_1} M_{\rho_2} f) = 0 .$$

Burada $M_{\rho_1} M_{\rho_2} \omega \varepsilon C^1$, ve bunun bir neticesi olarak $M_{\rho_1} M_{\rho_2} \omega$ nın $| z | < 1 - \rho_1 - \rho_2$ ye tahdidi $^*\Omega^1{}_c$ sınıfına aittir. Aynı muhakeme $*\omega$ ya tatbik edildiği taktirde, görülür ki $M_{\rho_1} M_{\rho_2} \omega \varepsilon \Omega^1{}_c$. O halde $M_{\rho_1} M_{\rho_2} \omega$, $| z | < 1 - \rho_1 - \rho_2$ de harmoniktir.

Bir harmonik diferansyelin katsayıları harmoniktirler ve dolayısıyla, *ortalama değerine* eşittirler. Bu hassadan ötürü, $| z | < 1 - \rho - \rho_1 - \rho_2$ de

$$M_{\rho_1} M_{\rho_2} \omega = M_\rho M_{\rho_1} M_{\rho_2} \omega = M_{\rho_1} M_{\rho_2} M_\rho \omega .$$

Şimdi $\rho_1 \to 0$ yapılırsa, M5 ve süreklilikten dolayı,

$$M_{\rho_2} \omega = M_{\rho_2} M_\rho \omega .$$

Sonra, $\rho_2 \to 0$ yapılırsa, M5 ten dolayı, $|z| < 1 - \rho$ da, hemen hemen her yerde,

$$\omega = M_\rho \omega .$$

Fakat, üstteki eşitliğe M_ρ operatörü tekrar tatbik edilirse, $| z | < 1 - 2\rho$ da, hemen hemen her yerde,

$$\omega = M_\rho M_\rho \omega .$$

Halbuki $M_\rho M_\rho \omega \varepsilon C^1$. Binaenaleyh, $\omega \varepsilon C^1$.

Ω^1 *den* Ω *ya geçişi* sağlıyan *esas teorem* aşağıdadır.

Teorem 13.4.3.1., $\omega \varepsilon \Omega_c \cap {}^*\Omega_c$ ise, hemen hemen her yerde, C^1 e ait bir ω^1 diferansyeline eşittir. Dolayısıyla hemen hemen her yerde, ω bir harmonik diferansyeldir.

İspat. Teoremin son kısmı, yani ω, *hemen hemen her yerde bir harmonik diferansyeldir*, (13.4.2.2) nin bir neticesidir. Gerçekten, hemen hemen her yerde, ω, $\omega^1 \varepsilon C^1$ e eşitse, bu taktide $\omega^1 \varepsilon C^1$ ve ω aynı zamanda $\varepsilon\, \Omega_c \cap {}^*\Omega_c$ ve dolayısıyla $\omega^1 \varepsilon \Omega^1{}_c \cap {}^*\Omega^1{}_c = \Omega^1{}_h$.

Bundan sonra $\Omega^1{}_h$ yerine Ω_h yazarak, teoremin ifadesinden $\omega \varepsilon \Omega_h = \Omega_c \cap {}^*\Omega_c$ anlaşılacaktır.

Üstelik teorem lokal karakterdedir, zira, $\omega \varepsilon \Omega_c \cap {}^*\Omega_c$ ise, yani $\Omega^1{}_{eo}$ ve $^*\Omega^1{}_{eo}$ a ortogonal ise, bir V parametre dairesine tahdidi, $\Omega^1{}_{eo}(V)$, $^*\Omega^1{}_{eo}(V)$ ye ortogonaldir. Dolayısıyla ω nın V ye tahdidi $\Omega_c(V) \cap {}^*\Omega_c(V)$ arakesitine aittir.

O halde teorem V için ispat edilirse, yani V de $\omega \varepsilon C^1$ ise, V keyfi olduğundan bütün Riemann yüzeyinde $\omega \varepsilon C^1$.

Halbuki, Weyl lemmasından dolayı herhangibir parametre dairesinde, $\omega \varepsilon C^1$.

13.4.4. **Ortogonal ayırımlar.** Bu kısımda önemli bir hususu ispat etmek istiyoruz. Yani Ω_c, $\Omega^1{}_c$ in kapanışıdır.

$\Omega_{eo} \subset \Omega_c$ olduğundan, $\Omega_{eo} \perp {}^*\Omega_{eo}$. Şimdi şu teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 13.4.4.1. Ω uzayının tümünün aşağıdaki şekilde ortogonal ayırımları mümkündür.

$$\Omega = \Omega_h \oplus \Omega_{eo} \oplus {}^*\Omega_{eo}, \quad \Omega_c = \Omega_h \oplus \Omega_{eo} .$$

İspat. Biliyoruz ki, Ω_{eo}, $^*\Omega_{eo}$, Ω nın birer ortogonal altuzayı olduklarından, $\Omega_e \oplus {}^*\Omega_{eo}$ da Ω nın altuzayıdır. Bu taktirde

$$\Omega = (\Omega_{eo} \oplus {}^*\Omega_{eo}) \oplus (\Omega_{eo} \oplus {}^*\Omega_{eo})^\perp .$$

Fakat, § 13.4.1 deki tarifler de gözönünde tutulursa

$$(\Omega_{eo} \oplus {}^*\Omega_{eo})^\perp = \Omega^\perp_{eo} \cap {}^*\Omega^\perp_{eo} = \Omega_c \cap \Omega^*{}_c = \Omega_h .$$

Binaenaleyh,

$$\Omega = \Omega_{eo} \oplus {}^*\Omega_{eo} \oplus \Omega_h . \qquad (13.4.4.1)$$

Ω_c nin ortogonal ayrılımına gelince, (13.4.4.1) formülü, (13.4.2.1) formüllerinde

$$\Omega = \Omega_c \oplus {}^*\Omega_{eo}$$

ile karşılaştırılırsa,

$$\Omega_c = \Omega_h \oplus \Omega_{eo} .$$

Herbir $\omega \varepsilon \Omega$ elemanının ayrılımı isteniyorsa, (13.4.4.1.) förmülüne uyularak

$$\omega = \omega_{eo} + {}^*\omega_{eo} + \omega_h.$$

Bu notasyonda, ${}^*\omega_{eo}$, mutlaka ω_{eo} nun konjügesi değildir.

Şimdi, teorem 13.4.4.1 in bir neticesi olan aşağıdaki teoreme geçebiliriz.

Teorem 13.4.4.2 $\Omega_c = \bar{\Omega}^1{}_c$.

İspat. Daha önce, § 13.4.2 de işaret edilmişti ki $\Omega^1{}_c \subset \Omega_c$. Dolayısıyla,

$$\bar{\Omega}^1{}_c \subset \Omega_c.$$

Diğer taraftan,

$$\Omega_{eo} = \bar{\Omega}^1{}_{eo} \subset \bar{\Omega}^1{}_c,$$

$$\Omega_h = \Omega^1{}_h \subset \bar{\Omega}^1{}_c.$$

Bu ifadelerden, ve $\Omega_c = \Omega_h \oplus \Omega_{eo}$ dan ötürü

$$\Omega_c \subset \bar{\Omega}^1{}_c.$$

Dolayısıyla.

$$\Omega_c = \bar{\Omega}^1{}_c.$$

Bu demektir ki $\bar{\Omega}^1{}_c$, Ω_c de yoğundur.

13.4.5. **Bir devir boyunca period ve Ω_c sınıfı.** Biliyoruz ki $\omega \varepsilon C^1$ *kapalı bir diferansyel* ise, diferansyellenebilir bir c^1 deviri boyunca,

$$\int_{c_1} \omega$$

periodunun değeri, sırf c^1 in *homoloji sınıfına* tâbidir.

Bu sefer, period kavramını, Ω_c ye ait keyfi bir diferensyele teşmil edeceğiz.

Diferansyelin katsayıları ölçülebilir olmıyabilir, ve bundan dolayı da üstteki integral Lebesgue mânasında mevcut olmıyabilir. Bunun için period, $\Omega^1{}_c$ de tarifli farzedilip, süreklilikten faydalanarak Ω_c ye teşmil edilecektir. $\Omega^1{}_c$, Ω_c de yoğun olduğundan teşmil birtektir.

Bunun için göstereceğiz ki bahis konusu period, $\Omega^1{}_c$ *de bir lineer fonksiyoneldir.* İspat edebilirsek ki bu fonksiyonel sınırlıdır, o taktirde süreklidir, ve neticede $\Omega_c = \bar{\Omega}^1{}_c$ ye teşmil edilmiş olacaktır.

TARİF 31. Ω_0, *normlu* bir lineer uzay olsun. Ω_0 ın *tam* olması şart değildir. Hilbert uzayına ait bazı hususları, okuyucuya kolaylık olsun diye burada tekrar ediyoruz: Ω_0 *üzerinde bir lineer fonksiyonel* diye, Ω_0 da tarifli ve kompleks değerli bir L fonksiyonuna denir, şöyle ki

$$L(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 L\omega_1 + c_2 L\omega_2.$$

L fonksiyoneli *sınırlıdır*, şayet bir M sabiti varsa, öyle ki, bütün $\omega \varepsilon \Omega_0$ için

$$| L\omega | \leq M \| \omega \|.$$

Sınırlı bir fonksiyonel süreklidir zira $| L(\omega - \omega_0) | \leq M \| \omega - \omega_0 \|$, ve dolayısıyla

$$\| \omega - \omega_0 \| \leq \varepsilon \Rightarrow | L(\omega - \omega_0) | \leq M\varepsilon.$$

Karşıt olarak farzedelim ki L süreklidir. Bu taktirde bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$|L(\omega)| \leq 1.$$

Dolayısıyla, herhangibir $\omega \neq 0$ için

$$| L(\delta \| \omega \|^{-1} \omega) | = \delta \| \omega \|^{-1} | L\omega | \leq 1,$$

ve

$$| L\omega | \leq \delta^{-1} \| \omega \|.$$

Neticede, *bir lineer fonksiyonel sınırlıdır yalnız ve yalnız sürekli ise.*

Şimdi farzedelim ki Ω_0, daha geniş bir Ω uzayının bir lineer altuzayıdır. Ω_0 üzerinde sınırlı bir lineer L fonksyoneli derhal Ω da $\bar{\Omega}_0$ a teşmil edilebilir.

Gerçekten, herhangibir $\omega \varepsilon \bar{\Omega}_0$, $\omega_n \varepsilon \Omega_0$ elemanının limitidir. Diğer taraftan,

$$| L\omega_m - L\omega_n | = | L(\omega_m - \omega_n) | \leq M \| \omega_m - \omega_n \|.$$

Bu da gösteryor ki lim $L\omega_n$ mevcuttur. Üstelik ω_n dizisine tâbi değildir, ve

$$L\omega = \lim L\omega_n$$

verildiği taktirde, $L\omega$ nın lineer ve sınırlı olduğu anlaşılır.

Teorem 13.4.5.1. Period, $\Omega^1{}_c$ de sınırlı bir lineer fonksiyoneldir.

İspat. c^1 i analitik bir jordan eğrisi farzedelim, bu taktirde c^1 sonlu sayıda O_i parametre daireleriyle örtülebilir, öyle ki, h_i, O_i yi $| z | < 1$ dairesine, ve $O_i \cap c^1$ i dairenin reel çapına dönüştürür.

Ufak değişiklikler hariç, Dirichlet integralinde yapıldığı gibi, bu örtme uyarınca birimin bir bölünmesini inşa edeceğiz.

Yani kompakt destekli $e_i \varepsilon C^2$ fonksiyonları aranmaktadır, öyle ki, c^1 üzerinde $\Sigma\, e_i = 1$. Bunun için $g(z) = (1 - |z|^2)^3$ ve O_i de $g_i = g o h_i$, O_i nin dışında $g_i = 0$ vazedilir. Bu taktirde herbir $g_i \varepsilon C^2$.

Bu sefer, $\Sigma\, g_i$ ile bölemeyiz, zira $\cup\, O_i$ nin dışında bu toplam sıfırdır. Bu güçlüğü yenmek için, $\cup\, O_i$ nin kompakt sınırını, c^1 i kesmeyen sonlu sayıda O'_j parametre daireleri ile örtelim. Şayet h'_j, O'_j yi $| z | < 1$ e tasvir ediyorsa, $g'_j = g o h'_j$ vazedelim.

Bu taktirde c^1 üzerinde $g'_j = 0$ ve $\cup O_i$ de $\Sigma g_i + \Sigma g'_j > 0$.

Neticede O_i de,

$$e_i = \frac{g_i}{\Sigma g_i + \Sigma g'_j},$$

ve O_i nin dışında,

$$e_i = 0$$

seçelim. Bu taktirde c^1 üzerinde $\Sigma e_i = 1$ ve her $e_i \varepsilon C^2$. O halde

$$\int_{c^1} \omega = \sum_i \int_{c^1} e_i\, \omega.$$

Eşitliğin sağındaki herbir integral, parametre düzleminde bütün reel eksen boyunca alınmış farzedilebilir.

$d\omega = 0$ olduğundan, kısmi integral formülünden dolayı

$$\int_{c^1} e_i\omega = \iint (de_i)\, \omega.$$

Burada sağdaki integral, üst yarı düzlem üzerinedir.

Binaenaleyh, Schwarz eşitsizliğinden dolayı,

$$\left| \int_{c^1} e_i\omega \right| \leq \| de_i \| \, \| \omega \|,$$

ve i ye nazaran toplam alındığı takdirde

$$\left| \int_{c^1} \omega \right| \leq M \, \| \omega \|.$$

Burada M, yalnız c^1 e tâbidir.

Fakat $\int_{c^1} \omega$ yalnız *homoloji sınıfına* tâbidir. Dolayısıyla, üstteki eşitsizlik, c^1 in homoloji sınıfına ait herhangibir devir için yazılabilir.

Diğer taraftan biliyoruz ki, herhangibir devir, (sonlu sayıda) kendi kendini kesen bir kapalı analitik eğriye homologdur, veya, başka bir deyimle, basit kapalı analitik eğrilerin toplamı olan parça parça analitik bir kapalı eğriye homologdur. Bu eğride, herbir parça basit kapalı bir analitik eğridir. Eğrinin *kesiş noktaları*, eğrinin *köşeleridir*.

c^1 için yürütülen muhakeme bu eğri için de tatbik edilebilir. Ancak merkezleri (başlangıç noktaları) köşelerde bulunan parametre dairelerinin tasvirlerinde, bir köşe noktasını ihtiva eden eğri parçasının tasviri başlangıç noktasında diferansyellenemiyebilir. Bununla beraber (13.4.5.1) sağlanmakta olduğu görülür.

Binaenaleyh, göstermiş oluyoruz ki, *belli bir devir boyunca period*, Ω_c *ye teşmil edilebilen* $\Omega^1{}_c$ *üzerinde sınırlı bir lineer fonksiyoneldir.*

Bu neticeden istifade ederek (13.4.2.3) eşitliğini ispat edeceğiz.

Teorem 13.4.5.2. $\Omega_e \cap \Omega^1 = \Omega^1{}_e$.

İspat. $\omega \varepsilon \Omega_e \cap \Omega^1$ ise, $\omega \varepsilon \Omega_c \cap \Omega^1 = \Omega^1{}_c$, ve dolayısıyla herhangibir c^1 deviri boyunca ω nın $\int_{c^1} \omega$ periodu vardır. Tarif gereğince, ω, norma nazaran $\omega_n \varepsilon \Omega^1{}_e$ diferansyellerinin limitidir.

Halbuki, c^1 boyunca her ω_n nın periodu sıfırdır. Period sürekli bir fonksiyonel olduğundan, ω nın c^1 boyunca periodu sıfırdır. c^1 keyfi olduğundan teoremden dolayı $\omega \varepsilon \Omega^1{}_e$.

Teorem 13.3.1.1 i tamamlamak üzere, şayet $\mathfrak{R}$ kapalı, $\omega \varepsilon C^1$ ve $\omega \perp \Omega^1{}_c$ ise, bu taktirde, $\omega \perp \bar{\Omega}_c$. § 13.4.2 tarifden dolayı $\omega \varepsilon {}^*\Omega_{co} = {}^*\Omega_e$ ve üstteki teorem gözönünde tutulursa, $\omega \varepsilon {}^*\Omega^1{}_e$. Binaenaleyh, $\mathfrak{R}$ kompakt ise, $\Omega^1{}_c$ ve ${}^*\Omega^1{}_e$, Ω^1 in karşılıklı ortogonal tamamlayıcılarıdır.

O_{HD} **Riemann Yüzeyleri.** HD ve AD, Riemann yüzeyi üzerinde, sonlu Dirichlet integralini haiz harmonik ve analitik fonksiyonların sınıflarını gösterir.

Bir $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeyine O_{HD} veya O_{AD} sınıfındandır denir, şayet HD veya AD sınıfından, sabitten başka, hiçbir fonksiyon mevcut değilse.

Aşikâr olarak $O_{HD} \subset O_{AD}$, zira $f \varepsilon AD$ ise $Ref \varepsilon HD$.

Diğer taraftan her *kapalı Riemann yüzeyi* O_{HD} ve dolayısıyla O_{AD} sınıfındandır.

Şimdi, farzedelim ki, ω_e tamdır. Bu taktirde $\omega_e = \omega_h + \omega_{eo}$ ve dolayısıyla ω_h tamdır. Yani $\omega_h \varepsilon \Omega_h \cap \Omega_e$. Aynı şekilde, $\omega_{co} \varepsilon \Omega_{co}$ ise $\omega_{co} = \omega_h + \omega_{eo}$ ve bu sefer $\omega_h \varepsilon \Omega_h \cap \Omega_{co}$ neticesine varırız.

Diğer taraftan, $\Omega_{he} = \Omega_h \cap \Omega_e$, $\Omega_{ho} = \Omega_h \cap \Omega_{co}$ notasyonlarıyla

$$\Omega_e = \Omega_{he} \oplus \Omega_{eo}. \qquad (13.4.5.1)$$

ve

$$\Omega_{co} = \Omega_{ho} \oplus \Omega_{eo}. \qquad (13.4.5.2)$$

Birinci ayrılımdan, $\omega \varepsilon \Omega_{he} \Rightarrow \omega \varepsilon \Omega_e$, ve teorem 13.4.5.2 den dolayı, ω, Ω_e ye ait olmakla tam kalmayıp, periodları sıfır olma manasında da tamdır. Gerçekten,

$$\Omega_e \cap \Omega^1 = \Omega^1{}_c \Rightarrow \Omega_{he} = \Omega_h \cap \Omega_e = \Omega_h \cap \Omega^1{}_e.$$

Teorem 13.4.5.3. $\Omega_h = \Omega_{ho}$, $\Omega_c = \Omega_{co}$, $\Omega_e = \Omega_{eo}$ şartları muadildirler, ve sağlanmaktadırlar yalnız ve yalnız $\mathfrak{R} \varepsilon O_{HD}$ ise.

İspat. O_{HD} sınıfının tarifinden dolayı, $\mathcal{R}\varepsilon O_{DH}$ yalnız ve yalnız $\Omega_{he} = \varnothing$. $\Omega_h = \Omega_{ho} \oplus {}^*\Omega_{he}$ ayrılımı gösteriyor ki $\Omega_h = \Omega_{ho}$ yalnız ve yalnız $\Omega_{he} = \varnothing$ ise. Keza, (13.4.5.1) den dolayı $\Omega_{he} = \varnothing \Rightarrow \Omega_e = \Omega_{eo}$. Nihayet, (13.4.5.2) de $\Omega_{he} = \varnothing$, yani $\Omega_h = \Omega_{ho}$ şartı gözönünde tutulursa $\Omega_{co} = \Omega_h \oplus \Omega_{eo} = \Omega_c$ (Teorem 3.4.4.1).

Karşıt olarak $\Omega_e = \Omega_{eo}$, $\Omega_c = \Omega_{co}$ veya $\Omega_h = \Omega_{ho}$ şartlarının herbiri $\Omega_{he} = \varnothing$ şartını intac eder.

Doğurucu diferansyel. Hilbert uzayı teorisine göre, bir Ω Hilbert uzayında herbir sınırlı lineer fonksyonel,

$$L\omega = (\omega, \sigma)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\sigma\varepsilon\Omega$, sabit bir elemandır.

Bu teoremi, Ω_c ye teşmil edilebilen $\int_{c^1} \omega$ sınırlı lineer fonksiyoneline ve Ω_c uzayına tatbik edeceğiz. Binaenaleyh $\sigma\varepsilon{}^*\Omega_c$ $(*\sigma\varepsilon\Omega_c)$ bulunabilir öyle ki,

$$\int_{c^1} \omega = (\omega, *\sigma). \ \forall\ \omega\ \varepsilon\ \Omega_c.$$

Fakat period, bütün *tam* ω lar için sıfırdır. O halde,

$$*\sigma \perp \Omega_e.$$

Tarif gereğince (§ 13.4.2), bu demektir ki, $*\sigma\varepsilon{}^*\Omega_{co}$, $\sigma\varepsilon\Omega_{co}$. Dolayısıyla,

$$\sigma = \Omega_{co} \cap {}^*\Omega_c = \Omega_{ho}.$$

Teorem 13.4.5.4. Herbir c^1 devirine, Ω_{ho} sınıfından birtek reel harmonik σ diferansyeli tekabül eder, öyleki, *kapalı* bütün $\omega\varepsilon\Omega_c$ diferansyelleri için

$$\int_{c^1} \omega = (\omega, *\sigma). \qquad (13.4.5.3)$$

İspat. σ nın sadece reel olduğunu göstermemiz gerekir. Gerçekten, $\bar{\omega}$ nin periodu, ω nın periodunun kompleks konjügesi olduğundan

$$(\omega, *\sigma) = \overline{(\omega, *\bar{\sigma})} = (\omega, *\bar{\sigma}).$$

Teklik ten dolayı $\sigma = \bar{\sigma}$.

TARİF 32. (13.4.5.3) sağlandığı taktirde, σ ya, c^1 e bağlı *doğurucu diferansyel* diyoruz.

5. Schottky diferansyelleri

13.5.1. **Probleme giriş.** $\mathcal{R}_0 = (W_0, \Phi)$ açık bir Riemann yüzeyi, ve $W \subset W_0$ *düzgün* bir *bölge* olsun. Farzedelim $\mathcal{R} = (\overline{W}, \Phi)$ kenarlı bir Riemann yüzeyidir, öyle ki, $\overline{W}$ kompakt ve kenarı sonlu sayıda basit kapalı analitik eğrilerden müteşekkildir. Ustelik bu kenar $\overline{W}$ ve onun tamamlayıcısının ortak sınırı farzediliyor.

Gördük ki, W yi *yansıtarak* onun $\hat{W}$ çifti inşa edilebilir. $\hat{W}$ kapalı bir Riemann yüzeyidir.

$\mathcal{R}_0$ a ait birçok varlık teoremleri, önce W de veya onun çifti olan $\hat{W}$ de halledilir ve sonra limite geçilerek, yani $\mathcal{R}_0$, W lerle *tüketilerek* neticeler $\mathcal{R}_0$ a teşmil edilir.

W üzerindeki harmonik ve analitik diferansyelleri, $\hat{W}$ ye teşmil ederek elde edilen harmonik ve analitik diferansyellere *Schottky diferansyelleri* denir, ve $\Omega_s(W)$ ile gösterilir.

Açık Riemann yüzeylerinin tetkikinde, $\overline{W}$ ve Schottky diferansyellerinin rolleri bu suretle belirtilmiş oldu.

Yansımadan doğan $\hat{W}$ yi kendi üzerine dönüştüren j tasviri aşağıdaki hassayı haizdir.

$p \to h(p)$, $p\varepsilon O$, O nun bir parametre tasviri ise, $p \to \bar{h}(j(p))$, $p\varepsilon j(p)$, tarif bölgesi $j(p)$ olan bir parametre tasviridir. Burada $\bar{h}$, h nın kompleks konjügesidir.

$*$ operatörüne paralel bir $\sim$ operatörünü tarif ediyoruz, şöyle ki, $\hat{W}$ üzerindeki herbir

$$\omega = a(z)dx + b(z)dy,\ z = h(p),$$

diferansyeline, $\sim$ operatörü ile,

$$\sim\omega = a(\bar{z})\ dx - b(\bar{z})\ dy,\ z = \bar{h}(j(p)),$$

diferansyelini karşılık tutuyoruz.

$\sim$ invarienttir, zira $\sim\omega$, ω dan, $z \to \bar{z}$ yansımasıyla elde edilmiştir.

Aynı şekilde, *diferansyelleme* ve *dış çarpım* invarienttir.

Fakat *konjüge alma* keyfiyeti invarient değildir, çünki, tasvir direkt konform değildir.

Diğer taraftan,

$$\sim * \omega = -\ b(\bar{z})\ dx - a(\bar{z})\ dy = -\ (* \sim \omega).$$

TARİF 33. Diyoruz ki ω *çift*tir şayet $\sim\omega = \omega$, ve *tek*tir şayet $\sim\omega = -\ \omega$ ise.

$\hat{W}$ üzerinde bir ω diferansyeli, *çift* ve *tek* diferansyellere ayrılabilir, ve bu *ayrılım birtektir*. Gerçekten,

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}\,(\omega + \sim \omega),\ \omega_2 = -\ \tfrac{1}{2}\,(*\omega + \sim *\omega)$$

vazedilirse, görülür ki, ω_1 ve ω_2 *çiftirler*, ve

$$\omega = \omega_1 + *\omega_2 .$$

Üstelik bu ayrılım birtektir.

Şimdi, farzedelim ki ω tektir ve σ, $\Omega(\hat{W})$ sınıfına ait keyfi bir diferansyeldir. j tasvirinin yön değiştirdiği göz önünde tutulursa,

$$(\omega, \sigma)_{\hat{W}} = \int_{W \cup j(W)} \omega * \bar{\sigma} = \int_W \omega * \bar{\sigma} - \sim \omega \sim *\bar{\sigma}$$

$$= \int_W \omega (* \bar{\sigma} - * \sim \bar{\sigma}) = (\omega, \sigma - \sim \sigma)_W . \qquad (13.5.1.1)$$

13.5.2. $\Omega(W)$ *ve* $\Omega^1(\overline{W})$ **nin altsınıfları arasındaki bağıntılar.** Hatırlatalım ki, $\Omega^1(\overline{W})$ sınıfına ait bir diferansyel, yüzeyin kenarında da C^1 sınıfındandır, ve $\Omega^1{}_{co}(\overline{W})$, $\Omega^1{}_{eo}(\overline{W})$ altsınıfları, o şekilde tarif edilmişlerdi ki, diferansyellerin *kenar durumu*, kenar civarında değil, bizzat üzerinde belirtilmişti.

$\overline{W}$ üzerindeki diferansyeller, W ye tahdit edildikleri taktirde $\Omega^1(\overline{W})$ e, Ω^1 (W) in bir altuzayı nazarı ile bakılabilir. Bu özdeşliğe göre,

$$\Omega^1{}_{co}(W) \subset \Omega^1{}_{co}(\overline{W}), \ \Omega^1{}_{eo}(W) \subset \Omega^1{}_{eo}(\overline{W}).$$

Teorem 13.5.2.1. $\Omega^1{}_{eo}(\overline{W}) \subset \Omega_{eo}(W)$ ve $\Omega^1{}_{co}(\overline{W}) \subset \Omega_{co}(W)$.

İspat. (13.4.2.1) ayrılımlarından dolayı, yani

$$\Omega(W) = \Omega_{eo}(W) \oplus *\Omega_c(W) = \Omega_{co}(W) \oplus *\Omega_e(W),$$

$\Omega^1{}_{eo}(\overline{W})$ nin $*\Omega_c(W)$ ye ve $\Omega^1{}_{co}(\overline{W})$ nin $*\Omega_e(W)$ ye ortogonal olduklarını göstermemiz kâfidir.

Bunun için de, $*\Omega_c$ (W) ve $*\Omega_e$ (W) yerine bu cümlelerde yoğun olan $*\Omega^1{}_c$ (W) ve $*\Omega^1{}_e$ (W) altuzaylarını alabiliriz.

$\Omega^1{}_{eo}(\overline{W}) \perp *\Omega^1{}_c(W)$ bağıntısını ispatlayabilmek için farzedelim ki,

$$df \varepsilon \Omega^1{}_{eo}(\overline{W}) \text{ ve } \omega = adx + bdy \varepsilon \Omega^1{}_c(W).$$

Birimin bölünmesi yardımı ile, yani

$$f_i = e_i f \text{ ve } f = \Sigma f_i$$

vazetmek suretiyle, lokal olarak

$$(df_i, *\omega) = 0 \qquad (13.5.2.1)$$

bağıntısını göstermemiz kâfidir. Burada, Σ sonlu bir toplmamdır, ve herbir f_i nin desteği ya bir parametre dairesinin veya yarı dairenin içinde farzediliyor.

(13.5.2.1) bir parametre dairesi için aşikâr olduğundan, ispatın tamamı $|z| < 1$, $y \geq 0$ *yarı*-dairesine irca edilebilir.

f ve ω üzerindeki hipotezlerden ötürü

$$(df_i, *\omega) = -\lim_{\eta \to 0} \int_{y=\eta} f_i \bar{a} \, dx .$$

Veya,

$$(df_i, *\omega) = -\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \int_{0<y<\eta} f_i \bar{a} \, dxdy .$$

Fakat $y = 0$ için $f = 0$, ve $f \varepsilon C^1$ olduğundan bir M sabiti bulunabilir, öyle ki

$$|f_i| \leq My .$$

O halde,

$$\left| \frac{1}{\eta} \int_{0<y<\eta} f_i \bar{a} \, dxdy \right| \leq M \int_{0<y<\eta} |a| \, dxdy .$$

$|a| \varepsilon L^2$ olduğundan, sağdaki integral, $\eta \to 0$ için sıfıra gider. Buradan istenilen neticeye vasıl olunur.

Teoremin ikinci kısmına gelince, $df \varepsilon \Omega^1{}_c(W)$ ve $\omega \varepsilon \Omega^1{}_{co}(\overline{W})$ farzedelim. Yukarda olduğu gibi burada da $f_i = e_i f$ ve $f = \Sigma f_i$ vazedelim.

Bu taktirde,

$$(\omega, * df) = \int_{-1}^{1} \bar{f}_i \, adx .$$

Göstermeliyiz ki, $y \to 0$ için

$$\int_{-1}^{1} \bar{f}_i(x, y) \, adx \to 0 .$$

Birkere, $y \to 0$ için üniform olarak $a \to 0$. Diğer taraftan,

$$\int_{-1}^{1} |f_i| \, dx \leq \int_{-1}^{1} |f| \, dx .$$

Gösterebilirsek ki, e_i desteği üzerinde

$$\int_{-1}^{1} |f| \, dx < \infty ,$$

istenilen neticeye varmış oluruz.

Bunun için $|x| < 1$, $0 < y < 1$ dikdörtgenini gözönüne alalım. *df tam* olduğundan, $\int df$, *yol*'a tâbi değildir. Özel olarak bu *yol*, $y > 0$ ekseni üzerinde alınırsa

$$\int_y^1 df = \int_y^1 \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

Yani,

$$f(x,y) - f(x,1) = \int_y^1 \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

A, $|f(x,1)|$ in bir üst sınırı ise

$$|f(x, y)| \leq \int_y^1 \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| dy + A.$$

Öte yandan, *Schwarz eşitsizliği* de gözönünde tutulursa,

$$\int_{-1}^1 |f(x,y)|\, dx \leq \int_{-1}^1 \int_y^1 \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| dxdy + 2A \leq \| df \| + 2A < \infty .$$

Bu teoremden istifade edilerek aşağıdaki teorem ispat edilebilir.

Teorem 13.5.2.2. $\Omega_{ho}(W) = \Omega_{ho}(\overline{W})$. Burada $\Omega_{ho}(\overline{W}) = \Omega^1{}_{co}(\overline{W}) \cap {}^*\Omega^1{}_c(\overline{W})$.

İspat. Önce gösterelim ki $\Omega_{ho}(\overline{W}) \subset \Omega_{ho}(W)$. Gerçekten, teorem 13.5.2.1 den dolayı $\Omega^1{}_{co}(\overline{W}) \subset \Omega_{co}(W)$, ve § 13.4.2. gözönünde tutulursa, $\Omega^1{}_c(\overline{W}) \subset \Omega^1{}_c(W) \subset \Omega_c(W)$.

Dolayısıyla,

$$\Omega^1{}_{co}(\overline{W}) \cap {}^*\Omega^1{}_c(\overline{W}) \subset \Omega_{co}(W) \cap {}^*\Omega_c(W).$$

Yani,

$$\Omega_{ho}(\overline{W}) \subset \Omega_{ho}(W).$$

Şimdi, farzedelm ki, $\omega \varepsilon \Omega_{ho}(W)$. ω yı $\hat{W}$ ye temdit edelim, öyle ki, ω *tek* olsun (§ 13.5.1). ω ile göstermekte devam ettiğimiz bu temdit, $\Omega(\hat{W})$ da birtek eleman belirtir. *İddia ediyoruz ki* ω, $\hat{W}$ *üzerinde harmoniktir.* $\overline{W}$ nin *kenarında* tarifli olmıyan bu eleman süreklilik vasıtasıyla *kenarda* tarif edilebilir. *Tek* olduğundan *kenarda* sıfırdır ve dolayısıyla $\omega \varepsilon \Omega_{ho}(\overline{W})$.

Gerçekten, bir $\sigma \varepsilon \Omega^1{}_e(\hat{W})$ diferansyelini gözönüne alalım. Bu taktirde,

$$\sigma - \sim \sigma \varepsilon \Omega_{eo}(\overline{W}).$$

Teorem 13.5.2.1 den dolayı,

$$\sigma - \sim \sigma \varepsilon \Omega_{eo}(W).$$

Fakat, $\omega\, \varepsilon {}^*\Omega_c(W)$ olduğundan, W üzerinde, $\omega \perp \sigma - \sim \sigma$, ve (13.5.1.1) gözönünde tutulursa,

$$(\omega, \sigma)_{\hat{W}} = 0.$$

Öte yandan, $\omega\, \varepsilon \Omega_{co}(W)$ ve $*\sigma + * \sim \sigma\, \varepsilon {}^*\Omega_c(W)$,

$$(\omega, *\sigma)_{\hat{W}} = (\omega, * \sigma + * \sim \sigma)_W = 0$$

ortogonalliğini intac eder.

Neticede göstermiş oluyoruz ki, ω temditi aynı zamanda $\Omega^1{}_e(\hat{W})$ ve ${}^*\Omega^1{}_e(\hat{W})$ ya ortogonaldir ve dolayısıyla ω aynı zamanda, ${}^*\Omega^1{}_c$ ve $\Omega^1{}_c$ e aittir, yani harmoniktir. Yukardaki muhakemeden dolayı $\omega \varepsilon \Omega_{ho}(\overline{W})$. Dolayısıyla, $\Omega_{ho}(W) \subset \Omega_{ho}(\overline{W})$.

Teorem 13.5.2.3. $\Omega_s(W) = \Omega_{ho}(W) \oplus {}^*\Omega_{ho}(W)$.

İspat. $\hat{W}$ üzerinde, herhangibir ω diferansyeli *tek* ve *çift* kısımlara ayrılabilir. Gerçekten.

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}(\omega + \sim \omega), \quad \omega_2 = -\tfrac{1}{2}(* \omega + \sim * \omega)$$

vazedersek, ω_1 ve ω_2 *çift*tirler, ve

$$\omega = \omega_1 + * \omega_2.$$

Bu ayrılımın birtek olduğunu gösterelim. Şayet $\omega_1 + * \omega_2 = 0$ ise, $\omega_1 + i * \omega_1$ lineer kombinezonu $\omega_1 + i\omega_2$ şeklini alır. $\omega_1 + i\omega_2$ analitik ise, *adz* şeklindedir. *Kenar çevrelerinde* sıfır olduğuna göre $a=0$ dır. Yani $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Şimdi, farzedelim ω, $\overline{W}$ üzerinde harmoniktir. Bu taktirde, ω_1 ve ω_2 harmoniktirler. Üstelik, $* \omega_1$, $* \omega_2$ *tek* olduklarından $\overline{W}$ nin kenar çevreleri boyunca sıfırdır. Bu demektir ki, $\overline{W}$ veya W ye tahditleri $\Omega_{ho}(\overline{W}) = \Omega_{ho}(W)$ sınıfındandır. Dolayısıyla, $\omega = \omega_1 + * \omega_2$ ayrılımında, bileşenlerin biri $\Omega_{ho}(W)$ sınıfından, diğeri ${}^*\Omega_{ho}(W)$ sınıfındandır.

Karşıt olarak, $\Omega_{ho}(\overline{W})$ veya ${}^*\Omega_{ho}(\overline{W})$ sınıfına ait herhangibir diferansyel, *yansıtılarak* $\hat{W}$ ya *devam* ettirilebilir, ve dolayısıyla harmonik kalır.

Neticede, $\hat{W}$ ye devam edilebilen, W üzerindeki harmonik diferansyellerin bütünü $\Omega_{ho}(W) \oplus {}^*\Omega_{ho}(W)$ *direkt toplamı* şeklindedir.

$\Omega(W)$ nın alt uzayları olarak $\Omega_{ho}(W)$ ve ${}^*\Omega_{ho}(W)$ ortogonal değildirler. Fakat bu alt uzayların elemanlarının temditleri, sırasıyla, tek ve çift olduklarından, bu temditler, $\hat{W}$ üzerinde ortogonaldirler. İşte, bu sebeptendir ki

$$\Omega_{ho}(W) \cap {}^*\Omega_{ho}(W) = \varnothing$$

ve Hilbert uzayı teorisine göre de $\Omega_s(W)$ kapalıdır.

Yukardaki teoremin, açık bir Riemann yüzeyine teşmilini incelemeden önce, bu yüzeyler üzerinde, belli singülariteleri ve periodları haiz, harmonik ve analitik diferansyellerin varlığını göstereceğiz.

B Ö L Ü M XIV

DİFERANSİYEL

1. Varlık Teoremleri

14.1.1. **Probleme Giriş.** Bir $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeyi verildiği taktirde, $\mathfrak{R}$ nin üzerinde, *tek değerli harmonik veya analitik fonksiyonların varlığı problemi* mevzuu bahistir.

Tek değerlilik, genelliğe halel getirmez, zira çokdeğerli fonksiyonlar, $\mathfrak{R}$ nin uygun bir örtme yüzeyinde tekdeğerlidirler.

Böyle olmaka beraber, meseleyi doğrudan doğruya ele alarak, problemin mahiyeti hakkında daha geniş bir bilgiye sahip olunabilir.

Meselâ kompleks integraller, dalları arasındaki fark birer sabit olan, *çok değerli fonksiyonlar* belirtirler.

Bu tip çokdeğerli fonksiyonların tekdeğerliliğe iadeleri, bütün dikkati integral içerisinde bulunan diferansyel üzerine toplamakla mümkün olabilecektir.

Gerçekten, diferansyelin, Riemann yüzeyi üzerindeki *devirler* boyunca *periodları* olup, bu *periodlar*, Riemann yüzeyinin bir örtme yüzeyine müracaat edilmeksizin, doğrudan doğruya tetkik edilebilir.

Bu noktai nazardan, tekdeğerli analitik fonksiyonlar, *periodu sıfır* olan diferansyellere, harmonik fonksiyonlar ise, periodu sırf imajiner olan diferansyellere tekabül ederler.

14.1.2. **Singüler diferansyeller.** Varlık teoremlerini en genel hali ile ele alabilmek için, singülerlikleri olan harmonik ve analitik difetansyelleri de hesaba katmak mecburiyetindeyiz.

Singüler diferansyellerin ayrı bir önemi de, periodlarla singülerlikler arasındaki *ikili bağıntının* tesisindedir.

En son incelemelerde görülecektir ki bu *ikili bağıntı* topolojik hassalara dayanmaktadır. İşte bu sebepten dolayıdır ki, önceden *verilmiş period ve singülerlikleri* haiz *kapalı diferansyellerin inşası* ile meşgul olacağız.

Klasik kapalı Riemann yüzeylerinin esas problemi, diferansyellerin period ve singülerliklerinden hareket ederek, harmonik ve analitik diferansyelleri inşa etmektir.

Bu düşünceyi, açık Riemann yüzeylerine teşmil edebilmek için bazı tahdit edici şartlar üzerinde durulacaktır. Bu tahditler, yüzeye değil sadece diferansyellere ait olacaklardır.

TARİF 1. $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ Riemann yüzeyi üzerinde bir p_0 noktasını gözönüne alalım. Klasik fonksiyonlar teorisinde, singüler noktaların tarifine benzer şekilde, p_0 noktası, θ_0 diferansyeli için bir singüler noktadır denir, şayet θ_0, p_0 ın p_0 da noktalanmış bir V civarında tarifli ise.

Bu takdirde θ_0; p_0 da bir singülerlik tarif ediyor denir.

θ, V de tarifli diğer bir diferansyel ise, θ, θ_0 singülerliğini haizdir, veya ayni singülerliği tarif eder diyoruz, yalnız ve yalnız, $\theta - \theta_0$, V_0 da kare integrallenebilirse. Yani $\theta - \theta_0 \varepsilon L^2(V)$ ise.

Şayet, θ_0 kendisi $L^2(V)$ sınıfından ise, bu takdirde tarif ettiği singülerliğe *kaldırılabilir* denir.

θ_0, V de *harmonik* ise, p_0 da bir *harmonik singülerlik* tarif ediyor denir. Aynı şekilde, θ_0, V de *analitik* ise, p_0 da bir *analitik singülerlik* tarif ediyor denir.

TARİF 2. φ bir analitik diferansiyel ve $\overline{\varphi}$ onun kompleks konjügesi olsun. $\overline{\varphi}$ ye *antianalitik* de denir. φ_1, φ_2 analitik iseler $\varphi_1 + \overline{\varphi}_2$ harmoniktir.

Karşıt olarak, bir ω harmonik diferansyelinden başlıyarak,

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}(\omega + i *\omega)$$
$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2}(\overline{\omega} + i *\overline{\omega})$$

vazedelim. Bu taktirde, $\omega = \varphi_1 + \overline{\varphi}_2$ harmoniktir.

Herbir *harmonik diferansyel* bir ve birtek şekilde bir *analitik* ve bir de *antianalitik* diferansyelin toplamı olarak gösterilebilir.

Bu ayrılışın birtek olduğuna gelince, şayet $\varphi_1 = -\overline{\varphi}_2$ ise, $*\varphi_1 = -*\overline{\varphi}_2$. Yani $-i\varphi_1 = -i\overline{\varphi}_2$, ve dolayısıyla $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Üstteki tariflere göre, herbir θ_0 harmonik diferansyeli, yalnız V de tarifli olmasına rağmen, biri analitik diğeri antianalitik olmak üzere

$$\theta_0 = \varphi_0 + \overline{\psi}_0$$

bu iki diferansyelin toplamı şeklinde gösterilebilir.

Üstelik,

$$\| \theta_0 \|^2 = \| \varphi_0 \|^2 + \| \psi_0 \|^2$$

yazılabildiğinden, θ_0 *kaldırılabilir* bir singülerliği haizdir, yalnız ve yalnız, aynı hassa φ_0 ve ψ_0 için de varit ise.

Gayemiz, harmonik singülerlikleri verilmiş, *global* olarak tarifli harmonik diferansyellerin inşasıdır. Bunun için de, harmonik singülerliği φ_0 ve harmonik singülerliği ψ_0 olan iki harmonik diferansyelin inşaları kâfi gelecektir.

Şu halde, θ_0 ın analitik farzedilmesi genelliği bozmaz.

14.1.3. **Laurent açılımı.** Farzedelim ki, bir lokal değişken, p_0 ı $z=0$ a dönüştürecek şekilde, merkezi p_0 da olan bir parametre dairesini $|z| < 1$ dairesine tasvir ediyor. § 13.2.8, tarif 24 ten ötürü $\theta_0 = fdz$ yazılabilir. Burada f, $0 < |z| < 1$ halkasında (tek değerli) analitiktir. Dolayısıyla, f nin, $0 < |z| < 1$ de bir Laurent açılımı vardır

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n}.$$

Diğer taraftan, $r < |z| < 1$ halkasında,

$$\|fdz\| = 4\pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} (1 - r^{2n+2}) \mid a_n \mid^2 + \mid a_{-n} \mid^2 \log \frac{1}{r} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-2} (r^{2-2n} - 1) \mid a_{-n} \mid^2 \right) .$$

Binaenaleyh singülerlik kaldırılabilir yalnız ve yalnız bütün a_{-n} ler 0 ise.

En genel analitik singülerlik, Laurent açılımının

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} dz$$

esas kısmı ile gösterilir.

Bu esas kısımda, yalnız sonlu sayıda a_{-n} ler sıfırdan farklı iseler, singülerlik bir *kutup*tur diyoruz.

Singülerlik problemini o şekilde ele alacağız ki sınır durumu da dahil edilmiş olsun. Aşağıdaki teorem, problemi, *sadece kapalı diferansyellerle ilgili* bir probleme irca etmektedir, ve bu cihetten *son derece* önemlidir.

Teorem 14.1.3.1. θ, *sonlu sayıda analitik singülerlikleri* olan *kapalı* bir diferansyel olsun. Bu taktirde τ harmonik diferansyeli vardır öyleki, $\tau - \theta \varepsilon \Omega_{eo}$. τ birtektir.

İspat. $\theta - i * \theta$, *singülerlikler* ve *ideal sınır* civarında özdeş olarak sıfırdır. Dolayısıyla, $\theta - i * \theta \varepsilon L^2(W)$, yani $\theta - i * \theta \varepsilon \Omega$. *Esas ayrılım teoremi*nden dolayı,

$$\theta - i * \theta = \omega_h + \omega_{eo} + * \omega_{eo}.$$

Bu denklemi,

$$\theta - \omega_{eo} = i * \theta + \omega_h + * \omega_{eo}$$

şeklinde yazarsak, görürüz ki, denklemin solundaki diferansyel kapalı, sağındaki ise ko-yan kapalıdır. Şu halde, *singüler nokta* ihtiva etmiyen herhangibir bölgede, $\tau = \theta - \omega_{eo}$ harmoniktir.

τ, birtektir. Gerçekten, τ_1, τ_2, iki çözüm olduklarına göre, $\tau_1 - \tau_2 \varepsilon \Omega_{eo}$ ve harmoniktir. Dolayısıyla özdeş olarak sıfırdır.

Bütün tatbikatlarda, θ, kompakt bir cümlenin dışında özdeş olarak sıfır farzedilecektir. Böylece θ, ve dolayısıyla τ nun yalnız sonlu sayıda periodları sıfır olacaktır. Başka bir deyimle, bir homoloji tabanı vardır öyleki τ, bu tabanın, sonlu sayıda devirler hariç, bütün diğerlerinde periodu sıfırdır.

14.1.4. **Diferansyellerin nev'i ve ikinci nev'i diferansiyel.** Mutat olduğu üzere analitik diferansyeller üç nev'iye ayrılırlar.

Birinci nev'i diferansyeller, singülerlikleri olmıyan diferansyellerdir.

İkinci nev'i diferansyeller, sıfır kalıntılı (rezidü) $a_{-1} = 0$, kutupları olan diferansyellerdir.

Üçüncü nev'i diferansyeller, singülerlikleri keyfi kutuplar olan diferansyellerdir.

İkinci nev'i diferansyellerin incelenmesinde, aşağıdaki nev'iden kutuplar gözönüne alacağız.

$$\frac{dz}{(z - \zeta)^{n+2}}, \; n \geq 0. \qquad (14.1.4.1)$$

Bu ifade, z, lokal değişkendir, ζ ise, singüler noktadaki z nin değeridir. Harmonik diferansyellerin yalnız varlıklarıyla meşgul olunmak istenilse idi, $\zeta=0$ almakla iktifa edilebilirdi. Fakat esas gayelerden biri, çözümü, ζ ya olan bağlılığı ile birlikte incelemektir.

Şimdi, $|\zeta| < r_1 < r_2 < 1$ dairelerini gözönüne alalım. Bir $e(z)$ arafonksiyonunu şöyle tarif edelim: $|z| < 1$ de $e(z) \varepsilon C^2$ ve

$$e(z) \equiv \begin{cases} 1, & |z| < r_1 \\ 0, & |z| > r_2 \end{cases}$$

$e(z)$ in tarifi, $\Delta : |z| < 1$ in dışında, $e(z) \equiv 0$ vazederek, bütün W ye teşmil edilebilir.

Diğer taraftan, Δ da

$$v_n = - \frac{1}{n+1} \frac{1}{(z - \zeta)^{n+1}}$$

ve

$$\theta_n = d(ev_n) = v_n\, de + \frac{e\, dz}{(z-\zeta)^{n+2}}$$

ve W–A da $\theta_n = 0$ vazedelim.

Bu taktirde, θ_n kapalı, C^1 sınıfından ve (14.1.4.1) analitik singülerliğini haizdir. Üstelik tamdır, ve kompakt bir cümlenin dışında sıfırdır. Teorem 14.1.3.1 den dolayı, tek bir τ_n harmonik diferansyeli bulunabilir öyleki, $\tau_n - \theta_n \varepsilon \Omega_{eo}$.

φ_n, ψ_n analitik olmak üzere,

$$\tau_n = \omega_n + \psi_n$$

ayrılımı kullanılırsa, görülür ki, φ_n, (14.1.4.1) singülerliğini haiz ve $\psi_n \varepsilon L^2(W)$.

Dikkat edilirse, τ_n, φ_n, ψ_n, $e(z)$ ara-fonksiyonunun seçimine bağlı değildirler. Gerçekten, $e'(z)$ başka bir fonksiyon ise, θ_n yerine $\theta'_n = d(e'v_n)$ yazılır, ve $\theta'_n - \theta_n = d[(e'-e)\, v_n] \varepsilon \Omega^1_{eo}$. Dolayısıyla, τ_n de değişiklik yoktur.

Şimdi farzedelim ki $\alpha = a\, dz \varepsilon L^2(W)$, analitik bir diferansyeldir.

Lemma 14.1.4.1 $(\alpha, \psi_n) = \dfrac{2}{(n+1)\,!}\, a^{(n)}(\zeta)$, $\forall \alpha \varepsilon \Omega_a$.

İspat. $(\alpha, \psi_n) = (\alpha, \bar{\tau}_n - \bar{\varphi}_n)$. Singülerlik olması idi, $(\alpha, \bar{\varphi}_n) = 0$ olurdu, zira integral içerisinde bulunan $\alpha * \varphi_n = -i\alpha\varphi_n$ diferansyeli özdeş olarak sıfırdır.

O halde, merkezi ζ da, r-yarıçaplı daireyi W den çıkarırsak W–δ da $(\alpha, \psi_n) = (\alpha, \bar{\tau}_n)$ ve dolayısıyla,

$$(\alpha, \psi_n) = \lim_{r \to 0} (\alpha, \bar{\tau}_n)_{W-\delta},$$

Notasyonu basitleştirmek maksadıyla, limiti, *Cauchy limiti* olarak $(\alpha, \bar{\tau}_n)$ şeklinde yazmakta devam edeceğiz.

$\tau_n - \theta_n \varepsilon \Omega_{eo}$ olduğundan *esas ayrılım teoremin*den ötürü

$$(\alpha, \bar{\tau}_n - \bar{\theta}_n) = 0.$$

Yani,

$$(\alpha, \bar{\tau}_n) = (\alpha, \bar{\theta}_n) = (\theta_n, \bar{\alpha}).$$

Fakat $|z| < r_1$ için $\theta_n\, \alpha = 0$, çünki θ_n analitiktir, ve $|z| > r_2$ için $\theta_n\, \alpha = 0$. Çünki $\theta_n = 0$. Binaenaleyh.

$$(\theta_n, \bar{\alpha}) = i \iint\limits_{r_1 \le |z| \le r_2} d(ev_n)\, \alpha = i \int\limits_{|z|=r_1} v_n\, \alpha$$

$$= -\frac{i}{n+1} \int_{|z|=r_1} \frac{a\,dz}{(z-\zeta)^{n+1}}$$

Cauchy integral formülünden dolayı

$$(\alpha, \psi_n) = (\theta_n, \bar{\alpha}) = \frac{2\pi}{(n+1)!}\, a^{(n)}(\zeta).$$

ψ_n diferansyellerinin bu hassasına *doğurucu* hassa denir.

14.1.5. **Doğurucu çekirdek.** Lemmada, $n=0$ yapalım. Görülür ki

$$(\alpha, \psi_0) = 2\pi a(\zeta). \qquad (14.1.5.1)$$

φ_n, ψ_n diferansyellerinin, z lokal değişkenine ve aynı zamanda ζ ya tâbi olduklarını ifade ile

$$\varphi_n = h_n(z, \zeta)\, dz$$
$$\psi_n = k_n(z, \zeta)\, dz$$

yazarsak (14.1.5.1) formülü

$$\frac{i}{2\pi} \iint\limits_W a(z)\, \overline{k_0(z-\zeta)}\, dz\, d\bar{z} = a(\zeta)$$

şeklini alır. Nihayet, $dz\, d\bar{z} = -2i\, dxdy$ notasyonu kullanılarak, üstteki ifade

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_W a(z)\, \overline{k_0(z-\zeta)}\, dxdy = a(\zeta) \qquad (14.1.5.2)$$

tarzında yazılabilir.

TARİF 3. $\overline{k_0(z, \zeta)}$ ya **doğurucu çekirdek** denir.

Şimdi $\zeta' \varepsilon$ W başka bir nokta olsun. (14.1.5.2) formülünde

$$a(z) = k_0(z, \zeta')$$

vazedilirse

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_W k_0(z, \zeta')\, \overline{k_0(z, \zeta)}\, dxdy = k_0(\zeta, \zeta')$$

olur. ζ ile ζ' yer değiştirirse, $k_0(\zeta', \zeta) = \overline{k_0(\zeta, \zeta')}$ bulunur. Veya, notasyon değiştirerek,

$$k_0(z, \zeta) = \overline{k_0(\zeta, z)}. \qquad (14.1.5.3)$$

Bu simetriden görülüyorki $k_0(z, \zeta)$, ζ ya nazaran *antianalitiktir*. Üstelik, $k_0(\zeta, z)\, d\zeta$, ζ da seçilen lokal değişkene tâbi olmadığından, aynı şey $k_0(z, \zeta)\, d\bar{\zeta}$ için doğrudur. Bu taktirde, diyebiliriz ki,

$$k_0(z, \zeta)\, dz d\bar{\zeta} \qquad (14.1.5.4)$$

çift diferansyeli, iki değişkenin değişmesine nazaran invarienttir.

Teorem 14.1.5.1. $\overline{k_n(\zeta, z)} = \dfrac{1}{(n+1)!} \dfrac{d^n}{dz^n} k_0(z, \zeta)$.

İspat. (14.1.5.1) formülünü $\alpha = \psi'_n = k_n(z, \zeta')\, dz$ diferansyeline tatbik edersek,

$$(\psi'_n, \psi_0) = 2\pi k_n(\zeta, \zeta')$$

buluruz. Diğer taraftan, lemma 14.1.4.1. den dolayı

$$(\psi_0, \psi'_n) = \frac{2\pi}{(n+1)!} \frac{d^n}{d\zeta'^n} k_0(\zeta', \zeta).$$

Bu iki ifade karşılaştırıldığı ve notasyon da değiştirildiği taktirde istenilen netice hasıl olur.

Görülüyor ki, $k_n(\zeta, z)$, k_0 ın mükerrer türevidir ve ζ ya nazaran antianalitiktir.

Benzer bir netice, $\varphi_n = h_n(z, \zeta)$ ile de elde edilir. Önce aşağıdaki lemmayı ispat edelim.

Lemma 14.1.5.1. (α, φ_n) mevcut ve sıfıra eşittir.

İspat. Herbir integralin bir mâna taşıdığını farzederek aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$(\alpha, \varphi_n) = (\alpha, \varphi_n + \bar{\psi}_n) = (\beta, \tau_n) = (\alpha, \theta_n).$$

Burada, (α, θ_n), $|z| \leq r_2$ üzerinedir, fakat merkezi ζ da, r-yarıçaplı daire çıkarılmıştır. Bu dairenin çemberini γ ile gösterirsek,

$$(\alpha, \theta_n) \equiv (\bar{\theta}_n, \bar{\alpha}) = -i \int\int \bar{\theta}_n\, \alpha = -i \int\int d(\bar{v}_n\, \bar{e}) =$$

$$\lim_{r \to 0} \left(\frac{i}{n+1} \int_\gamma \frac{a dz}{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n+1}} \right).$$

Fakat γ üzerinde, $\bar{z} - \bar{\zeta} = r^2/(z - \zeta)$. Dolayısıyla en son integral sıfırdır, ve

$$(\alpha, \varphi_n) = 0.$$

Bu formül, daha evvel de işaret ettiğimiz gibi, *Cauchy limiti* olarak muteberdir, yani, merkezi ζ da olan bir dairenin çıkarıldığı farzedilmiştir.

Teorem 14.1.5.2. $h_n(z, \zeta) = \dfrac{1}{(n+1)!} \dfrac{d^n}{dz^n} h_0(z, \zeta)$.

İspat. ζ' ikinci bir nokta olsun. Lemma 14.1.5.1 den dolayı

$$(\psi', \varphi_0) = (\psi'_0, \varphi_n) = 0.$$

Buradan,

$$(\tau_n, *\bar{\tau}_0) = (\varphi_n + \bar{\psi}_n, i\, \bar{\varphi}'_0 - i\, \psi'_0) = 0.$$

Diğer taraftan, ζ ve ζ' nün civarları birbirini kesmiyor farzedilirse,

$$(\tau_n - \theta_n, *\bar{\tau}'_0 - *\bar{\theta}'_0) = 0.$$

Çünki $\tau_n - \theta_n \,\varepsilon\, \Omega_{eo}$, $*\bar{\tau}'_0 - *\bar{\theta}'_0 \varepsilon *\Omega_c$ ve $(\theta_n, *\bar{\theta}'_n) = 0$.

Dolayısıyla,

$$(\tau_n, *\bar{\theta}'_n) + (\theta_n, *\bar{\tau}'_0) = 0,$$

veya,

$$(\theta_n, *\bar{\tau}'_0) = (\theta'_0, *\bar{\tau}_n).$$

Fakat,

$$(\theta_n, *\bar{\tau}'_0) = \lim_{r \to 0} \int_\gamma v_n\, \bar{\tau}'_0 = \lim_{r \to 0} \left(\frac{-1}{n+1} \int_\gamma \frac{h_0(z, \zeta')\, dz + \overline{k_0(z, \zeta')}\, d\bar{z}}{(z - \zeta)^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{-2\pi i}{(n+1)!} \frac{d^n}{d\zeta^n} h_0(\zeta, \zeta).$$

Aynı şekilde,

$$(\theta'_0, *\bar{\tau}'_n) = \lim_{r' \to 0} \left(-\int_{\gamma'} \frac{h_n(z, \zeta)\, dz + \overline{k_n(z, \zeta)}\, d\bar{z}}{z - \zeta'} \right)$$

$$= -2\pi i h_n(\zeta', \zeta).$$

Binaenaleyh, notasyon değişikliği ile

$$h_n(z, \zeta) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^n}{d\zeta^n} h_0(\zeta, z).$$

$n = 0$ için bu formül simetriktir, yani

$$h_0(z, \zeta) = h_0(\zeta, z).$$

Bir üstteki formülde, bu simetri gözönünde tutulursa, teorem elde edilir.

14.1.6. **Diferansiyel ve zincirler.** Bu kısımda göstereceğiz ki herbir *c zincirine kompakt destekli kapalı* bir $\theta = \theta(c)$ diferansyeli tekabül eder.

θ, *rezidüleri* ∂c nin katsayılarına eşit basit kutupları haizdir, ve, Ω_{eo} sınıfına ait diferansyeller hariç, birtektir.

Üstelik, $\theta(c)$ ye tekabül eden birtek $\tau = \tau(c)$ *harmonik* diferansyeli vardır öyle ki $\tau - \theta \varepsilon \Omega_{eo}$.

Rezidünün tarifini hatırlatalım.

TARİF 4. θ bir singüler diferansyel ve ζ analitik singülerliği olsun. ζ etrafında Laurent açılımının

$$\sum_1^\infty a_{-n} (z - \zeta)^{-n}\, dz$$

esas kısmındaki a_{-1} katsayısına θ nın ζ daki rezidüsü denir.

Bu rezidü, seçilen lokal değişkene bağlı değildir. Gerçekten γ, ζ yı içine alan kapalı bir eğri olduğuna göre

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \theta.$$

Farzedelim ki, θ, sonlu sayıda ζ_j analitik singülerlikleri olan *kapalı* bir diferansyeldir. ζ_j deki rezidüleri a^j_{-1} olsun ve farzedelim ki θ nın kompakt bir desteği vardır. G, kompakt desteği ihtiva eden W de düzgün bir bölge ise,

$$\sum_j a^j_{-1} = \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \theta = \frac{1}{2\pi i} \int_G \theta = 0.$$

Zira, θ, G de kapalı olduğundan Green teoremine göre,

$$\int_{\partial G} \theta = \int_G d\theta = 0.$$

Dolayısıyla, *kompakt destekli kapalı* bir θ *diferansyelinin mevcut olabilmesi için rezüdülerin toplamı sıfır olmalıdır.*

Özel Hal. Aşağıdaki,

$$\left(\frac{1}{z-\zeta_2} - \frac{1}{z-\zeta_1}\right) dz$$

singülerliğini gözönüne alalım. Burada, ζ_1, ζ_2, $|z| < 1$ üzerine tasvir edilen aynı Δ parametre dairesindedirler. § 14.1.4 te yapıldığı gibi, bir $e(z)$ arafonksiyonunu seçelim, ve farzedelim ki $|\zeta_1|$, $|\zeta_2| < r_1 < r_2 < 1$. Şimdi $r_1 < |z| < 1$ de,

$$v = \log \frac{z-\zeta_2}{z-\zeta_1}$$

nin bir tekdeğerli dalını tesbit ettikten sonra, θ diferansyelini şu şekilde tarif edelim.

$$\theta = \begin{cases} |z| \leq r_1 \text{ için } \left(\dfrac{1}{z-\zeta_2} - \dfrac{1}{z-\zeta_1}\right) dz \\ r_1 < |z| < 1 \text{ için } d(ev) \\ \Delta \text{ nın dışında } 0 \end{cases} \qquad (14.1.6.1)$$

Görülür ki ζ_1, ζ_2 hariç, $\theta \varepsilon C^1$ ve $d\theta = 0$.

Teorem 14.1.3.1 den dolayı, tek bir τ harmonik diferansiyeli vardır öyleki $\tau - \theta \varepsilon \Omega_{eo}$. Burada θ ve τ, W–Δ da tamdır, fakat W de tam değildir.

Diğer taraftan γ herhangibir devir ise, γ_0 $\overline{\Delta}$ da ve γ_1 W – Δ da olmak üzere

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$$

şeklinde yazılabilir. Bu takdirde γ boyunca period, γ_0 boyunca perioda eşittir. Fakat γ_0 a, $|z| < 1$ üzerinde bir devir nazarıyla bakılabilir. O halde, θ nın ve dolayısıyla τ nun periodu

$$2\pi i(n(\gamma_0, \zeta_2) - n(\gamma_0, \zeta_1)).$$

Bu neticenin arakesit sayısı ile (§ 12.5.1) tefsiri isteniyorsa, ζ_1, ζ_2, Δ içinde bir c eğrisiyle birleştirilir, c, Δ nın bir K üçgenlemesine ve γ_0 da K nın K^* ikilisine ait olduğu farzedilir. Böylece, $c \times \gamma_0$ arakesit sayısı tarif edilmiş olur.

Neticede şu teoremi elde etmiş oluyoruz.

Teorem 14.1.6.1. θ (veya τ) nun, periyodu W – $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ üzerinde her hangibir γ deviri boyunca $2\pi i$ $(c \times \gamma)$ sayısına eşittir.

İspat. Yukardaki muhakemelerden ötürü,

$$n(\gamma_0, \zeta_2) - n(\gamma_0, \zeta_1) = c \times \gamma_0 = c \times \gamma.$$

Görülüyorki, singülerlikler, sadece ∂c sınırına bağlıdırlar, ve θ, τ, φ $(\tau = \varphi + \overline{\psi})$, rezidüleri, ∂c deki katsayılara eşit, basit kutupları haiz diferansyellerdir. Dolayısıyla, diferansyeller, regüler (yani harmonik veya analitik) dir yalnız ve yalnız c bir devir ise.

§ 14.1.4 te yaptığımız gibi, burada da α bir analitik diferansyel olmak üzere (α, φ) ve (α, ψ) yi hesaplıyacağız. Yukarda olduğu gibi c yi Δ da farzedeceğiz.

(α, ψ) **nin hesabı.** Yine

$$(\alpha, \psi) = (\alpha, \overline{\tau}) = (\alpha, \overline{\theta})$$

eşitlikleri caridir. Fakat $|z| < r_1$ için $\alpha\theta = 0$ olduğundan, $(\alpha, \overline{\theta})$ iç çarpımını temsil eden integral, sadece $r_1 < |z| < r_2$ halkası üzerinedir. $\alpha = adz$ gözönünde tutulursa

$$(\alpha, \overline{\theta}) = (\theta, \overline{\alpha}) = -i \iint_{r_1<|z|<r_2} d(ev)\, \alpha = i \int_{|z|=r_1} v\alpha$$

$$= i \int_{|z|=r_1} vda = -i \int_{|z|=r_1} adv$$

$$= -i \int_{|z|=r_1} a \left(\frac{dz}{z-\zeta_2} - \frac{dz}{z-\zeta_1}\right) = 2\pi\,(a(\zeta_2) - a(\zeta_1))$$

$$= 2\pi \int_c \alpha.$$

Dolayısıyla, ψ nin doğurucu hassasını elde etmiş bulunuyoruz. Yani

$$(\alpha, \psi) = 2\pi \int_c \alpha. \qquad (14.1.6.2)$$

(14.1.6.2) formülünde, $\alpha = \psi_0 = k_0(z, \zeta)\, dz$ seçelim. Bu taktirde,

$$(\psi_0, \psi) = 2\pi \int_c k_0(z, \zeta)\, dz$$

τ, φ, ψ lerin c ye tâbi olduklarını hatırlatmak maksadıyla, $\tau = \tau(c)$, $\varphi = \varphi(c)$, $\psi = \psi(c)$ yazalım. (14.1.5.1) formülünde $\alpha = \psi = k(z,c)dz$ vazedilirse,

$$(\psi, \psi_0) = 2\pi k\ (\zeta, c)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\overline{k\,(\zeta, c)} = \int_c k_0(z, \zeta)\, dz$$

veya notasyon değiştirerek,

$$k(z, c) = \int_c k_0(z, \zeta)\, d\zeta. \qquad (14.1.6.3)$$

(14.1.6.2) ve (14.1.6.3) formülleri keyfi zincirler için de caridir. Ancak, bu hususta şu kabulleri yapmak zorundayız.

İster simpleks ister singüler, keyfi c *zincirlerine* $\tau(c)$ nin tarifinin teşmili hususunda $c \to \tau(c)$ tasvirini *lineer* kabul edeceğiz. Yani,

$$\tau(c_1 + c_2) = \tau(c_1) + \tau(c_2).$$

Aynı kabul, $\varphi(c)$ ve $\psi(c)$ notasyonlarının teşmili için de yapılabilir. $\theta(c)$ ye gelince, bu diferansyelin, $\Omega^1{}_{eo}$ sınıfına ait bir diferansyel farkla belirtilmiş olduğunu hatırlatırız.

(α,φ) **nin hesabı.** (α,ψ) hesabında olduğu gibi burada da

$$(\alpha, \varphi) = (\alpha, \tau) = (\alpha, 0)$$

$\gamma_1, \gamma_2; \zeta_1, \zeta_2$ etrafında küçük çemberler olduklarına göre,

$$(\alpha, \theta) = \int\int da\ \bar{\theta} = \lim \left(- i \int_{\gamma_1+\gamma_2} a\bar{\theta} \right)$$

$$= \lim \left(-i \int_{\gamma_1+\gamma_2} a \left(\frac{d\bar{z}}{\bar{z}-\bar{\zeta}_2} - \frac{d\bar{z}}{\bar{z}-\bar{\zeta}_1} \right) \right) =$$

$$= \lim \left(i \int_{\gamma_1+\gamma_2} a \left(\frac{dz}{z-\zeta_2} - \frac{dz}{z-\zeta_1} \right) \right)$$

$$= -2\pi\ (a\ (\zeta_2) - a\ (\zeta_1)) = -2\pi \int_c \alpha.$$

Dolayısıyla,

$$(\alpha, \varphi) = -2\pi \int_c \alpha. \qquad (14.1.6.4)$$

(14.1.6.2) formülü ile (14.1.6.4) formülü karşılaştırılırsa, keyfi bir ω harmonik diferansyeli için $(\omega, *\tau)$ hesaplanabilir. Netekim, $\omega = \alpha + \bar{\beta}$ standard ayrılımından

$$(\omega, *\tau) = (\alpha + \bar{\beta}, -i\varphi + i\psi) = i(\alpha, \varphi) - i(\bar{\beta}, \bar{\psi})$$

bulunur, ve dolayısıyla,

$$(\omega, *\tau) = -2\pi i \int_c \omega. \qquad (14.1.6.5)$$

Nihayet, $h(z, c)$ için (14.1.6.3) integral gösterilimine benzer bir formül istihsal edelim. (14.1.5.5) formülü ile (14.1.6.4) gözönünde tutulursa,

$$(\tau_0, *\bar{\tau}) = (\varphi_0 + \bar{\psi}_0, i\bar{\varphi} - i\psi) = i(\varphi_0, \bar{\psi}) - i(\bar{\psi}_0, \bar{\varphi}) = 2\pi i \int_c \bar{\psi}_0\,.$$

Diğer taraftan, $\Omega_c \perp *\Omega_{eo}$ ortogonal bağıntısı gözönünde tutulursa

$$(\tau_0 - \theta_0, *\bar{\tau} - *\bar{\theta}) = 0.$$

Sonra, θ_0 ve θ destekleri ayrık farzedilebilir, ve bu taktirde

$$(\theta_0, *\bar{\theta}) = 0.$$

Binaenaleyh,

$$(\tau_0, *\bar{\tau}) = (\tau_0, *\bar{\theta}) + (\theta_0, *\bar{\tau})$$
$$= -i\ (\varphi_0, \bar{\theta}) - i\ (\bar{\psi}_0, \theta) - i\ (\varphi, \bar{\theta}_0) + (\bar{\psi}, \bar{\theta}_0).$$

Bu iç çarpımlar, § 14.1.6 ve § 14.1.5 deki metodlarla hesaplanabilirler, ve neticede,

$$(\varphi_0, \bar{\theta}) = -2\pi \int_c \varphi_0$$

$$(\bar{\psi}_0, \bar{\theta}) = -2\pi \int_c \bar{\psi}_0$$

$$(\varphi, \bar{\theta}_0) = 2\pi h\ (\zeta, c)$$

$$(\bar{\psi}, \theta_0) = 0$$

bulunur.

Bütün bu neticeler bir araya getirildiği taktirde,

$$h(z, c) = -\int_c h_0(z, \zeta)\, d\zeta. \qquad (14.1.6.6)$$

14.1.7. **Diferansyel ve Period.** Şimdi farzedelim ki c bir devirdir. Bu taktirde işaret ettiğimiz gibi $\tau(c)$, $\varphi(c)$ ve $\psi(c)$ *regülerdirler.*

Teorem 14.1.7.1. c sonlu bir *devir* ise, bu taktirde

$$\varphi(c) = -\psi(c)$$

ve

$$\sigma(c) = \frac{1}{2\pi i}\tau(c) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\varphi(c).$$

Sonlu herhangibir devir çifti için

$$(\sigma(c_1), *\sigma(c_2)) = c_1 \times c_2$$

İspat. (14.1.6.5) formülünü standard

$$\int_c \omega = (\omega, *\sigma(c))$$

(teorem 13.4.5.4) formülü ile karşılaştırırsak,

$$\tau(c) = 2\pi i\sigma(c)$$

bulunur.

Fakat $\sigma(c)$ reel olduğundan, $\tau(c)$ sırf imajinerdir. Yani $\operatorname{Re}\{\varphi(c) + \psi(c)\} = 0$. Fakat $\varphi(c) + \psi(c)$ analitik olduğundan,

$$\psi(c) = -\varphi(c),$$

ve

$$\sigma(c) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\varphi(c) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\psi(c).$$

Diğer taraftan, *özel hali* incelerken görmüştük ki, bir γ deviri boyunca $\tau(c)$ nin periodu

$$\int_\gamma \tau(c) = 2\pi i\,(c \times \gamma).$$

Bu formülde $c = c_1$ ve $\gamma = c_2$ vazedersek

$$(\sigma(c_1), *\sigma(c_2)) = c_1 \times c_2 .$$

Yani $\sigma(c)$ nin *periodları* evvelemirde *tam sayılardır*.

Kapalı yüzeyler için, görmüştük ki (teorem 12.4.4.2), $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ 1-devirleri, H^1-homoloji grubunun bir homoloji tabanını teşkil ediyorlardı.

§ 12.5.1 de ise gösterdik ki, sıfır olmıyan yegâne ara kesit sayıları $a_n \times b_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots, g$.

Teorem 14.1.7.1 den dolayı $\sigma(a_n)$ nin b_n boyunca periodu 1, $\sigma(b_n)$ nin a_n boyunca periodu -1 dir, ve herbirinin homoloji tabanına ait diğer bütün devirler boyunca periodları sıfırdır.

Arakesit sayısı kavramına göre, $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ homoloji tabanı, bir *kanonik homoloji tabanıdır*. Bu en son kavramın tarifini hatırlatıyoruz.

Bir yüzey üzerinde, a_i, b_i çiftlerinden müteşekkil sonlu veya sonsuz bir devir dizisine *kanonik* denir, şayet

$a_i \times a_j = b_i \times b_j = 0$. $a_i \times b_i = 1$ ve $i \neq j$ için $a_i \times b_j = 0$ ise.

Bir kanonik dizinin elemanları, *homolojiye göre*, daima *lineer bağımsızdır*. Zira $\Sigma\,(x_i a_i + y_i b_i) \approx 0$ bağıntısı, a_j ve b_j ile arakesiti alındığı takdirde, bütün j ler için $y_i = x_j = 0$ verir.

Bir *kanonik dizi* aynı zamanda bir *taban* ise, bu diziye *kanonik homoloji tabanı* denir.

14.1.8. **Belli periodları olan harmonik diferansyeller.** Bu tip diferansyellerin varlığını ispat edelim.

Teorem 14.1.8.1. Bir *kanonik tabanın*, sonlu sayıda a_n, b_n devirleri boyunca belli periodları haiz, bütün diğer devirlerinde ise, periodları sıfır olan bir *yarıtam harmonik* diferansyel vardır. Bu diferansyelin $*\Omega_{ho}$ sınıfına ait olması şartı da koşuluyorsa, birtektir.

İspat. Hatırlatalım ki, bu tip diferansyeller, *kenarlı Riemann yüzeyleri* için tarif edilmişlerdir, şöyleki *yarıtam* diferansyeller $\overline{W}$ nin kenar çevreleri boyunca periodları sıfır olan *kapalı* diferansyellerdir.

Şimdi, $\tau = \Sigma\,(y_n\,\sigma(a_n) - x_n\,\sigma(b_n))$ nin a_n, b_n devirleri boyunca periodları x_n, y_n dır. Diğer taraftan,

$$\tau = \tau_{he} + *\tau_{ho}$$

yazabiliriz. Görülüyor ki, $*\Omega_{ho}$ sınıfına ait $*\tau_{ho}$ yegâne çözümdür.

Bu ispat, *yarı tam diferansyellerin* tarifi, $\mathfrak{R}$ *açık Riemann yüzeylerine* taşındığı takdirde, bu yüzeyler için de aynen muteberdir.

$\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ açık bir Riemann yüzeyi olsun.

TARİF 5. *Singüler Homoloji teorisinde*, bir γ devirine *bölen* bir devirdir diyoruz, yalnız ve yalnız, herhangibir $E \subset W$ kompakt cümlesi için, γ, E nin tamamen dışında bulunan bir devire *homolog* ise.

Başka bir deyimle, γ, W yi *böler*, şayet γ, onu ihtiva eden herhangibir *düzgün G bölgesinin sınırına* ait bir devire homolog ise.

TARİF 6. Periodları, *bölen devirler* boyunca sıfır olan bütün harmonik diferansyellerin sınıfı Ω_{hse} ile tarif edilir. Bu hassayı haiz bir ω diferansyeline *yarıtam* denir.

Bir ω yarıtam diferansyelinin bir G altbölgesine *tahdidini* düşünelim. Bu tahdit, G de yarıtam bir diferansyeldir, şayet G nin çevreleri *bölen devirler* ise, yani G kanonik bir bölge ise.

Hatırlatalım ki, *düzgün bir bölgeye kanonik denir* şayet *tamamlayıcısının* herbir *bileşeninin* birtek çevresi varsa.

Esas varlık teoremine geçmeden önce (§ 14.2.4) bazı boşlukları dolduracağız.

14.1.9 **Harmonik ölçüler.** Kompakt $\overline{W}$ kenarlı yüzeyleri bahisinde, teorem 13.3.2.2 de ispat ettik ki, $\Omega'_{se}(W)$, yarıtam diferansyellerin sınıfı, $^*\Omega^1_{co}(\overline{W}) \cap {}^*\Omega^1_{c}(\overline{W})$ arakesitinin ortogonal tamamlayıcısıdır.

Sadece *harmonik diferansyeller* bahis konusu iseler, yukardaki neticenin karşılığı, $\Omega_{hse}(\overline{W})$ harmonik yarı tam diferansyellerin sınıfı, $^*\Omega_{ho}(\overline{W}) \cap {}^*\Omega_{he}(\overline{W})$ arakesitinin ortogonal tamamlayıcısıdır.

$\Omega_{ho} \cap \Omega_{he}$ uzayının basit bir tefsiri vardır. Gerçekten $\omega \varepsilon \Omega_{ho} \cap \Omega_{he}$ ise, ω tamdır, yani $\omega = du$, ve u, herbir çevrede sabit olan bir harmonik fonksiyondur. Bu takdirde, u, çevrenin birinde 1, diğerlerinde 0 olan harmonik fonksiyonların bir lineer kombinezonu şeklinde yazılabilir.

TARİF 7. Çevrelerin birinde 1, diğerlerinde sıfır olan harmonik fonksiyonlara, *harmonik ölçüler* denir.

$\Omega_{ho} \cap \Omega_{he}$ uzayına ise, harmonik ölçülerin uzayı denir ve $\Omega_{hm}(\overline{W})$ sembolu ile gösterilir.

Teorem 13.3.2.2 den dolayı, $\Omega_{hse}(\overline{W})$ ve $^*\Omega_{hm}(\overline{W})$ *ortogonal tamamlayıcıdırlar.*

Bu teoremi açık Riemann yüzeylerine teşmil edebilmek için, yaklaşık bir metod kullanacağız. Bunun için önce W yı *düzgün* veya *kanonik* G bölgeleriyle *tüketmeğe* çalışacağız. Sonra, $\Omega_{hm}(W)$ sınıfını o şekilde tarif edeceğiz ki, $\omega \varepsilon \Omega_{hm}(W)$, yalnız ve yalnız, her $\varepsilon > 0$ ve *her kompakt E cümlesi* için bir *kanonik* $G \supset E$ bölgesi ve bir $\omega_{hm}(G)\ \varepsilon \Omega_{hm}(G)$ *harmonik ölçüsü* bulunabilir, öyleki,

$$\| \omega - \omega_{hm}(G) \|_G < \varepsilon.$$

2. Varlık Teoremleri ve Esas Varlık Teoremi

14.2.1. **Sayılabilir bir tabanın varlığı.** § 14.1.8 de bir $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ Riemann yüzeyi üzerinde sabit olmıyan bir u harmonik fonksiyonunun varlığını ispat ettik.

Bunun neticesi olarak aşağıdaki teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 14.2.1.1. Herbir $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ Riemann yüzeyinin sayılabilir bir *tabanı* vardır.

İspat. W_∞, W nin üniversel örtme yüzeyi olsun. W_∞ basit irtibatlı olduğundan, u nun, W_∞ üzerinde, bir *v tekdeğerli konjüge harmonik fonksiyonu* vardır. $f = u + iv$ analitik fonksiyonu, W_∞ u, düzlemin bir örtme yüzeyi olarak tarif eder. Halbuki sayılabilir bir yüzeyin örtme yüzeyi de sayılabilir (teorem 11.4.9.2). O halde, W_∞ sayılabilir, ve dolayısıyla W izdüşümü de sayılabilir.

Şimdi, $\mathfrak{R}$ nin *düzgün altbölgelerle tüketilebileceğini* gösterelim.

Teorem 14.2.1.2. Herbir açık Riemann yüzeyi üzerinde, bir sonsuz W_n düzgün altbölge dizisi vardır öyle ki $\overline{W}_n \subset W_{n+1}$ ve $W = \cup_1^\infty W_n$.

İspat. W nin sayılabilir sonsuzlukta, V_n parametre daireleriyle örtüldüğünü farzedelim. Bir n_k tam sayı dizisi tesbit edelim. öyle ki, $n_1 = 1$ ve n_k şu şartı sağlıyan en küçük tam sayı olsun.

$$\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{n_{k-1}} \subset V_1 \cup \ldots \cup V_{n_k}.$$

Böyle bir n_k daima vardır, zira $\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{n_{k-1}}$ kompakttır ve $n_k > n_{k-1}$. Çünki W açıktır.

Şimdi,

$$G_k = V_1 \cup \ldots \cup V_{n_k}$$

vazedelim. Tarif şartından dolayı, $\overline{G}_k$ kompakt,

$$\overline{G}_k \subset G_{k+1}$$

ve

$$\cup_1^\infty G_k = W.$$

V_i nin sınırını β_i ile gösterelim. W konform bir strüktürü haiz olduğundan, β_i ler analitiktirler, ve farklı farzedilebilirler. Dolayısıyla, $\beta_1, \ldots, \beta_{n_k}$ sonlu sayıda noktalarda kesişirler. β_i üzerindeki bürtün kesiş noktalarını gözönüne alalım. Müteakip her iki kesiş noktası β_i nin bir β_{ij} yayını belirtir. Aşağıda sunacağımız muhakemenin genelliğine halel getirmemek maksadıyla, bölünmemiş bulunan herhangibir β_i üzerinde iki nokta işaret edelim. Bu tedbir de alındıktan sonra, bir V_r ye nazaran $r \neq i$, $r \leq n_k$, β_{ij} yaylarının iç kısımları, V_r nin ya içindedir veya dışında. Dolayısıyla, görülür ki, G_k nın Γ_k sınırının bütünü sonlu sayıda β_{ij} yaylarından ve belki de sonlu sayıda noktalardan müteşekkildir. Fakat, aslında bu noktalar β_i lerin teğet oldukları noktalardır, ve V_i ler bu noktaların civarında değiştirilerek bu tip noktalar ortadan kaldırılabilir.

$G_{k+1} - \overline{G}_k$ cümlesi, $\Gamma_k \cup \Gamma_{k+1}$ ile sınırlanmış olup, bu sınırın hiçbir bileşeni bir noktaya müncer değildir.

Dolayısıyla, $G_{k+1} - \overline{G}_k$ nın herbir bileşeninde Γ_k da 0, ve Γ_{k+1} de 1 değerlerini alan bir *harmonik ölçü* vardır. Bu harmonik ölçüyü u_k ile göstereceğiz, ve G_k da $u_k = 0$ vazetmek suretiyle tarifini tamamlayacağız.

η_k, $0 < \eta_k < 1$, bir sabit olduğuna göre, $u_k < \eta_k$ değerlerine tekabül eden W_k cümlesi açık bir cümledir ve $\overline{G}_k \subset W_k \subset G_{k+1}$.

Dolayısıyla, $\overline{W}_k \subset W_{k+1}$ ve $\cup_1^\infty W_k = W$.

Bu sefer iddia ediyoruz ki, W_k nın herbir *bileşeni* η_k uygun bir şekilde seçildiği takdirde, *düzgün olarak dahil* bir bölgedir.

G, $G_{k+1} - \overline{G}_k$ nın bir bileşeni olsun, öyleki, G nin sınırının bir kısmı Γ_k, bir kısmı da Γ_{k+1} de olsun. Böylece u_k, G de sabit olamaz. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} - i\,\frac{\partial u_k}{\partial y}$$

değişken değişimine nazaran invarient olup yanlız *ayrık* noktalarda *sıfırdır*.

Bu takdirde, η_k yı o şekilde seçebiliriz ki, $u_k = \eta_k$ *seviye eğrisi* bu noktaların hiçbirinden geçmesin.

$u_k = \eta_k$ seviye eğrisi üzerinde herhangibir z_0 noktasını gözönüne alalım. z_0 ın bir civarında, $u_k - \eta_k$ nın konjuge harmonik fonksiyonunu v_k ile gösterelim ve

$$f(z) = -i\,(u_k - \eta_k) + v_k$$

vazedelim. Bu takdirde $f(z)$ analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ dır. Binaenaleyh, z_0 ın bir V civarı vardır, öyleki V de $f(z)$ birebirdir ve $\operatorname{Im} f(z) = 0$ yalnız ve yalnız $z \varepsilon V \cap \partial G$. Bu ise *düzgün dahil olma* şartıdır.

W_k irtibatlı olmıyabilir. Fakat W nin, *düzgün dahil bölgelerle* tüketilmesi, W_k yerine V yi ihtiva eden bileşeni almak suretiyle sağlanabilir. Üstelik, $W - W_k$ nın kompakt bileşenleri de dahil edilirse, W nin *düzgün bölgelerle* tüketilmesi sağlanmış olur.

Bu teoremin neticesi olarak aşağıdaki teoremi söyliyebiliriz.

Teorem 14.2.1.3. W de herbir *kompakt* cümle, bir düzgün bölgeye dahildir.

İspat. $A \subset W$, bir kompakt cümle olsun. W_n ler A nın bir örtmesidir. A kompakt olduğundan sonlu sayıda W_n ler A yı örter. Bunların birleşimi *düzgün* bir bölgedir.

Doğrudan doğruya bir ispat ta şöyledir. A, sonlu sayıda parametre daireleriyle örtülebilir. Bu parametre dairelerinin birleşimini G_1 ile gösterelim. Sonra $\overline{G}_1$, benzer şekilde bir G_2 bölgesi içine alınır. $G_2 - \overline{G}_1$ e yukardaki metot tatbik edilirse bir *düzgün* W_1 bölgesi sağlanır, öyleki, $G_1 \subset W_1 \subset G_2$.

Bu teorem ve yukardaki inşa metodu, kanonik bölgeler için de muteberdir.

Şimdi Schottky diferansyellerine ve harmonik ölçülere ait bazı teoremleri açık $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeylerine teşmil edeceğiz.

14.2.2. **Schottky diferansyelleri.** $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ bir Riemann yüzeyi olsun, ve farzedelimki, W, *düzgün* G altbölgeleriyle tüketilebilir.

Teorem 14.2.2.1. $\lim\limits_{G \to W} \Omega_{ho}(G) = \Omega_{ho}(W)$. Bu limit şu mânada anlaşılmalıdır. Herhangibir $\omega_{ho} \varepsilon \Omega_{ho}(W)$ diferansyeline, $\Omega_{ho}(G)$ sınıfına ait diferansyellerle yaklaşılabilir. Yaklaşıklık, norm yakınsaklığı kullanılmak suretiyledir. Başka bir deyimle. $\omega_{ho} \varepsilon \Omega_{ho}(W)$, yalnız ve yalnız, $\omega_{hoG} \varepsilon \Omega_{ho}(G)$ diferansyelleri mevcuttur öyleki,

$$\lim_{G \to W} \| \omega_{ho} - \omega_{ho}(G) \|_G = 0.$$

İspat. ω_{ho} nun, G ye tahdidi

$$\omega_{ho} = \omega_{ho}(G) + {}^*\omega_{he}(G) \qquad (14.2.2.1)$$

şeklinde ayrılabilir.

Farzedelim ki $G \subset G'$. (14.2.2.1) ayrılımı G' için yazılırsa,

$$\omega_{ho}(G) - \omega_{ho}(G') = {}^*\omega_{he}(G') - {}^*\omega_{he}(G)$$

farkı ${}^*\Omega_{he}(G)$ ye aittir, ve dolayısıyla, G de $\omega_{ho}(G)$ ye ortogonaldir. Yani

$$(\omega_{ho}(G) - \omega_{ho}(G'), \omega_{ho}(G)) = 0.$$

Buradan,

$$\| \omega_{ho}(G) - \omega_{ho}(G') \|^2_G = \| \omega_{ho}(G') \|^2_G - \| \omega_{ho}(G) \|^2_G, \qquad (14.2.2.2)$$

ve netice olarak

$$\| \omega_{ho}(G) \|_G \leq \| \omega_{ho}(G') \|_G \leq \| \omega_{ho}(G') \|_{G'},$$

yani $\| \omega_{ho}(G) \|$, G ile aynı zamanda artar. Diğer taraftan sınırlıdır. Zira (14.2.2.1) ayrılımından

$$\| \omega_{ho}(G) \|_G \leq \| \omega_{ho} \|_G \leq \| \omega_{ho} \|$$

eşitsizlikleri bulunur.

Binaenaleyh, $\| \omega_{ho}(G) \|_G$ nin sonlu bir limiti vardır. Bu husus, (14.2.2.2) de gözönünde tutulursa, G ve $G' \supset G \to W$ için

$$\| \omega_{ho}(G) - \omega_{ho}(G') \|_G \to 0. \qquad (14.2.2.3)$$

Sabit bir G_0 için, üçgen eşitsizliği gözönünde tutulursa. $G', G'' \to W$ için,

$$\| \omega_{ho}(G') - \omega_{ho}(G'') \|_{G_0} \to 0. \qquad (14.2.2.4)$$

Şimdi iddia ediyoruz ki, (14.2.2.4) şartı ileri sürüldüğü takdirde, ω_{ho} (G) nin limiti G_0 da bir harmonik diferansyeldir.

İspatı için, G_0 da, $|z| < 1$ üzerine tasvir edilen bir Δ parametre dairesini gözönüne alalım. v, Δ da harmonik ise $f(z) = v_x - iv_y$ analitiktir.

$f(z)^2$ nin reel ve imajiner kısmı harmonik olduklarından, $\rho = 1 - |z|$ için

$$f(z)^2 = \frac{1}{\pi \rho^2} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})^2 \, r dr d\theta$$

yazılabilir. Dolayısıyla da,

$$|f(z)|^2 \leq \pi^{-1} (1 - |z|)^{-2} \int_{\Delta}\int |f|^2 \, dxdy = \pi^{-1} (1 - |z|)^{-2} D_{\Delta}[v].$$

Meselâ $|z| \leq \frac{1}{2}$ alınırsa

$$|f(z)| \leq (4\pi^{-1} D_{\Delta} [v])^{1/2}$$

ve $|z_1|$, $|z_2| \leq \frac{1}{2}$ farzedilirse

$$| v(z_1) - v(z_2) | \leq \int_{z_1}^{z_2} |f| \, |dz| \leq (4\pi^{-1} D_{\Delta} [v])^{1/2}.$$

Merkezi aynı olan $\Delta' : |z| < \frac{1}{2}$ dairesini gözönüne alalım. $A \subset G_0$ kompakt bir cümle olsun. A, sonlu sayıda Δ'_i lerle örtülebilir. Herbir Δ'_i ye ait bir nokta, G_0 a ait bir yay ile z_0 a birleştirilebilir. Bu yay, yine sonlu sayıda Δ' daireleriyle örtülebilir. Böylece, A yı örten sonlu sayıda $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_n$ daireleri elde edilir, şöyleki, $\Delta'_1 \cup, \ldots, \cup \Delta'_n$ irtibatlıdır. Üsstteki eşitsizlik, u lar harmonik olmak üzere,

$$v = u_{G'} - u_G,$$

ye tatbik edilirse, bütün $z \varepsilon A$ ler için

$$| u_{G'}(z) - u_{G'}(z) - u_{G'}(z_0) + u_G(z_0) | \leq n (4\pi^{-1} D_{G_0} [u_{G'} - u_{G''}])^{1/2}.$$

Binaenaleyh, $G \to W$ için, $u_G(z)$, G_0 a ait herbir kompakt bölgede üniform olarak bir $u(z)$ limit fonksiyonuna yakınsaktır. Biliniyor ki $u(z)$ harmoniktir.

Şu halde, $\omega_{ho}(G)$ nin limiti G_0 da bir harmonik diferansyeldir. Bu limit, şimdilik ω' ile gösterilirse, (14.2.2.3) ten dolayı,

$$\| \omega_{ho}(G) - \omega' \|_G \to 0. \qquad (14.2.2.5)$$

Şimdi, σ, W üzerinde *tam* ise, $\sigma \varepsilon \Omega_e$ ve $(\omega_{ho}(G), *\sigma)_G = 0$. Dolayısıyla,

$$(\omega', *\sigma)_G = (\omega' - \omega_{ho}(G))_G.$$

(14.2.2.5) dolayı, sağdaki iç çarpım sıfıra yakınsaktır, ve

$$(\omega', *\sigma) = 0.$$

Yani, $\omega' \varepsilon \Omega_{ho}(W)$. (14.2.2.1) yardımıyla görülür ki

$$\omega_{ho} - \omega' \varepsilon \Omega_{ho}(W) \cap {}^*\Omega_{ho}(W).$$

Bu altuzaylar ise, birbirlerinin ortogonal tamamlayıcısıdırlar. Şu halde

$$\omega' = \omega_{ho}.$$

Karşıt olarak farzedelim ki norm yakınsaklığa nazaran, yani $\| \omega - \omega_{ho}(G) \|_G \to 0$ mânada

$$\omega = \lim \omega_{ho}(G).$$

Bu takdirde herbir $\sigma \varepsilon \Omega_e$ için

$$(\omega, *\sigma) = \lim_{G \to W} (\omega, *\sigma)_G = \lim_{G \to W} (\omega - \omega_{ho}(G), *\sigma)_G = 0.$$

Yani $\omega \varepsilon \Omega_{ho}(W)$. Bu demektir ki, $\Omega_{ho}(W)$ *sınıfı*, $\Omega_{ho}(G)$ *sınıfına ait diferansyellerle yaklaşılabilen diferansyellerden müteşekkildir.*

14.2.3. **Sckottky diferansyelleriyle yaklaşım.** Bu sefer, W üzerinde, *norm manada*, Schottky diferansyelleriyle, yani $\Omega_{ho}(G) \oplus {}^*\Omega_{ho}(G)$ ye ait diferansyellerle yaklaşılabilen, diferansyelleri tesbit edeceğiz. W *üzerindeki bu tip diferansyellere de Schottky diferansyelleri diyeceğiz ve* $\Omega_s(W)$ *ile göstereceğiz.*

Üstteki teoremden dolayı, $\Omega_{ho}(W)$, ${}^*\Omega_{ho}(W) \subset \Omega_s(W)$. Dolayısıyla, $\Omega_s(W)$, $\Omega_{ho}(W)$ ve ${}^*\Omega_{ho}(W)$ tarafından *doldurulan* lineer uzayı ihtiva eder.

$\Omega_s(W)$ tarifi gereğince kapalı olduğundan, $\Omega_{ho}(W)$ ve ${}^*\Omega_{ho}(W)$ yi ihtiva eden en küçük kapalı lineer altuzayı ihtiva edecektir. Şu halde

$$\Omega_s \supset \overline{\Omega_{ho} + {}^*\Omega_{ho}}.$$

Aslında, eşitlik olduğunu göstereceğiz.

Teorem 14.2.3.1. $\Omega_s = \overline{\Omega_{ho} + {}^*\Omega_{ho}}$.

İspat. Aşağıdaki bütün ortogonallikler Ω_h a nazarandır. Bu kabule göre

$$\Omega^{\perp}_{ho} = {}^*\Omega_{he}, \quad {}^*\Omega^{\perp}_{ho} = \Omega_{he},$$

ve Hilbert uzayı teorerisinin hassalarından dolayı

$$\overline{\Omega_{ho} + {}^*\Omega_{ho}} = (\Omega_{ho} + {}^*\Omega_{ho})^{\perp\perp} = (\Omega_{he} \cap {}^*\Omega_{he})^{\perp}.$$

Göstermemiz gerekiyor ki,

$$\Omega_s \perp \Omega_{he} \cap {}^*\Omega_{he}.$$

O halde, farzedelim ki, $\omega \varepsilon \Omega_s$, $\sigma \varepsilon \Omega_{he} \cap {}^*\Omega_{he}$.

ω ya yaklaşık,

$$\omega_s = \omega_{ho}(G) + {}^*\omega_{ho}(G)$$

diferansyelleri gözönüne alınıyor, öyleki,

$$\| \omega - \omega_s(G) \|_G \to 0,$$

ve σ tam olduğundan

$$(\omega_s(G), \sigma)_G = 0.$$

Binaenaleyh,

$$(\omega, \sigma) = \lim_{G \to W} (\omega, \sigma)_G = \lim (\omega - \omega_s(G), \sigma)_G = 0.$$

Teorem 14.2.3.2. Herhangibir Riemann yüzeyi üzerinde $\Omega_h = \Omega_s \oplus \Omega_{ae} \oplus \overline{\Omega}_{ae}$.

İspat. $\Omega_{he} \cap {}^*\Omega_{he}$ nın başka bir gösterilimini arayalım. Şayet ω ve $*\omega$ ikisi de tam ve harmonik iseler, $\overline{\omega} + i*\overline{\omega}$ ve $\omega + i*\omega$ tam analitik diferansyellerdir. Başka bir deyimle,

$$\omega = df + d\overline{g},$$

f ve g analitik fonksiyonlar olmak üzere, yazılabilir.

Karşıt olarak, böyle bir diferansyel, $\Omega_{he} \cap {}^*\Omega_{he}$ ye aittir. Dolayısıyla,

$$\Omega_{he} \cap {}^*\Omega_{he} = \Omega_{ae} \oplus \Omega_{ae}.$$

Bu ise bir ortogonal ayrılımdır, zira analitik ve antianalitik diferansyeller daima biri diğerine ortogonaldir.

Halbuki $\Omega_s \perp \Omega_{he} \cap {}^*\Omega_{he}$, yani $\Omega_s \perp \Omega_{ae} \oplus \overline{\Omega}_{ae}$. Buradan neticeye varılır.

Bu teoremin bir neticesi olarak kaydedelim ki,

$\Omega_h = \Omega_s$ yanlız ve yalnız $\Omega_{ae} = \varnothing$ ise, yani $\mathfrak{R}$ de, sonlu Dirichlet integralli, sabit olmıyan hiçbir analitik fonksiyon mevcut değilse. Yani,

Teorem 14.2.3.3. $\mathfrak{R}$, O_{AD} sınıfındandır yalnız ve yalnız bütün kare-integrallenebilir harmonik diferansyeller, Schottky diferansyelleri ise.

Görmüştük ki, W, kompakt kenarlı bir $\overline{W}$ yüzeyinin içi ise,

$$\Omega_{ho} \cap {}^*\Omega_{ho} = \varnothing \qquad (14.2.3.1)$$

ve

$$\Omega_{ho} = {}^*\Omega_{ho} = \Omega_h$$

şayet W, O_{HD} sınıfından ise.

(14.2.3.1) şartının başka neticeleri bilinmiyor.

14.2.4. **Harmonik ölçüler.** § 14.1.9 daki bahis konusu teoremin açık Riemann yüzeylerine teşmilini ispat edeceğiz.

Teorem 14.2.4.1. $\Omega_{hse}(W)$ ve ${}^*\Omega_{hm}(W)$ alt uzayları, $\Omega_h(W)$ de, ortogonal tamamlayıcıdırlar.

İspat. Önce ortogonalliği ispat edelim. $\sigma \varepsilon \Omega_{hse}(W)$ ve $\omega \varepsilon \Omega_{hm}(W)$ farzedelim. G kanonik olduğundan, σ, G üzerinde yarı tamdır, ve dolayısıyla $(\sigma, {}^*\omega_{hm}(G))_G = 0$. O halde

$$(\sigma, *\omega)_G = (\sigma, *\omega - *\omega_{hm}(G))_G,$$

ve bu iç çarpım, § 14.1.9 un sonunda verilen tarif te gözönünde tutulursa, $G \to W$ için $\lim (\sigma, *\omega - *\omega_{hm}(G))_G \to 0$. Buradan

$$(\sigma, *\omega) = 0$$

olduğu görülür.

Şimdi farzedelim ki ω, harmonik ve ${}^*\Omega_{hse}$ sınıfına ortogonaldir. Bir kanonik G bölgesini gözönüne alalım. G ye tahdit edilen ω nın, $\Omega_{hm}(G)$ üzerine izdüşümü $\omega_{hm}(G)$ olsun. Bu taktirde

$$\omega - \omega_{hm}(G) \varepsilon {}^*\Omega_{hse}(G).$$

Şayet $G \subset G'$ ise

$$\omega_{hm}(G) - \omega_{hm}(G') \ \varepsilon {}^*\Omega_{hse}(G),$$

ve dolayısıyla,

$$\omega_{hm}(G) - \omega_{hm}(G') \perp \omega_{hm}(G).$$

O halde,

$$\| \omega_{hm}(G) - \omega_{hm}(G') \|^2_G = \| \omega_{hm}(G') \|^2_G - \| \omega_{hm}(G) \|^2_G$$
$$\leq \| \omega_{hm}(G') \|^2_{G'} - \| \omega_{hm}(G) \|^2_G.$$

Yani $\| \omega_{hm}(G) \|_G$, G ile artar. Üstelik $\| \omega_{hm}(G) \| \leq \| \omega \|$. Neticede $G \to W$ için

$$\omega_{hm} = \lim \omega_{hm}(G)$$

limiti mevcut ve $\omega_{hm} \ \varepsilon \ \Omega_{hm}(W)$.

Bir yandan, $\omega - \omega_{hm} \varepsilon {}^*\Omega_{hse}(G)$ ve diğer taraftan da, *her bölen devir G de olduğundan*

$$\omega - \omega_{hm} \varepsilon {}^*\Omega_{hse}.$$

Diğer taraftan, $\omega \perp {}^*\Omega_{hse}$ hipotezi, ve $\omega_{hm} \perp {}^*\Omega_{hse}$ neticesi gözönünde tutulursa, $\omega = \omega_{hm}$ neticesine varılır. Binaenaleyh $\Omega_{hm} = {}^*\Omega^{\perp}_{hse}$. Fakat Ω_{hse} kapalı olduğundan, aynı zamanda ${}^*\Omega_{hse} = \Omega^{\perp}_{hm}$.

Yukardaki teoremin başka bir ifadesi de

$$\Omega_h = \Omega_{hse} \oplus {}^*\Omega_{hm} = {}^*\Omega_{hse} \oplus \Omega_{hm}.$$

Ω_{hm} ve ${}^*\Omega_{hm}$ uzayları, biri diğerine ortogonaldir, zira, $\Omega_{hm} \subset \Omega_{he} \subset \Omega_{hse}$. O halde

$$\Omega_h = \Omega_{hse} \cap {}^*\Omega_{hse} \oplus \Omega_{hm} \oplus {}^*\Omega_{hm}.$$

Ortogonal tamamlayıcılara geçilecek olursa

$$\Omega_{hm} \subset \Omega_{he} \subset \Omega_{hse},$$

ihtivalar zinciri

$$\Omega_{hm} \subset \Omega_{ho} \subset \Omega_{hse}$$

intac eder.

Özel olarak ta,

$$\Omega_{hm} \subset \Omega_{he} \subset \Omega_{ho},$$

Geniş bir Riemann yüzeyi sınıfı için $\Omega_{hm} = \Omega_{he} \cap \Omega_{ho}$ eşitliği beklenebilir, fakat bu eşitliğin umumi olamıyacağı R. Accola [1] tarafından gösterilmiştir.

Teorem 14.2.4.1 yardımıyla, teorem 13.4.5.4 e şu ilâve yapılabilir.

Mevzuu hatıratalım: Her bir γ devirine, birtek $\sigma\varepsilon\Omega_{ho}$ reel harmonik diferansyeli tekabül eder, öyleki, bütün kapalı ω diferansyelleri için,

$$\int_\gamma \omega = (\omega, *\sigma). \qquad (14.2.4.1)$$

(14.2.4.1) sağlandığı taktirde, $\beta = \sigma(\gamma)$ ya *doğurucu diferansyel* denir.

Teorem 14.2.4.2. $\sigma(\gamma)$ doğurucu diferansyeli Ω_{hm} sınıfındandır.

İspat. Gerçekten, $(\omega, *\sigma(\gamma))$, ω nın γ boyunca periodudur. ω yarıtam ise bu period sıfırdır. Yani $*\sigma(\gamma) \perp \Omega_{hse}$. Teorem 14.2.4.1 den dolayı $\sigma(\gamma) \varepsilon\Omega_{hm}$.

Teorem 14.2.4.3. *c, bütün devirleri, d* ise bütün *bölen devirleri* tarasın. Bu taktirde $\sigma(c)$, Ω_{ho} yu ve $\sigma(d)$, Ω_{hm} yi doldurur.

İspat. $\sigma(c)$, Ω_{ho} yu doldurmamış olsa idi Hilbert uzayına ait bir hassadan (Teorem 10.3.3.4) dolayı $0 \neq \omega\varepsilon\Omega_{ho}$ bulunabilirdi, öyleki, ω bütün $\sigma(c)$ lere ortogonaldir. Fakat, bütün c ler için

$$(\omega, \sigma(c)) = (*\omega, *\sigma(c)) = 0$$

demek, $*\omega$ tam demektir. Bu ise mümkün değildir, zira $\Omega_{ho} \perp *\Omega_{he}$.

Benzer şekilde, $0 \neq \omega\varepsilon\Omega_{hm}$ bulunabilir, öyleki, bütün d ler için

$$(\omega, d(c)) = (*\omega, *d(c)) = 0.$$

Bu demektir ki, $*\omega$ yarıtamdır, $\omega\varepsilon *\Omega_{hse}$. Bu da mümkün değildir, zira teorem 14.2.4.1 den dolayı $*\Omega_{hse} \perp \Omega_{hm}$.

Nihayet, teorem 14.2.4.2 nin karşıt teoremini ispat edebiliriz. Aslında bu iki teorem birleştirilerek şu teorem ispatlanabilir.

Teorem 14.2.4.4. Bir d deviri *böler* yalnız ve yalnız, $\sigma(d)$ *tam* ise.

İspat. Teorem 14.2.4.3 de gördük ki, d, bölen bir devir ise,

$$\sigma(d)\varepsilon\Omega_{hm} \subset \Omega_{he}.$$

Herhangibir c deviri bir *Kanonik homoloji tabanına* ait, a_n, b_n devirlerinin sonlu bir

$$\Sigma\ (x_n a_n + y_n b_n)$$

lineer kombinezonuna *modülo d, homologdur.*

$\sigma(d)$ tam is, $\Sigma(x_n\ \sigma(a_n) + y_n\ \sigma(b_n))$ de tamdır.

Fakat bu sonlu toplamın, b_n boyunca periodu x_n, ve a_n, boyunca periodu $-y_n$ dir. Binaenaleyh, bütün x_n, y_n ler 0 dır. Şu halde d, *bölen* bir devirdir.

Bu teoremin, herbir deviri bölen bir devir olan Riemann yüzeylerinden (bu tip Riemann yüzeyleri, düzlemde bir bölgeye konform eşdeğer oldukla-

rından bu yüzeylere *düzlem Riemann yüzeyleri* denir) farklı Riemann yüzeyleri için, bir neticeyi derhal söyliyebiliriz.

Teorem 14.2.4.5 *Bir düzlem Riemann yüzeyinden farklı* herhangibir $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeyi üzerinde, sıfırdan farklı, kare integrallenebilir bir *harmonik diferansyel* mevcuttur.

İspat. Hipotezden ötürü, $\mathfrak{R}$ üzerinde, bölmeyen (veya $\mathfrak{R}$ yi bölmeyen) bir c deviri vardır. Teoremden dolayı, $\sigma(c)$ *tam* değildir, ve dolayısıyla özdeş olarak sıfır değildir. Yani, $\Omega_n \neq \varnothing$.

14.2.4. **Esas varlık teoremi.** Kısım 1 de Period ve Singülerliklerin tetkikinden; teorem 14.1.8.1 de belirtilen mânada sonlu sayıda periodları, ve sonlu sayıda kutup singülerlikleri olan *kompakt desteği* haiz *kapalı bir* θ *diferansyelinin* inşasının, rezidülerin toplamı sıfır olmak şartıyla, mümkün olduğu anlaşılmaktadır.

Gerçekten, bu θ aşağıda varlıkları tasvir edilen θ ların toplamıdır.

1. § 15.1.4 de inşa edilen ve singülerlikleri, Laurent açılımının esas kısmının mertebeleri 1 den büyük olan terimlerine tekabül eden θ_m diferansyellerinin bir lineer kombinezonu.

2. Rezidülerin toplamı sıfır olduğundan § 14.1.6 ya göre, rezidüleri önceden verilmiş, singülerlikleri basit kutuplar olan $\theta(c)$ diferansyelinin varlığı ve bu tip diferansyellerin sonlu bir lineer kombinezonu.

3. § 15.1.7 de izah edildiği gibi sonlu sayıda x_n, $y_n \neq 0$ olmak üzere, a_n, b_n boyunca periodları x_n, y_n olan her yerde regüler bir θ diferansyelinin varlığı. Aslında bu çözümün *açık* bir ifadesi

$$\theta = \frac{1}{2\pi i}\ \Sigma\ (y_n\theta(a_n) - x_n\theta(b_n)).$$

θ, yukarda tasviri yapılan çözüm ise teorem 14.1.3.1 den ötürü birtek τ harmonik diferansyeli mevcuttur öyleki $\tau - \theta\varepsilon\Omega_{eo}$.

Bu τ, önceden verilen θ nın singülerliklerini ve periodlarını haizdir.

Bununla beraber ideal sınır civarında kare integrallenebilir farzedilse dahi, umumiyetle τ yegâne çözüm değildir. Gerçekten genel çözüm $\tau + \omega_{he}$, $\omega_{he}\varepsilon\Omega_{he}$ dir, ve $\Omega_{he} = \varnothing$ yalnız $\mathfrak{R}\varepsilon O_{HD}$ ise.

Tek *özel* bir çözüm aranıyorsa teorem 14.1.8.1 deki gibi hareket edilebilir. Ancak singülerlikten dolayı τ nun $*\Omega_{ho}$ ya ait olması beklenemez, fakat bu sınıfa ait diferansyellerin en *sivri* hassaları üzerinde, yani *bütün bölen devirler* boyunca *periodların* sıfır oluşu üzerinde durulabilir.

Bu noktai nazardan hareket ederek teorem 14.1.3.1 in ispatını yeniden gözden geçirelim. θ verildiğinde esas *ayrılım teoremi* tatbik edilerek

$$\theta - i *\theta = \omega_h + \omega_{eo} + *\omega_{eo},$$

yazılır. Gördük ki $\tau = \theta - \omega_{eo}$ harmoniktir. Teorem 14.2.4.1 yardımıyla,

$$\omega_h = \omega_{hm} + *\omega_{hse}.$$

Bu iki denklem gözönünde tutulursa,

$$\tau - h_m = i*\theta + *\omega_{hse} + *\omega_{eo}.$$

θ, kompakt bir cümlenin dışında sıfır olduğundan (*birinci mertebeden kutupların etrafındaki periodlar* sarfı nazar ediliyor demektir), $*(\tau-\omega_{hm})$ *yarı tam* dır.

Dolayısıyla,

$$\tilde{\tau} = \tau - \omega_{hm} \qquad (14.2.4.1)$$

konjügesi yarıtam olan bir çözümdür.

Fakat $\tilde{\tau}$ yine de birtek değildir, zira $\tilde{\tau}'$ ikinci bir çözüm ise, bunların farkı, yani $\tilde{\tau} - \tilde{\tau}' \varepsilon *\Omega_{hse}$, ve $*\Omega_{hse}$, Ω_{he} ye ortogonal değildir.

Bununla beraber, $\tilde{\tau}$, çok daha kuvvetli bir şart sağlamaktadır, şöyle ki

$$\tilde{\tau} = \theta - \omega_{eo} - \omega_{hm},$$

bir kompakt cümlenin dışında $\omega_{hm} + \omega_{eo}$ şeklindedir.

O halde şu tarifi verebiliriz.

TARİF 8. Singülerlikleri sadece harmonik kutuplar olan bir $\tilde{\tau}$ *harmonik diferansyeline özel* dir denir, şayet şu şartlar sağlanmış iseler:

H1. *Yeter derecede büyük* bir kompakt cümlenin dışında, *bölen* bütün devirler boyunca $* \tilde{\tau}$ nun periodları sıfırdır.

H2. $\omega_{hm}\varepsilon\Omega_{hm}$, $\omega_{eo}\varepsilon\Omega_{eo} \cap \Omega^1$ diferansyelleri mevcuttur, öyle ki, kompakt bir cümlenin dışında, $\tilde{\tau} = \omega_{hm} + \omega_{eo}$.

H1 den dolayı $\tilde{\tau}$ nun sonlu sayıda kutupları ve bir homoloji tabanına nazaran sonlu sayıda sıfırdan farklı periodları vardır.

İşaret edelim ki, $\omega_{eo}\varepsilon\Omega_{eo}$ şartı, $\omega_{eo}\varepsilon\Omega_{eo} \cap \Omega^1$ şartı ile kuvvetlendirilmiştir. Bu şart (14.2.4.1) ile tarif edilen $\tilde{\tau}$ tarafından sağlanmaktadır. Gerçekten,

$$\tilde{\tau} = \theta - \omega_{eo} - \omega_{hm}$$

dir, ve $\tilde{\tau} - \theta$, $\omega_{hm}\varepsilon C^1$ olduğundan $\omega_{eo}\varepsilon C^1$.

Yukardaki tarif gözönünde tutulduğu taktirde, aşağıdaki *varlık* ve *birteklik* teoremi elde edilir.

Teorem 14.2.4.1. Önceden verilmiş *sonlu sayıda periodları* haiz, ve yine önceden verilmiş Laurent açılımlarıyla birlikte *sonlu sayıda harmonik kutupları* olan birtek özel harmonik diferansyel vardır.

İspat. Sonlu sayıda periodları verilmiş demek, kutup yerlerinde noktalanmış $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeyinde, *modülo bölen devirler* bir $\{a_n, b_n\}$ homoloji tabanı verilmiş olup, diferansyelin bu devirler boyunca periodları verilmiş demektir. Ancak bu periodlardan sadece sonlu sayıda peiodlar sıfırdan farklıdırlar.

Böyle bir özel harmonik diferansyelin varlığı yukarda gösterilmiş olduğundan burada sadece birteklik mevzuu ile meşgul olunacaktır.

$\tilde{\tau}$, $\tilde{\tau}'$ iki çözüm olsunlar. $\omega = \tilde{\tau} - \tilde{\tau}' \varepsilon\Omega_{he} \cap *\Omega_{hse}$, ve $\omega-\omega_{hm}-\omega_{eo}$ nun, $\omega_{hm}\varepsilon\Omega_{hm}$ ve $\omega_{eo}\varepsilon\Omega_{eo} \subset \Omega^1$ uygun seçildiği taktirde, kompakt desteği vardır. Bu şartlardan dolayı,

$$\omega - \omega_{hm} - \omega_{eo} = df$$

vazedebiliriz. Burada f, *yeter derecede büyük* düzgün bir G bölgesinin herbir tamamlayıcı bileşeninde sabittir. $\sigma\varepsilon\Omega_{hse}$ herhangibir diferansyel olsun. Bu taktirde $\beta(G)$, W-G nin sınırına ait çevre sistemini gösterdiğine göre,

$$(df, *\sigma) = (df, *\sigma)_G = -\int_{\beta(G)} f\,\bar{\sigma}.$$

En son integral sıfırdır. Zira $\beta(G)$ de f sabittir, ve $\beta(G)$ nin çevreleri boyunca $\bar{\sigma}$ nın periodları sıfırdır. Üstelik

$$(\omega_{hm}, *\sigma) = 0, \ (\omega_{eo}, *\sigma) = 0$$

olduğundan, $\omega \perp h_{hse}$. Dolayısıyla $\omega = 0$.

14.2.5. **Diferansyel ve period.** τ dan $\tilde{\tau}$ya geçişte, bir c devrine ait $\sigma(c)$ doğurucu diferansyeli yerine onun tekabülü olan $\tilde{\sigma}(c)$ yi gözönüne alalım. (14.1.6.5) formülünün karşılığını elde etmek üzere $\omega = \alpha + \bar{\beta}\varepsilon\Omega_{hse} \cap *\Omega_{hse}$ farzedelim. Bu taktirde

$$(\omega, * \tilde{\tau}(c)) = -2\pi i \int_c \omega.$$

Dolayısıyla, § 14.1.7 de olduğu gibi

$$\tilde{\sigma}(c) = \frac{1}{2\pi i} \tilde{\tau}(c),$$

vazedilirse, bütün $\omega_{hse} \cap *\Omega_{hse}$ için

$$(\omega, * \tilde{\sigma}(c)) = \int_c \omega \qquad (14.2.5.1)$$

bulunur. Aynı şekilde, (14.2.5.1) gözönünde tutulursa $\tilde{\sigma}(c)$ reel olduğu anlaşılır ve $\tilde{\varphi}(c) = -\tilde{\psi}(c)$,

$$\tilde{\sigma}(c) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(c) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \tilde{\psi}(c).$$

Evvelce de işaret etmiştik ki

$$\tilde{\tau}(c) - \tau(c) \varepsilon \Omega_{hm}.$$

Binaenaleyh, $\tilde{\sigma}(c)$ ve $\sigma(c)$ nın periodları aynıdır, ve $\tilde{\sigma}(c) \varepsilon \Omega_{hse} \cap {}^*\Omega_{hse}$ olduğundan, (14.2.5.1) ve teorem (14.1.7.1) den dolayı

$$(\tilde{\sigma}(c_1), {}^*\tilde{\sigma}(c_2)) = c_1 \times c_2. \qquad (14.2.5.2)$$

Hakikatte, $\tilde{\sigma}(c) - \sigma(c) \varepsilon \Omega_{hm}$ ve $\sigma(c) \varepsilon \Omega_{ho}$ (teorem 14.2.4.3) olduğundan $\tilde{\sigma}(c) \varepsilon \Omega_{ho} \cap {}^*\Omega_{hse}$. Aşağıdaki teorem gösteriyor ki, $\tilde{\sigma}(c)$ lerle, rölatif homoloji sınıfları (modülo bölen devirler) arasında bir birebir tekabül vardır.

Aslında, bu teorem, teorem 14.2.4.3 ve teorem 14.2.4.4. ün benzeridir.

Teorem 14.2.5.1. Bir c deviri bölen bir devirdir yalnız ve yalnız $\tilde{\sigma}(c) = 0$ ise. Şayet c bütün devirleri tarıyorsa, $\tilde{\sigma}(c)$, $\Omega_{ho} \cap {}^*\Omega_{hse}$ yi doldurur.

İspat. $\tilde{\sigma}(c) = 0$ ise, (14.2.5.2) den ötürü, c nin bütün devirlerle arakesiti sıfırdır, ve dolayısıyla (§ 12.5.1) c bölen bir devirdir. İkincisi, $\tilde{\sigma}(c) = 0$ ise, bu taktirde $\sigma(c) \varepsilon \Omega_{hm}$, ve teorem 14.2.4.4 den dolayı c bölen bir devirdir. Nihayet, $\tilde{\sigma}(c)$, $\Omega_{ho} \cap {}^*\Omega_{hse}$ yi doldurmamış olsaydı, $0 \neq \omega \varepsilon \Omega_{ho} \cap {}^*\Omega_{hse}$ bulunabilirdi, öyleki ω bütün $\tilde{\sigma}(c)$ lere ortogonaldir. Bu taktirde $\omega^* \varepsilon \Omega_{he}$, ve $\Omega_{ho} \perp {}^*\Omega_{he} \Rightarrow \omega = 0$.

Teorem 14.2.5.2. $\tilde{\tau} = \tau$, yalnız ve yalnız $\Omega_{hm} = \varnothing$, veya aynı şeyi ifade ile, $\Omega_h = \Omega_{hse}$.

İspat. Yeter şart, $\tilde{\tau} - \tau \varepsilon \Omega_{hm}$ nin bir neticesidir. Gerek şarta gelince, bütün devirler için $\sigma(c) = \tilde{\sigma}(c)$ ise, teorem 14.2.4.3 ve teorem 14.2.5.1 den dolayı $\Omega_{ho} = \Omega_{ho} \cap {}^*\Omega_{hse}$. Şu halde $\Omega_{ho} \subset {}^*\Omega_{hse}$, ve buradan ortogonal tamamlayıcılara geçilerek, $\Omega_{hm} \subset {}^*\Omega_{he}$. Dolayısıyla $\Omega_{hm} \subset \Omega_{ho} \subset {}^*\Omega_{he} = \varnothing$.

Özel olarak, $\tilde{\tau} = \tau$ şayet $\mathfrak{R} \varepsilon O_{HD}$, zira $\Omega_{hm} \subset \Omega_{he} = \varnothing$.

3. Bilineer Bağıntı

14.3.1. **Riemann Bilineer bağıntığı.** Bazı hallerde $(\omega, *\sigma)$ iç çarpımı, ω ve σ diferansyellerinin periodları cinsinden ifade edilebilir.

Bu diferansyeller herşeyden evvel *kapalı* olmalıdırlar. Bunun dışında, bilhassa *ideal sınırın civarında*, diferansyeller üzerinde ilâve tahditlerin yapılması da gerekiyor.

Bir kere σ ve ω yı harmonik farzedebiliriz. Bu bir tahdit sayılmaz, zira, $\omega = \omega_h + \omega_{eo}$, $\sigma = \sigma_h + \sigma_{eo}$; ω_h, $\sigma_h \varepsilon \Omega_h$, ω_{eo}, $\sigma_{eo} \varepsilon \Omega_{eo}$.

Bu ayrılımdan ötürü,

$$(\omega, *\sigma) = (\omega_h, *\sigma_h)$$

yazılabilir. Diğer taraftan, ω ve σ sırasıyla ω_h ve σ_h ın aynı periodlarını haizdirler. Dolayısıyla, şayet $(\omega_h, *\sigma_h)$, periodlar cinsinden ifade edilebilirse, aynı şey, $(\omega, *\sigma)$ için de doğrudur.

Teorem 14.3.1.1. Farzedelim ki, $\omega \varepsilon \Omega_{co}$ ve σ, sıfırdan farklı sonlu sayıda periodları olan yarıtam bir diferansyeldir. Bu taktirde, *Riemann bilineer bağıntısı*

$$(\omega, *\sigma) = \sum_n \left({}_{a_n}\!\!\int \omega \; {}_{b_n}\!\!\int \bar{\sigma} - {}_{b_n}\!\!\int \omega \; {}_{a_n}\!\!\int \bar{\sigma} \right). \qquad (14.3.1.1)$$

İspat. σ nın a_n - periodlarını x_n, b_n-periodlarını ise y_n ile gösterelim. Bu taktirde,

$$\sigma_0 = \sigma - \sum_n (y_n \sigma(a_n) - x_n \sigma(b_n))$$

in hiçbir periodu yoktur, yani *tamdır*. Dolayısıyla, $(\omega, *\sigma_0) = 0$, ve

$$(\omega, *\sigma) = \sum_n \left(\bar{y}_n (\omega, *\sigma(a_n)) - \bar{x}_n (\omega, *\sigma(b_n)) \right).$$

Fakat $(\omega, *\sigma(a_n))$ ve $(\omega, *\sigma(b_n))$, ω nın a_n ve b_n boyunca periodlarıdır. Buradan (14.3.1.1) derhal yazılabilir.

Görülüyor ki, (14.3.1.1) Riemann bilineer bağıntısı, σ ve ω ya nazaran simetriktir. Dolayısıyla hipotezde, σ ve ω yer değiştirebilirler.

Sonsuz sayıda periodlar için, bu bağıntının cari olup olmadığı bilinmiyor.

Teoremin şartları, *kapalı bir yüzeye uygulanması* bakımından, yeter derecede geniştir.

14.3.2. **Kapalı yüzeyler üzerinde Analitik diferansyeller.** Cinsi g olan bir kapalı Riemann yüzeyi verilmiş olsun. Mutad olduğu üzere, yüzeyin kanonik homoloji tabanını

$$a_1, b_1 \; ; \ldots ; \; a_g, b_g$$

ile gösterelim.

Bu tabana tekabül eden

$$\sigma(a_1), \; \sigma(b_1); \ldots ; \; \sigma(a_g), \; \sigma(b_g) \qquad (14.3.2.2)$$

harmonik diferansyellerinin herbirinin sıfırdan farklı birtek periodu vardır.

Dolayısıyla, (14.3.2.2), bütün *harmonik diferansyellerin* Ω_h uzayı için bir taban teşkil eder. Binaleyh, Ω_h, kompleks sayılar cismi üzerinde 2g bo-

yutlu bir vektör uzaydır. Şimdi *analitik diferansyellere* geçersek, aşağıdaki teorem aşikârdır.

Teorem 14.3.2.1. Cinsi g olan bir *kapalı Riemann yüzeyi* üzerinde analitik diferansyeller, kompleks sayılar cismi üzerinde g boyutlu bir vektör uzay teşkil ederler. Bu vektör uzayı Ω_a ile gösteriyoruz.

İspat. Herbir ω harmonik diferansyeli, birtek şekilde, bir φ analitik diferansyelinin ve bir $\overline{\psi}$ antianalitik diferansyelinin toplamı, yani,

$$\omega = \varphi + \overline{\psi}$$

şeklinde yazılabildiğinden, görülür ki, Ω_h ın boyutu, Ω_a nın boyutunun iki mislidir.

Yani,

$$\dim \Omega_a = 1/2 \dim \Omega_h = g.$$

Teorem 14.3.2.2. a-periodları verilmiş olan birtek analitik diferansyel vardır.

İspat. Bir $\varphi \varepsilon \Omega_a$ diferansyelinin a-periodlarını $x_1, x_1, \ldots, x_g$ ile gösterelim. φ yi, $(x_1, \ldots, x_g)$ vektörü üzerine dönüştüren tasvir lineerdir. Farzedelim ki φ_0, $(0, \ldots, 0)$ vektörü üzerine tasvir edilmiştir, yani φ_0 ın a-periodları yoktur. Şimdi, (14.3.1.1) bilineer bağıntısını $\omega = \varphi_0$, $\sigma = i\varphi_0$ diferansyellerine tatbik edersek,

$$\| \varphi_0 \|^2 = (\omega, *\sigma) = 0$$

bulunur. Yani $\varphi_0 = 0$. Bu da gösterirki, φ nin a-periodlarının üzerine tasviri birebirdir. $\dim \Omega_a = g$ olduğundan bu tasvir, *üzerine* bir tasvirdir.

Özel olarak, herbir $k=1, \ldots, g$ için tek bir α_k analitik diferansyeli vardır, öyleki, a_l-periodları, $i \neq k$ için 0, $i = k$ için 1 dir.

$\alpha_k \varepsilon \Omega_a$ diferansyelinin b_l-periodunu z_{kl} ile göstereceğiz.

Teorem 14.3.2.3. α_k, $k = 1, \ldots, g$, diferansyelleri Ω_a nın bir tabanını teşkil ederler. $Z = (z_{kl})$ matrisi ise şu hassaları haizdir.

Z1. *Z simetriktir:* $z_{kl} = z_{lk}$

Z2. *Im Z negatif definittir*

Z3. *Z singüler değildir*

İspat a_k ların, Ω_a nın bir tabanını teşkil ettikleri aşikârdır.

Z1. in ispatı: Biliyoruz ki $(\alpha_k, \overline{\alpha}_l) = 0$. *Riemann bilineer bağıntısından,*

$$(\alpha_k, \overline{\alpha}_l) = i\,(\alpha_k, *\overline{\alpha}_l) = \sum_{j=1}^{g} i \left(\int_{a_j} \alpha_k \int_{b_j} \alpha_l - \int_{b_j} \alpha_k \int_{a_j} \alpha_l \right)$$
$$= i\,(z_{lk} - z_{kl}) = 0.$$

Z2. nin ispatı: Aynı şekilde,

$$(\alpha_k, \alpha_l) = -i\,(\alpha_k, *\overline{\alpha}_l) = -i\,(\overline{z}_{lk} - z_{kl}) = -2 \operatorname{Im} z_{kl}.$$

Fakat $(-2\operatorname{Im} z_{kl})$ matrisi pozitif definittir. Zira, *Hermit formu*nu teşkil edersek,

$$\sum_{k,l} -2\operatorname{Im} z_{kl} t_k \overline{t}_l = \sum_{k,l} (\alpha_k, \alpha_l)\, t_k \overline{t}_l = \| t_1 \alpha_1 + \ldots + t_g \alpha_g \|^2 > 0.$$

Sağdaki ifade 0 dır yalnız ve yalnız $t_j = 0$, $j = 1, \ldots, g$. Dolayısıyla, $\operatorname{Im} Z = (\operatorname{Im} z_{kl})$ matrisi negatif definittir.

Z3 ün ispatı. $Z = (z_{ij})$ matrisi singüler olsa idi, hepsi sıfır olmıyan $t_1, \ldots, t_g$ katsayıları bulunabilirdi, öyle ki, bütün i ler için,

$$\sum_j z_{ij}\, t_j = 0.$$

Bu denklemden, aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\sum_{i,j} z_{ij}\, t_i \overline{t}_j = 0. \qquad (14.3.2.3)$$

Simetri de gözönünde tutulduktan sonra, sıra ile,

$$\overline{\sum_{i,j} z_{ij}\, t_i \overline{t}_j} = \sum_{i,j} \overline{z}_{ij}\, \overline{t}_i\, t_j = \sum_{i,j} \overline{z}_{ji}\, t_j\, \overline{t}_i = \sum_{j,i} \overline{z}_{ji}\, t_j\, \overline{t}_i =$$
$$\sum_{i,j} \overline{z}_{ij}\, t_i \overline{t}_j = 0.$$

En son denklemi (14.3.2.3) ten çıkarırsak

$$\sum_{i,j} \operatorname{Im} z_{ij}\, t_i\, \overline{t}_j = 0. \qquad (14.3.2.4)$$

Z2 den dolayı (14.3.2.4) mümkündür yalnız ve yalnız bütün t ler sıfır ise. Bu tezat Z3 ü ispatlar.

14.3.3. **Z-matrisi.** Bir analitik diferansyelin a-periodları verildiği takdirde, Z-matrisi ile b-periodları tesbit edilebilir. Gerçekten, $x_1, \ldots, x_g$ a-periodları bir *x sütun vektörünün bileşenleri* şeklinde ifade edilirler ise, *b-periodları* Zx in *bileşenleri*dir.

Şimdi, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g)$, ve $\sigma(a) = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_g))$, $\sigma(b) = (\sigma(b_1), \ldots, \sigma(b_g))$ diferansyellerine birer sütun vektör nazarıyla bakarsak,

$$\alpha = -\sigma(b) + Z\,\sigma(a),$$

zira iki tarafın da bileşenleri, aynı periodları olan harmonik diferansyellerdir.

$*\alpha = -i\alpha$ olduğundan,

$$-*\sigma(b) + Z *\sigma(a) = i\sigma(b) - iZ\sigma(a).$$

$\sigma(a)$ ve $\sigma(b)$ nın reel olduğu, ve $Z = X + iY$ gözönünde tutularak, reel ve İmajiner kısımlara ayrılırsa,

$$- *\sigma(b) + X *\sigma(a) = Y\sigma(a)$$
$$Y *\sigma(a) = \sigma(b) - X\sigma(a)$$

bulunur. Buradan da

$$*\sigma(a) = Y^{-1} \sigma(b) - Y^{-1} X \sigma(a)$$
$$*\sigma(b) = XY^{-1} \sigma(b) - (XY^{-1} X + Y) \sigma(a)$$

elde edilir.

Bu bağıntılarla herhangbir ω harmonik diferansyelinin konjugesi tesbit edilebilir. Gerçekten, ω nin a-periodları ve b-periodları sırasıyla

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_g), \ \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_g)$$

satır-vektör şeklinde yazılırsa,

$$\omega = - \xi\sigma(b) + \eta\sigma(a).$$

Buradan

$$*\omega = - (\xi X - \eta) Y^{-1} \sigma(b) + (\xi (XY^{-1} X + Y) - \eta Y^{-1} X) \sigma(a)$$

bulunur.

Dolayısıyla, $*\omega$ in periodları, sırasıyla,

$$(\xi X - \eta) Y^{-1}, \ \xi(XY^{-1} X + Y) - \eta Y^{-1} X$$

dir.

Z period matrisi simetrik olduğundan, $\frac{1}{2} g(g + 1)$ kompleks sabit ihtiva eder. Diğer taraftan, gösterilebilir ki, $g > 1$ cinsli Riemann yüzeyleri $3g-3$ kompleks parametreye tâbidirler. $g > 3$ için, Z nin elemanları ilâve şartlara tâbi olup, bu şartların tam mahiyeti henüz belli olmamıştır.

4. Riemann-Roch Teoremi

14.4.1. **Bölenler.** Riemann yüzeyi teorisinin en önemli neticelerinden birtanesi, kompakt Riemann yüzeyleri üzerinde, sabit olmıyan fonksiyonların ve sıfırdan farklı diferansyelerin mevcut olmalarıdır.

Kompakt yüzeyler için muteber, *Ünlü bir teorem*, farklı fonksiyonların ve diferansyellerin sayısı hakkında bazı mâlumat vermektedir.

Riemann-Roch adını taşıyan bu teoremi izah edebilmek için, *bölen* kavramını anlamak gerekiyor.

TARİF 9. *Kapalı* bir $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeyi üzerinde, bir 0-boyutlu

$$D = n_1 q_1 + \ldots + n_k q_k$$

zincirine *bölen* denir, şayet q_i ler $\mathfrak{R}$ üzerinde noktalar, ve n_i lerde *tam sayılar* iseler

D, bir f fonksiyonunun bölenidir diyoruz, şayet q_i ler f nin sıfır ve kutup yerleri ve n_i ler mertebeleri iseler, bu mertebeler sıfır yerleri için pozitif, kutup yerleri için negatiftirler.

Bütün bölenler bir Abel grubu teşkil ederler, fonksiyonların bölenleri ise, ki bunlara *esas bölenler* de denir, bir D_0 altgrubunu teşkil ederler.

D/D_0 bölüm grubunun elemanlarına, *bölen sınıflar* denir. Şu halde, iki bölen aynı *bölen sınıfa* aittirler, yalnız ve yalnız farkı D_0 a ait ise, yani bu fark, bir fonksiyonun böleni ise. D_0 a, yani *esas bölenlerin* sınıfına, *esas sınıf* denir.

Bir *bölenin derecesi* katsayılarının *toplamıdır.*

$\mathfrak{R}$ kapalı olduğundan, esas bölenlerin dereceleri, sıfırdır. Ve aynı bölen sınıfa ait herhangi iki bölenin derecesi aynıdır.

D nin derecesi, deg D ile gösterilir. deg D, aynı zamanda, D yi ihtiva eden *bölen sınıfın* da derecesidir. Çünki bu sınıfa ait bütün bölenlerin derecesi aynıdır.

Özdeş olarak sıfır olmıyan bir α = *adz analitik diferensyelinin* de bölenindeн bahis edilebilir.

α = *adz nin böleni*, *a* nın, katlılıklarıyla birlikte, sıfır ve kutup yerlerinden müteşekkildir.

Bazen $D = q_1^{n_1} \ldots q_k^{n_k}$ şeklinde yazılır. D/D_0 benzer şekilde tarif edilir. Yani *iki bölen* aynı *bölen sınıfa* aittirler, yalnız ve yalnız *bölümü* D_0 a ait ise. Bu noktai nazardan hareket edilirse, iki diferansyelin bölümü bir fonksiyon olduğundan görülür ki, *bütün diferansyellerin bölenleri aynı sınıftadırlar*, bu sınıfa *kanonik sınıf* denir.

Özel olarak, kanonik sınıfa ait bütün bölenler aynı dereceyi haizdirler. Biraz ilerde göstereceğiz ki bu derece $2g-2$ye eşittir. Yani yalnız $\mathfrak{R}$ ye tâbidir.

TARİF 10. Bir *bölene*, bir tam bölen denir, şayet bu bölenin katsayıları ≥ 0 ise.

D_1, D_2 nin bir *katıdır* denir, şayet D_1-D_2 bir *tam bölen* ise.

Kolaylık olmak üzere, bazen, *f nin böleni D nin bir katıdır yerine, f, D nin bir katıdır* diyeceğiz.

Teorem 14.4.1.1. Verilen bir D *bölenin katları* olan fonksiyonlar, kompleks sayılar cismi üzerinde *bir vektör uzay* teşkil ederler. Bu vektör uzayın boyutu daima *sonludur*.

İspat. Vektör uzayı $\{D\}$, boyutunu ise dim D ile göstereceğiz. Şimdi $f \varepsilon \{D\}$ ise $\lambda f \varepsilon \{D\}$, ve $f_1, f_2 \varepsilon \{D\}$ ise $f_1 + f_2 \varepsilon \{D\}$. Boyutun sonlu oluşuna gelince, D nin yeter sayıda katları ile kutuplardan arınmış bir lineer kombinezon teşkil edilebilir ve dolayısıyla sabittir.

Teorem 14.4.1.2. $\{D\}$ nin boyutu, *dimD*, yalnız D nin bölen sınıfına tâbidir.

İspat. Farzedelim ki D_1, D_2, D nin bölen sınıfına aittirler. Tarif gereğince $D_1 - D_2 = D_0$. *f*, böleni D_0 olan bir fonksiyon olsun, ve f_1, f_2, sırasıyla

D_1, D_2 nin katları olsunlar. Bu takdirde $f_2 f$, $D_1 = D_0 + D_2$ nin bir katı, ve f_1/f, $D_2 = D_1 - D_0$ ın bir katıdır. $\chi: f_2 \to f_2 f$ tasviri $\{D_2\}$ den $\{D_1\}$ in içine, ve $\chi^{-1}: f_1 \to f_1/f$, $\{D_1\}$ *i* $\{D_2\}$ nin içine tasvir eder. Şu halde χ: $\{D_1\} \to \{D_2\}$ birebir ve *üzerine* bir tasvirdir. χ bir izomorfizmdir, ve dolayısıyla, dim $\{D_1\}$ = dim $\{D_2\}$.

Şu netice aşikârdır. 0 bölenin katı heryerde regüler (analitik) dir, ancak, heryerde analitik bir fonksiyon sabit olduğundan dim 0 = 1.

Teorem 14.4.1.3. deg D > 0 ise, dim D = 0.

İspat. Gerçekten, herhangibir $f \varepsilon \{D\}$, D nin bir katı olduğundan, böleninin derecesi > 0 dır. Halbuki f nin böleninin derecesi 0 dır.

Bir diferansyelin böleninin tarifini hatırlarsak, verilen bir bölenin katları olan diferansyellerden bahis edebiliriz. Fakat bu hal eskiye irca edilebilir. Gerçekten, α, D nin bir katıdır demek α/α_0, D–Z in bir katıdır demektir. Burada Z, α_0 ın bölenidir.

Binaenaleyh, D nin katı olan lineer bağımsız diferansyellerin sayısı dim (D–Z) dir. Burada Z, kanonik sınıfın herhangibir temsilcisini gösterir.

Bir diferansyel, 0 bölenin bir katıdır yalnız ve yalnız regüler ise. Fakat biliyoruz ki regüler diferansyeller g boyutlu bir vektör uzay teşkil ederler.

Binaenaleyh,

$$\dim (0 - Z) = \dim (- Z) = g.$$

14.4.2. **Riemann-Roch teoremi.** Bir bölenin boyutunu tesbit etmek için hiçbir genel metod mevcut değildir, fakat, Riemann-Roch teoremine göre, D nin katları olan lineer bağımsız fonksiyonların sayısı ile, –D nin katları olan lineer bağımsız diferansyellerin sayısı arasında bir bağıntı vardır:

$$\dim D = \dim (- D - Z) - \deg D + 1 - g.$$

Literatürde, bu teoremin çeşitli ispatları mevcuttur. Burada verilen ispat, Ahlfors-Sario [2] nun müşterek eserlerindeki ispatı tâkib etmekte ve teorem 14.1.5.2 nin ispatında işaret edilen

$$h_0(z, \zeta) = h_0(\zeta, z)$$

bağıntısındaki simetriye, ve oldukça basit bir lemmaya dayanmaktadır.

Önce vektör uzay teorisine ait, yukarda da sözü geçen bir lemmayı ispat edelim.

Lemma 14.4.2.1. U ve V kompleks sayılar üzerinde, sonlu boyutlu iki vektör uzay olsunlar. Farzedelim ki, bütün $u \varepsilon U$ ve $v \varepsilon V$ ler için tarifli, kompleks değerli bir *bilineer uv* çarpımı verilmiştir. U_0, bütün $v \varepsilon V$ ler için, $uv = 0$ eşitliğini sağlıyan bütün u ların *altuzayını*, V_0 ise, bütün $u \varepsilon U$ lar için, $uv = 0$ eşitliğini sağlıyan bütün v lerin *altuzayını* gösteresin. Bu takdirde,

$$\dim (U/U_0) = \dim (V/V_0).$$

İspat. Biliyoruz ki U nun bir $(u_1, \ldots, u_m)$ tabanı vardır öyleki $(u_1, \ldots, u_r)$ altcümlesi U_0 ın bir tabanıdır. Aynı şekilde V nin bir $(v_1, \ldots, v_n)$ tabanı vardır öyleki $(v_1, \ldots, v_s)$ altcümlesi V_0 ın bir tabanıdır. Şimdi aşağıdaki lineer denklem sistemini gözönüne alalım.

$$x_{r+1} (u_{r+1} v_j) + \ldots + x_m(u_m v_j) = 0, \; j = s + 1, \ldots, n.$$

Yine biliyoruz ki, $m-r$ değişken sayısı $n-s$ denklem sayısından büyük ise, bu sistemin aşikâr olmıyan bir $(x_{r+1}, \ldots, x_m)$ çözümü vardır. Üstelik uv bilineer olduğundan

$$(x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m) v_j = 0, \; j = s+1, \ldots, n.$$

Hipotezden dolayı,

$$(x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m) v_j = 0, \; j = 1, \ldots, s.$$

Şu halde, j, 1 den n ye kadardır. Dolayısıyla,

$$x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m \; \varepsilon U_0.$$

Binaenaleyh, $x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m$, U_0 a ait taban vektörlerinin bir lineer kombinezonu şeklinde yazılabilir. Yani

$$x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m = - x_1 u_1 - \ldots - x_r u_r$$

veya

$$x_1 u_1 + \ldots + x_m u_m = 0 .$$

Bu ise mümkün değildir, zira $(u_1, \ldots, u_m)$ lineer bağımsızdırlar. O halde

$$m-r \leq n-s.$$

Simetrik bir tarzda, $m-r \geq n - s$ gösterilebilir. Şu halde,

$$m-r = n-s .$$

Şimdi bu lemmayı ilgili probleme tatbik etmeye çalışalım.

U ve V vektör uzaylarının tarifi. § 14.1.4. – § 14.1.7 de elde edilen neticeleri bir kere daha burada tekrarlıyoruz.

DI. $(z - \zeta)^{-m-2} dz$, $m \geq 0$, şeklinde herbir singülerliğe, aynı singülerliği haiz, kompakt destekli bir θ_m *tam diferansyeli* inşa yolu ile tekâbül ettirilebilir. Bu θ_m, Ω^1_{eo} sınıfına ait bir diferansyel farkı ile belirlidir, ve birtek τ_m harmonik diferansyeli vardır, öyleki, $\tau_m - \theta_m \varepsilon \Omega_{eo}$.

$$\tau_m = \varphi_m + \bar{\psi}_m , \; \varphi_m = b_m(z, \zeta)\, dz, \; \psi_m = k_m(z, \zeta)\, dz$$

yazılırsa, φ_m, ψ_m analitik diferansyelleri

$$h_m(z, \zeta) = \frac{1}{(m + 1)!} \frac{d^m}{dz^m} h_0(z, \zeta)$$

$$\overline{k_m(\zeta, z)} = \frac{1}{(m+1)} \frac{d^m}{dz^m} k_0(z, \zeta)$$

bağıntılarını sağlarlar. Üstelik, $h_m(z, \zeta)$, $(z-\zeta)^{-m-2}\, dz$ *singülerliğini haizdir.* Diğer taraftan, h_0, k_0 simetriktirler, yani

$$h_0(z, \zeta) = h_0(\zeta, z),\ k_0(z, \zeta) = \overline{k_0(\zeta, z)}.$$

Ayrıca, ψ_m diferansyelinin *doğurucu* hassası vardır.

$$(\alpha, \psi_m) = \frac{2}{(m+1)!} a^m(\zeta),\ \forall \alpha = a dz \varepsilon \Omega_a$$

ve iç çarpım *Cauchy limiti* olarak tefsir edildiği taktirde,

$$(\alpha, \varphi_m) = 0.$$

D2. Herbir sonlu c zincirine, kompakt destekli kapalı bir $\theta = \theta(c)$ diferansyeli tekabül eder, şöyleki rezidüleri, $\partial c = \zeta_2 - \zeta_1$ deki katsayılarına eşit basit kutupları vardır, ve Ω^1_{eo} sınıfına ait bir diferasyel farkı ile birtek olarak belirlidir. Üstelik birtek $\tau = \tau(c)$ harmonik diferansyeli vardır öyleki, $\tau - \theta \varepsilon \Omega_{eo}$.

$$\tau(c) = \varphi(c) + \overline{\psi(c)},\ \varphi(c) = h(z, c)\, dz,$$

$\psi(c) = k(z, c)\, dz$ yazılırsa,

$$h(z, c) = -\int_c h_0(z, \zeta)\, d\zeta$$

$$k(z, c) = -\int_c k_0(z, \zeta)\, d\zeta,$$

ve analitik α için

$$(\alpha, \psi) = -(\alpha, \varphi) = 2\pi \int_c \alpha.$$

Bütün harmonik ω diferansyelleri için

$$(\omega, *\tau) = -2\pi i \int_c \omega.$$

Şimdi,

$$A = \sum_1^k m_i p_i,\ m_i \geq 1,\ \deg A = \sum_1^k m_i$$

tam bölenini gözönüne alalım.

$h_m(z, \zeta)\, dz$, $\zeta = p_i$, $0 \leq m \leq m_i - 1$, diferansyellerinin tevlid ettikleri vektör uzayını U(A) ile gösterelim. Tevlid edici diferansyeller lineer bağımsızdırlar, zira kutup yerleri ve aynı yerdeki mertebeleri farklıdır. Dolayısıyla, tevlid edici $h_m(z, \zeta)\, dz$ lerin sayısı deg A ya eşit olup,

$$\dim U(A) = \deg A.$$

İkinci bir V(A) vektör uzayını tevlid eden generatörleri (tevlid edici) şu şekilde tarif ediyoruz.

1. $h_m(z, \zeta)\, dz$, $\zeta = p_i$, $0 \leq m \leq m_i - 2$, $m_i \geq 2$.

2. $h(z, c)\, dz$ diferansyelleri, öyle ki, c; $c_1, \ldots, c_k$ zincirlerini tarar, ve $\partial c_i = p_i - p_1$.

3. $h(z, c)\, dz$ diferansyelleri, öyle ki, c; $a_1, \ldots, a_g$ kanonik tabanının a-devirlerini tarar.

Bu generatörler lineer bağımsızdırlar. 1. ve 2. ye ait diferansyellerin singülerlikleri farklıdır. Şu halde, mümkün bir lineer bağımlılık ancak 3. ye ait diferansyeller arasında olabilir. Fakat biliyoruz ki bunlar da lineer bağımsızdırlar.

Binaenaleyh, V(A) nın boyutu bu üç tipe ait generatörlerin sayısına eşittir. $k \geq 1$ ise 1. e ait generatörlerin sayısı deg A–k, 2. ye ait generatörlerin sayısı ise k–1 dir. Netice olarak $k \geq 1$ ise V(A) yı tevlid eden generatörlerin sayısı deg A – 1 + g, $k = 0$ ise sadece g dir.

Keyfi olarak verilmiş bir D böleni,

$$A = \sum_1^k m_i a_i,\ B = \sum_1^k n_j b_j$$

tam bölenler olmak üzere

$$D = B - A$$

şeklinde yazılabilir. Bu ayrılımda $a_i \neq b_j$.

Yukarda izahı yapılan U(A) ve V(B) vektör uzaylarını gözönüne alalım.

$u \varepsilon U(A)$, ve $v \varepsilon V(B)$ nin uv bilineer çarpımını tarif edebilmek için, U(A) ve V(B) nin sadece taban elemanlarında değerlerini tesbit etmiş olmak kâfidir.

U(A) nın bütün generatörleri

$$u = h_m(z, a)\, dz$$

V(B) nin ise

$$v = h_n(z, b)\, dz,\ v = h(z, c)\, dz.$$

Şayet, $v = h_n(z, b)\, dz$ ise

$$uv = \frac{1}{(m+1)!\,(n+1)!} \left(\frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m\, \partial \zeta^n} h_0(z, \zeta) \right)_{z=a,\ \zeta=b} \tag{14.4.2.1}$$

ve $v = h(z, c)\, dz$ ise

$$uv = -\int_c h_m(\zeta, a)\, d\zeta \tag{14.4.2.2}$$

şeklinde tarif ediliyor.

Bu tariflerden mütevellid, $U_0(A)$ ve $V_0(B)$ altuzayları tarif edilmişlerdir, ve lemma 14.4.2.1 den dolayı

$$\dim U(A)-\dim U_0(A) = \dim V(B) - \dim V_0(B).$$

Veya, dim U(A) ve dim V(B) nin değerleri yerlerine koyularak, $B \neq 0$ ise,

$$\dim V_0(B)-\dim U_0(A) = \deg B-1+g-\deg A=\deg D+g-1, \qquad (14.4.2.3)$$

$B = 0$ ise,

$$\dim V_0(B) - \dim U_0(A) = \deg D + g. \qquad (14.4.2.4)$$

Şimdi, $V_0(B)$ ve $U_0(A)$ altuzaylarının mânalarını tesbit edelim.

Teorem 14.4.2.1. Bir diferansyel $V_0(B)$ ye aittir yalnız ve yalnız A–B nin katı ise. Netice olarak dim (–D–Z) = dim $V_0(B)$.

İspat. Farzedelim ki $v = h(z)\,dz \varepsilon V_0(B)$. v nin tarifinden dolayı, $h(z)$ nin yalnız b_j noktalarında ve en fazla n_j mertebesinden kutupları vardır. Bu ise v, –B nin bir katı demektir. Hatta, v nin A – B nin bir katı olduğunu ispat edebilmek için, göstermeliyiz ki $h(z)$ nin a_i noktalarında en az m_i mertebesinden sıfırları vardır. Yani

$$h^{(m)}(a_i) = 0, \; m \leq m_i - 1.$$

$\{v_\nu\}$, V(B) nin generatörleri olsun ve farzedelim ki, $v = \Sigma\, y_\nu v_\nu$. $h_n(z, b)\,dz$ şeklinde bir v_ν gözönüne alalım. Teorem 14.1.5.2 den ötürü

$$h_n(z, \zeta) = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{\partial^n}{\partial \zeta^n}\,h_0(z, \zeta).$$

Dolayısıyla,

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial z^m}\,h_n(z, b)\right)_{z=a} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m\,\partial \zeta^n}\,h_0(z, \zeta)\right)_{z=a,\;\zeta=b}. \qquad (14.4.2.5)$$

Aynı şekilde, $v_\nu = h(z, c)\,dz$ ise,

$$h(z, c) = -\int_c h_0(\zeta, z)\,d\zeta.$$

Ve

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial z^m}\,h(z, c)\right)_{z=a} = -\,(m+1)\Big)!\int_c h_m(\zeta, a)\,d\zeta. \qquad (14.4.2.6)$$

(14.4.2.5) formülü, $u=h_m(z, a)dz$ gözönünde tutularak (14.4.2.1) ile karşılaştırılırsa,

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial z^m}\,h_n(z, b)\right)_{z=a} = (m+1)!\;uv,$$

ve $h_n(z, b)\,dz \varepsilon V_0(B)$ farzedilirse, $h_n(z,b)\,dz = h(z)\,dz$ vazedilebilir,

ve

$$h^{(m)}(a) = (m+1)!\;uv \qquad (14.4.2.7)$$

bulunur. Ayni şekilde, (14.4.2.6) formülü (14.4.2.2.) ile karşılaştırılırsa aynı (14.4.2.7) elde edilir. Diğer taraftan, $a = a_i$ ve $m \leq m_i - 1$ farzedilirse $u = h_m(z, a)\,dz \varepsilon U(A)$. Binaenaleyh $V_0(B)$ nin tarifinden dolayı $h^{(m)}(a) = 0$.

Karşıt olarak, farzedelim ki, φ diferansyeli A–B nin bir katıdır. V(B) de, φ nin aynı singülerliklerini haiz bir diferansyel vardır. V(B) regüler diferansyellerden müteşekkil bir taban ihtiva ettiğinden, $\varphi \varepsilon V(B)$.

$\varphi = v = h(z)\,dz$ vazedersek, (14.4.2.7) ve $a=a_i$, $m \leq m_i - 1$ için $h^{(m)}(a) = 0$ şartlarından dolayı, U(A) nın bütün u generatörleri için $uv = 0$. Bu da gösteriyor ki $\varphi \varepsilon V_0(B)$.

Fakat, φ nin –D nin bir katıdır demek φ/φ_0, –D–Z nin bir katıdır demektir. Binaenaleyh $V_0(B)$ nin generatörlerinin sayısı, –D–Z nin generatörlerinin sayısına eşittir. Yani

$$\dim(-D-Z) = \dim V_0(B).$$

Teorem 14.4.2.2. Bir diferansyel, $U_0(A)$ ya aittir yalnız ve yalnız B–A nın katı bir f fonksiyonunun diferansyeli ise. Netice olarak $B \neq 0$ ise dim D=dim $U_0(A)$ ve B=0 ise dim D=dim $U_0(A) + 1$.

İspat. Farzedelim ki $u = h\,d\zeta$, kolaylık olsun diye z lokal değişken yerine ζ aldık. Bu taktirde a_i noktalarından u nun kutuplarının mertebeleri $\leq m_i + 1$ ve rezüdüleri sıfırdır. u nun *tam* olduğunu, yani $u=df$, gösterebilirsek, f, –A nın birkatı olur, ve f B–A nın bir katı olarak seçilebilmesi için, u nun b_1 ile b_j arasındaki c_j yolu boyunca integralinin sıfır ve h nın da, $n_j > 1$ halinde b_j de en az $n_j - 1$ mertebeden bir sıfırı olması kâfidir.

Farzedelim ki $u = \Sigma x_\nu u_\nu$ ve $\{u_\nu\}$ U(A) nın bir tabanıdır. Herbir u_ν, $h_m(\zeta, a)\,d\zeta$ şeklindedir. Yukarda olduğu gibi, burada da,

$$h_m(\zeta, z) = \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{\partial^m}{\partial z^m}\,h_0(\zeta, z) = \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{\partial^m}{\partial z^m}\,h_0(z, \zeta)$$

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial \zeta^n}\,h_m(\zeta, a)\right)_{\zeta=b} = \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \zeta^n}\,h_0(z, \zeta)\right)_{z=a,\;\zeta=b},$$

ve $v = h_n(z, b)\,dz$ gözönünde tutularak, (14.4.2.1) ile mukayese edilirse,

$$h^{(n)}(b) = (n+1)!\;uv\,. \qquad (14.4.2.8)$$

Öte yandan, $v = h(z, c)\,dz$ için, (14.4.2.2) den, doğrudan doğruya,

$$\int_c h(\zeta)\,d\zeta = -\,uv \qquad (14.4.2.9)$$

yazılır.

$u \varepsilon U_0(A)$ olduğundan, h nın b_j de istenilen mertebede sıfır, a-periodları sıfır, ve nihayet V(B) nin tarifinde söz konusu olan herbir c_j eğrisi boyunca u nun integrali sıfır olduğu neticesine varılır.

En son göstermeliyiz ki u nun b-periodları sıfırdır. Bunun için $u_\nu = \varphi^{(\nu)}$, $u = \varphi = \Sigma x_\nu \varphi^{(\nu)}$ yazalım. Şayet $\varphi^{(\nu)} = h_m(\zeta, a)\, d\zeta$ ise $\psi^{(\nu)} = k_m(\zeta, a)\, d\zeta$ (§ 14.1.4) ve $\psi = \Sigma \bar{x}_\nu \psi^{(\nu)}$ vazedelim. Bu takdirde $\tau = \varphi + \bar{\psi}$ tam ve ψ regülerdir. Dolayısıyla ψ nin a-periodları sıfırdır ve bunun neticesi $\psi = 0$. O halde $\varphi = u$ tamdır. Bu suretle, $U_0(A)$ nın bütün elemanlarının, B–A nın katları olan f lerin df diferansyelleri olduğunun ispatı tamamlanmıştır.

Karşıt olarak, farzedelim ki, f, B–A nın bir katıdır. df nin aynı singülerliklerini haiz bir $u = \varphi \varepsilon U(A)$ vardır. Yukarda olduğu gibi, φ ye bir ψ regüler analitik fonksiyonunun konjugesini ekliyerek $\varphi + \bar{\psi}$ *tam* yapılabilir. Bu takdirde $\varphi + \bar{\psi} - df$ bir *regüler harmonik tam diferansyel*dir, ve dolayısıyla özdeş olarak sıfırdır. $\bar{\psi} = df - \varphi$ den $\psi = 0, \varphi = df$ neticesine varılır. Zira, $\bar{\psi}$ aynı zamanda analitiktir.

f, B–A nın katı olduğundan, (14.4.2.8) ve (14.4.2.9) vasıtasıyla, bütün $v \varepsilon V(B)$ ler için $uv = 0$, ve dolayısıyla, $u \varepsilon U_0(A)$.

Şayet $B \neq 0$ ise, B–A nın f katları, df diferansyellerine birebir olarak tekabül ederler, zira bu takdirde, integralden gelen sabit birtek olarak belirlidir. Bu halde, netice olarak

$$\dim D = \dim U_0(A).$$

Şayet $B = 0$ ise, sabitler de D nin katlarıdır, ve

$$\dim D = \dim U_0(A) + 1.$$

İki teoremin neticeleri, $B \neq 0$ veya $B = 0$ hallerine göre, (14.4.2.3) veya (13.4.2.4) formüllerinde yerlerine koyulursa, aşağıdaki *ünlü Riemann-Roch teoremi* elde edilir.

Teorem 14.4.2.3 *(Riemann-Roch)*. $\dim D = \dim(-D-Z) - \deg D - g + 1$.

14.4.3. **Riemann-Roch teoreminin neticeleri.**

RR1. Bu teoremde $D = -Z$ vazedersek

$$\dim(-Z) = \dim 0 + \deg Z - g + 1.$$

Halbuki $\dim(-Z) = g$ ve $\dim 0 = 1$. Binaenaleyh

$$\deg Z = 2g - 2.$$

RR2. Riemannt-Roch teoreminden derhal *Riemann eşitsizliği* elde edilir.

$$\dim D \geq -\deg D - g + 1.$$

Bu eşitsizliğe ait bazı tatbikatlar veriyoruz. Birkere görülüyor ki $\deg D < -g$ ise $\dim D > 1$. Dolayısıyla,

Teorem 14.4.3.1. $\deg D < -g$ ise D nin sabit olmıyan bir katı vardır.

Meselâ, önceden verilmiş bir noktada, mertebesi $\leq g + 1$, birtek kutbu haiz daima bir rasyonel fonksiyon vardır.

Teorem 14.4.3.2. $\mathfrak{R}$, cinsi g olan kapalı bir Riemann yüzeyi olsun. Bu takdirde herbir değeri $\mathfrak{R}$ de en fazla $g + 1$ defa alan sabit olmıyan fonksiyonlar vardır.

İspat. $D = -ma_0$, $a_0 \varepsilon \mathfrak{R}$, $m > 0$, farzedelim. Riemann eşitsizliğinden dolayı

$$\dim D \geq m - g + 1.$$

$m = g + 1$ seçersek, $\dim D \geq 2$. Yani, a_0 da, en fazla $g + 1$ mertebeden bir kutbu olan, en az lineer bağımsız iki fonksiyon vardır. Bunlardan biri sabit ise, diğeri sabit olamaz.

Bu teoremin bir neticesi de: $\mathfrak{R}$ nin önceden verilmiş bir noktasında bir kutbu, diğer noktalarında ise analitik olan bir fonksiyon vardır.

Teorem 14.4.3.3. $\mathfrak{R}$ üzerinde bir *schlicht* fonksiyon (her değeri bir defa alır) vardır yalnız ve yalnız $\mathfrak{R}$ nin cinsi 0 ise.

İspat. Farzedelim ki $g = 0$. Teorem 14.4.3.1 den dolayı, $\mathfrak{R}$ de her değeri en fazla 1 defa alan, sabit olmıyan bir fonksiyon, yani bir *schlicht fonksiyon* vardır.

Karşıt olarak farzedelim ki f, $\mathfrak{R}$ de *schlicht*'dir. $\mathfrak{R}$ nin herbir noktasının civarında, f birebir analitiktir. Yani, f ve f^{-1} orada süreklidir. Dolayısıyla, f, $\mathfrak{R}$ den küre *üzerine* bir homeomorfizmdir. O halde $\mathfrak{R}$ nin cinsi sıfırdır, zira g topolojik bir invarienttir.

RR3. Farzedelim ki $\deg 0 < -(2g - 2) = -\deg Z$. Yani $\deg(-D-Z) > 0$.

Teorem 14.4.1.3. ten dolayı, $\dim(-D-Z) = 0$. Bu takdirde Riemann-Roch teoremi aşağıdaki şekli alır.

$$\dim D = -\deg D - g + 1. \qquad (14.4.3.1)$$

Şimdi $a_0 \varepsilon R$ önceden verilmiş bir nokta olsun. Üstteki formül $D - a_0$ a tatbik edilirse,

$$\dim(D - a_0) = -\deg(D - a_0) - g + 1 = -\deg D - g + 1 + \deg a_0.$$

Yani,

$$\dim(D - a_0) = \dim D + 1. \qquad (14.4.3.2)$$

Bu da gösteriyorki $\mathfrak{R}$ de, D nin katı olmıyan $D - a_0$ ın bir katı vardır. D yi o şekilde seçersek, öyleki, a_0, D de mevcut değildir, bu takdirde

Teorem 14.4.3.4. Önceden verilmiş herhangibir noktada, *basit bir kutbu* olan bir rasyonel fonksiyon vardır.

RR4. Sabit bir $a_0 \varepsilon \mathfrak{R}$ noktası için, $D = -ma_0, m > 0$ ve tam, bölenlerini gözönüne alalım. dim $(-(m+1)a_0)$ ile dim $(-ma_0)$ mukayese edildiği takdirde, daima,

$$\dim(-(m+1)a_0) \geq \dim(-ma_0).$$

Kat'i eşitsizlik, yalnız ve yalnız, a_0 noktasında, yegâne singülerliği, $n+1$ mertebeden bir kutup noktası olan bir rasyonel fonksiyonun varlığı ile vuku bulur. Bu takdirde,

$$\dim(-(m+1)a_0) = \dim(-ma_0) + 1. \qquad (14.4.3.3)$$

$m = 0$ için, dim $0 = 1$; $m = 2g - 1$ için,

deg $D < -(2g-2)$ ve dolayısıyla, (14.4.3.1) tatbik edilebilir. Yani,

$$\dim(-(2g-1)a_0) = g. \qquad (14.4.3.4)$$

$0 < m < 2g - 1$ için, teorem 14.4.3.1 ve üstteki muhakemeden dolayı, tam $g+1$ adet tam sayı için (14.4.3.3) eşitliği sağlanmakta, yani boyut daima 1 artmakta, ve g adet tam sayı için boyut sabit kalmaktadır.

$m \geq 2g - 1$ için, yine (14.4.3.1) den dolayı boyut daima 1 artmaktadır.

Böylece aşağıdaki neticeye varmış oluyoruz.

Teorem 14.4.3.4. (*Weierstrass boşluk teoremi*). Tam g adet tam sayı vardır, $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_g < 2g$, öyleki, diğer noktalarda analitik, ve fakat a_0 da kutup mertebesi tam n_i olan hiç bir rasyonel fonksiyon mevcut değildir.

n_i tamları umumiyetle a_0 a tâbidir, a_g nin mümkün en küçük değeri g dir. Şayet bu minimum erişilmiş ise, yani $n_g = g$ ise,

$$\dim(-ga_0) = 1, \qquad (14.4.3.5)$$

ve, a_0 da mertebesi $\leq g$ olan birtek kutuplu hiçbir rasyonel fonksiyon mevcut değildir.

Görülüyor ki, $n_1, \ldots, n_g$ tamları, $1, 2, \ldots, g$ dizisi ile çakışıyor.

TARİF 11. Sabit olmıyan bir rasyonel fonksiyonun, yegâne singülerlikleri, mertebeleri g yi *aşmıyan* kutup yerlerine *Weierstrass noktaları* denir.

Bu noktaların sayısının sonlu olduğunu isbat edeceğiz.

Teorem 14.4.3.5. Weierstrass noktalarının sayısı sonludur.

İspat. a_0 bir Weierstrass noktası olsun. (14.4.3.5) den dolayı dim $(-ga_0) \geq 2$. Riemann-Roch teoremine göre

$$\dim(-ga_0) = \dim(ga_0 - Z) + 1,$$

ve dolayısıyla bir Weierstrass noktası için

$$\dim(ga_0 - Z) \geq 1.$$

Bu demektir ki regüler bir φ diferansyeli vardır, öyleki, a_0 *daki sıfır mertebesi* $\geq g$.

$(\varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ regüler diferansyeller için bir taban olduğuna göre,

$$\varphi = x_1\varphi_1 + \ldots + x_g\varphi_g$$

yazılabilir. $\varphi_i = h_i dz$ vazedersek, a_0 *da*, hipotezden dolayı,

$$\begin{aligned} x_1h_1 + \ldots + x_gh_g &= 0 \\ x_1h'_1 + \ldots + x_gh'_g &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1h_1^{(g-1)} + \ldots + x_gh_g^{(g-1)} &= 0. \end{aligned}$$

Binaenaleyh, x lerin hepsi sıfır olmadığından, $z = a_0$ da

$$W_g(z) = \begin{vmatrix} h_1 & \ldots & h_g \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1^{(g-1)} & \ldots & h_g^{(g-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Eğer $W(z) \not\equiv 0$ olduğunu gösterebilirsek, *sıfırlarının*, yani a_0 noktalarının *ayrık* noktalar, ve dolayısıyla sayısı sonlu olduğunu ispat etmiş oluruz.

Gösterelim ki, $W_g(z) \equiv 0$, $h_1, \ldots, h_g$ lerin lineer bağımlı olduklarını intaç eder.

İşaret edelim ki bazı $1 \leq i \leq g$ için $W_i \not\equiv 0$, zira $i = 1$ için $W_1(z) = h_1(z)$. Bir i seçelim öyle ki $W_i(z) \not\equiv 0$ fakat $W_{i+1}(z) \equiv 0$.

$W_{i+1}(z)$ determinantının en son satırının elemanlarının *minörlerini*

$$u_1, \ldots, u_{i+1}$$

ile gösterelim. Bu takdirde

$$u_1h_1^{(r)} + \ldots + u_{i+1}h^{(r)}_{i+1} = 0, \; r = 0, \ldots, i. \qquad (14.4.3.6)$$

Burada,

$$u_{i+1} = W_i \not\equiv 0.$$

(14.4.3.6) özdeşliğini u_{i+1} ile bölebiliriz, ve (14.4.3.6) yerine

$$v_1h_1^{(r)} + \ldots + v_ih_i^{(r)} + h^{(r)}_{i+1} = 0 \qquad (14.4.3.7)$$

Burada $v_k = u_k/u_{i+1}$ z nin analitik bir fonksiyonu olup, yalnız sonlu sayıda kutup yerleri vardır. Bu yerlerde noktalanmış yüzeyde (14.4.3.7) nin z ye nazaran türevi alınır ve $r + 1$ için (14.4.5.7) özdeşliği gözönünde tutulursa

$$v'_1 h_1^{(r)} + \ldots + v'_i h_i^{(r)} \equiv 0, \; r = 0, 1, \ldots, i-1.$$

$w_i(z)$ bu denklem sisteminin determinantıdır ve $W_i(z) \not\equiv 0$ olduğundan

$$v'_k = 0, \; k = 1, \ldots, i.$$

Binaenaleyh, $v_k = c_k =$ sabit, ve

$$c_1h_1(z) + \ldots + c_ih_i(z) + h_{i+1}(z) \equiv 0.$$

Bu ise, $h_1, h_2, \ldots, h_g$ nin lineer bağımlı olduğunu gösterir. Halbuki φ ler lineer bağımsızdır. Bu tezat gösteriyor ki $W_g(z) \not\equiv 0$ ve teorem ispatlanmıştır.

$g = 0$ veya $g = 1$ için $\mathfrak{R}$ üzerinde hiçbir Weierstrass noktası yoktur.

$g \geq 2$ için bu gibi noktalar vardır. Hurwitz [3] gösterdi ki, $g \geq 2$ için bu noktaların sayısı en az $2g + 2$ dir. Eşitlik yalnız *hiperelliptik yüzeyler* için vuku bulur. Bir üst sınır ise $g(g^2-1)$ dir.

14.4.4. **Abel Teoremi.** Klasik Abel teoremine göre (bk. H. Weyl [4]), bir 0 zinciri, bir kapalı Riemann yüzeyi üzerinde bir rasyonel fonksiyonun böleni olabilmesi için gerek ve yeter şart bu 0-zincirin, ∂c şeklinde yazılabilmesidir, burada, c, singüler bir 1-zincirdir, öyleki, $\mathfrak{R}$ üzerinde, bütün analitik α diferansyelleri için

$$\int_c \alpha = 0 .$$

Abel teoremini açık Riemann yüzeylerine ve üzerinde tarifli *kazi-rasyonel* denilen meromorf fonksiyonlara teşmil edeceğiz.

Farzedelim ki f, *açık veya kapalı* bir $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeyi üzerinde *meromorf* ve özdeş olarak sıfırdan farklı bir fonksiyondur. Bu takdirde,

$$d \log f,$$

f nın sıfır ve kutup yerlerinde *basit kutupları* olan bir analitik diferansyeldir. Fonksiyonlar Teorisinde gördük ki, rezidüleri, f nin sıfır ve kutup yerlerinin, sırasıyla, pozitif ve negatif işaretlerini taşıyan katlılıklarına eşittirler. Üstetelik, $d \log f$ nin periodları $2\pi i$ nin *tam* katlarıdır.

Bu teoremin *açık Riemann yüzeylerine* teşmilinde, $d \log f$, § 14.2.4. deki mânada *(TARİF 8) özel* bir diferansyel farzedilecektir. Bu şartı haiz bir f fonksiyonuna, rasyonel fonksiyonlara benzerliği gözönünde tutularak, *kazi-rasyonel* diyeceğiz.

Tariften ötürü, f nin yalnız sonlu sayıda sıfır ve kutup yerleri vardır. Üstelik, *$d \log f$, TARİF 8 nin $H1$ şartını sağladığından, rezidülerin toplamı sıfırdır.* Bu demektir ki, *katlılıklar* da hesaba katılarak, f nin aynı sayıda sıfır ve kutupları vardır.

Şimdi teoremi genel şekliyle ifade edelim.

Teorem 14.4.4.1. Bir 0-zinciri, bir *kazi-rasyonel* fonksiyonun *böleni* olabilmesi için gerek ve yeter şart bu 0-zincirin, ∂c şeklinde yazılabilmesidir, burada, c, singüler bir 1-zincirdir, öyleki, $\mathfrak{R}$ üzerinde, bütün *yarıtam kare-integrallenebilir* α diferansyelleri için

$$\int_c \alpha = 0. \qquad (14.4.4.1)$$

İspat. Farzedelim ki f kazi-rasyonel bir fonksiyondur. f nin aynı sayıda sıfır ve kutupları olduğundan böleninin derecesi sıfırdır. Bundan dolayı, bu bölen, bir devir farkı ile belirli, bir c 1-zincirinin ∂c sınırıdır.

$\tilde{\tau}(c) = \tilde{\varphi}(c) + \tilde{\tilde{\psi}}(c)$ yi teşkil edelim. Notasyondan da anlaşıldığı üzere $\tilde{\tau}$ özel bir harmonik diferansyel, ve $d \log f$ nin aynı kutup ve rezidülerini haizdir. Dolayısıyla,

$$\omega = d \log f - \tilde{\varphi}(c) \qquad (14.4.4.2)$$

kare integrallenebilir bir analitik diferansyeldir. Gerçekten, hiçbir singülerliği yoktur, ve kabul gereğince, bir kompakt cümlenin dışında $d \log f = \omega_{hm} + \omega_{eo}$ ve dolayısıyla *ideal sınırın* civarında kare-integrallenebilir. Şimdi.

$$\mathrm{Re}(\omega - \tilde{\psi}(c)) = \mathrm{Re}(\omega - \tilde{\tilde{\psi}}(c)) = d \log |f| - \mathrm{Re}\tilde{\tau}(c)$$

regüler ve özeldir. Üstelik *tam*dır, zira, teorem 14.1.6.1 den dolyı $\tilde{\tau}(c)$ nin periodları, $\tilde{\tau}(c)$ nin perodlarına eşit olup, $2\pi i$ nin katlarıdır. Fakat, teorem 14.2.4.1 in aşikâr bir neticesinden ötürü, regüler ve özel tam bir diferansyel, özdeş olarak sıfırdır. Binaenaleyh,

$$\mathrm{Re}\ (\omega - \tilde{\psi}(c)) = 0,$$

ve $\omega - \tilde{\psi}(c)$ analitik olduğundan

$$\omega = \tilde{\psi}(c).$$

Veya, (14.4.3) den dolayı

$$d \log f = \tilde{\varphi}(c) + \tilde{\psi}(c) = \tilde{\tau}(c) + 2i\mathrm{Im}\,\tilde{\psi}(c). \qquad (14.4.4.3)$$

Binaenaleyh, $\mathrm{Im}\,\tilde{\psi}(c)$ özel ve regülerdir. Bu sebeple, $\mathrm{Im}\,\tilde{\psi}(c)$ nin verilmiş bir *kanonik tabana* nazaran, sadece, sonlu sayıda sıfırdan farklı periodları vardır. (14.4.4.3) den ötürü, bu periodlar, π nin tam katlarıdır. § 14.1.7 gözönünde tutulursa, bir c_0 deviri bulunabilir, öyleki,

$$\tilde{\sigma}(c_0) = \frac{1}{2\pi i}\tilde{\tau}(c_0)$$

in periodları, $\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\tilde{\psi}(c)$ nın periodlarına eşittir. Dolayısıyla

$$i\,\tilde{\tau}(c_0) - 2\mathrm{Im}\,\tilde{\psi}(c)$$

tam ve özeldir. Şu halde

$$2 \operatorname{Im} \tilde{\psi}(c) = i\, \tilde{\tau}(c_0) = 2 \operatorname{Im} \tilde{\psi}(c_0).$$

Yani

$$\tilde{\psi}(c) = \tilde{\psi}(c_0) \text{ veya } \tilde{\psi}(c - c_0) = 0.$$

$\tilde{\psi}$ nin doğrucu hassasından ötürü (formül (14.1.6.2)), bütün yarıtam analitik α diferansyelleri için

$$\int_{c-c_0} \alpha = \frac{1}{2\pi} (\alpha, \tilde{\psi}(c - c_0)) = 0.$$

Karşıt olarak, farzedelim ki, c bütün yarıtam analitik α lar için, (13.4.4.1) i sağlıyor. Bu takdirde $(\alpha, \tilde{\psi}(c)) = 0$, ve $\tilde{\psi}(c)$ nin kendisi de yarıtam olduğundan $\tilde{\psi}(c) = 0$. O halde, $\tilde{\tau}(c) = \tilde{\varphi}(c)$, ve $\tilde{\varphi}(c)$, bütün periodları, $2\pi i$ nin katları olan, bir analitik diferansyeldir. Bu demektir ki, f tekdeğerli olmak üzere, derhal

$$\tilde{\varphi}(c) = d \log f$$

yazılabilir. $\tilde{\tau}(c) = d \log f$ bağıntısı ise, $d \log f$ nin özel, yani kazi-rasyonel olduğunu gösterir, ve dolayısıyla, *böleni* ∂c dir.

BÖLÜM XV

SÜREKSİZ GRUPLAR

1. Üniformizasyon

15.1.1. **Düzlem yüzeyler.** Bu tip yüzeyleri, Bölüm XIII te tarif etmiştik, W üzerinde herbir devir, yüzeyi bölüyorsa, W ye düzlem yüzey denir. Özel olarak, *Jordan eğrisi* teoremine göre, düzlem de bir *düzlem yüzeydir.*

Umumiyetle, bir Riemann yüzeyi, *lokal olarak*, düzlemin bir bölgesine birebir konform tasvir edilebilir, ve fakat bu lokal koordinat sistemi birebir konform olarak bütün yüzeye teşmil edilemez. Burada göstereceğiz ki W, *bir düzlem yüzey* ise bu mümkündür. Yani $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$ nin tamamı, düzlemin bir bölgesine birebir konform tasvir edilebilir.

Bölüm XIII de ispat ettiğimiz esas varlık teoreminden şu neticeyi istihsal edebiliriz. $\mathfrak{R}$ üzerinde, reel bir u fonksiyonu vardır, öyleki,

(i) $p_0 \varepsilon W$ sabit bir nokta ise, u, $W - p_0$ üzerinde harmoniktir.

(ii) $u - \operatorname{Re}(1/z)$, p_0 ın bir V_0 civarında harmoniktir.

(iii) $\| du \|_{W-\bar{V}_0} = \iint_{W-\bar{V}_0} du * du < \infty$.

(iv) $\| dh \| < \infty$, ve V_0 da $h \equiv 0$, şartlarını sağlıyan herhangibir $h \varepsilon C^2$ reel fonksiyonu için $(du, dh) = 0$.

Hatırlatalım ki, (iv) ün ispatında, *ortogonal ayrılım teoremini* kullandık, ve $\iint_{W-\bar{V}_0} du * du$, u nun $W-\bar{V}_0$ üzerindeki *Dirichlet integralidir.*

Diğer taraftan, u, yukardaki şartları sağlıyan herhangibir h ilâve edilerek değiştirilirse, $W-\bar{V}_0$ da $u + h \varepsilon C^2$, ve

$$\| d(u + h) \|^2_{W-\bar{V}_0} = (du + dh, du + dh)_{W-\bar{V}_0}$$

$$= \| du \|^2_{W-\bar{V}_0} + \| dh \|^2_{W-\bar{V}_0} + (du, dh) + \overline{(du, dh)}.$$

Fakat $(du, dh) = 0$ olduğundan,

$$\| d(u + h) \|^2_{W-\bar{V}_0} = \| du \|^2_{W-\bar{V}_0} + \| dh \|^2_{W-\bar{V}_0} \geq \| du \|^2_{W-\bar{V}_0}.$$

Dolayısıyla, u harmonik fonksyonu, $W-\overline{V}_0$ *üzerindeki Dirichlet integralini* bütün $u + h$ fonksiyonlarının sınıfı içinde, *minimum* yapandır.

$du + i * du$ diferansyeli W de analitik ve p_0 da $d\,(1/z)$ singülerliğini haizdir.

Şimdi, *du tam* olmasına rağmen, $* du$ nun *tam* olması için hiçbir sebep yoktur. Göstereceğiz ki, W bir *düzlem yüzey* ise $* du$ *tamdır.*

Bunun için ispat etmeliyiz ki, $W-p_0$ da herhangibir kapalı γ eğrisi boyunca

$$\int_\gamma * du = 0.$$

γ yı şu şekilde seçebiliriz. γ yı, herbir parçanın birtek parametre dairesinin içinde bulunmak üzere parçalara ayıralım. Sonra, bu parçaların herbirini bir doğru parçasıyla birleştirelim. Böylece, γ, herbiri birtek parametre dairesine ait, sonlu sayıda analitik yay parçalarından müteşekkil bir analitik eğri ile değiştirilmiş bulunuyor.

$* du$, bu eğri boyunca aynı periodu haizdir.

O halde, gösterebilirsek ki, analitik yaylardan müteşekkil kapalı bir eğriyi teşkil eden basit kapalı eğriler boyunca $* du$ nun periodları sıfırdır, bu takdirde $*du$ nun periodları olmadığını ve dolayısıyla $*du$ nun tam olduğunu ispat etmiş oluruz.

Öyle ise farzedelim ki γ, analitik yaylardan müteşekkil basit kapalı bir eğridir, yani bir çevredir. W bir düzlem yüzey olduğundan, γ, W yi W′, W″, bileşenlerine ayırır. Yine farzedelim ki, bu bileşenlerden, meselâ, W″ p_0 ı ihtiva ediyor.

γ yı sonlu sayıda parametre daireleriyle örtelim, öyleki, hiçbirinin kapanışı, p_0 ı ihtiva etmesin. Bu parametre dairelerinin W″ de bulunan kısımlarının birleşimini G ile gösterelim.

Bu takdirde h yı, W üzerinde şu şekilde tarif ediyoruz.

$$h(p) = \begin{cases} p\varepsilon\ W' \text{ için } 1 \\ p\varepsilon W''-G \text{ için } 0, \end{cases}$$

ve $h\varepsilon C^2$. h fonksyonu (iv) şartını sağladığından, $(du, dh) = 0$.

Dolayısıyla,

$$0 = (du, dh) = \int_G\int du * dh = \int_G\int dh * du$$

$$\int_{\partial G} h * du - \int_G\int hd * du = \int_\gamma * du,$$

zira, $d * du = 0$ ve $\partial G = \gamma \cup (\partial G-\gamma)$, öyleki, γ üzerinde $h = 1$ ve $\partial G - \gamma$ üzerinde $h = 0$. Bu da gösteriyor ki, $* du$ tamdır. Dolayısıyla, $* du = dv$ vazedilirse, görülür ki

$$f = u + iv$$

$W - p_0$ da analitik, p_0 da $1/z$ singülerliğini haiz, ve u reel kısmı (iii) ve (iv) şartlarını sağlamaktadır.

$\omega = f(p)$ **tasviri birebirdir.** $p_1, p_2 \varepsilon W$ herhangi iki nokta olsun, öyleki, $p_1, p_2 \neq p_0$, ve $df \neq 0$. İddia ediyoruz ki bu şartlar altında $f(p_1) \neq f(p_2)$. Aksini kabul ederek

$$f(p_1) = f(p_2) = u_1 + iv_1$$

vazedelim.

$u = u_1$ ve $v = v_1$ *seviye eğrileri*, W yi bölgelere ayırır, öyleki, herbirinde, aşağıdaki dört eşitsizlikten bir tanesi sağlanmıştır.

(a) $u > u_1\ ,\ v > v_1$
(b) $u > u_1\ ,\ v < v_1$
(c) $u < u_1\ ,\ v > v_1$
(d) $u < u_1\ ,\ v < v_1$.

Şimdi, p_1 (veya p_2) de, $df \neq 0$ olduğundan, f^{-1}, (u_1, v_1) noktasının bir civarını, p_1 (veya p_2) noktasının bir civarına birebir konform tasvir eder, ve p_1 (veya p_2) den sadece birtek $u = u_1$, ve $v=v_1$ eğrisi geçer ve bu eğriler, biri diğerine *diktir*. Dolayısıyla, p_1 (veya p_2) in civarı, $u = u_1$, $v = v_1$ tarafından tam dört bölgeye ayrılmıştır.

Aynı şey p_0 ın bir civarı için söylenebilir. Zira, f, p_0 ın bir civarını birebir ve konform olarak w-küresinde, $w = \infty$ noktasının bir civarına tasvir eder, ve $w = \infty$ un bu civarı, $w' = \infty$ dan geçen $u = u_1$ ve $v=v_1$ doğrularıyla tam dört bölgeye ayrılmıştır.

Şimdi ispat etmek istiyoruz ki, $u = u_1$ ve $v = v_1$ seviye eğrilerinin W de ayırmış oldukları bölgelerin herbiri için, p_0 ortak sınır noktasıdır, ve dolayısıyla, W *tam dört bölgeye ayrılmış bulunmaktadır.*

Aksini kabul ederek, farzedelim ki, $u = u_1$ ve $v = v_1$ seviye eğrileri W de, bir G bölgesini sınırlamaktadırlar, öyleki, p_0, G nin bir sınır noktası değildir.

Bu takdirde, $t\varepsilon(-\infty, \infty)$ reel değişkeni için

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \arctan t^3,\ -1 < \varphi(t) < 1,$$

$$\psi(t) = \frac{t^4}{1 + t^4}\ ,\ 0 < \psi(t) < 1,$$

vazedelim. Diğer taraftan,

$$g(p) = \begin{cases} p \varepsilon W - G \text{ için, } 0 \\ p \varepsilon G \quad \text{ için, } \varphi(u(p) - u_1)\, \psi(v(p) - v_1) \end{cases}$$

tarif edelim. Dolayısıyla, g, şu hassaları haizdir.

(1) $g \varepsilon C^2$

(2) p_0 ın civarında $g \equiv 0$.

Şimdi, $\| dg \|$ ve (du, dg) yi hesaplıyalım. Bunun için $R \subset G$, W üzerinde $\overline{R}$ kapanışı kompakt olan keyfi bir bölge, ve $\{e_i\}$, $\overline{R}$ üzeirinde birimin bir bölünmesi olsun, öyleki, R de $\Sigma^n_{i=1} e_i \equiv 1$ ve $e_i \varepsilon C^2$. Üstelik, $\overline{R}$ nin V_i parametre daireleriyle örtüldüğünü farzedersek, V_i de $e_i > 0$. Herbir V_i ye tekabül eden lokal koordinatları (x_i, y_i) ile gösterelim, bu taktirde,

$$(du, dg) = \underset{R \subset G}{\text{en küçük üst}} \text{ sınır } \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i}\int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} \right) e_i dx_i dy_i,$$

ve

$$\| dg \|^2 = \underset{R \subset G}{\text{en küçük üst}} \text{ sınır } \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i}\int \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2 \right) e_i dx_i dy_i.$$

Fakat, G de

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \varphi'(u-u_1)\, \psi(v-v_1) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \varphi(u-u_1)\, \psi'(v-v_1) \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

ve

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \varphi'(u-u_1)\, \psi(v-v_1) \frac{\partial u}{\partial y_i} + \varphi(u-u_1)\, \psi'(v-v_1) \frac{\partial v}{\partial y_i}.$$

Cauchy-Riemann denklemleri de gözönünde tutulursa,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2 = (\varphi'^2 \psi^2 + \varphi^2 \psi'^2) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_i} \right)^2 \right)$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} = \varphi' \psi \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_i} \right)^2 \right).$$

Halbuki,

$$\varphi'(t) = \frac{6}{\pi} \frac{t^2}{1+t^6}, \quad 0 \leq \varphi'(t) < 2$$

ve

$$\psi'(t) = \frac{4t^3}{(1+t^4)^2}, \quad 0 \leq \psi'(t) < 2.$$

Dolayısıyla,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2 < 8 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_i} \right)^2 \right)$$

veya

$$\| dg \|^2 < 8 \| du \|^2_G < \infty, \tag{15.1.1.1}$$

ve G de $\varphi' > 0$, $\psi > 0$, ve ayrık noktalar hariç,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_i} \right)^2 > 0$$

olduğundan,

$$(du, dg) > 0. \tag{15.1.1.2}$$

Fakat, (1), (2) ve (15.1.1.1); (iv) şartını sağladıklarından, $(du, dg) = 0$. (15.1.1.2) tezat teşkil ettiğinden iddiamız doğrudur. *Yani, $u = u_1$, $v = v_1$ seviye eğrileri, W yi tam dört bölgeye ayırır, öyleki, herbir bölgenin sınırı p_0, p_1 p_2 noktalarını ihtiva eder.*

Bu bölgeleri aşağıdaki şekilde A, B, C, D ile gösterelim:

$$\begin{aligned} A &: u > u_1, \ v > v_1; \\ B &: u < u_1, \ v > v_1; \\ C &: u < u_1, \ v < v_1; \\ D &: u > u_1, \ v < v_1. \end{aligned} \tag{15.1.1.3}$$

Şimdi, p_1 i p_2 ye, uçları hariç, tamamen A ya ait bir γ_1 eğrisiyle, sonra aynı p_1, p_2 noktalarını, yine uçlar hariç, tamamen C ye ait bir γ_2 eğrisiyle birleştirelim. Yukarda izah edildiği şekilde, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ eğrisi, analitik yaylardan müteşekkil, basit kapalı bir eğri farzedilebilir. W, bir *düzlem yüzey* kabul edildiğinden, γ, W yi iki kısma ayırır: W′, W″. Bunlardan birtanesi, meselâ W″, p_0 ı ihtiva eder. p_0 ın civarında, B, D bölgelerine ait noktalar vardır, dolayısıyla, B ve D tamamen W″ ye aittir. p_1 in civarında ise, (15.1.1.3) deki tablo gösteriyorki, B ye ait noktalar γ nın bir tarafında, D ye ait noktalar da γ nın öbür tarafındadır. Bu tezat gösteriyor ki, f, p_1 ve p_2 de farklı değerler alır.

Üstelik, df, W nin hiçbir noktasında sıfır olamaz. Şayet W nin bir p noktasında, $df = 0$ olsa idi, p ye ait z lokal koordinat cinsinden,

$$f(z) = a_n z^n + \ldots, \quad a_n \neq 0, \ n > 1$$

yazılabilirdi. Fakat, bu taktirde, $z = 0$ ın civarında, f, herbir değeri, W nin n farklı noktalarında n defa alır. Bu da bir önceki neticeye tezat teşkil eder.

Şu halde, $w = f(z)$, W yi birebir konform olarak w-küresinde, $w = \infty$ noktasını da içine alan bir G bölgesine tasvir eder.

Nihayet şu hususu ispat edelim:

G bölgesi, reel eksene paralel doğru parçalarıyla sınırlanmıştır (bunlardan bazıları bir noktaya müncer olabilir). Aksini kabul ederek, farzedelim ki, δ, (u_1, v_1) ve (u_2, v_2), $v_1 < v_2$, noktalarını birleştiren G nin bir sınır parçasıdır. (u_1, v_1), (u_2, v_2) noktalarından geçen, reel eksene paralel, $v = v_1$ ve $v=v_2$ doğrularını sağa doğru *yeter derecede uzattıktan sonra*, bu doğrular üzerindeki (u_3, v_1). (u_3, v_2) noktalarını imajiner eksene paralel, $u=u_3$ doğru parçasıyla birleştirelim. Nihat farzedebiliriz ki $u=u_3$ doğru parçası tamamen G nin içindedir. Bu mümkündür, zira, G, ∞ ve onun bir civarını ihtiva etmektedir.

Şimdi, δ; ve sağda, $u=u_3$ doğru parçası; üstte $v=v_2$ doğru parçası ve G ye ait sınır parçası; altta, $v=v_1$ doğru parçası ve G ye ait sınır parçası ile ihata edilen altbölgeyi G′ ile gösterelim. Nihayat G de $g(u, v)$ fonksiyonunu şu şekide tarif edelim.

$$g(u, v) = \begin{cases} (u, v) \varepsilon G - G' \text{ için } 0 \\ (u, v) \varepsilon G' \text{ için } \frac{1}{8} (u-u_3)^3 (v-v_1)^2 (v-v_2)^2. \end{cases}$$

Görülüyor ki G de $g \varepsilon C^2$ ve $w=u + iv = \infty$ un bir civarında $g \equiv 0$.

Halbuki, $w = f(p)$, W yi G üzerine birebir konform tasvir ettiğinden $w = u + iv$ bütün W için lokal parametre olarak kullanılabilir. Böylece g, bütün W üzerinde tarif edilmiş olup, p_0 ın bir civarında $g \equiv 0$ ve $\| dg \| < \infty$. Bu taktirde (iv) sağlanmış olduğundan $(du, dg) = 0$. Fakat.

$$(du, dg) = \int_G\int \left(\frac{\partial u}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial v}\right) dudv = \int_G\int \frac{\partial g}{\partial u} dudv > 0$$

zira, $u < u_3$ ve $v_1 < v < v_2$ için daima,

$$\frac{\partial g}{\partial u} = (u-u_3)^2 (v-v_1)^2 (v-v_1)^2 > 0.$$

Bu tezat gösteriyor ki, sınır bileşenleri *yatay doğru parçaları*, veya noktalardır.

TARİF 1. Genişletilmiş düzlemde, sonsuz noktasını bir iç nokta olarak kabul eden, ve sınırı paralel doğru parçalarından (veya nokta) müteşekkil bir G bölgesine, *kesit bölge* denir.

Binaenaleyh şu teoremi ispat etmiş bulunuyoruz.

Teorem 15.1.1.1. Herbir *düzlem Riemann yüzeyi*, birebir konform olarak bir kesit bölgeye tasvir edilebilir, öyleki, bu kesitler reel eksene paraleldirler.

W, basit irtibatlı ise, G kesit bölgesinin sınırı *en fazla bir bileşen* ihtiva eder. Bu bileşen boş ise, G genişletilmiş düzlemdir; birtek noktadan ibaret ise, G, açık düzlemdir. O halde üç hal varittir: *Basit irtibatlı* bir Riemann yüzeyi şu üç bölgeden birtanesine birebir konform tasvir edilebilir.

R1. G bütün küre (veya genişletilmiş düzlem) dir (Eliptik hal).

R2. G bir noktası kaldırılmış küre (veya açık düzlem) dir (Parabolik hal).

R3. G, pozitif uzunlukta ve reel eksene paralel bir kesiti olan küre (Hiperbolik hal).

Fakat Riemann konform tasvir teoremine göre [49].

Teorem 15.1.1.2. Kompleks düzlemde en az iki sınır nokta ihtivâ eden herhangibir *basit irtibatlı bölge* konform olarak birim dairesine tasvir edilebilir.

Bu teorem gözönünde tutularak R3 deki G bölgesi yerine birim daireden bahsedilebilir.

15.1.2. **Üniversel Örtme yüzeyleri.** Biliyoruz ki W Riemann yüzeyinin W^*_∞ üniversel örtme yüzeyi *basit irtibatlıdır*. Dolayısıyla,

Teorem 15.1.2.1. **(Genel Üniformizasyon teoremi).** Herhangibir Riemann yüzeyinin *üniversel örtme yüzeyi*, bir daireye, bir düzleme veya bir küreye birebir konform tasvir edilebilir.

Genel Üniformizasyon teoremi ilk defa P. Koebe [23, 24, 25] ve Poincaré [36] tarafından ispat edilmiştir.

Şimdi şu sual karşısında bulunuyoruz. W^*_∞, G bölgelerinin birine kaç çeşit şekilde konform tasvir edilebilir? Daha da kat'i olmak üzere, farzedelim ki, f ve g, W^*_∞ u, G üzerine konform tasvir ediyor. Bu taktirde, fog^{-1}, G yi birebir olarak kendi üzerine konform tasvir eder.

Gösterelim ki G nin kendi üzerine T konform tasvirleri, *lineer sübstitüsyon* (dönüşüm veya transformasyon) lardan ibarettir.

G1. G, bütün küre ise, (eliptik hal), T sübstitüsyonları,

$$T : w' = \frac{aw+b}{cw+d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

tipindedirler ve altı reel parametreye tâbi bir grup teşkil ederler.

G2. G, sonlu düzlem ise (parabolik hal), T sübstitüsyonları

$$T : w' = aw + b, \quad a \neq 0,$$

tipindedirler ve dört reel parametreye tâbi bir grup teşkil ederler.

G3. G, birim daire ise (hiperbolik hal), T sübstitüsyonları,

$$T : w' = e^{i\theta} \frac{w-a}{1-\bar{a}w}, \quad \theta \text{ reel}, \quad |a| < 1,$$

tipindedirler ve 3 reel parametreye tâbi bir grup teşkil ederler.

Bunların ispatına geçmeden önce, şu hususu gözönünde bulundurmak gerekir. *Düzlemi kendi üzerine birebir konform tasvir eden yegâne fonksyon*

$$w' = aw + b,\ a \neq 0,$$

lineer fonksiyonudur. Gerçekten, düzlemi kendi üzerine dönüştüren $w' = f(w)$ fonksyonu bir *tam* fonksyon olduğundan bütün düzlemde yakınsak, başlangıç noktası etrafında

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

kuvvet serisine açılabilir. Şayet sonsuz sayıda a_n ler sıfırdan farklı iseler, $w = \infty$ bir esas singüler noktadır. Weierstrass teoreminden dolayı, $w=\infty$ civarında, w' değeri herhangibir değere istenildiği kadar yakındır. Bu ise $w' = f(w)$ nin birebirliğine aykırıdır, zira, $f(0) = c$, $c \neq \infty$ ise, $|w| < \varepsilon$ nun resmi, $w' = c$ nin bir civarını örter, ve dolayısıyla, $w = \infty$ un civarında w', c ye yakın değerler alamaz. O halde,

$$w' = a_0 + a_1 w + \ldots + a_n w^n,\ a_n \neq 0.$$

Fakat $n > 1$ ise, w' herbir değeri n defa alır. Bu da mümkün değildir. Şu halde, $n=1$. Yani

$$w' = a_0 + a_1 w,\ a_1 \neq 0.$$

Şimdi G1–G3 ün ispatına geçebiliriz.

G1 in ispatı. (Eliptik hal). Farzedelim ki, G yi kendi üzerine tasvir eden $w' = f(w)$ fonksyonu için $f(\infty) = k \neq \infty$. Bu taktirde

$$w'' = \frac{1}{w'-k} = \frac{1}{f(w)-k},$$

$w = \infty$ u $w'' = \infty$ a dönüştürür, ve dolayısıyla G yi kendi üzerine birebir konform tasvir eder. O halde biraz önceki muhakemeden dolayı,

$$\frac{1}{w'-k} = a_0 + a_1 w,\ a_1 \neq 0.$$

Bu ise,

$$w' = \frac{aw + b}{cw + d},\ ad - bc = -a_1 \neq 0,$$

tipindedir.

G2 *nin ispatı*. (Parabolik hal). Burada G (açık) düzlemdir ve $w' = f(w)$ G yi kendi üzerine birebir konform tasvir eder. Dolayısıyla,

$$w' = aw + b,\ a \neq 0.$$

G3 *ün ispatı*. (Hiperbolik hal). Farzedelim ki $f(a) = 0$, $|a| < 1$. Bu taktirde

$$w'' = \frac{w-a}{1-\bar{a}w} = g(w)$$

$|w| < 1$ dairesini kendi üzerine birebir konform tasvir eder, ve $w = a$ yı $w'' = 0$ a gönderir. Dolayısıyla, $w' = f(g^{-1}(w''))$, $|w''| < 1$ dairesini $|w'| < 1$ dairesine birebir konform olarak tasvir eder, öyleki $w' = 0$, $w'' = 0$ a tekabül eder. Schwarz lemasının bütün şartları sağlandığından, $|w'| \leq |w''|$ ve $|w''| \leq |w'|$. Yani $|w'| / |w''| = 1$, veya $w' = e^{i\theta} w''$. Şu halde,

$$w' = e^{i\theta} \frac{w-a}{1-\bar{a}w}.$$

15.1.3. **Örtü Transformasyonları.** § 11.4.6. da gördük ki, W^*_∞, üniversel örtme yüzeyi *normaldir*, ve örtü transformasyonların $\mathcal{T}$ grubu W nin $\mathcal{J}$ esas grubuna izomorftur. $w = g(p^*)$, W^*_∞ u, G ye tasvir etmiş olsun. $q^* = f(p^*)$, W^*_∞ un bir örtü transformasyonu ise, $w' = g o f o g^{-1}(w)$, G yi kendi üzerine birebir konform tasvir eder, ve bundan dolayı bir lineer sübstitüsyondur. Binaenaleyh W^*_∞ un örtü transformasyonların $\mathcal{T}$ grubu, G yi kendi üzerine dönüştüren lineer sübstitüsyonların Γ grubuna tekabül eder ve dolayısıyla, Γ, $\mathcal{J}$ ye izomorftur. Sonra, yine aynı § 11.4.6 da gördük ki, özdeş transformasyon hariç, hiçbir örtü transformasyonunun sabit noktası yoktur, başka bir deyimle, özdeş transformasyon hariç herbir örtü transformasyonu, W^*_∞ üniversel örtme yüzeyinin *yapraklarının* yerini değiştirir, Bu demektir ki, Γ *ya ait hiçbir sübstitüsyonun sabit noktası yoktur*.

Şimdi üç hali ayrı ayrı inceliyelim:

1. Eliptik hal. Γ nın herbir sübstitüsyonu, kürcyi kendi üzerine dönüştürür, ve herbirinin en az bir sabit noktası vardır. Dolayısıyla, Γ nın yegâne elemanı özdeş sübstitüsyondur, ve bu sebeple, W nin örtme yüzeyi *birtek yapraktan* müteşekkildir, yani W nin kendisidir.

Diğer hallerin incelenmesine geçmeden önce, § 13.1.5 deki tarifleri tekrar hatırlatıyoruz.

$p \varepsilon W$, ve $p_1^*, p_2^*, \ldots \varepsilon W^*_\infty$ p nin *üzerindeki* noktalar olsun. W^*_∞ un G ye tasvirinde, $p_1^*, p_2^*, \ldots$ noktaları G de $w_1, w_2, \ldots$ noktalarına dönüşür. $\mathcal{T}$ grubunun örtü transformasyonları, p_i^*, $i = 1, 2, \ldots$, noktalarını aralarında değiştirir, ve buna paralel olarak, Γ grubunun sübstitüsyonları, w_i leri aralarında değiştirir. Bu taktirde diyoruz ki, w_i noktaları, Γ ya nazaran *eşdeğerdirler*. Umumiyetle, eşdeğer noktaların tarifi şöyledir.

TARİF 2. G nin bir Σ nokta cümlesine, Γ ya nazaran eşdeğerdir, veya Γ–eşdeğerdir denir, şayet

(i) herbir $T \varepsilon \Gamma$ ve herbir $w \varepsilon \Sigma$ için, $T(w) \varepsilon \Sigma$,

(ii) herhangi $w_1, w_2 \varepsilon \Sigma$, iki nokta için bir $T \varepsilon \Gamma$ vardır, öyleki, $w_2 = T(w_1)$.

Bir Γ grubunun süreksizliği şu şekilde de tarif edilebilir.

TARİF 3. G yi kendi üzerine dönüştüren lineer sübstitüsyonların Γ grubuna *süreksizdir* denir, şayet Γ ya nazaran eşdeğer noktaların Σ cümlesinin G de bir yığılma noktası yok ise.

TARİF 4. $w \varepsilon \Sigma$ herhangibir nokta ise, Σ ya w nin *mahreki* denir.

TARİF 5. F, G de analitik bir fonksyon ve Γ, G yi kendi üzerine dönüştüren lineer sübstitüsyonların grubu olsun. Bu taktirde, F ye, Γ ya nazaran *otomorf* bir fonksyon denir, şayet bütün $T \varepsilon \Gamma$ ler için $F(T(w)) = F(w)$ ise.

Teorem 15.1.3.1. W_∞^* un örtü transformasyonlarına tekabül eden lineer sübstitüsyonların Γ grubu süreksizdir.

İspat. Gerçekten $w_0 \varepsilon G$, Σ nın bir yığılma noktası ise, W_∞^* dan G ye bir konform tasvir vardır öyleki bu tasvirde, W_∞^* un bir p_0^* noktası w_0 a dönüşür. Bu tasvirde, p_0^* ın, W yi yalnız birkere örten bir V_0^* civarı, w_0 ın bir N_0 civarına dönüşür. Bu taktirde N_0 da, sonsuz sayıda Γ-eşdeğer noktalar vardır. Bu ise mümkün değildir, çünki V_0^*, W yi birkere örtüyor.

Şimdi, F, kutup noktaları hariç, W de tek-değerli bir analitik fonksyon olsun. W_∞^* dan G üzerine konform tasviri $p^* = g(w)$, ve W_∞^* dan W üzerine konform izdüşümü $p = f(p^*)$ ile gösterelim. Buradan,

$$p = f \circ g(w)$$

bulunur, ve

$$F(p) = F(f \circ g(w)) = H(w)$$

G de, w nin analitik bir fonksiyonudur. Aşikâr olarak $H(w)$, w nin mahrekinde aynı değeri alır. Mahrekin noktaları bir $T \varepsilon \Gamma$ sübstitüsyonu altında eşdeğer olduklarından,

$$H(T(w)) = H(w),$$

yani, H, Γ ya nazaran *otomorftur.*

§ 13.1.5 deki misallerde izah edildiği şekilde, W nin *konform bir modelini* inşa edebiliriz. G den hareket ederek, herbir mahrekin noktaları özdeşletirilmek suretiyle meydana gelen yüzey bir Riemann yüzeyidir. Bu yüzeyi G/Γ ile gösterelim. Açık olarak, W nin noktalarıyla, G/Γ nın noktaları arasında bir birebir tekabül vardır ve W nin G ye konform tasviri, W üzerindeki herbir p noktasının bir civarını, Σ nın herbir noktasının bir civarına birebir olarak dönüştürür ve bu civarlar özdeş kabul edildiklerinden Γ altında değişmezler. Binaenaleyh,

$$W \to G/\Gamma$$

tasviri birebir konformdur, ve G/Γ, W nin bir *normal şekli* olarak düşünülebilir.

TARİF 6. Biliyoruz ki, Γ-eşdeğerliği G yi *ayrık* mahreklere böler. Herbir mahrekten birtek nokta ihtiva eden G nin irtibatlı bir alt cümlesine *esas bölge* denir.

Binaenaleyh, R bir *esas bölgedir*, yalnız ve yalnız

(1) R nin herhangi iki noktası Γ-eşdeğer değilse

(2) Herbir $w \varepsilon G$, R de bir noktaya Γ-eşdeğer ise.

Aslında, esas bölge, W_∞^* un bir *yaprağının* G deki bir resmidir.

Şimdi parabolik üniversel örtme yüzeyini haiz Riemann yüzeylerinin tetkikine geçebiliriz.

II. Parabolik hal. Bu halde, Γ grubu

$$w' = aw + b$$

lineer sübstitüsyonlarını ihtiva eder. Herbir sübstitüsyonun yegâne *sonlu* sabit noktası

$$w = \frac{b}{1-a}.$$

O halde, sonlu sabit noktanın bulunmaması için, gerek ve yeter şart $a = 1$ dir. Binaenaleyh Γ, bütün

$$w' = w + b$$

ötelemelerinden müteşekkildir.

Burada da üç hal tefrik edilebilir:

(a) Γ, $w' = w$ özdeş ötelemeden ibarettir. Dolayısıyla, $W_\infty^* = W$, ve W, sonlu düzlem ile *konform eşdeğerdir.*

(b) Γ, $w' = w + b$ sübstitüsyonu tarafından tevlid edilmektedir, yani Γ,

$$w' = w + nb, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ötelemelerinden müteşekkildir.

Bu taktirde, esas bölge, genişliği $|b|$ olan, sonsuz bir şerittir. Binaenaleyh, W nin bir normal şekli, sonsuz uzunlukta dairevi bir silindirdir. $w = e^{2\pi i z/b}$, G/Γ yı birebir olarak, kutup noktaları kaldırılmış, bir küreye tasvir eder. Dolayısıyla, W, iki noktası kaldırılmış bir küreye konform eşdeğerdir.

(c) Γ, a/b oranı reel olmıyan a, b iki kompleks sayı olmak üzere, $w' = w + a$, $w' = w + b$ sübstitüyonları tarafından tevlid edilmektedir. Bu taktirde, Γ,

$$w' = w + ma + nb;\ m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

sübstitüsyonlarından müteşekkildir.

Burada, esas bölge, köşeleri, 0, a, b, $a + b$, olan paralel kenardır. Karşı kenarları özdeşlemek suretiyle, G/Γ nın topolojik bir modeli olan bir *tor* elde edilir. Dolayısıyla, G/Γ veya onun W konform resmi, cinsi 1 olan kompakt bir yüzeydir.

Yukarda, a/b nin reel olmaması şart koşulmuştu, zira aksi halde, yani a/b reel olmuş olsa idi, a, b, 0 dan geçen aynı doğru üzerinde bulunacaklardı. Bu takdirde, doğru üzerinde bir $c \varepsilon \Sigma$ noktası vardır öyleki, $a = kc$, $b = lc$, burada k ve l tam sayılardır, Gerçekten 0, a, b noktalarından geçen doğru üzerinde 0 a en yakın bir $c = m_1 a + n_1 b \varepsilon \Sigma$ noktası vardır, aksi halde 0, Σ nın bir yığılma noktası olur. Bu taktirde bir k tamı vardır, öyleki,

$$| ck - a | < | c | ,$$

yani,

$$| (m_1 k - 1)\ a + n_1 kb | < | c | .$$

Bu ise mümkündür ancak $ck - a = 0$. Aynı şekilde, $c\ l = b$.

Fakat, bu taktirde, Γ, birtek $w' = w + c$ öteleme ile tevlid edilmektedir.

Nihayet, gösterelim ki, Γ yı, en fazla, iki *lineer bağımsız öteleme* tevlid eder. Gerçekten, farzedelim ki $F(w)$, en fazla kutup noktaları olan, G de otomorf bir fonksyondur. Yani,

$$F(w + ma + nb) = F(w).$$

Burada a, b iki kompleks sayıdır, öyleki, a/b reel değildir. Bu sayılara, $F(w)$ nin *periodları* denir. Farzedelim ki $F(w)$ nin üçüncü bir c periodu vardır yani $F(w + c) = F(w)$. Şimdi w nin, Σ da, bir w_ν noktasına yaklaştığını kabul edelim, ve üstelik w_ν nün bir kutup yeri olduğunu farzedelim. Bu taktirde, $w_\nu + c$ de bir kutup yeridir. Dolayısıyla $w_\nu + c = w_\mu \varepsilon \Sigma$. Yani,

$$c = w_\mu - w_\nu = m'a + n'b.$$

Neticede aşağıdaki teoremi ispat etmiş bulunuyoruz.

Teorem 15.1.3.2. W^*_∞ üniversel örtme yüzeyleri parabolik olan yegâne W Riemann yüzeyleri, birtek noktası kaldırılmış, veya iki noktası kaldırılmış, veya cinsi 1 olan kompakt yüzeylere konform eşdeğer olan yüzeylerdir.

Hiperbolik hal ve rijid hareketler. Burada G, birim dairedir. Bu dairede, *gayri-Euclidyen* bir geometri tarif edeceğiz. Bu geometride, Euclid geometrisini belirten *rijid hareketler*, birim dairesini kendi üzerine birebir konform tasvir eden, lineer sübstitüsyonlardır. Gayrı-Euclidyen (G.E.) *noktalar*, $|w| < 1$ dairesi içinde bulunan, bildiğimiz w-düzleminin noktaları, ve G.E. *doğrular*, $| w | < 1$ dairesi içinde, $| w | = 1$ çemberine dik, çember yaylarıdır. Özel olarak, $| w | = 1$ çemberinin çapları G. E. doğrulardır.

G ye G. E. düzlem diyeceğiz. G nin rijid hareketleri, yani $|w| < 1$ birim dairesini kendi üzerine dönüştüren lineer sübstitüsyonlar, G.E. doğruları, G.E. doğrulara dönüştürür.

Herhangi w_1, $w_2 \varepsilon$ G noktalarından bir ve birtek doğru geçer. Gerçekten, bir G.E. hareketle, w_1 i $w = 0$ a getirelim, w_2 noktası w_2' noktasına gider. Açık olarak, 0 ve w_2' den geçen yegâne G.E. doğru, $| w | < 1$ in çapıdır. Ters hareket tatbik edilerek, $w = 0$, w_1 e ve w_2', w_2 ye gönderilirse; çap, w_1 ve w_2 den geçen G.E. doğruya dönüşür.

Bu geometride, *G.E. açılar*, iki yay arasındaki bilinen Euclid açılardır, ve G. E. rijid hareketler, bu açıları muhafaza ederler.

Yukardaki şekilde tarif edilen G.E. geometri, parelel aksyomu hariç. Euclid geometrisindeki bütün aksyomları sağlar. Gerçekten, G de bir P noktası ve bu noktadan geçmiyen bir L doğrusu verilmiş olsun. Bu P noktasından, L yi kesmiyen sonsuz sayıda *doğru* geçer Binaenaleyh bu Geometri, Lobachevsky-Bolyai aksyomlarını sağlar. Tasvir edilen G modeli ise *Poincaré* ye aittir. Üst yarı düzlem de Poincaré modeli olarak alınabilir [37].

Şimdi, dönelim W Riemann yüzeyine. W^*_∞ üniversel örtme yüzeyi, $q^* = f(p^*)$ W^*_∞ un bir örtü transformasyonu, ve $w = g(p^*)$, W^*_∞ dan G ye bir birebir konform tasvir olsun. Bu takdirde gördük ki $T = g o f o g^{-1} \varepsilon \Gamma$, G nin bir rijid hareketidir, ve Γ, G.E. bütün rijid hareketlerin bir altgrubudur. Üstelik Γ süreksiz olup, özdeş hareket hariç, Γ ya ait hiçbir rijid hareketin G de sabit noktası yoktur.

Halbuki, Γ ya ait rijid hareketleri üçe ayırmak mümkündür.

1. **G. E. dönemler.** Bu hareketlerin, herbirinin G: $| w | < 1$ de birtek $w = w_0$ sabit noktası vardır. Bu takdirde $w = 1/\overline{w}_0$ sabit bir noktadır, ve $w \to w'$ G E. dönme

$$\frac{w' - w_0}{w' - 1/\overline{w}_0} = e^{i\theta}\ \frac{w - w_0}{w - 1/\overline{w}_0}\ ,\ \theta \text{ reel.}$$

Bu hareket, şunların *bileşkesidir*; w_0, 0 a tasvir edilir, sonra G, 0 etrafında θ açısı kadar dönderilir, ve nihayet 0, w_0 a gerisingeriye tasvir edilir.

2. **G. E. ötelemeler.** Bu hareketlerin herbirinin $| w | = 1$ üzerinde iki sabit noktaları vardır. Bu noktaları w_1, w_2; $| w_1 | = | w_2 | = 1$, ile gösterirsek, G. E. öteleme,

$$\frac{w' - w_1}{w' - w_2} = r\ \frac{w - w_1}{w - w_2}\ , \qquad r > 0.$$

Bu hareket, şunların bileşkesidir: $| w | < 1$, üst yarı düzleme tasvir edilerek, w_1, 0 a ; w_2, ∞ a gönderilir; saniyen, bir r çarpanı ile büyütüldükten sonra, üst yarı düzlem gerisingeriye, $0 \to w_1$, $\infty \to w_2$ dönüşümleriyle birlikte,

D_1, D_2 nin katları olsunlar. Bu takdirde $f_2 f$, $D_1 = D_0 + D_2$ nin bir katı, ve f_1/f, $D_2 = D_1 - D_0$ ın bir katıdır. $\chi: f_2 \to f_2 f$ tasviri $\{D_2\}$ den $\{D_1\}$ in içine, ve $\chi^{-1}: f_1 \to f_1/f$, $\{D_1\}$ i $\{D_2\}$ nin içine tasvir eder. Şu halde χ: $\{D_1\} \to \{D_2\}$ birebir ve *üzerine* bir tasvirdir. χ bir izomorfizmdir, ve dolayısıyla, dim $\{D_1\}$ = dim $\{D_2\}$.

Şu netice aşikârdır. 0 bölenin katı heryerde regüler (analitik) dir, ancak, heryerde analitik bir fonksiyon sabit olduğundan dim $0 = 1$.

Teorem 14.4.1.3. deg $D > 0$ ise, dim $D = 0$.

İspat. Gerçekten, herhangibir $f \varepsilon \{D\}$, D nin bir katı olduğundan, böleninin derecesi > 0 dır. Halbuki f nin böleninin derecesi 0 dır.

Bir diferansyelin böleninin tarifini hatırlarsak, verilen bir bölenin katları olan diferansyellerden bahis edebiliriz. Fakat bu hal eskiye irca edilebilir. Gerçekten, α, D nin bir katıdır demek α/α_0, D–Z in bir katıdır demektir. Burada Z, α_0 ın bölenidir.

Binaenaleyh, D nin katı olan lineer bağımsız diferansyellerin sayısı dim (D–Z) dir. Burada Z, kanonik sınıfın herhangibir temsilcisini gösterir.

Bir diferansyel, 0 bölenin bir katıdır yalnız ve yalnız regüler ise. Fakat biliyoruz ki regüler diferansyeller g boyutlu bir vektör uzay teşkil ederler.

Binaenaleyh,

$$\dim (0 - Z) = \dim (-Z) = g.$$

14.4.2. **Riemann-Roch teoremi.** Bir bölenin boyutunu tesbit etmek için hiçbir genel metod mevcut değildir, fakat, Riemann-Roch teoremine göre, D nin katları olan lineer bağımsız fonksiyonların sayısı ile, –D nin katları olan lineer bağımsız diferansyellerin sayısı arasında bir bağıntı vardır:

$$\dim D = \dim (-D - Z) - \deg D + 1 - g.$$

Literatürde, bu teoremin çeşitli ispatları mevcuttur. Burada verilen ispat, Ahlfors-Sario [2] nun müşterek eserlerindeki ispatı tâkib etmekte ve teorem 14.1.5.2 nin ispatında işaret edilen

$$h_0(z, \zeta) = h_0(\zeta, z)$$

bağıntısındaki simetriye, ve oldukça basit bir lemmaya dayanmaktadır.

Önce vektör uzay teorisine ait, yukarda da sözü geçen bir lemmayı ispat edelim.

Lemma 14.4.2.1. U ve V kompleks sayılar üzerinde, sonlu boyutlu iki vektör uzay olsunlar. Farzedelim ki, bütün $u \varepsilon U$ ve $v \varepsilon V$ ler için tarifli, kompleks değerli bir *bilineer* uv çarpımı verilmiştir. U_0, bütün $v \varepsilon V$ ler için, $uv = 0$ eşitliğini sağlıyan bütün u ların *altuzayını*, V_0 ise, bütün $u \varepsilon U$ lar için, $uv = 0$ eşitliğini sağlıyan bütün v lerin *altuzayını* gösteresin. Bu takdirde,

$$\dim (U/U_0) = \dim (V/V_0).$$

İspat. Biliyoruz ki U nun bir $(u_1, \ldots, u_m)$ tabanı vardır öyleki $(u_1, \ldots, u_r)$ altcümlesi U_0 ın bir tabanıdır. Aynı şekilde V nin bir $(v_1, \ldots, v_n)$ tabanı vardır öyleki $(v_1, \ldots, v_s)$ altcümlesi V_0 ın bir tabanıdır. Şimdi aşağıdaki lineer denklem sistemini gözönüne alalım.

$$x_{r+1} (u_{r+1} v_j) + \ldots + x_m(u_m v_j) = 0, \; j = s + 1, \ldots, n.$$

Yine biliyoruz ki, $m-r$ değişken sayısı $n-s$ denklem sayısından büyük ise, bu sistemin aşikâr olmıyan bir $(x_{r+1}, \ldots, x_m)$ çözümü vardır. Üstelik uv bilineer olduğundan

$$(x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m) v_j = 0, \; j = s+1, \ldots, n.$$

Hipotezden dolayı,

$$(x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m) v_j = 0, \; j = 1, \ldots, s.$$

Şu halde, j, 1 den n ye kadardır. Dolayısıyla,

$$x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m \; \varepsilon U_0.$$

Binaenaleyh, $x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m$, U_0 a ait taban vektörlerinin bir lineer kombinezonu şeklinde yazılabilir. Yani

$$x_{r+1} u_{r+1} + \ldots + x_m u_m = - x_1 u_1 - \ldots - x_r u_r$$

veya

$$x_1 u_1 + \ldots + x_m u_m = 0 .$$

Bu ise mümkün değildir, zira $(u_1, \ldots, u_m)$ lineer bağımsızdırlar. O halde

$$m-r \leq n-s.$$

Simetrik bir tarzda, $m-r \geq n - s$ gösterilebilir. Şu halde,

$$m-r = n-s .$$

Şimdi bu lemmayı ilgili probleme tatbik etmeye çalışalım.

U ve V vektör uzaylarının tarifi. § 14.1.4. – § 14.1.7 de elde edilen neticeleri bir kere daha burada tekrarlıyoruz.

D1. $(z - \zeta)^{-m-2} dz$, $m \geq 0$, şeklinde herbir singülerliğe, aynı singülerliği haiz, kompakt destekli bir θ_m *tam diferansyeli* inşa yolu ile tekâbül ettirilebilir. Bu θ_m, Ω^1_{eo} sınıfına ait bir diferansyel farkı ile belirlidir, ve birtek τ_m harmonik diferansyeli vardır, öyleki, $\tau_m - \theta_m \varepsilon \Omega_{eo}$.

$$\tau_m = \varphi_m + \bar{\psi}_m , \; \varphi_m = b_m(z, \zeta)\, dz, \; \psi_m = k_m(z, \zeta)\, dz$$

yazılırsa, φ_m, ψ_m analitik diferansyelleri

$$h_m(z, \zeta) = \frac{1}{(m + 1)!} \frac{d^m}{dz^m} h_0(z, \zeta)$$

$|w| < 1$ e tasvir edilir. Büyütülmede, 0 ve ∞ sabit kaldıklarından. $|w| < 1$ in kendi üzerine tasvirinde, w_1 ve w_2 sabit kalırlar.

3. **G. E. limit dönmeler.** Bu hareketlerin herbirinin birtek w_1 sabit noktası vardır ve $|w_1| = 1$. Bilindiği üzere bu sübstitüsyonlar

$$\frac{-iw_1}{w' - w_1} = \frac{-iw_1}{w - w_1} + b, \qquad b \text{ reel}$$

şeklindedirler.

Limit dönmeler, şunların bileşkesidirler: Bir *inversiyonla*, $|w| < 1$, bir yarı- düzleme tasvir edilir, öyleki w_1, ∞ a dönüşür. Sonra reel eksene paralel bir b ötelmesini tâkiben, bir inversiyonla, $|w| < 1$ e gerisingeriye dönülür, öyleki ∞, w_1 e dönüşür. Ötelemede, ∞, yegâne sabit nokta olduğundan, w_1, *limit dönmenin* yegâne sabit noktasıdır.

Şimdi, farzedelim ki, $w'' = g'(p^*)$, W^*_∞ dan G ye ikinci bir konform tasvirdir. Bu takdirde

$$w' = g'(g^{-1}(w)) = F(w)$$

G de bir rijid harekettir, ve dolayısıyla, yeni örtü transformasyonu,

$$T' = g_1 o f o g'^{-1}$$

sübstitüsyonuna tekabül eder. Bu yeni T′ rijid hareketlerin grubuna Γ′ diyelim. Herhangibir $T' \varepsilon \Gamma'$ için $F = g' o g^{-1}$ olduğundan,

$$T' = g' o f o g'^{-1} = g' o g^{-1} o (g o f o g^{-1}) o g o g'^{-1},$$

ve

$$T' = F o T o F^{-1}.$$

Binaenaleyh, T ve T′, bütün rijid hareketlerin grubu içinde *konjüge elemanlar*dır. Yani,

$$\Gamma' = F\ \Gamma\ F^{-1}$$

yazılır, ve Γ ile Γ′ konjüge altgruplardır. Dolayısıyla Γ ve Γ′ aynı rijid hareketlerin grubudur, fakat, G de, farklı koordinat sistemlere göre ifade edilmişlerdir.

Nihayet, w' nü w'' ne dönüştüren Γ ya ait rijid hareket birtektir. Zira $T_1(w') = w''$ ve $T_2(w') = w''$ ise,

$$F_1 o F_2^{-1}(w'') = w'',$$

ve w'', $F_1 o F_2^{-1}$ in sabit noktasıdır. Şu halde, $F_1 o F_2^{-1}$ özdeş tasvirdir. Yani, $F_1 \equiv F_2$.

Bütün bu neticeleri bir araya toplarsak, şu teoremi söyliyebiliriz.

Teorem 15.1.3.3. Bir hiperbolik üniversel örtme yüzeyini haiz herbir Riemann yüzeyine, birtek olarak belirtilmiş, ve hiçbir G.E. dönme ihtiva etmiyen, G.E. G düzleminin G.E. rijid hareketlerinin süreksiz bir Γ grubu tekabül eder. G nin Γ altında eşdeğer noktaları özdeşlenirse, bir G_Γ Riemann yüzeyi elde edilir, öyleki G_Γ, W ye konform eşdeğerdir.

Şimdi, farzedelim ki, W_1, W_2 Riemann yüzeyleri konform eşdeğerdirler. h, W_1 i W_2 ye birebir konform tasvir eden fonksiyon olsun. Bu takdirde $W^*_{\infty 1}$, $W^*_{\infty 2}$ üniversel örtme yüzeyleri h^* altında konform eşdeğerdirler, öyleki,

$$f_1 : W^*_{\infty 1} \to W_1 \quad f_1 : W^*_{\infty 2} \to W_2$$

izdüşümü tasvirleri

$$f_2 o h^* = h o f_1$$

bağıntısını sağlarlar.

Dolayısıyla, herbir

$$T_1 : W^*_{\infty 1} \to W^*_{\infty 1}$$

örtü transformasyonuna

$$T_2 = h^* o T_1 o h^{-1} : W^*_{\infty 2} \to W^*_{\infty 2}$$

tasviri tekabül eder. Bu tasvir bir örtü transformasyonudur. Gerçekten, $p^*_1 \varepsilon W^*_{\infty 1}$, ve $f_1(p_1^*) = f_1 o T_1(p_1^*)$ den,

$$h o f_1 o T_1(p_1^*) = h o f_1(p_1^*)$$

ve dolayısıyla,

$$f_2 o h^* o T_1(p_1^*) = f_2 o h^*(p_1^*)$$

yazılır. Üstelik

$$h^*(p_1^*) = p_2^*$$

vazedilirse,

$$f_2 o (h^* o T_1 o h^{*-1})\ (p_2^*) = f_2 o^2 (h^* o h^{*-1})\ (p^*_2),$$

veya

$$f_2 o T_2(p_2^*) = f_2(p_2^*)$$

bulunur. Bu da gösteriyor ki T_2 bir örtü transformasyonudur. Binaenaleyh, W_1 in örtü transformasyonlarının grubu ile, W_2 nin örtü transformasyonlarının grubu *izomorftur*lar.

Şimdi, farzedelim ki, $g_2 : W^*_{\infty 2} \to G$, $W^*_{\infty 2}$ yi G ye birebir konform tasvir ediyor. Dolayısıyla, $g_2 o h^* = g_1$, $W^*_{\infty 1}$ i konform olarak G ye tasvir eder. Fakat,

$$g_1 o T_1 o g_1^{-1} = (g_2 o h^*)\ o T_1 o (g_2\ o h^*)^{-1} = (g_2 o h)\ o T_1 o (h^{*-1}\ o g_2^{-1})$$
$$= g_2 o (h^*\ o T_1\ o h^{*-1})\ o g_2^{-1} = o g_2\ T_2\ o g_2^{-1}.$$

Yani, T_1 ve T_2 ikisi de G nin aynı rijid hareketine tekabül eder. Bu demektir ki, W_1 ve W_2 nin örtü transformasyonlarının grupları arasındaki *izomorfizm*, mütekabil rijid hareketlerinin grupları arasında *özdeş izomorfizmi* istintaç eder. Şu halde, konform eşdeğer iki Riemann yüzeyi, G nin aynı GE. rijid harektlerinin grubuna tekabül eder.

Karşıt olarak, G nin rijid hareketlerinin herhangibir süreksiz Γ grubu verildiği takdirde, Γ-eşdeğer noktaların özdeşleştirilmeleri bir G/Γ Riemann yüzeyini meydana getirir. O halde şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 15.1.3.4. İki Riemann yüzeyi aynı rijid hareketlerin grubuna tekabül eder yalnız ve yalnız konform eşdeğerseler.

2. Fuchs Grupları ve Esas Bölge

15.2.1. **Fuchs ve Klein Grupları.** Bu, 2. kısımda, özellikle, G: $|w| < 1$, G. E. düzlemini gözönüne alacağız. Yukardaki tetkiklerimizde, verilen bir W Riemann yüzeyinin, *hiperbolik* W^*_∞ üniversel örtme yüzeyinin örtü transformasyonlarının grubu, G: $|w| < 1$ birim dairesinin G. E. rijid hareketlerinin süreksiz bir Γ grubuna izomorf olduğunu gördük. Üstelik en son teoremden biliyoruz ki ayni rijid hareketlerin grubuna tekabül eden Riemann yüzeyleri konform eşdeğerdir.

İşte bu izomorfizm, genişletilmiş kompleks düzlemde,

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

lineer sübstitüsyonlarının Γ grubunun doğrudan doğruya, ve bütün genelliğiyle tetkikini zorunlu kılmaktadır.

Bir z_0 noktasına Γ nın bir limit noktasıdır denir, şayet bir z_1 noktası için z_0, Tz_1, $T \varepsilon \Gamma$, noktalarının bir yığılma noktası ise.

Γ grubunun, limit noktalarının tamamını L = L (Γ) ile gösteriyor ve L ye Γ nın limit cümlesi diyoruz.

L, *kapalı* bir cümledir ve Γ altında *değişmez*; L nin tamamlayıcısını $\mathcal{A}$ ile gösteriyor, ve $\mathcal{A}$ nın herbir noktasına *âdi nokta* diyoruz.

$\mathcal{A} \neq \varnothing$ ise, Γ süreksizdir diyoruz, ve bu takdirde $\mathcal{A}$, Γ nın *süreksizlik cümlesidir*.

Poincaré'nin deyimine göre, süreksiz gruplar, *Klein gruplarıdır*. Bu gruplar, aynı zamanda, bir çemberi sabit bırakıyorlarsa, *Fuchs gruplarıdır*.

L, en fazla iki nokta ihtiva ediyorsa, mütekabil Γ ları tasnif etmek kolaydır.

Diğer süreksiz gruplar için L, iki noktadan fazla nokta ihtiva etmektedir.

Poincaré, Klein, Fricke, Nielsen ve başkalarının, çalışmaları sayesinde, *Fuchs grupları* hakkında çok şey biliniyor; buna mukabil, *Klein grupları* hakkında mubalağasız, hiçbirşey bilinmiyor denebilir.

Süreksiz Γ gruplarının incelenmelerinde Γ nın limit noktalarının *ikiden fazla* olduklarını kabul edeceğiz. Fuchs gruplarında Γ nın limit noktaları Γ altında değişmiyen çemberin üzerindedirler.

Farzedelim ki Γ, bir Fuchs grubudur. Şayet limit noktaların L cümlesi, Γ altında değişmiyen çemberin tamamı ise, Fuchs grubu *birinci nevidendir*. Aksi halde, L, değişmiyen çemberin *hiçbir yerinde yoğun değildir*, ve bu taktirde Fuchs grubu ikinci nev'idendir.

Eliptik olmıyan lineer sübstitüsyonların sabit noktaları, L = L(Γ) üzerindedirler.

Δ, $\mathcal{A}$ nın bir bileşeni olsun. Açık olarak, Δ nın Γ altında bütün resimleri, yine $\mathcal{A}$ nın bileşenleridir.

Δ *nın resimlerinin birleşimine* Δ *nın mahreki denir*. Δ nın mahreki $\tilde{\Delta}$ ile gösterilebilir.

Δ, değişmiyen bir bileşendir, şayet $\Delta = \tilde{\Delta}$ ise.

Topoloji bakımından, düzlemi iki bölgeden fazla bölgelere ayırmak mümkündür.

Bu bölgeler, bir Klein grubu altında değişmiyen bileşenler olabilir mi?

Veya herbir Klein grubunun değişmeyen, en fazla, iki bileşeni varmıdır?

Bu değişmeyen bileşenlerin sayısı tam iki ise, ortak sınır mutlaka bir jordan eğrisi midir?

Nihayet, $\mathcal{A}$, değişmiyen basit irtibatlı bir bileşen olabilir mi?

Bütün bu sualler bugüne kadar cevaplandırılmış değildir [6, 7].

Şimdi, Γ nın $\mathcal{A}$ üzerindeki tesirini inceleyebilmek için,

$$S = \mathcal{A}/\Gamma$$

bölüm uzayını teşkil edelim. S nin S_i bileşenlerini gözönüne alalım.

S_i ler ne derecede keyfidirler, bunlara tekabül eden Γ grubu birtek midir? Bu suallerin de cevapları henüz bilinmiş değildir.

Γ grubu tahdit edilmek suretiyle, meselâ *sonlu tevlid edildiği* farzedilerek gösterilmiştir ki: L, küreyi bölmiyen bir *kontinuum* olamaz.

Şimdi $\pi: \mathcal{A} \to S$ izdüşüm tasviri analitiktir. Binaenaleyh herbir S_i bir Riemann yüzeyidir, ve $\mathcal{A}_i = \pi^{-1} S_i$ yazabiliriz. Umumiyetle $\mathcal{A}_i$ ler *irtibatlı* değildirler. Bileşenleri $\mathcal{A}_{ij}$ ile gösterelim. Dolayısıyla herbir Klein Γ grubu ile aşağıdaki ayrılımlar yazılabilir.

$$\mathcal{A} = \cup \mathcal{A}_i = \cup \mathcal{A}_{ij}$$

ve

$$S = \cup S_i \ .$$

Herbir $\mathcal{A}_i$, Γ altında değişmez, ve $\mathcal{A}_i$ nin sınırı L nin tamamıdır.

$\mathcal{A}_{ij}$ bileşenleri, S_j nin dallanmış örtme yüzeyleridir ve dallanma noktaları, eliptik sabit noktalardır.

Dallanma noktalarının izdüşumlerini p_k ile gösterelim. Bunlar ayrık noktalardır, ve herbirine bir $m_k \geq 2$ tam sayısı tekabül eder. Bu sayı, mütekabil eliptik sübstitüsyonun mertebesidir.

Diyoruz ki, $I = \{p_k, m_k\}$, S nin *imzasıdır*.

S ve I imzası, ikisi birlikte S(I) ile gösterilir. $S_i(I)$ nin mânası aynıdır.

TARİF 7. S, *sonlu tip*tendir denir, şayet,

(1) sonlu çoklukta S_i bileşenleri, ve p_k noktaları varsa,

(2) herbir S_i, sonlu sayıda noktaları kaldırılmış kompakt bir yüzeyden elde edilebiliyorsa.

Bu taktirde, kompakt yüzey S_i ile gösterilecek, ve kaldırılmış noktalara da, $m_k = \infty$ olan p_k noktaları nazarıyla bakılacaktır.

Fuchs grupları için şu teorem caridir.

Teorem 15.2.1.1. Γ sonlu tevlid ediliyorsa, bu taktirde S sonlu tiptendir.

Bu teoremin bir ispatı, yakın bir zamanda L. Bers tarafından bulunmuştur, fakat neşredilmemiştir. Klein grupları için aynı teoremin cari olabileceği düşünülerek, L. Ahlfors tarafından bir ispatı verilmiştir; ancak, bilahare bu ispatın noksan olduğu anlaşılmıştır, şöyleki, sonlu tevlid edilen *bir grubun, sonlu sayıda lineer bağımsız kuadratik diferansyelleri bulunduğu halde*, $\mathcal{A}/\Gamma$ mahrek uzayının, sonlu sayıda bileşenleri olmıyabilir [6,7]. Bilgilerimize göre bu sualin cevabı halen açıktır.

Şimdi yeniden Fuchs gruplarına, ve § 3.3.4 deki notasyonlara dönelim.

15.2.2. **Reel süreksiz gruplar.** § 3.3.4 deki notasyonlar cari kalmak üzere reel süreksiz grupların tetkikine devam ediyoruz. Hatırlatıyoruz ki bütün bu gruplar, R-reel ekseni muhafaza eden lineer sübstitüsyonların tamını teşkil eden $\tilde{\Omega}_R$ grubunun alt gruplarıdır.

Bu grupların herhangibirini Γ ile gösterelim. Demek ki $\Gamma \subset \tilde{\Omega}_R$.

L, Γ nın limit noktalarının cümlesini göstersin, $\alpha \varepsilon L$, şayet Z kompleks düzleminde, $z \varepsilon Z$ varsa öyleki, *farklı* $T_n \varepsilon \Gamma$ elemanlarından müteşekkil bir (T_n) dizisi için $T_n z \to \alpha$.

Şu önemli noktaya da ayrıca işaret etmek isteriz ki, $(T_n z)$ resimlerinin farklı olmaları şart değildir. Nitekim, sonsuz çoklukta $T \varepsilon \Gamma$ lerin bir sabit noktası, Γ nın bir limit noktasıdır.

z, bir limit noktası değilse, L nın âdi bir noktasıdır demiştik.

Âdi noktaların tamını $\mathcal{A}$ ile göstermekte devam edelim.

Γ *süreksizdir* diyoruz, şayet $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Γ, bir S cümlesi üzerinde süreksizdir, şayet $S \subset \mathcal{A}$ ise.

$z_1, z_2 \varepsilon Z$ noktaları, Γ ya nazaran *eşdeğerdirler* veya Γ-*eşdeğerdirler*, yalnız ve yalnız bir $T \varepsilon \Gamma$ bulunabilirlerse öyleki $Tz_1 = z_2$.

Γ-*eşdeğerlik bağıntısı*, Z yi ayrık *eşdeğerlik sınıflarına* böler. § 13.1.5 te gördük ki bu sınıfların herbirine *mahrek* denir.

Şu halde, z nin mahreki, z ve z nin Γ-eşdeğer noktalarından müteşekkil cümledir. z nin mahreki Γz ile gösterilirse,

$$\Gamma z = \{Tz \mid T \varepsilon \Gamma\}.$$

Aşikar olarak, hiçbir mahrek âdi bir noktaya yığılmaz.

Teorem 15.2.2.1. Herbir $T \varepsilon \Gamma$, L yi L üzerine ve $\mathcal{A}$ yı $\mathcal{A}$ üzerine tasvir eder.

İspat. Birinci ifade ikinciyi intac eder; gerçekten, $T(\mathcal{A})$, L yi keserse, $\mathcal{A}$, $T^{-1}(L)$ yi keser, yani kabulden dolayı, $\mathcal{A}$, L yi keser; bu ise mümkün değildir. Şu halde birinci ifadeyi ispat etmek kâfi gelecektir. Bunun için $\alpha \varepsilon L$ ve T_n ler Γ nın farklı elemanları olmak üzere, $T_n z \to \alpha$, olsun. Bu taktirde

$$TT_n z \to T\alpha.$$

Fakat $\{TT_n\}$ farklı elemanlardan müteşekkil bir dizidir. O halde $T\alpha \varepsilon L$, $\alpha \varepsilon L$ keyfi olduğundan,

$$T(L) \subset L, \ \forall T \varepsilon \Gamma.$$

Özel olarak,

$$T^{-1}(L) \subset L,$$

veya

$$L \subset T(L).$$

Neticede

$$T(L) = L.$$

Teorem 15.2.2.2. $\Delta \subset \Gamma$ bir altgrup ise $\mathcal{A}(\Gamma) \subset \mathcal{A}(\Delta)$. Özel olarak, süreksiz bir grubun altgrubu da süreksizdir. $[\Gamma : \Delta]$ indeksi *sonlu* ise, $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(\Delta)$. Binaenaleyh, $\Delta \subset \Gamma$ altgrubunun Γ daki indeksi sonlu, ve Δ süreksiz ise, Γ da süreksizdir.

İspat. Δ nın bir limit noktası, Γ nın bir limit noktasıdır. O halde $L(\Delta) \subset L(\Gamma)$ ve $\mathcal{A}(\Gamma) \subset \mathcal{A}(\Delta)$. Dolayısıyla $\mathcal{A}(\Gamma) \neq \varnothing$ ise $\mathcal{A}(\Delta) \neq \varnothing$ yani Γ süreksiz ise onun herhangibir altgrubu da süreksizdir.

Şimdi, $[\Gamma : \Delta] = r$ ise,

$$\Gamma = \Delta + \Delta A_2 + \ldots + \Delta A_r$$

yazılabilir. $\alpha \varepsilon L(\Gamma)$ olsun. Bu demektir ki bir z ve farklı $T_n \varepsilon \Gamma$ ler için

$T_n z \to \alpha$. $T_n = V_n A_{i_n}$; $V_n \varepsilon \Delta$, $1 \leq i_n \leq r$, yazalım. Şu halde $V_n A_{i_n} z \to \alpha$. Diğer taraftan (A_{i_n}) dizisinde, sonsuz defa tekrar eden i_n lere i diyelim. Bu takdirde, sonsuz bir (m) dizisi için $V_m A_i z \to \alpha$. Burada V_m ler farklıdırlar, ve böylece $\alpha \varepsilon L(\Delta)$. Yani $L(\Gamma) \subset L(\Delta)$. Halbuki, teoremin birinci ifadesinden $L(\Delta) \subset L(\Gamma)$. Buradan $L(\Delta) = L(\Gamma)$ bulunur.

Teorem 15.2.2.3. Süreksiz bir grup, *sonsuz mertebeden* eliptik *elemanlar* ihtiva edemez.

İspat. T eliptik bir sübstitüsyon olsun. T nin sabit noktalarından biri, diyelim ki z_0, Z^+ üst yarı düzlemdedir. Bir A lineer sübstitüsyonu ile, Z^+ dan $Q: |w| < 1$ birim dairesine geçilebilir, öyleki, $Az_0 = 0$. Dolayısıyla T sübstitüsyonu, Q yu kendi üzerine dönüştürür, ve $w = 0$ ı sabit bırakan

$$S = ATA^{-1}$$

sübstitüsyonuna dönüşür. Aşikâr olarak,

$$S: w' = w e^{2\pi i\theta}.$$

m, tam olmak üzere T^m ye

$$S^m: w' = we^{2\pi im\theta}$$

tekabül eder. θ yı irasyonel farzedersek, farklı m ler için $e^{2\pi im\theta}$ sayıları farklıdırlar. Gerçekten, $m \neq n$ için $e^{2\pi im\theta} = e^{2\pi in\theta}$ eşitliği, $(m-n)\ \theta$ nın tam olmasını intac eder. Dolayısıyla S nin bütün kuvvetleri farklıdırlar.

Binaenaleyh, $(e^{2\pi im\theta})$ dizisinin birim çemberi üzerinde bir yığılma noktası vardır. Bu yığılma noktası $e^{2\pi i\varphi}$ ise bir (m_j) altdizisi vardır öyleki $e^{2\pi im_j\theta} \to e^{2\pi i\varphi}$.

Dolayısıyla, herbir kompleks w için, $S^{m_j}(we^{-2\pi i\varphi}) \to w$, yani Γ süreksiz değildir.

Lemma 15.2.2.1. T_n, $T \varepsilon \Omega$ olsun. Farzedelim ki $T_n \to T$. Bu taktirde her $z \varepsilon Z$ için $T_n z \to Tz$.

İspat. $T_n \to T$ ise, $T^{-1} T_n \to I$. Sonra,

$$T^{-1} T_n \to W_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

vazedelim. Burada $a_n, d_n \to 1$ ve $b_n, c_n \to 0$.

$W_n z$, z sabit, için katsayılara nazaran rasyonel, ve dolayısıyla, a_n, b_n, c_n, d_n nin sürekli bir fonksyonudur, çünki $n \to \infty$ için $c_n z + d_n \to 1$. Diğer taraftan, $W_n \infty = a_n / c_n \to \infty$. O halde $W_n z \to z$, veya $T_n z \to Tz$.

Teorem 15.2.2.4. Süreksiz bir grup *sayılabilir* bir gruptur.

İspat. Herbir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \varepsilon \Gamma$$

elemanına, birebir tarzda, Euclid 4-uzayında koordinatları a, b, c, d olan bir nokta tekabül ettirelim. Böylece, Γ grubu, bu uzayda bir Σ cümlesine tekabül eder.

Γ *sayılabilir* değilse, Σ da sayılabilir değildir ve bu taktirde Σ ya *ait* en az bir limit nokta vardır. Dolayısıyla Γ ya ait bir T elemanı ve farklı elemanlardan müteşekkil bir (T_n) dizisi vardır, öyleki, $T_n \to T$. Lemmadan dolayı, her z için, $T_n z \to Tz$, fakat T singüler olmadığından, $Tz = \zeta$, ζ ne olursa olsun daima z ye nazaran çözülebilir, yani $z = T^{-1}\zeta$. O halde $T_n z \to \zeta$. Yani her $\zeta \varepsilon Z$, bir limit noktasıdır. Halbuki Γ süreksiz farzedilmişti. Bu tezat teoremin ispatını tamamlar.

TARİF 8. Bir gruba *ayrıktır* denir, şayet farklı matrisler den müteşekkil, *yakınsak* hiçbir dizi ihtiva etmiyorsa.

Burada, *yakınsaklık*, matrisin elemanlarının yakınsaklığı manasına gelir.

Lemma 15.2.2.2. Bir Γ grubu ayrıktır yalnız ve yalniz farklı elemanlardan müteşekkil hiçbir (T_n) dizisi yoksa öyleki $T_n \to I$.

İspat. Şayet $T_n \to I$ ise, Γ yakınsak bir (T_n) dizisi ihtiva eder ve bu taktirde Γ ayrık olamaz. Γ ayrık değilse, farklı elemanlardan müteşekkil bir (T_n) dizisi vardır, öyleki $T_n \to T$. Burada T reel ve ünimodüler bir matristir, çünki T_n ler bu tip matrislerdir. O halde $T_n^{-1} \to T^{-1}$. Dolayısıyla $T_{n+1} T_n^{-1} \to TT^{-1} = I$. Şayet $(T_{n+1} T_n^{-1})$ dizisi, yalnız sonlu çoklukta, farklı elemanlar ihtiva ediyorsa, bir n den itibaren $T_{n+1} T_n^{-1}$ ler eşittirler ve dolayısıyla

$$T_{n+1} T_n^{-1} = I.$$

Yani $T_{n+1} = T_n$. Halbuki T_n ler farklı farzedilmişlerdi. O halde bir (m) altdizisi vardır öyleki $W_m = T_{m+1} T_m^{-1}$ ler farklıdırlar, ve $W_m \to I$.

Teorem 15.2.2.5. Bir Γ grubu süreksizdir yalnız ve yalnız ayrık ise. Bir ayrık grup için $L(\Gamma)$ reeldir.

İspat. Farzedelim ki Γ süreksizdir. Şayet Γ ayrık değilse, farklı elemanlardan müteşekkil bir (T_n) dizisi vardır öyleki $T_n \to I$. Lemma 15.2.2.1 den dolayı her z için $T_n z = z$, ve Γ hiçbir yerde süreksiz değildir.

Şimdi karşıt olarak farzedelim ki Γ ayrıktır, fakat $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$, Γ nın bir limit noktasıdır. Bu taktirde bir z için $T_n z \to z_0$. Fakat Γ, reel ekseni ve aynı zamanda Z^+ üst yarı düzlemi muhafaza ettiğinden, $z \varepsilon Z^+$. Şimdi, $\tilde{\Omega}_R$ *tranzitif* olduğundan, yani Z de iki nokta verildiği taktirde, bu noktalardan birini diğerine dönüştüren $\tilde{\Omega}_R$ ye ait bir lineer sübstitüsyonun bulunduğundan, bir $A \varepsilon \tilde{\Omega}_R$, *reel ünimodüler matris* vardır öyleki $z = Ai$. Şu halde

$$T_n A i \to z_0 ,$$

veya,

$$T'_n\, i = A^{-1} T_n A i \to A^{-1} z_0 = z_1 .$$

Görülüyor ki.

$$T'_n \,\varepsilon\, \Gamma' = A^{-1}\Gamma A,$$

ve $L(\Gamma')$ ile $A^{-1}L(\Gamma)A$ ayni zamanda reeldirler. O halde $L(\Gamma')$ nün reel olduğunu gösterebilmek kâfidir. Bunun için

$$T'_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

vazedelim. § 3.3.4 deki hesaplar tekrarlanır, ve $z_1 \varepsilon Z^+$ gözönünde tutulursa,

$$I_m\, T'_n\, i = \frac{1}{\gamma^2_n + \delta^2_n} = I_m\, z_1 > 0,$$

ve

$$|\, T'_n\, i \,| = \frac{\alpha^2_n + \beta^2_n}{\gamma^2_n + \delta^2_n} \to |z_1|^2 > 0.$$

İlk bağıntıdan, (γ_n) ve (δ_n) dizilerinin, ikinci bağıntıdan ise (α_n) ve (β_n) dizilerinin sınırlı oldukları müşahede edilir. Dolayısıyla, yakınsak bir (T'_m) altdizisi istihraç edilebilir. Bundan Γ' nün ayrık olmadığı neticesi çıkarılır. Binaenaleyh Γ ayrık değildir. Aynı netice, Z^- alt yarı düzlemine ait z_0 noktaları için de varittir. Bu tezattan $L(\Gamma)$ nın reel olduğu sonucuna varılır.

Bu teoremden şu neticeye de varmış oluyoruz.

Teorem 15.2.2.6. Bir reel grup için, ya $L = Z$ veya $L \subset R$ dir.

Teorem 15.2.2.7. $H \varepsilon \Gamma$ *hiperbolik* bir sübstitüsyon, ve $T \varepsilon \Gamma$, H ile *bir ve birtek ortak sabit noktası* olan bir sübstitüsyon olsun. Bu taktirde Γ, ayrık değildir.

İspat. H nın sabit noktalarını 0 ve ∞ kabul etmekle, genelliğe halel gelmez. Üstelik ∞ *u ortak* sabit nokta farzedebiliriz. Bu taktirde,

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \ |\alpha| \neq 0{,}1 \ ; \ T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \ ab \neq 0.$$

Aşağıdaki matrisi teşkil edelim.

$$V H^n V^{-1} H^{-n} = A_n = \begin{pmatrix} 1 & ab(1-\alpha^{2n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ve görülüyor ki $A_n \varepsilon \Gamma$. Dolayısıyla, $n \to \infty$ $(|\alpha| < 1)$ veya $n \to -\infty$ $(|\alpha| > 1)$ için

$$A_n \to A = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$ab \neq 0$ ve $|\alpha| \neq 0{,}1$ olduğundan A_n ler farklıdırlar ve dolayısıtla Γ ayrık değildir.

Bu teoremden şu neticeleri de çıkarabiliriz.

Teorem 15.2.2.8. Γ ayrık ise, hiperbolik bir sübstitüsyonun sabit bir noktası, yine Γ ya ait parabolik bir sübstitüsyonun sabit bir noktası ile çakışamaz.

İki hiperbolik elemanın, sabit nokta cümleleri ya çakışır veya ayrıktır.

Bu tip teoremlerin en ünlüsü S. Lauritzen'e aittir. Bilâhare bu teoremin, J. Nielsen ve C. L. Siegel tarafından yeni ispatları bulunmuştur.

Teoremin ifadesi şudur:

Teorem 15.2.2.9. Γ, bir Abel grubu (komütatif) olmıyan reel bir grup olsun. Farzedelim ki Γ, sadece özdeş ve hiperbolik elemanlardan müteşekkildir. Bu taktirde Γ ayrıktır.

Önce, Γ yı o şekilde değiştirelim ki, sabit noktaları 0, ∞ olan bir A elemanını ihtiva etsin:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \ \lambda > 0, \qquad \lambda \neq 1.$$

Sonra şu lemmayı ispat edelim:

Lemma 15.2.2.3. Şayet Γ, bir (T_n) dizisini ihtiva ediyorsa öyleki,

$$T_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \to I.$$

Bu taktirde, $n > N$ için,

$$T_n = \begin{pmatrix} \rho_n & 0 \\ 0 & \rho_n^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_n^2 \neq 1.$$

İspat. Mademki $T_n \to I$, o halde $a_n d_n \to 1$, $b_n c_n \to 0$. Demek ki bir n den sonra $a_n d_n > 0$.

Şimdi aşağıdaki komütatörlerin χ. izlerini hesap edelim:

$$C_n = A T_n A^{-1} T_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1-b_n c_n(\lambda^2-1) & a_n b_n(\lambda^2-1) \\ c_n d_n(\lambda^{-2}-1) & 1-b_n c_n(\lambda_n^{-2}-1) \end{pmatrix},$$

$$D_n = A C_n A^{-1} C_n^{-1} =$$

ve

$$\begin{pmatrix} 1+a_n b_n c_n d_n(\lambda^2-1)(\lambda^{-2}-1)(1-\lambda^2) & * \\ * & 1+a_n b_n c_n d_n(\lambda^2-1)(\lambda^{-2}-1)(1-\lambda^2) \end{pmatrix}^{(1)}$$

(1) Tesbitine lüzum görülmeyen elemanların yerine *yıldız* koyduk.

$$\chi(C_n) = 2 - b_n c_n(\lambda-\lambda^{-1})^2, \qquad \chi(D_n) = 2 + a_n b_n c_n d_n(\lambda-\lambda^{-1})^4.$$

Şimdi, C_n, D_n hiperbolik olduklarından

$$|\chi(C_n)| \geq 2, \qquad |\chi(D_n)| \geq 2,$$

ve bir n den itibaren

$$\chi(C_n) \geq 2, \quad \chi(D_n) \geq 2,$$

zira,

$$b_n c_n(\lambda-\lambda^{-1})^2 \to 0, \qquad a_n b_n c_n d_n(\lambda-\lambda^{-1})^4 \to 0.$$

O halde, $n > N$ için

$$b_n c_n \leq 0, \qquad a_n b_n c_n d_n \geq 0.$$

Fakat $a_n d_n \to 1$, ve son eşitsizlikten ötürü, $n > N$ için $b_n c_n \geq 0$. Neticede, $n > N$ için $b_n c_n = 0$, ve dolayısıyla,

$$\chi(C_n) = 2, \qquad n > N.$$

Halbuki Γ da parabolik eleman bulunmadığından C_n olsa olsa I dir. Fakat bu da gösterir ki A ile V_n yer değiştirir. Binaenaleyh, teorem 3.3.4.2 den dolayı, V_n nin sabit noktaları, 0 ile ∞ dur. Dolayısıyla, $n > N$ için $b_n = c_n = 0$, ve lemma ispat edilmiştir. Bundan sonra teoremin ispatı kolaydır.

Teoremin ispatı. Γ ayrık değilse, Γ da yakınsak bir dizi vardır. Lemma 15.2.2.2. den dolayı bir (T_n) dizisi vardır öyleki $T_n \to I$. Yukardaki lemmadan ise, bütün n ler için

$$T_n = \begin{pmatrix} \rho_n & 0 \\ 0 & \rho_n^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \rho^2_n \neq 1$$

farzedilebilir.

Γ, komütatif olmadığından, bir B elemanı ihtiva eder öyle ki, B nin sabit noktaları 0, ∞ dan farklıdır. B hiperbolik olduğundan,

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad |\alpha + \delta| > 2, \qquad \beta^2 + \gamma^2 > 0.$$

Aşağıdaki komütatörü teşkil edelim.

$$X_n = T_n B T_n^{-1} B^{-1} = \begin{pmatrix} * & (\rho_n^2-1)\,\alpha\beta \\ (\rho_n^{-2}-1)\,\gamma\delta & * \end{pmatrix}.$$

Aşikâr olarak

$$X_n \to I,$$

zira $T_n \to I$. Lemmadan dolayı, $n > N$ için

$$X_n = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$\rho_n^2 \neq 1$ olduğundan, X_n lerin ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\alpha\beta = \gamma\delta = 0$$

bulunur.

Farzedelim ki $\alpha = 0$. $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ olduğundan, $\gamma \neq 0$. O halde $\delta = 0$. Dolayısıyla $\alpha + \delta = 0$. Mümkün değildir, çünki B hiperboliktir.

Şu halde, $\alpha \neq 0$ ve $\beta = 0$. Bu sefer $\delta \neq 0$ ve dolayısıyla $\gamma = 0$. Binaenaleyh, $\beta^2 + \gamma^2 = 0$; yine mümkün değildir. Neticede,

$$T_n \to I$$

şartını sağlıyan bir dizi mevcut değildir, yani Γ ayrıktır.

Bu ispat Siegel'e aittir.

15.2.3. **Ayrık bir grubun limit cümlesi.** Tarif gereğince, Γ grubunun bir limit noktası, $T_n z$ resimlerinden müteşekkil dizinin limitidir, $T_n \varepsilon \Gamma$. Bu kısımda, Γz mahreklerinin, L limit cümlesine olan münasebetini inceleyeceğiz ve göstereceğiz ki L kapalıdır.

İspat edeceğimiz teorem için, Γ gruplarının birim dairesini muhafaza ettiklerini kabul edeceğiz. Bu kabul bize bazı kolaylıklar sağlıyacaktır. Aynı notasyonları muhafaza ederek L, bu sefer, birim çemberin bir alt cümlesidir.

Γ nın elemanları,

$$T = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1,$$

şeklindedir.

Derhal işaret edelim ki, $b = 0$, ancak sonlu çoklukta $T \varepsilon \Gamma$ ler için mümkündür. Gerçekten, $b = 0$ şartını sağlıyan T ler, ∞ u sabit bırakırlar. Halbuki ∞, Γ için âdi bir noktadır. Dolayısıyla, $b = 0$ şartını sağlıyan bahis konusu T ler sonsuz çoklukta olamazlar.

TARİF 9. Γ nın matrislerinin sol üst köşedeki elemanlarının cümlesine A, sağ üst köşeyi işgal eden elemanlarının cümlesine B diyoruz.

Lemma 15.2.3.1. Γ ayrık ise, A ve B cümlelerinin sonlu yığılma noktaları yoktur.

İspat. Meselâ, B cümlesini gözönüne alarak, farzedelim ki farklı T_n ler vardır, öyleki, $b_n \to b$. Burada b *sonludur*, ve

$$T_n = \begin{pmatrix} a_n & \bar{b}_n \\ b_n & \bar{a}_n \end{pmatrix}, \quad |a_n|^2 - |b_n|^2 = 1.$$

Kabullerden dolayı, $|b_n|^2 \to |b|^2$ ve $|a_n|^2 \to 1 + |b|^2$. Şu halde (a_n) ve (b_n) dizileri sınırlıdırlar. Binaenaleyh, (T_n) den yakınsak bir altdizi istihraç edilebilir. Fakat bu taktirde Γ ayrık değildir.

Bu lemmanın bir neticesi de şudur: Bir $\rho > 0$ sayısı mevcuttur, öyleki,

$$T = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \varepsilon\Gamma$$

için, ya $b = 0$, veya $|b| \geq \rho > 0$.

Şimdi, L cümlesi hakkında bazı bilgileri kolayca edinebilmek için, yeni bir cümle ithal ediyoruz.

$$L_\infty = \{ \alpha \mid \alpha = \lim_{n\to\infty} T_n \infty,\ T_n \ \varepsilon\Gamma \text{ ler farklı} \}.$$

Aşikâr olarak, $L_\infty \subset L$.

Lemma 15.2.3.2. (1) Herbir $T\varepsilon\Gamma$ için $TL_\infty = L_\infty$, (2) L_∞ kapalıdır.

İspat. (1) in ispatı, teorem 15.2.2.1 dekinin aynıdır. (2) ye gelince, α, L_∞ un bir yığılma noktası olsun. L_∞ a ait bir (α_k) dizisini seçelim öyleki $|\alpha - \alpha_k| < k^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. α_k ların tarifinden dolayı, farklı $T_{n_k}\varepsilon\Gamma$ elemanları vardır, öyleki, $|T_{n_k}\infty - \alpha_k| < k^{-1}$. Dolayısıyla, $|\alpha - T_{n_k}\infty| < 2k^{-1}$. Fakat $k \to \infty$ için $k^{-1} \to 0$ olduğundan, $\alpha\varepsilon L_\infty$.

Teorem 15.2.3.1. $L = L_\infty$.

İspat. Sadece $L \subset L_\infty$ ihtivasını göstermeliyiz. Farzedelim ki $\alpha\varepsilon L$, bu taktirde, bir z noktası ve farklı T_n ler vardır öyleki,

$$T_n z \to \alpha, \qquad T_n = \begin{pmatrix} a_n & \bar{b}_n \\ b_n & \bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

Bütün $b_n \neq 0$ farzedilebilir.

İki şıktan biri, ya

(1) $$|b_n z + \bar{a}_n| \leq 1,\ n > N,$$

veya, bir (n_k) altdizisi için

(2) $$|b_{n_k} z + \bar{a}_{n_k}| < 1,\ n_k \to \infty.$$

(2). şıkta, $|z + \bar{a}_{n_k}/b_{n_k}| < 1/|b_{n_k}|$ yazılabilir. Halbuki, $T^{-1}_{n_k}\infty = -a_{n_k}/b_{n_k}$. O halde, lemma 15.2.3.1 den dolayı

$$|z - T_n^{-1}\infty| < 1/|b_{n_k}| \to 1.$$

Yani $z\varepsilon L_\infty$. Fakat $T_n L_\infty = L_\infty$, her n için, $T_n z\varepsilon L_\infty$ bağıntısını intac eder. Nihayet L_∞ kapalı olduğundan $T_n z \to \alpha\varepsilon L_\infty$.

(1) e gelince,

$$|T_n z - T_n\infty| = \frac{1}{|b_n|\,|b_n z + \bar{a}_n|} \leq \frac{1}{|b_n|} \to 0.$$

Dolayısıyla,

$$\alpha - T_n\infty = (\alpha - T_n z) + (T_n z - T_n\infty) \to 0,$$

ve $T_n\infty \to \alpha$, yani $\alpha\varepsilon L_\infty$. $L_\infty \subset L$ ihtivası da gözönünde tutulursa, teorem ispatlanmış olur.

En son neticeler biraraya getirilirse, aşağıdaki *önemli teorem* ifade edilebilir.

Teorem 15.2.3.2. Ayrık bir Γ grubunun *L limit cümlesi kapalıdır.* Âdi noktaların *$\mathcal{A}$ cümlesi ise açıktır.*

Teorem 15.2.3.3. Γ ayrık bir grup, ve $\alpha\varepsilon L$ olsun. Bu taktirde α ve bir başka $\beta\varepsilon L$ noktası hariç, herbir z nin Γz mahreki, α da *yoğundur*, yani farklı elemanlardan müteşekkil bir (T_n) dizisi vardır, öyleki $T_n z \to \alpha$.

İspat. Önce α nın bir sabit nokta olması halini bertaraf edelim, $\alpha\varepsilon L$ olduğundan, α, ya bir parabolik, ya da bir hiperbolik elemanın sabit noktasıdır.

Şayet $\alpha = T\alpha$, T parabolik ve $z \neq \alpha$ ise, $n \to \infty$ için $T^n z \to \alpha$, ve α, T nin yegâne sabit noktası olduğundan $(T^n z)$ farklı noktalardan müteşekkil bir cümledir. Binaenaleyh, $z \neq \alpha$ için Γz, α da yoğundur.

Şimdi T yi hiperbolik farzedelim. β, T nin diğer sabit noktası olsun. Bu taktirde, $z \neq \alpha$, β şıklarına göre, ya $n \to \infty$, ya da $n \to -\infty$ için $T^n z \to \alpha$.

Bundan sonra α yı sabit bir nokta farzetmiyeceğiz. Gördük ki $\alpha\varepsilon L_\infty$. O halde, T_n ler *farklı* olmak üzere,

$$T_n\infty \to \alpha,\ T_n = \begin{pmatrix} a_n & \bar{b}_n \\ b_n & \bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

Yukarda olduğu gibi,

$$|T_n z - T_n\infty| = \frac{1}{|b_n|^2}\,\frac{1}{|z + \bar{a}_n/b_n|} \qquad (15.2.3.1)$$

vazedelim.

$(-\bar{a}_n/b_n) = (T_n^{-1}\infty)$ dizisi sınırlıdır, çünki âdi ∞ noktasına yığılamaz. Dolayısıyla bir β yığılma noktası, ve (T_p) altdizisi vardır, öyleki,

$$T_p\infty \to \alpha,\quad T_p^{-1}\infty \to \beta,\ \beta\varepsilon L_\infty.$$

Şayet $z \neq \beta$ ise, z, $(T_p^{-1}\infty)$ dizisinden, $p > N$ için ayrık bir noktadır. O halde,

$$\left| z + \frac{\bar{a}_p}{b_p} \right| \geq m > 0, \qquad p > N.$$

(15.2.3.1) ve lemma 15.2.3.1 den dolayı,

$$|T_p z - T_p\infty| \leq 1/m\,|b_p|^2 \to 0.$$

Dolayısıyla,

$$T_p z \to \alpha.$$

Şayet, $(T_p z)$ dizisi yalnız sonlu sayıda farklı elemanlar ihtiva ediyorsa, $p > N$ için $T_p z = \alpha$, ve bu taktirde α, T_{p+1} T_p^{-1} in sabit bir noktasıdır. Bu ise hipoteze aykırıdır. Dolayısıyla, $z \neq \beta$ için Γz, α da yoğundur.

Yukardaki muhakeme gösteriyor ki, S, α ve β yı ihtiva etmiyen kompakt bir cümle ise, $T_n \varepsilon \Gamma$ vardır öyleki S de üniform olarak $T_n z \to \alpha$.

Aşağıdaki teoremler, bu teoremin birer neticeleridirler.

Teorem 15.2.3.4. L, iki noktadan farklı nokta ihtiva ediyorsa, L *mükemmel* bir cümledir.

İspat. Bir cümleye *mükemmeldir* denir şayet (1) kapalı, ve (2) her noktası bir yığılma noktası ise. Bu vaziyete göre sadece (2) nin gösterilmesi gerekiyor. $\lambda \varepsilon L$ olsun. Hipotezden dolayı, λ dan farklı, başka iki farklı nokta vardır: $\alpha, \beta \varepsilon L$. Teorem 15.2.3.3 göre, ya $\Gamma\alpha$, ya da $\Gamma\beta$, λ da yoğundur, $\Gamma\alpha, \Gamma\beta \varepsilon L$ olduğundan, λ, L nin bir yığılma noktasıdır.

O halde L, boş , birtek nokta, iki nokta ihtiva eden veya mükemmel bir cümledir.

Teorem 15.2.3.5. L = R veya L, hiçbir yerde yoğun olmıyan, R nin bir alt cümlesidir.

İspat. Farzedelim ki, $L \neq R$. $a \subset R - L$ olsun; a âdi bir noktadır. $\alpha \varepsilon L$ olsun. Bu taktirde, Γa, α da yoğundur ve $\Gamma a \varepsilon R$. α nın herbir reel civarı, L nin tamamlayıcısına ait noktalar ihtiva eder, ve dolayısıyla, L, hiçbir yerde, R de yoğun değildir

Evvelce de işaret ettiğimiz gibi, L = R şartını sağlıyan reel süreksiz gruplara, 1. nev'i Fuchs grupları, $L \neq R$ şartını sağlıyanlara ise 2. nev'i Fuchs grupları denir.

Her halükârda, bahis konusu Fuchs grupları için L nin ikiden fazla nokta ihtiva ettiğini farzedeceğiz. Şimdi bu grupları başka bir yönden inceleyeceğiz.

15.2.4. **Esas Bölge.** Yeniden G.E. G: $|w| < 1$ düzlemine dönelim, ve orada iki nokta arasındaki uzaklığı tarif edelim.

w_1, w_2, G de iki nokta olsun. Bu iki noktadan G. E. bir doğru geçer. Bu doğru $|w| = 1$ çemberini iki noktada keser. w_1 e en yakın olanı ∞_1 ve w_2 ye en yakın olanı ∞_2 ile gösterelim, ve

$$\frac{(w_1 - \infty_2)\ (w_2 - \infty_1)}{(w_1 - \infty_1)\ (w_2 - \infty_2)}$$

çifte oranını teşkil edelim. Bir lineer sübstitüsyonla G, Z^+ üst yarı düzleme dönüştütülürse çifte oranın değeri değişmez. Görülür ki *bu değer, reel* ve 1 *den büyüktür.*

Dolayısıyla, w_1, w_2 noktaları arasındaki uzaklık

$$d(w_1, w_2) = \tfrac{1}{2} \log \frac{w_2 - \infty_1}{w_2 - \infty_2} - \tfrac{1}{2} \log \frac{w_1 - \infty_1}{w_1 - \infty_2} > 0, \qquad (15.2.4.1)$$

şeklinde tarif edilebilir. Bu uzaklık, G nin rijid hareketlerine nazaran değişmez. w_1, w_2, w_3, bu sırada ayni G.E. doğru üzerinde iseler, ∞_1, ∞_2 herhangibir nokta çifti için aynı kaldığından,

$$d(w_1, w_3) = d(w_1, w_2) + d(w_2, w_3).$$

(15.2.4.1) formülünü sadece w_1, w_2 cinsinden ifade etmeye çalışalım. $w_1 = 0$, $w_2 = he^{i\theta}$, $0 < h < 1$ özel halinde,

$$d(0, he^{i\theta}) = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + h}{1 - h}. \qquad (15.2.4.2)$$

Görülüyor ki, $d(0, he^{i\theta})$ uzaklığı, 0 dan $he^{i\theta}$ noktasına olan Euclid uzaklığının *artan* bir fonksyonudur. Bu fonksyon $h \to 1$ için, veya daha doğrusu, $he^{i\theta}$ noktası G nin *ideal sınırına* yaklaştığı taktirde *sonsuz* olur.

Diğer taraftan,

$$Tw = \frac{w - w_1}{1 - \overline{w}_1 w}$$

sübstitüsyonu, $w_1 \to 0$ ve $w_2 \to (w_2 - w_1)/(1 - \overline{w}_1 w_2)$ noktalarına dönüştürür. (15.2.4.2) formülü tatbik edilirse,

$$d(w_1, w_2) = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + |w_2 - w_1| / |1 - \overline{w}_1 w_2|}{1 - |w_2 - w_1| / |1 - \overline{w}_1 w_2|} \qquad (15.2.4.3)$$

bulunur. Buradan derhal müşahede edilir ki,

$$d(w_1, w_2) = d(w_2, w_1).$$

Teorem 15.2.4.1 **(Üçgen eşitsizliği).** $d(w_1, w_3) \leq d(w_1, w_2) + d(w_2, w_3)$. Eşitlik yalnız ve yalnız, w_1, w_2, w_3 noktaları bir G.E. doğru üzerinde iseler vuku bulur.

İspat. Bunun için, bir G.E. rijid hareketle, w_1, w_2, w_3 noktalarını, $a > 0$, 0, ve $be^{i\beta}$, $b > 0$ noktalarına dönüştürelim. Üçgen eşitsizliği

$$\frac{1 + |t|}{1 - |t|} \leq \frac{1 + b}{1 - b} \ \frac{1 + a}{1 - a}, \quad t = \frac{be^{i\beta} - a}{1 - abe^{i\beta}} \qquad (15.2.4.4)$$

şeklini alır. Bu eşitsizliğin sol tarafı, $|t|$ nin monoton artan bir fonksyonudur. Binaenaleyh, eşitsizliğin doğruluğunu gösterebilmek için, a ve b yi sabit tutarak, $|t|$ nin β, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, ya nazaran maksimumunu hesaplıyalım.

$$t = (w - a) / (1 - aw)$$

tasviri, $|w| = b$ yi, merkezi reel eksen üzerinde bulunan bir Euclid çemberine

dönüştürür. Bu çember üzerinde, başlangıç noktasından en uzak nokta, reel eksen üzerinde olup, $w = -b$ ye tekabül eden noktadır. Yani,

$$t = -\frac{b+a}{1+ab}.$$

Şu halde,

$$\max|t| = \frac{b+a}{1+ab}.$$

Bu değer (15.2.4.4) te yerine koyulursa eşitlik hasıl olur, ve aynı zamanda, üç noktanın bir G.E. doğru üzerinde bulunduklarını gösterir.

TARİF 10. $d(w_0, w) = \rho > 0$ *geometrik yerine*, merkezi w_0 da ve yarı çapı ρ olan *G.E. çember* denir.

G.E. rijid bir harekette, w_0, 0 noktasına dönüştürülürse, G.E. çember, merkezi başlangıç noktasında olan bir âdi çembere dönüşür. Şu halde, G.E. çemberi, bir lineer sübstitüsyon altında bir Euclid çemberinin resmidir, ve bizzat kendisi, $|w| < 1$ de bulunan bir Euclid çemberidir.

Şimdi, w_0, G.E. G-düzleminde sabit bir nokta olsun, Γw_0 mahrekini gözönüne alalım. Γ süreksiz olduğundan, G.E. merkezi $w' \varepsilon G$ de bulunan herhangibir G.E. çember, Γw_0 mahrekine ait, yalnız sonlu sayıda noktalar ihtiva eder. Dolayısıyla, yalnız sonlu sayıda $w_j \varepsilon \Gamma w_0$ noktaları vardır, öyleki

$$d(w', w_j) \leq d(w', w_k), \qquad \forall w_k \varepsilon \Gamma w_0.$$

Bu taktirde diyoruz ki, w', w_j ye en *yakındır*. Eşitlik yoksa *kesin yakındır* diyoruz.

w_j ye en yakın $w \varepsilon G$ noktalarının cümlesine, w_j merkezli, *normal cümle* diyor ve N_j ile gösteriyoruz.

w_0 merkezli, N_0 normal cümlesini gözönüne alalım

Teorem 15.2.4.2 Normal cümlenin *içi* boş değildir.

İspat. İddia ediyoruz ki, bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır, öyleki, $d(w, w') < \varepsilon$ G. E. dairenin bütün noktaları w_0 a *kesin yakındır*. Yani,

$$d(w', w_0) < d(w', w_k), \ \forall w_k \varepsilon \Gamma w_0, \qquad w_k \neq w_0.$$

Gerçekten,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\ [d(w', w_k) - d(w', w_0)], \qquad w_k \varepsilon \Gamma w_0, \qquad w_k \neq w_0,$$

vazedelim. Şayet w'' varsa, öyleki,

$$d(w', w'') < \varepsilon,$$

ve

$$d(w'', w_k) \leq d(w'', w_0),$$

bu taktirde,

$$d(w', w_k) \leq d(w', w'') + d(w'', w_k) \leq d(w', w'') + d(w'', w_0).$$

Fakat bir kere daha,

$$d(w'', w_0) \leq d(w'', w') + d(w', w_0)$$

üçgen eşitsizliği kullanılır ve bir üstteki eşitsizliğin sağ kısmı da nazarı itibare alınırsa,

$$d(w', w_k) \leq 2d(w', w'') + d(w', w_0) < 2\varepsilon + d(w', w_0)$$

bulunur. Yani,

$$\frac{1}{2}\ [d(w', w_k) - d(w', w_0)] < \varepsilon.$$

Bu tezat teoremi ispatlar.

Teorem 15.2.4.3. N_0 normal cümlesine ait herhangi iki iç nokta Γ-eşdeğer olamaz.

İspat. Farzedelim ki $w', w'' \varepsilon N_0$ iç noktaları Γ-eşdeğerdirler. Bu taktirde Γ ya ait, ve w' yü w'' ye dönüştüren rijid hareket w_0 ı, $w_k \varepsilon \Gamma w_0$ noktasına dönüştürür, $w_k \neq w_0$. Dolayısıyla,

$$d(w', w_0) = d(w'', w_k) > d(w'', w_0).$$

Diğer taraftan, Γ ya ait, ve w'' yü w' ye dönüştüren rijid hareket w_0 ı, $w_j \varepsilon \Gamma w_0$, $w_0 \neq w_j$, noktasına dönüştürür, ve

$$d(w'', w_0) = d(w', w_j) < d(w', w_0).$$

Bu iki eşitsizlik karşılaştırılırsa, açık olarak görülür ki

$$d(w', w_0) > d(w', w_0).$$

Teorem 15.2.4.4. Normal cümlelerin ve haliyle merkezlerinin sayısı *sayılabilir*dir. Keza Γw_0 mahreki de *sayılabilir* bir cümledir.

İspat. w_0 noktasını, w_j noktasına dönüştüren, Γ ya ait bir rijid hareket, uzaklıkları muhafaza ettiğinden, N_0 ı N_j ye dönüştürür. Dolayısıyla, $w_j \varepsilon \Gamma w_0$ merkezli bütün N_j normal cümleleri, Γ-eşdeğerdirler. Herhangibir $w \varepsilon G$ noktası en az bir normal cümleye aittir, meselâ N_j, ve herbir N_k normal cümlesi, w ye eşdeğer en az bir nokta ihtiva eder. Zira w_j yi w_k ya dönüştüren, Γ ya ait rijid hareket, w yi, N_k da, eşdeğer bir noktaya dönüştürür. Binaenaleyh, bütün normal cümlelerin birleşimi G, G.E. düzlemini örter. Üstelik, her iki normal cümlenin içleri ayrıktırlar. Madem ki her normal cümlenin bir *içi* vardır, herbir *içte*, reel ve imajiner kısımları rasyonel olan bir nokta seçebiliriz. Fakat rasyonel sayılar sayılabilir olduklarından, normal cümleler ve merkezleri sayılabilir.

Dik Ortaylar. Sabit $w_1, w_2 \varepsilon G$, noktalarına G.E. uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yeri, w_1 i w_2 ye birleştiren G. E. doğru parçasına dik, G. E.

bir doğrudur. Gerçekten bir rijid hareketle, w_1, w_2 noktaları, reel eksen üzerinde $-a$, a, $a > 0$, noktalarına dönüştürülebilir. Derhal görülür ki imajiner eksen ve $|w| = 1$ üzerindeki noktaların, a ve $-a$ ya G.E. uzaklıkları eşittirler. ($|w| = 1$ üzerindeki noktalar için bu uzaklık sonsuzdur). Bunu hesapla da görmek mümkündür. Netekim, (15.2.4.3) formülünü kullanarak, w nin a ve $-a$ noktalarına G. E. uzaklıklarının eşit olduklarını yazarsak,

$$\left| \frac{w+a}{1+aw} \right| = \left| \frac{w-a}{1-aw} \right|$$

bulunur. $w = u + iv$ vazedilirse

$$4au(1-a^2)(1-u^2-v^2) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu gibi G. E. doğrulara, w_1 i w_2 ye birleştiren G. E. doğru parçasının *dik ortayı* denir.

Normal cümlelerin *tarifinden* anlaşılıyor ki, bunların sınırları, iki veya ikiden fazla (sayıları daima sonludur) Γ-eşdeğer noktalara, G.E. eşit uzaklıkta noktalardan müteşekkildir. Dolayısıyla, N_0 ın sınırı, G.E. doğru parçalarından müteşekkildir.

Şu halde N_0, bir G.E. poligondur. Bu poligonun sonlu veya sonsuz sayıda kenarları vardır, ve köşelerin *sonlu* limit noktası yoktur.

Gerçekte N_0, şu şekilde inşa edilebilir: $w_0 \varepsilon G$, Γ nın hiçbir elemanı tarafından sabit bırakılmıyan bir nokta olsun. Bu cins noktalar vardır, zira Γ sayılabilir bir cümledir ve herbir elemanının G de en fazla birtek sabit noktası vardır.

$\Gamma = (T_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $T_0 = I$, vazedelim. $w_i = T_i w_0$ resimleri birbirinden farklıdırlar, zira, $w_i = w_j$ ise $T^{-1}{}_j\, T_i\, w_0 = w_0$, yani $T_j^{-1}\, T_i$, w_0 ı sabit bırakır.

$w_0 w_i$ G.E. doğru parçasının G.E. dik ortayına λ_i diyelim. λ_i doğrusu, G yi iki *G. E. yarı-düzleme* böler. w_0 ı ihtiva eden yarı-düzlemi H_i, tamamlayıcısını ise H'_i ile gösterelim. Bu taktirde,

$$N_0 = \cap_{i=1}^{\infty} H_i \ .$$

Diğer taraftan *G. E. konveks cümle*, mutad şekilde tarif edilirse, N_0, G. E. konveks bir cümledir, zira herbir H_i, G. E. konvekstir, dolayısıyla H_i lerin arakesiti G.E. konvekstir. Netice olarak N_0 *irtibatlı*dır.

N_0 normal poligonu, Γ-eşdeğer noktaların herbir sınıfının, en az bir temsilcisini ihtiva eder. Şu halde N_0 bir *esas bölge* ihtiva eder. Bu esas bölge, N_0 ın içi ile bazı sınır noktalarından ibarettir.

N_0 ın kenarları iki tiptir: (1) $|w| = 1$ üzerinde bulunan kenarlar; bunlara *serbest kenar* diyoruz. (2) bir veya iki ucu $|w| = 1$ üzerinde, diğer kısmı ise $|w| < 1$ de, veya uçları ile birlikte tamamıyla $|w| < 1$ de bulunan kenarlar; bunlara *iç kenar* diyoruz.

Teorem 15.2.4.5. N_0 ın iç kenarları ikişer ikişer Γ-eşdeğerdirler. Yani herbir s iç kenarına bir ve birtek s' kenarı ve bir de T rijid hareketi tekabül eder, öyleki, $T(s) = s'$.

İspat. s nin tarifinden dolayı, bir w_k noktası vardır öyleki s, $w_0 w_k$ G. E. doğru parçasının G. E. dik ortayıdır. w_k yı w_0 a dönüştüren, Γ ya ait yegâne T rijid hareketi N_k yı N_0 a dönüştürür, ve s ortak kenarı N_0 ın diğer bir s' kenarına gider ve s', s ye eşdeğerdir. Diğer taraftan, s yi N_0 ın başka bir kenarına dönüştüren, Γ ya ait herhangibir rijid hareket, w_0 ı N_0 ın dışına, w_k yı da N_0 ın içine, ve dolayısıyla w_k yı w_0 a dönüştürür. Fakat bu rijid hareket, s yi s' ye dönüştüren rijid hareketten başka birşey değildir. Dolayısıyla s, yalnız s' ye eşdeğerdir. Fazla olarak diyebiliriz ki, s ve s', N_0 ın bitişik kenarları değildirler. Gerçekten, w, s ve s' nün ortak bir köşesi ise, s yi s' ye dönüştüren rijid hareket, ω yi muhafaza eder, zira, s yi s' ye dönüştüren, rijid hareket, s nin N_0 a ait kenarını s' nün N_0 a ait olmıyan kenarına dönüştürür.

Teorem 15.2.4.6. N_0 ın serbest bir kenarının bir w iç noktasının, N_0 da bir eşdeğer noktası yoktur.

İspat. Farzedelim ki bir T rijid hareket altında, $w' = Tw$, N_0 a ait bir noktadır. T, $|w| = 1$ çemberini kendi üzerine tasvir ettiğinden w yi ihtiva eden serbest kenarı, w' yü ihtiva eden serbest kenara dönüştürür. w nin N_0 a ait bir V civarını düşünelim. $T(V) = V'$, w' nün bir civarıdır ve N_0 a aittir. Fakat bu demektir ki N_0 a ait eşdeğer *iç noktalar* vardır. Bu ise mümkün değildir.

Teorem 15.2.4.7. N_0 ın eşdeğer köşelerinin açılarının toplamı 2π dir.

İspat. v, N_0 ın bir köşesi olsun. v köşesi $n \geq 3$ normal poligona aittir, ve v, bu poligonların merkezlerinden eşit G.E. uzaklıktadır. Γ ya ait, ve bu merkezleri N_0 ın w_0 merkezine dönüştüren, rijid hareketler (özdeş hareket dahil) v yi N_0 ın n farklı köşelerine dönüştürürler, ve bu köşeler eşdeğer noktalardır. Binaenaleyh v etrafındaki n açı (toplamı 2π dir), N_0 ın eşdeğer köşelerindeki farklı n iç açıya dönüşür.

N_0 için iki mümkün hal vardır: (1) G. E. düzlemde N_0 sınırlıdır (bir $R < \infty$ pozitif sayısı vardır, öyleki N_0, G.E. $d(w_0, w) \leq R$ dairesinin içindedir), veya (2) N_0 sınırlı değildir (N_0 ın $|w| = 1$ e istenildiği kadar yakın noktaları vardır).

Teorem 15.2.4.8. Normal poligon sınırlıdır yalnız ve yalnız, $\mathfrak{R} = (W, \Phi)$[1] Riemann yüzeyi kompakt ise.

(1) Bir tariften ötürü Riemann yüzeyleri için W de kullanılabilir.

İspat. $\mathfrak{R}_\infty$ dan G ye birebir konform tasviri $w = f(p^*)$, $p^* \varepsilon \mathfrak{R}_\infty$, ile gösterelim. $\mathfrak{R}_\infty$ un $\mathfrak{R}$ üzerine konform izdüşümü ise π olsun. Bu taktirde

$$p = \pi\,(f^{-1}(w)) = F(w)$$

G yi sürekli olarak W nin üzerine tasvir eder. Bu tasvir konform olmakla beraber birebir değildir. Fakat N_0 resmi W yi tam bir kere örter.

N_0 sınırlı ise, N_0 ayni zamanda kompakttır, zira N_0, bir metrik uzayda sınırlı kapalı bir cümledir. W nin herhangibir açık örtülüşünün ters resmi, G nin açık bir örtülüşüdür. N_0 kompakt olduğundan, sonlu sayıda *cümleler* N_0 ı örtmeye kâfi gelir, ve bu cümlelerin W deki resimleri, ilk örtmenin bir altörtmesini teşkil eder. O halde W de kompakttır.

Şimdi W yi kompakt farzedelim. $G \to S$ tasviri lokal olarak birebirdir. Dolayısıyla, herbir $w' \varepsilon G$ noktası, $\varepsilon > 0$ yeter derecede küçük için bir $d(w, w') < \varepsilon$ dairesinin merkezidir, ve öyleki, bu daire, W de bir açık cümleye homeomorftur. N_0 ın her bir sonlu noktası böyle bir dairenin merkezidir, ve dolayısıyla bu dairelerin W üzerindeki resimleri, W nin açık bir örtmesini teşkil ederler. N_0 ın içi birebir olarak W nin bir *kısmına* tasvir edilmiş olduğundan, ters tasvirde, yalnız sonlu sayıda bu dairelerden, N_0 ın içini örtmeye kâfi gelecektir. Sonlu sayıda dairelerden müteşekkil bir cümle sınırlı olduğundan, N_0 ın içi sınırlıdır. Binaenaleyh N_0 sınırlıdır.

N_0 sınırlı ise kenarlarının sayısı sınırlıdır, zira köşelerinin sonlu limit noktası yoktur.

15.2.5. **Riemann Yüzeylerinin Teichmüller Uzayı.** G birim dairesini kendi üzerine tasvir eden bütün lineer sübstitüsyonların grubunu kısaca Ω ile gösterelim. $\Gamma \subset \Omega$ ayrık bir altgrup olsun, öyleki, G/Γ Riemann yüzeyi kapalı ve cinsi $g > 1$. Verilen bir g için bu gibi Γ ların cümlesine Σ diyelim.

Açık olarak G/Γ_1, G/Γ_2 Riemann yüzeyleri konform eşdeğerdirler, yalnız ve yalnız, Γ_1 ve Γ_2 konjüge altgrup iseler, yani, $\Gamma_1 = B\Gamma_2 B^{-1}$, $B \varepsilon \Omega$

Böylece, konform eşdeğer Riemann yüzeylerinin sınıfları Σ ya ait konjüge altgrupların sınıflarıyla *özleştirilmiş* oldu.

Müteakıp satırlarda daha *zayıf* bir özdeşleştirme kullanacağız. Γ_0

$$a_1 a_2 a_1^{-1}\, a_2^{-1} \ldots a_{2g-1}\, a_{2g}\, a_{2g-1}^{-1}\, a_{2g}^{-1} = 1$$

bağıntısını sağlıyan,

$$a_1, \ldots, a_{2g}$$

elemanları tarafından tevlid edilen bir grup olsun. Biliniyor ki, bütün $\Gamma \varepsilon \Omega$ grupları Γ_0 grubuna izomorftur. $\Gamma_0 \to \Gamma$ izomorfizmlerini θ ile gösterelim.

Şimdi, θ, θ' izomorfizmlerine eşdeğerdirler diyoruz, şayet Ω ya nazaran konjüge iseler, yani bir $B \varepsilon \Omega$ için

$$\theta'(a_k) = B\theta(a_k)\, B^{-1}, \qquad k = 1, \ldots, 2g.$$

Eşdeğerlik sınıflarına Teichmüller noktaları, ve eşdeğerlik sınıflarının cümlesine Teichmüller uzayı denir, ve $\mathfrak{T}$ *ile gösterilir.*

$\theta(a_1)$ ve $\theta(a_2)$ sübstitüsyonları hiperboliktirler ve sabit noktaları farklıdırlar.

Birtek $B \varepsilon \Omega$ vardır, öyleki $\theta(a_1)$ in sabit noktaları ± 1 e ve $\theta(a_2)$ nin *çekici* sabit noktasını i ye dönüştürür. (§ 3.3.3. deki normal formda, $|k| < 1$ ise z_1 sabit noktasına *çekici*, z_2 ye ise *itici* denir. $|k| > 1$ ise, z_2 çekici, z_1 ise iticidir)

Şu halde, herbir eşdeğerlik sınıfı, bir ve birtek θ ihtiva eder, öyleki, $\theta(a_1)$ in ± 1 de sabit noktaları, ve $\theta(a_2)$ nin de i çekici sabit noktası vardır.

Bu gibi θ izomorfizmlerine *normalleştirilmiş* denecektir, ve görülüyor ki $\mathfrak{T}$ normalleştirilmiş izomorfizmlerin cümlesi ile *özdeşleştirilebilir.*

TARİF 11. $(A_1, \ldots, A_{2n}) \varepsilon \Omega^{2g}$ bir *kanonik sistemdir* denir, şayet

$$A_1 A_2 A_1^{-1}\, A_2^{-1} \ldots A_{2g-1}^{-1}\, A_{2g}\, A_{2g-1}^{-1}\, A_{2g}^{-1} = 1,$$

ve normalleştirilmiştir denir şayet

$$A_1(1) = 1, \quad A_1(-1) = -1, \quad A_2(i) = i,$$

ise.

Hesapları kolaylaştırmak maksadıyla, G yi Z^+ - üst yarıdüzleme dönüştürelim, öyleki, 1, i, -1 sırasıyla 0, 1, ∞ a dönüşsün.

Bu takdirde bilindiği üzere herbir $A \varepsilon \tilde{\Omega}_R$, $\pm A$ reel ünimodüler matrislerinin çifti ile gösterilebilir.

Hedifimiz, verilen bir $C \varepsilon \tilde{\Omega}_R$ için

$$A_1 A_2 A_1^{-1}\, A_2^{-1} = C \qquad (15.2.5.1)$$

lineer sübstitüsyon denkleminin *normalleştirilmiş çözümlerini* araştırmak olacaktır.

(15.2.5.1) denklemini, matris denklemi şeklinde yazalım,

$$\tilde{A}_1\, \tilde{A}_2\, \tilde{A}_1^{-1}\, \tilde{A}_2^{-1} = \tilde{C} \qquad (15.2.5.2)$$

Unutmıyalım ki, $\tilde{C}$ için iki ihtimal vardır. Normalleştirilmiş çözümler o şekildedir ki, $\tilde{A}_1$ bir köşegen matristir ve $A_2(1) = 1$.

Şayet

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vazedilirse,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & d-1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} b & 1-d \\ 1-a & c \end{pmatrix} \qquad (15.2.5.3)$$

matrislerinin

$$\tilde{A}\ \tilde{B} = \tilde{C}\ \tilde{B}\ \tilde{A} \qquad (15.2.5.4)$$

denklemini sağladığı tahkik edilebilir.

Diğer taraftan,

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} c+d-1 & 0 \\ 0 & a+b-1 \end{pmatrix} \qquad (15.2.5.5)$$

vazederek aşağıdaki lemmayı ispat edelim.

Lemma 15.2.5.1. Şayet $\tilde{B}$ singüler değilse, yani $a+d\neq 2$ ise, (15.2.5.2) denkleminin normalleştirilmiş bir çözümü vardır, yalnız ve yalnız, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}\ \tilde{D}$ nin determinantı pozitif iseler. Birtek çözüm vardır, ve $\tilde{A}_1\ \tilde{A}_2$ matrisleri, sırasıyla $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}\ \tilde{D}$ matsirlerinin birer katlarıdır.

İspat. Farzedelim ki, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}\ \tilde{D}$ nin determinantları pozitiftir. $\tilde{D}$ ile $\tilde{A}$ aralarında değiştiklerinden (15.2.5.4) ten dolayı $\tilde{A}_1 = \tilde{A}$ ve $\tilde{A}_2 = \tilde{B}\ \tilde{D}$ (15.2.5.2) denklemini sağlar. Reel sabitlerle çarpmak suretiyle ünimodüler yapılabilirler, ve $A_2(1) = 1$ sağlandığı tahkik edilebilir. Birtekliği ispatlıyalım. (15.2.5.2) denklemi

$$\tilde{C}^{-1}\ \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2\ \tilde{A}_1\ \tilde{A}_2^{-1}$$

şeklinde yazılırsa,

$$\text{İz}\ (\tilde{C}^{-1} - 1)\ \tilde{A}_1 = 0$$

bulunur. Aynı şekilde, $\tilde{B}$ singüler olmadığından, (15.2.5.4) ten

$$\text{İz}\ (\tilde{C}^{-1} - 1)\ \tilde{A} = 0$$

bulunur, $\tilde{C}^{-1} - 1$ in köşegen elemalarının ikisi birden 0 olmadığından $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}$ nın bir katıdır. Sonra

$$\tilde{A}\ \tilde{B}\ \tilde{A}^{-1}\ \tilde{B}^{-1} = \tilde{A}\ \tilde{A}_2\ \tilde{A}^{-1}\ \tilde{A}_2^{-1}$$

den

$$\tilde{A}_2^{-1}\ \tilde{B}\ \tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}\ \tilde{A}_2^{-1}\ \tilde{B}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $\tilde{A}_2^{-1}\ \tilde{B}$, özdeş matrisin bir katı olmıyan A^{-1} köşegen matrisle yer değiştirir. Binaenaleyh, $\tilde{A}_2^{-1}\ \tilde{B}$ nin kendisi bir köşegen matristir. BD ve A_2 nin 1 de sabit noktaları olduğundan, $\tilde{A}_2$, $\tilde{B}\ \tilde{D}$ nin bir katıdır.

Çözümün varlığı için açık şart,

$$(1-a)\ (d-1) > 0,$$

ve

$$(a+d-2)\ (c+d-1)\ (a+b-1) > 0$$

Problemin iki çözümü olabilir, şayet yukardaki eşitsizlikler, a, b, c, d lerin yerine aksileri vazedildiği takdirde, cari kalıyorlarsa.

Şu noktaya da işaret etmek isteriz ki, (15.2.5.2) nin sonsuz çözümleri vardır, şayet, $a = d = 1$, ve hiçbir çözümü yoktur şayet $a + d = 2$, $a \neq d$ ise.

Bu lemmadan şu teorem istihraç edilebilir.

Teorem 15.2.5.1. $(A_1, \ldots, A_{2g})$ *normalleştirilmiş kanonik* sistemleri, öyleki $A_1A_2A_1^{-1}A_2^{-1}$ parabolik değildir, $(6g-6)$ boyutlu bir M *reel analitik çokkatlısını* teşkil ederler. M nin herbir noktasında $A_1, \ldots, A_{2g}$ nin katsayılarının rasyonel fonksyonları olan, $(u_1, \ldots, u_{6g-6})$ lokal koordinatları vardır. Karşıt olarak, $A_k(z)$ nin değerleri, lokal koordinatlara rasyonel bir şekilde tâbidirler.

İspat. M nin verilen noktasında, $\tilde{A}_1\ \tilde{A}_2\tilde{A}_1^{-1}\ \tilde{A}_1^{-1} = \tilde{C}$, ve $\tilde{C} = (\tilde{A}_3 \ldots \tilde{A}_{2g}^{-1})^{-1}$ veya $\tilde{C} = -(\tilde{A}_3 \ldots \tilde{A}_{2g}^{-1})^{-1}$. $\tilde{C}$, $a + d \neq 2$ şartını sağlar, ve Lemma 15.2.5.1. de ndolayı da $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}\ \tilde{D}$ nin determinantları pozitiftir. Bu şartlar, $(A_3, \ldots, A_{2g})$ nin bir civarında sağlanmaktadırlar ve görülür ki, u_{3h+1}, u_{3h+2}, u_{3h+3} koordinatları, A_{h+3} ün, $h = 0, \ldots, 2g-3$, katsayılarının sonlu oranları şeklinde seçildikleri taktirde teoremdeki iddia doğrulanır.

$A_k = \theta(a_k)$ tasviri, $\mathfrak{G}$ den M nin içine birebirdir. Şayet $\mathfrak{G}$, resmi ile özdeşleştirilirse, M deki topoloji $\mathfrak{G}$ de bir topoloji intaç eder. Gösterilebilir ki [9] $\mathfrak{G}$ nin resmi M de açık bir cümledir, ve bu sebeple $\mathfrak{G}$ bir *çokkatlıdır*.

BÖLÜM XVI

ÇOK DEĞİŞKENLİ HOLOMORF FONKSYONLAR

1. Cauchy Formülü

16.1.1. **Giriş.** Çok değişkenli fonksiyonlara geçmeden önce birtek değişkenli analitik fonksyonlar hakkındaki bazı hususları hatırlatmakta fayda vardır. Nitekim, teorem 8.1.2.3 ve teorem 8.1.2.4 birtek değişkenli analitik fonksiyonların tarifi olarak alınabilir. Gerçekten, $w = f(z)$ *nin*

$$dw = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) dz + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) d\bar{z}$$

diferansyelinde,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

vazedilirse yukardaki diferansyel

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z}\,dz + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}$$

şeklinde yazılabilir. Daha da kısaltarak

$$dw = \partial w + \bar{\partial} w$$

şeklinde yazabiliriz. Burada ∂ ve $\bar{\partial}$ ye sırasıyla diferansyel ve konjüge diferansyel operatörü denir.

Şimdi $B \subset C$ bir açık cümle ve $w \in C^1(B)$ yani B de sürekli diferansyellenebilir bir kompleks fonksyon olsun.

TARİF 1. $w \in C^1(B)$ kompleks fonksyonuna B de holomorftur (analitik) denir şayet B de Cauchy-Riemann denklemlerini, yani

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$$

denklemini sağlıyorsa. Veya bir başka deyimle, dw, dz ile orantılı ise.

Analitik fonksiyonlar için, umumiyetle $w' = \dfrac{dw}{dz}$ notasyonu kullanılır ve analitiklik şartı

$$dw = w'dz$$

şeklini alır. B de holomorf fonksyonların cümlesini A(B) ile göstereceğiz.

Misal. e^z, $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ şeklinde tarif edilirse, $de^z = e^z dz$ yazıldığından e^z holomorftur.

16.1.2. **Cauchy Formülü.** $B \subset C$ sınırlı ve açık bir cümle, ∂B pozitif yönde çevresi olsun. Bu taktirde $\omega \in C^1$ 1.dereceden bir diferansyel form, ve (13.2.4.7) gözönünde tutulursa, Stokes formülü

$$\int_{\partial B} \omega = \iint_B d\omega.$$

$\omega = w dz$ vazedilir ve Λ dış çarpım sembolu kullanılırsa, Stokes formülü

$$\int_{\partial B} w dz = \iint_B dw \wedge dz.$$

Veya

$$dw \wedge dz = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} \wedge dz = 2i\,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,dx \wedge dy$$

notasyonları ile Stokes formülü

$$\int_{\partial B} w dz = \iint_B \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} \wedge dz = 2i \iint_B \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,dx \wedge dy \qquad (16.1.2.1)$$

şeklini alır.

$w \in C^1(\bar{B})$ ve w B de holomorf ise

$$\int_{\partial B} w dz = 0,$$

Cauchy teoremi elde edilir.

Teorem 16.1.2.1. $w \in C^1(\bar{B})$ ve $\zeta \in B$ keyfi fakat sabit ise

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\partial B} \frac{w(z)}{z-\zeta}\,dz + \iint_B \frac{\partial w/\partial \bar{z}}{z-\zeta}\,dz \wedge d\bar{z}\right\}.$$

İspat. $\zeta \in B$ ve (ζ,ϱ) merkezi ζ da ve yarı-çapı ϱ olan bir çember olsun. ϱ yı yeter derecede küçük seçelim $\ni (\zeta,\varrho) \subset B$. (16.1.2.1) formülü ∂B ve (ζ,ϱ) nun belirttiği B_ρ bölgesine, ve $\bar{B}_\rho$ da $w(z)/(z-\zeta) \in C^1$ fonksiyonuna tatbik edilirse, $1/(z-\zeta)$ B_ρ da holomorf olduğundan

$$\iint_{B_\rho} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,\frac{1}{z-\zeta}\,d\bar{z} \wedge dz =$$

$$\int_{\partial B} \frac{w(z)}{z-\zeta}\,dz - \int_0^{2\pi} w(\zeta+\varrho e^{i\theta})\,i d\theta.$$

$(z-\zeta)^{-1}$ B üzerinde integrallenebildiğinden ve w ζ da sürekli olduğundan $\rho \to 0$ yapıldığı taktirde istenilen formül elde edilir.

Keza w B de holomorf ise, Cauchy formülü elde edilir:

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{w(z)}{z-\zeta}\, dz.$$

16.1.3. **A(B) nin Cebirsel Özelliği.** Açık olarak iki holomorf fonksyonun toplamı ve çarpımı holomorftur. Gerçekten, farzedelim ki u, v holomorfturlar. Diyorum ki, mesclâ, $w = uv$ holomorftur. Zira,

$$\begin{aligned} d(uv) &= udv + vdu \\ &= \left(u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz + \left(u\frac{\partial v}{\partial \bar z} + v\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right) d\bar z \\ &= \left(u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz = (uv'+vu')dz. \end{aligned}$$

Bu ise gösteriyor ki $(uv)'$ analitiktir. Dolayısıyla uv analitiktir.

Diğer taraftan

$$\partial(u+v) = \partial u + \partial v, \quad \bar\partial(u+v) = \bar\partial u + \bar\partial v$$

ve

$$\partial(uv) = uv' + vu', \quad \bar\partial(uv) = u\frac{\partial v}{\partial \bar z} + v\frac{\partial u}{\partial \bar z}$$

gösteriyor ki ∂ ve $\bar\partial$ operatörleri lineer ve çarpım kaidesini sağlıyorlar. Dolayısıyla, A(B) bir halkadır.

TARİF 2. $w \in C$ olsun. $dw = \partial w + \bar\partial w$ yazalım. ∂w ye (1,0) tipinden, $\bar\partial w$ ye ise (0,1) tipindendir denir.

Bu notasyonlara göre, w holomorftur denir şayet ∂w (1,0) tipinden ise.

Şimdi buraya kadar gördüklerimizi çok kompleks değişkenli fonksiyonlara teşmil edeceğiz.

16.1.4. **C^n Uzayı.** Sıralı kompleks sayı n-li lerin cümlesine n boyutlu kompleks sayı uzayı denir ve C^n ile gösterilir.

Notasyon:

$$C^n = \{z=(z_1,\dots,z_n),\ z_k \in C,\ k = 1,\dots,n\}.$$

$z \in C^n$ nin herbir komponenti birtek şekilde reel ve imajiner kısımlara ayrılır: $z_k = x_k + iy_k$.

Böylece C^n ile R^{2n} arasında bir 1–1 tekabül tesis edilmiş olur. Diğer taraftan C^n, C üzerinde n-boyutlu kompleks bir vektör uzaydır.

Toplam ve skaler çarpım, komponentlerin toplamı ve skaler çarpımı ile tarif edilir.

C^n ye bir reel vektör uzayı gözü ile bakılırsa, $2n$–boyutludur, yani R^{2n} dir. Açık olarak C^n ve R^{2n} arasındaki izomorfizm C^n de bir topoloji intaç eder. C^n nin topolojik strüktürü aşağıdaki metriklerden biri ile belirtilebilir.

(1). $\|z\| = (\sum_1^n z_k\bar z_k)^{1/2}$

(2). $\|z\| = \max_{k=1,\dots,n} (|x_k|,|y_k|)$

(3). $\|z\| = \max_{k=1,\dots,n} |z_k|$

TARİF 3. $B \subset C^n$ açık bir cümle ve $z^0 \in B$ bir nokta olsun. z^0 ra bir eğri ile birleştirilebilen bütün z lerin $C_B(z^0)$ cümlesine z^0 ın B deki komponenti denir.

Hatırlatalım ki eğri diye, [0,1] aralığının C^n deki sürekli tasvirine denir.

$C_B(z^0)$ ın aşağıdaki hassaları kolayca görülebilir.

1. $C_B(z)$ ve $B-C_B(z)$ açık cümlelerdir.
2. $C_B(z)$ irtibatlıdır.
3. $C_B(z^1) \cap C_B(z^2) \neq \varnothing \Rightarrow C_B(z^1) = C_B(z^2)$
4. $B = \bigcup_{z\in B} C_B(z)$
5. B nin en fazla sayılabilir çoklukta komponentleri vardır.

17.1.5. **Kuvvet Serileri.** $M \subset C^n$ herhangibir cümle olsun. $f: M \to C$ tasvirine kompleks fonksyon denir.

TARİF 4. $z^0 \in C$ etrafında formel kuvvet serisi diye

$$\sum_{\nu_1,\dots,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1,\dots,\nu_n}(z_1-z^0_1)^{\nu_1}\dots(z_n-z_n^0)^{\nu_n}, \quad \nu_k \geq 0$$

ifadesine denir. Burada $a_{\nu_1,\dots,\nu_n} \in C$.

Notasyonu basitleştirmek için $z^0 = (z^0_1,\dots,z_n^0)$ noktasını başlangıç noktası olarak alacağız. Bu taktirde yukarıdaki seri

$$\sum_{\nu_1\dots\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1\dots\nu_n} z_1^{\nu_1}\dots z_n^{\nu_n}$$

şeklinde yazılır.

Daha da basitleştirmek için

$$\nu = (\nu_1\dots\nu_n),\ |\nu| = \sum_{k=1}^n \nu_k,\ z^\nu = z_1^{\nu_1}\dots z_n^{\nu_n}$$

notasyonlarını kullanalım. Böylece 0 etrafında Formel kuvvet serisi

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu.$$

basit şeklini alır. Formel kelimesi, şimdilik $z_1,\ldots,z_n$ lere bir değer verilmesi düşünülmediğini ve dolayısıyla serinin bir kompleks sayı göstermediğini ifade eder. Kaldı ki çok-indislerdeki sıra belli olmadığından toplamın ne şekilde yapılabileceği de kesin değildir.

TARİF 5. $\nu = (\nu_1 \ldots \nu_n)$, $\nu_k \geq 0$, $k = 1,\ldots,n$, çok-indislerinin bütününü $\mathcal{N}$ ile gösterelim. $z^1 \varepsilon C^n$ sabit olsun. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z^1-z^0)^\nu$ bir c kompleks sayısına yakınsaktır denir şayet $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists$ sonlu $N_0 \subset \mathcal{N} \ni \forall$ sonlu N, $N_0 \subset N \subset \mathcal{N}$ için

$$\left| \sum_{\nu \varepsilon N} a_\nu (z^1-z^0)^\nu - c \right| < \varepsilon .$$

Bu taktirde

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z^1-z^0)^\nu = c$$

yazılır. Bu anlamda yakınsaklık, mutlak yakınsaklık ile müteradiftir.

TARİF 6. $z^0 \varepsilon C^n$ noktasının ε–civarı diye

$$U_\varepsilon(z^0) = \{z \varepsilon C^n,\ \| z-z^0 \| < \varepsilon\}$$

cümlesine denir. Burada $\| z-z^0 \|$, seçilen Topolojiye göre, z^0 ile z arasındaki uzaklıktır.

TARİF 7. $M \subset C^n$ bir altcümle, $z^0 \varepsilon M$ ve f: $M \to C$ bir kompleks fonksyon olsun. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z^0)^\nu$ kuvvet serisi M üzerinde $f(z)$ ye üniform yakınsaktır denir şayet $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists$ sonlu $N_0 \subset \mathcal{N}$, z ye tâbi değil, $\ni \forall$ sonlu N, $N_0 \subset N \subset \mathcal{N}$ ve $\forall\ z \varepsilon M$ için

$$\left| \sum_{\nu \varepsilon N} a_\nu (z-z^0)^\nu - f(z) \right| < \varepsilon .$$

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z^0)^\nu$ serisi bir $B \subset C^n$ açık cümlesinde üniform yakınsaktır şayet B nin her kompakt (sınırlı kapalı) altcümlesinde üniform yakınsak ise.

Şimdi holomorf fonksiyonlar için şu tarifler verilebilir.

TARİF 8. $B \subset C^n$ açık bir cümle ve f B üzerinde bir kompleks fonksyon olsun. f, B de holomorftur denir şayet her $z^0 \varepsilon B$ için bir $U = U(z^0) \subset B$ cıvarı vardır $\ni \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z^0)^\nu$ kuvvet serisi U üzerinde $f(z)$ ye yakınsak ise.

Not. Yakınsaklık noktasal olup, üniform yakınsaklık şart koşulmamıştır.

TARİF 9. $B \subset C^n$ açık bir cümle ve f B üzerinde bir kompleks fonksyon olsun. f, B de holomorftur denir şayet her $z \varepsilon B$ ve her $j = 1,\ldots,n$ için

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f(z_1,\ldots,z_j+h,\ldots,z_n)-f(z_1,\ldots,z_n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z_j}$$

mevcut ve sonlu ise.

Not. Görüyoruz ki f B de holomorftur şayet ayrı ayrı herbir değişkene nazaran holomorf ise. Üstelik f sürekli kabul edilmiş değildir.

Bu iki tarifin muadil olduğu gösterilebilir.

Hassa 1. f_1, f_2 B de holomorf iseler, f_1+f_2, f_1-f_2, $f_1 f_2$, $f_1/f_2 (f_2 \neq 0)$ B de holomorfturlar.

Hassa 2. Şayet (f_j) dizisinde herbir f_j B de holomorf ve f ye üniform yakınsak ise f B de holomorftur. (İspatı biraz ilerde veriyoruz.) Yani A(B) bir halka teşkil eder ve bu halka üniform yakınsaklığa nazaran kapalıdır.

Hassa 3. **Maksimum Prensibi.** f, B de holomorf ve bir z iç noktasında lokal maksimumu varsa, f, $C_B(z)$, yani z nin B deki komponentinde özdeş olarak bir sabite eşittir.

TARİF 10. $K \subset C^n$ herhangibir cümle ve f, K da tarifli, yani bir kompleks fonksyon olsun. Bu taktirde f, K da holomorftur denir yy. her $z \varepsilon K$ için z yi ihtiva eden bir açık $B \subset C^n$ cümlesi varsa $\ni B \cap K$ B de kapalı (yani B–K C^n de açık) ve $\exists$ F, B de holomorf, $\ni F = f|B \cap K$.

Not. f: $R^n \to R$ fonksyonlarının $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1,\ldots,n$ kısmi türevlerinin varlığı, f nin sürekliliğini intaç etmez. Aksine, çok kompleks değişkenli fonksyonlar için bu teorem doğrudur. Netekim,

Teorem 16.1.5.1 (Hartogs). Holomorf bir fonksyon süreklidir (bütün değişkenlere nazaran aynı zamanda).

Bu teoremi ilerde ispat edeceğiz.

TARİF 11. $V = \{r = (r_1,\ldots,r_n) \varepsilon R^n;\ r_k \geq 0,\ 1 \leq k \leq n\}$ cümlesine mutlak uzay denir. Görülüyor ki τ: $C^n \to V$ tasviri $\ni \tau(z) = (|z_1|,\ldots,|z_n|)$ C^n den V üzerine tabii projeksyondur.

Hatırlatalım ki $V \subset R^n$, R^n nin bir altcümlesi oluşu sebebiyle V deki topoloji, R^n nin V de intac ettiği topolojidir, (rölatif topoloji). Bu taktirde, τ: $C^n \to V$ sürjektif tasviri süreklidir. Dolayısıyla, $B \subset V$ açık bir cümle ise $\tau^{-1}(B) \subset C^n$ açıktır.

TARİF 12. $r \varepsilon V^+ = \{r=(r_1,\ldots,r_n) \varepsilon R^n,\ r_k > 0\}$ ve $z^0 \varepsilon C^n$ olsun. Bu taktirde $P = (z^0,r) = \{z \varepsilon C^n;\ |z_k-z_k^0| < r_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ ye, merkezi z^0 da ve

poli-yarıçapı r olan, polidisk (veya polisilindir) denir. $T = T(P) = \{z \varepsilon C^n;\ |z_k - z_k^0| = r_k\}$ ye ise P nin tefriki kabil (mümtaz) sınırı denir. T nin boyutu n dir.

Misal. $z^0 = 0$, $n = 2$ olsun. R^2 nin eksenlerini $|z_1|$ ve $|z_2|$ ile gösterelim. P nin $\tau(P)$ projeksyonu kenarları r_1 ve r_2 olan açık dikdörtkendir. Tefriki kabil $\tau(T)$ sınırı ise dikdörtkenin sağ üst köşesidir. Kısaca, $n = 2$ ve $z^0 = 0$ için V, R^2 de sağ-üst kadrandır. Binaenaleyh,

$$T = \{z \varepsilon C^2;\ |z_1| = r_1,\ |z_2| = r_2\}$$
$$= \{z = (r_1 e^{i\theta_1},\ r_2 e^{i\theta_2}) \varepsilon C^2;\ 0 \leq \theta_1,\ \theta_2 < 2\pi\}$$

2-boyutlu bir tordur.

Aynı şekilde, n halinde, $P \subset C^n$ konveks bir bölgedir (n dairenin topolojik çarpımı) ve tefriki kabil T sınırı P nin ∂P topolojik sınırının bir altcümlesidir (n çemberin kartezyen çarpımı), yani n-boyutlu tor.

$z^0 = 0$ kabul ederek

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1 \ldots \nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}$$

serisi hakkında, teorem 4.8.3.1 in benzeri aşağıdaki lemmayı ispat ediyoruz. $z^1 = (z_1^1, \ldots, z_n^1)$, $z_k^1 \neq 0$, $1 \leq k \leq n$, C^n de bir nokta olsun. Kısa olarak $z^1 \neq 0$.

Lemma (Abel). $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ serisi z^1 de yakınsak ise, bu taktirde, seri

$P_{z^1} = \{z \varepsilon C^n;\ |z_k| < |z_k^1| = r_k^1\}$ polidiskinin içinde üniform yakınsaktır.

İspat. Seri, z^1 de yakınsak olduğundan $\exists M > 0 \ni$ her υ için $|a_\nu z^{1\nu}| < M$. Şimdi, $0 < q < 1$ bir sayı ise $qz^1 \neq 0$. $P^* = P_{qz^1}$ vazedelim. $z \varepsilon P^*$ için

$$|z^\nu| = |z_1|^{\nu_1} \ldots |z_n|^{\nu_n} < |qz_1^1|^{\nu_1} \ldots |qz_n^1|^{\nu_n}$$
$$= q^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} |z_1^1|^{\nu_1} \ldots |z_n^1|^{\nu_n} = q^{|\nu|}\ |z^{1\nu}|.$$

Demek ki, $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{|\nu|}\ |a_\nu|\,|z^{1\nu}|$ serisi $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ serisi için bir majoranttır. Dolayısıyla

$$M \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{|\nu|} = M \cdot \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{\nu_n=0}^{\infty} q^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$$
$$= M(\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu_1}) \ldots (\sum_{\nu_n=0}^{\infty} q^{\nu_n}) = M\left(\frac{1}{1-q}\right)^n$$

$\sum_{\nu=0} a_\nu z^\nu$ serisinin bir majorantıdır. Dolayısıyla $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ serisi P^* da mutlak

yakınsaktır. Diğer taraftan, çok-indisli $\mathcal{N}$ cümlesi sayılabilir olduğundan $\dot{I} \cup \{0\}$ pozitif tam sayılar cümlesi ile $\mathcal{N}$ arasında 1–1 tekabül vardır. Bu tekabülü $\nu = \Phi(n)$ ile gösterir ve $b_n(z) = a_{\Phi(n)} z^{\Phi(n)}$ yazarsak, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z)$, P^* üzerinde mutlak ve üniform yakınsaktır. Bu demektir ki $\varepsilon > 0$ verildiği taktirde bir $n_0 \varepsilon \dot{I}$ sayısı vardır $\ni P^*$ üzerinde

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |b_n(z)| < \varepsilon.$$

Şimdi aynı $\varepsilon > 0$ için $N_0 = \Phi(\{0,1,2,\ldots,n_0\})$. N sonlu bir cümle ise $\ni N_0 \subset N \subset \mathcal{N}$, bu taktirde $\{0,1,2,\ldots,n_0\} \subset \Phi^{-1}(N)$ ve dolayısıyla, $z \varepsilon P^*$ için

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z) - \sum_{\nu \in N} a_\nu z^\nu\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z) - \sum_{n \varepsilon \Phi^{-1}(N)}^{\infty} b_n(z)\right|$$
$$= \left|\sum_{n \varepsilon \Phi^{-1}(N)}^{\infty} b_n(z)\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |b_n(z)| < \varepsilon.$$

Dolayısıyla, $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ P^* da üniform yakınsaktır.

Nihayet $K \subset P_{z^1}$ kompakt bir cümle olsun. $0 < q < 1$ için P_{qz^1}, P_{z^1} in bir açık örtüsü olduğundan K nın da bir açık örtüsüdür. Dolayısıyla sonlu sayıda $P_{q_1 z^1}, \ldots, P_{q_s z^1}$ K yı örter. $q = \max(q_1, \ldots, q_s)$ ise $K \subset P_{qz^1}$. Fakat P_{qz^1} bir P^* dır. Şu halde $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ K üzerinde üniform yakınsaktır.

16.1.6. Yakınsaklık Bölgesi ve Reinhardt Bölgeleri.

TARİF 13. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ kuvvet serisinin D yakınsaklık bölgesi diye, C^n ye ait bütün z noktalarının D cümlesine denir, öyleki kuvvet serisi $\forall\ z \varepsilon D$ noktasının bir U_z cıvarının bütün noktalarında mutlak yakınsaktır.

$M > 0$, ve B, $|a_\nu z^\nu| < M$ eşitsizliğini sağlıyan bütün $z \varepsilon C^n$ noktalarının cümlesi olsun. Açık olarak D nin herbir iç noktası B nin bir iç noktasıdır. Diğer taraftan Abel lemmasından dolayı $B = D$.

TARİF 14. Bir $B \subset C^n$ açık cümlesine Reinhardt (dairesel) bölgesi denir şayet $(z_1, \ldots, z_n) \varepsilon B \Rightarrow (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n) \varepsilon B$. $\theta_1, \ldots, \theta_n$ keyfi reel. Diğer bir ifade ile $z^1 \varepsilon B \Rightarrow T_{z^1} = \tau^{-1}\tau(z^1) \subset B$. Burada $T_{z^1} = \{z \varepsilon C^n;\ |z_k| = |z_k^1|\}$ tordur. Tariften anlaşılıyor ki, $\tau^{-1}\tau(B) = B$. Görülüyor ki, bir Reinhardt bölgesi, V mutlak uzayındaki $\tau(B)$ resmi ile karakterize edilmektedir.

Teorem 16.1.6.1. $B \subset C^n$ açık cümlesi bir Reinhardt bölgesidir yy. $\exists$ açık $W \subset V \ni B = \tau^{-1}(W)$.

İspat. Farzedelim ki $W \subset V$ açıktır ve $B = \tau^{-1}(W)$. $z \in B \Rightarrow \tau(z) \in W$. Dolayısıyla, $\tau^{-1}\tau(z) \subset \tau^{-1}(W) = B$. Karşıt olarak farzedelim ki B bir Reinhardt bölgesidir. Bu demektir ki $B = \tau^{-1}\tau(B)$. Göstermeliyiz ki $\tau(B)$ V de açıktır. Farzedelim ki $\tau(B)$ açık değildir. Bu takdirde, $\exists r^0 \in \tau(B) \ni r^0$, $\tau(B)$ nin bir iç noktası değildir. Dolayısıyla $V-\tau(B)$ nin bir yığılma noktasıdır. Bu taktirde $\exists (r^j) \subset V-\tau(B) \ni \lim_{j\to\infty} r^j = r^0$. Demek ki $\exists z^j \in C^n$, $\tau(z^j) = r^j \ni$ $|z_k^j| = r_k^j$, $1 \leq k \leq n$. (r^j) yakınsak olduğundan $\exists M > 0 \ni |r_k^j| < M$, $\forall j$ ve k. Binaneleyh (z^j) dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla bir z^0 yığılma noktası vardır. O halde $\exists$ altdizi $(z^{j_\nu}) \ni \lim_{\nu\to\infty} z^{j_\nu} = z^0$. τ sürekli olduğundan $\tau(z^0) = \lim_{\nu\to\infty} \tau(z^{j_\nu}) = \lim_{\nu\to\infty} r^{j_\nu} = r^0$. B Reinhardt bölgesi olduğundan $z^0 \in \tau^{-1}(r^0) \subset \tau^{-1}\tau(B) = B$. B, z^0 ın açık bir cıvarı olduğundan sonlu sayıda z^{j_ν} ler hariç bütün z^{j_ν} ler B de dir. Dolayısıyla sonlu sayıda r^{j_ν} hariç, bütün $r^{j_\nu} = \tau(z^{j_\nu})$ ler $\tau(B)$ de dir. Bu bir tezattır. O halde $\tau(B)$ açıktır.

Netice. Bir Reinhardt bölgesinin τ altında mutlak uzaydaki resmi daima açık bir cümledir. Bu cümlenin ters resmi ise Reinhardt bölgesinin kendisidir.

TARİF 15. $B \subset C^n$ bir Reinhardt bölgesi olsun.

1. B ye has denir şayet (i) B irtibatlı ve (ii) $0 \in B$ ise.

2. B tam dır denir şayet $0 \neq z^1 \in B \Rightarrow P_z^1 \subset B$.

Kısaca, B rotasyon-invarienttir, ve tamdır şayet deliksiz ise. Burada ve bundan sonra $z^1 \neq 0$ demek $z_k^1 \neq 0$, $k = 1,\ldots,n$, demektir.

Misal. $B = \{z \in C^2;\ |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$ bir tam Reinhardt bölgesidir. $\tau(B)$ birim karedir, $\log\tau(B)$ üçüncü kadrandır.

$n = 1$ için Reinhardt bölgeleri açık dairelerdir.

$n > 1$ için polidiskler ve açık dolu küreler: $K = \{z;\ |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < R^2\}$ has ve tam Reinhardt bölgeleridir.

Teorem 16.1.6.2. Her tam Reinhardt bölgesi hastır.

İspat. B bir tam Reinhardt bölgesi olsun. $\exists 0 \neq z^1 \in B$ ve tariften dolayı $0 \in P_{z^1} \subset B$. Dolayısıyla, sadece B nin irtibatlı olduğunu göstermek kalıyor.

1. z^1 eksenler üzerinde değilse, yani $0 \neq z^1 \in B$ ise, z^1 noktasını 0 ra birleştiren doğru tamamen P_{z^1} in içindedir ve dolayısıyla B nin içindedir.

2. z^1, eksenlerin üzerindedir. (mutlak uzayı gözönünde bulundurun). Bu taktirde $\exists U_\varepsilon(z^1)$ cıvarı ve $z^2 \in U_\varepsilon(z^1) \ni z^2 \neq 0$. Dolayısıyla, U_ε na ait bir eğri ile z^2, z^1 re birleştirilebilir. Diğer taraftan 1) gözönünde tutulursa z^2, 0 ra B ye ait bir eğri ile birleştirilebilir. Binaenaleyh, z^1, 0 ra B ye ait bir eğri ile birleştirilebilir. Dolayısıyla B irtibatlıdır.

Teorem 16.1.6.3. $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ C^n de formel bir kuvvet serisi olsun. Bu taktirde $B = B(f)$ yakınsaklık bölgesi bir tam Reinhardt bölgesidir. f ise B de üniform yakınsaktır.

İspat. $z^1 \in B$ olsun. Bu taktirde $U'_\varepsilon(z^1) = \{z \in C^n;\ |z-z^1| < \varepsilon\}$, merkezi z^1 de ve yarı-çapı $(\varepsilon,\ldots,\varepsilon)$ olan bir polidisktir. Biliyoruz ki: $U'_\varepsilon(z^1) = U_\varepsilon(z_1^1) \times \ldots \times U_\varepsilon(z_n^1)$. ε yeter derecede küçük için $U'_\varepsilon(z^1)$ B nin içindedir. $\exists z_k^2 \in U_\varepsilon(z_k^1)$, $k = 1,\ldots,n$, $\ni |z_k^2| > |z_k^1|$. Şimdi $z^2 = (z_1^2,\ldots,z_n^2)$ noktasını gözönüne alalım. Bu taktirde $z^2 \in B$ ve $z^1 \in P_{z^2}$. Her $z^1 \in B$ için böyle bir z^2 sabit noktasını seçelim. Şimdi, hipotezden dolayı, f, z^2 de yakınsaktır. Lemmadan dolayı P_{z^2} de yakınsaktır. Dolayısıyla $P_{z^2} \subset B$. Demek ki $z^1 \in B \Rightarrow \exists z^2 \in B \ni z^1 \in P_{z^2}$ $\Rightarrow P_{z^2} \subset B$. Oysa $P_{z^1}, T_{z^1} \subset P_{z^2}$ dolayısıyla $P_{z^1} \subset B$, $T_{z^1} \subset B$, binaenaleyh, B bir tam Reinhardt bölgesidir. Nihayet, B bir tam Reinhardt bölgesi olduğundan, z^2 yukardaki gibi seçilebilir $\ni P^*_{z^1} = P_{z^2}$. Açık olarak $B = \bigcup_{z^1 \in B} P^*_{z^1}$. Herbir z^2 için bir q, $0<q<1$ seçilebilir $\ni (1/q)z^2 = z^3 \in B$. Dolayısıyla herbir $z^1 \in B$ için f, $P^*_{z^1}$ de üniform yakınsaktır. $K \subset B$ kompakt ise, K sonlu sayıda $P^*_{z^1}$ ler ile örtülebilir. Dolayısıyla f, K üzerinde üniform yakınsaktır.

Teorem 16.1.5.1 in ispatı:

f, bir $B \subset C^n$ açık cümlesinde holomorf ve $z^0 \in B$ bir nokta olsun. Tarif 8 den dolayı $\exists \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z^0)^\nu \ni$ bu seri z^0 ın bir U cıvarında $f(z)$ ye yakınsaktır.

Bu taktirde $\exists z^1 \in U \ni z_k^1 \neq z_k^0$, $k = 1,\ldots,n$ ve merkezi z^0 da ve poliyarıçapı $\|z^1-z^0\|$ bir $P(z^0)$ polidiski. Şimdi $0 < \varepsilon < \min_{k=1\ldots n} (|z_k^1-z_k^0|)$. Lemmadan ötürü seri, $U'_\varepsilon(z^0)$ da üniform yakınsaktır. Diğer taraftan, serinin herbir terimi, yani $\forall \nu \in \mathcal{N}$ için $a_\nu(z-z^0)^\nu$ R^{2n} üzerinde kompleks değerli bir fonksyondur. Bu fonksyon açık olarak z^0 da süreklidir. Binaenaleyh serinin toplamı $f(z)$, z^0 da süreklidir.

16.1.7. **Cauchy Formülü.** Tarif 9 ve sürekliliğe dayanarak (teorem 16.1.5.1) aşağıdaki teoremi ispatlıyabiliriz.

Teorem 17.1.7.1. Farzedelim ki $f(z_1,\ldots,z_n)$, $\bar{P} = \{|z_k-z_k^0| \leq r_k\}$ kapalı polidiskte holomorftur. Bu taktirde $\forall z$, $|z_k-z_k^0| < r_k$ için

$$f(z_1,\ldots,z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|\zeta_1-z_1^0| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n-z_n^0| = r_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta_k-z_k} f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\, d\zeta_n \ldots d\zeta_1.$$

Sağ tarafı $C(f)$ ile göstereceğiz. Yani $f = C(f)$.

İspat. $n = 2$ için ispat edeceğiz, çünkü $n > 2$ için ispat aynıdır. Üstelik $z^0 = 0$ kabul etmekle genelliğe halel gelmiş olmaz. $f(z_1,z_2)$, z_2 sabit için, $(|z_2| \leq r_2)$, z_1 in $|z_1| \leq r_1$ de holomorf bir fonksiyonudur. Cauchy formülü (1 kompleks değişkenli kompleks fonksiyonlar için)

$$f(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=r_1} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} f(\zeta_1,z_2) d\zeta_1.$$

Aynı şekilde, $f(\zeta_1,z_2)$ her ζ_1 için z_2 nin holomorf fonksyonudur. Cauchy formülü bir kere daha $f(\zeta_1,z_2)$ ye tatbik edilirse,

$$f(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=r_1} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2|=r_2} \frac{1}{\zeta_2 - z_2} f(\zeta_1,\zeta_2) d\zeta_2 \right\} d\zeta_1.$$

Süreklilikten dolayı, daha doğrusu

$$(\zeta_1 - z_1)^{-1} (\zeta_2 - z_2)^{-1} f(\zeta_1, \zeta_2)$$

P nin mümtaz sınırı T de sürekli olduğundan, üstteki integral çift integral olarak yazılabilir.

Cauchy formülünün kısa notasyonla ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_T f(\zeta)\, (\zeta_1 - z_1)^{-1} \ldots (\zeta_n - z_n)^{-1} d\zeta \qquad (17.1.7.1)$$

Teorem 16.1.7.2. $P \subset C^n$ bir polidisk, T mütekabil tor, yani mümtaz sınırı ve h, T üzerinde sürekli bir fonksyon olsun. Bu taktirde

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_T h(\zeta)\, (\zeta_1 - z_1)^{-1} \ldots (\zeta_n - z_n)^{-1} d\zeta \qquad (17.1.7.2)$$

bütün P de yakınsak bir kuvvet serisine açılabilir.

İspat. Yukarda olduğu gibi $n = 2$ için ispat etmek kâfidir. $T = \{\zeta \in C^2; |\zeta_1| = r_1,\ |\zeta_2| = r_2\}$ ve $z = (z_1,z_2) \in P$ sabit olsun.

Bu taktirde $|z_1| < r_1$, $|z_2| < r_2$ ve dolayısıyla $q_k = \dfrac{|z_k|}{r_k} < 1$, $k = 1,2$.

Binaenaleyh, $\sum\limits_{\nu_k=0}^{\infty} q_k^{\nu_k}$, $\sum\limits_{\nu_k=0}^{\infty} \left(\dfrac{z_k}{\zeta_k}\right)^{k\nu}$, $k = 1,2$ için majorant seridir. Şimdi,

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \frac{1}{\zeta_1\zeta_2} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{z_1}{\zeta_1}\right)\left(1 - \dfrac{z_2}{\zeta_2}\right)} = \frac{1}{\zeta_1\zeta_2} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{\zeta_1}\right)^{\nu_1}$$

$$\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^{\nu_2} = \frac{1}{\zeta_1\zeta_2} \sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{\zeta_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^{\nu_2},$$ çünki sağdaki iki ilk seri

$\zeta = (\zeta_1,\zeta_2) \in T$ için mutlak ve üniform yakınsaktır ve bu sebeple terimler yer değiştirebilir. Dolayısıyla, ikinci seri de T üzerinde mutlak ve üniform yakınsaktır. Diğer taraftan, T kompakt ve h, T üzerinde sürekli olduğundan, $|h| \leq M$. Binaenaleyh $(z_1,z_2) \in P$ sabit için

$$\frac{h(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \frac{1}{\zeta_1\zeta_2} \sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty} h(\zeta_1,\zeta_2) \left(\frac{z_1}{\zeta_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^{\nu_2}$$

T üzerinde mutlak ve üniform yakınsaktır. Bu sebeple Σ ile $\int$ yer değiştirebilir. Yani

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_T \frac{h(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_T \frac{h(\zeta_1,\zeta_2)}{\zeta_1^{\nu_1+1} \zeta_2^{\nu_2+1}} d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2=0}^{\infty} a_{\nu_1\nu_2} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}.$$

Burada

$$a_{\nu_1\nu_2} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_T \frac{h(\zeta_1,\zeta_2)}{\zeta_1^{\nu_1+1} \zeta_2^{\nu_2+1}} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Demek ki $f(z) = \sum\limits_{\nu_1\nu_2=0}^{\infty} a_{\nu_1\nu_2} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}$ her $z = (z_1,z_2) \in P$ için yakınsaktır.

Teorem 16.1.7.3. $B \subset C^n$ açık bir cümle, f B de holomorf ve $z^0 \in B$ olsun. Şayet $\bar{P} \subset B$, merkezi z^0 da kapalı bir polidisk ise bu taktirde bütün P de f ye yakınsak bir $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z^0)^\nu$ serisi vardır.

İspat. f, B de holomorf olduğundan, Teorem 16.1.7.1 den dolayı $f|P = C(f|T)$. Teorem 16.1.7.2 den dolayı $f|P$, bütün P de bir kuvvet serisine açılabilir.

Teorem 16.1.7.4. Şayet (f_j) dizisinde herbir f_j B de holomorf ve f ye üniform yakınsak ise f B de holomorftur.

İspat. $z^0 \in B$ olsun. Notasyonu basitleştirmek için $z^0 = 0$ farzedelim. $\bar{P} \subset B$ merkezi z^0 da kapalı bir polidisk olsun. $z = (z_1,\ldots,z_n) \in P$ için, üniform yakınsaklıktan dolayı (integral ile limit yer değiştirebilir),

$$f|P = \lim_{j\to\infty} (f_j|P) = \lim_{j\to\infty} C(f_j|T) = C(\lim_{j\to\infty} (f_j|T)$$
$$= C(f|T).$$

Teorem 16.1.7.3 den dolayı, f $z^0 = 0$ da holomorftur.

Teorem 16.1.7.5. $B \subset C^n$ açık bir cümle, f B de holomorf, $z^0 \varepsilon B$, U z^0 ın bir cıvarı ve U da $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z^0)^\nu$ olsun. Bu taktirde

$$a_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_n!} \left(\frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \dots \partial z_n^{\nu_n}} \right)_{z^0}$$

İspat. Basitleştirmek için $z^0 = 0$ ve $n = 2$ farzedelim. Teorem 16.1.7.2 de gördük ki,

$$a_{\nu_1 \nu_2} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_T \frac{f(z_1,z_2)}{z_1^{\nu_1+1} z_2^{\nu_2+1}} \, dz_1 dz_2.$$

Bu integral şu şekilde de yazılabilir.

$$a_{\nu_1 \nu_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_1|=r_1} \frac{1}{z_1^{\nu_1+1}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_2|=r_2} \frac{f(z_1,z_2)}{z_2^{\nu_2+1}} \, dz_2 \right\} dz_1$$

$$= \frac{1}{\nu_2!} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_1|=r_1} \left(\frac{\partial^{\nu_2} f}{\partial z_2^{\nu_2}} \right)_{(z_1,0)} \frac{dz_1}{z_1^{\nu_1+1}}$$

$$= \frac{1}{\nu_1! \nu_2!} \left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2} f}{\partial z_1^{\nu_1} \partial z_2^{\nu_2}} \right)_{(0,0)}.$$

16.1.8. Özdeşlik Teoremi. Birtek kompleks değişkenli analitik fonksyonlardan farklı olarak, f_1, f_2 nin analitik olduğu bir G bölgesinde, G de bir yığılma noktası olan bir $M \subset G$ cümlesi üzerinde $f_1 = f_2$ şartı, bütün G de eşitliğin olması için yeterli değildir.

Bu iddiayı aydınlatan şu basit misal verilebilir.

Misal. $G = C^2$ olsun. M cümlesi olarak $M = \{(z_1,z_2) \varepsilon C^2;\ z_2 = 0\}$ cümlesini gözönüne alalım. Diğer taraftan bütün C^2 de holomorf $g(z_1,z_2)$ ve $h(z_1,z_2)$ fonksyonlarını ele alalım. $f_1 = z_2 g(z_1,z_2)$ ve $f_2 = z_2 h(z_1,z_2)$ C^2 de holomorfturlar ve üstelik $f_1|M = f_2|M = 0$. Halbuki $g \neq h$ için $f_1 \neq f_2$.

Halbuki:

Teorem 16.1.8.1 (Holomorf fonksiyonlar için Özdeşlik Teoremi).

$G \subset C^n$ bir bölge ve f_1, f_2 G de holomorf iki fonksyon olsun. $B \subset G$, $B \neq \varnothing$ bir açık cümle ve $f_1|B = f_2|B$ ise, bu taktirde G de $f_1 = f_2$.

İspat. $\{z \varepsilon G,\ f_1(z) = f_2(z)\}$ cümlesinin içini B_0 ile gösterelim. Açıkça $B \subset B_0$ ve $B \neq \varnothing \Rightarrow B_0 \neq \varnothing$. $W_0 = G - B_0$ vazedelim. $G = W_0 \cup B_0$ ve G irtibatlı olduğundan, W_0 ın açık olduğunu göstermemiz kâfi gelecektir. Bu taktirde $G = B_0$ gösterilmiş olacaktır.

Aksini kabul ederek farzedelim ki $z^0 \varepsilon W_0 \ni z^0$ bir iç nokta değildir. Bu taktirde merkezi z^0 da herbir P, $\bar{P} \subset G$, polidiski için $P \cap B_0 \neq \varnothing$. $P = \{z;\ |z_k - z_k^0| < r\}$ vazedelim. Bu taktirde $P' = \{z;\ |z_k - z_k^0| < r/2\} \subset P$. Ve, $P' \cap B_0 \neq \varnothing$. Şimdi $z^1 \varepsilon P' \cap B_0$ keyfi seçilmiş olsun. $P^* = \{z;\ |z_k - z_k^1| < r/2\}$ vazedelim. Açık olarak $z^0 \varepsilon P^*$ ve $P^* \subset P$. Binaenaleyh $\bar{P}^* \subset \bar{P} \subset G$. Nihayet,

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z^1)^\nu, \quad f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z^1)^\nu$$

f_1 ve f_2 nin z^1 etrafında P^* daki kuvvet serileri olsun. f_1 ve f_2 $z^1 \varepsilon B_0$ in bir cıvarında çakıştıklarından, $\forall\ \nu$ için $a_\nu = b_\nu$. (Bu katsayılar fonksyon tarafından birtek olarak belirtilmiştir (teorem 16.1.7.5).

Binaenaleyh $f_1|P^* = f_2|P^*$ ve dolayısıyla $P^* \subset B_0$. Neticede $z^0 \varepsilon B_0$. Bu ise mümkün değildir.

Bu teorem analitik temditin temelidir.

Teorem 16.1.8.2. (Netice). f bir G bölgesinde holomorf, ve G ye ait bir noktanın bir cıvarında $f \equiv 0$ ise, bu taktirde bütün G de, $f \equiv 0$.

16.1.9. Holomorf Tasvirler. 16.1.1 de holomorf fonksyonları, $\bar{\partial} w = 0$ Cauchy-Riemann denklemlerinin çözümleri olarak tarif ettik. Aynı tarif, C^n de kompleks fonksyonlara teşmil edilebilir.

Farzedelim ki $B \subset C^n$ açık bir cümledir ve $w \varepsilon C^1$, B de kompleks bir fonksyondur. C^n ile R^{2n} yi özdeş kabul edebiliriz. § 16.1.1 de olduğu gibi dw, dz_k ve $d\bar{z}_k$ diferansyellerinin bir lineer kombinezonu şeklinde ifade edilebilir.

$$dw = \Sigma_1^n \frac{\partial w}{\partial z_k} dz_k + \Sigma_1^n \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k. \qquad (16.1.9.8)$$

Burada

$$\frac{\partial w}{\partial z_k} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} - i \frac{\partial w}{\partial y_k} \right)$$

ve

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} + i \frac{\partial w}{\partial y_k} \right), \quad k = 1,\dots,n,$$

notasyonları kullanılmıştır. Üstelik,

$$\partial w = \Sigma_1^n \frac{\partial w}{\partial z_k} dz_k, \quad \bar{\partial} w = \Sigma_1^n \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k$$

notasyonlarını kullanırsak, (16.1.9.1)

$$dw = \partial w + \bar{\partial} w \qquad (16.1.9.2)$$

şeklinde yazılabilir. § 16.1.3 te olduğu gibi dz_k diferansyellerinin lineer kom-

binezonu olan diferansyel formlara (1,0) tipindendir, $d\bar{z}_k$ diferansyellerinin lineer kombinezonu olan diferansyel formlara ise (0,1) tipindendir denir. Bu ifadelere göre, (17.1.9.2) diferansyelinde ∂w $(\bar{\partial} w)$ komponenti (1,0) ((0,1)) tipindendir.

TARİF 16. $B \subset C^n$ açık bir bölge olsun. B üzerinde tarifli $w \in C^1$ kompleks fonksyonu B de holomorf (veya analitik) tir denir şayet dw, (1,0) tipinden ise, yani $\bar{\partial} u = 0$ (Cauchy-Riemann denklemleri) ise. B de holomorf bütün kompleks fonksyonlar A(B) ile gösterilecektir.

∂ ve $\bar{\partial}$ diferansyel operatörleri açıkça lineerdir ve üstelik çarpım kaidesini sağlarlar (§ 17.1.3). Dolayısıyla A(B) bir halkadır.

Diğer taraftan,

TARİF 17. $B \subset C^n$ bir açık cümle, $w_1,\ldots,w_m$ B üzerinde kompleks fonksyonlar olsun. C^m de değer alan

$$w = (w_1,\ldots,w_m) : B \to C^m$$

tasvirine, şayet $w_1,\ldots,w_m$ B de holomorf iseler, holomorfik tasvir denir.

Şimdi, $w = (w_1,\ldots,w_m) : B \to C^m$ holomorfik bir tasvir olsun. $\Omega \subset C^m$, w nin değer bölgesini ihtiva eden bir açık bölge ve $v \in C^1$, Ω üzerinde bir kompleks fonksyon olsun. Aşağıdaki fonksyonu gözönüne alalım.

$$w^*v : z \to v(w(z)),\ z \in B.$$

Görülüyor ki $w^*v \in C^1$ ve

$$d(w^*v) = \Sigma_1^m \frac{\partial v}{\partial w_j} dw_j + \Sigma_1^m \frac{\partial v}{\partial \bar{w}_j} d\bar{w}_j .$$

Şimdi, B de dw_j (1,0) tipinden, $d\bar{w}_j$ ise (0,1) tipinden olduğundan,

$$\partial(w^*v) = \Sigma_1^m \frac{\partial v}{\partial w_j} dw_j , \quad \bar{\partial}(w^*v) = \Sigma_1^m \frac{\partial v}{\partial \bar{w}_j} d\bar{w}_j .$$

Dolayısıyla, w^*v analitiktir (holomorf) şayet v holomorf ise.

Bütün bunlar aşağıdaki teoremde toplanabilir.

Teorem 16.1.9.1. $d = \partial + \bar{\partial}$ dekompozisyonu (ayrılış) ve holomorf fonksyon kavramı holomorf tasvirler altında invarienttir.

Teorem 16.1.9.2. (İmplisit Fonksyon Teoremi). $f_j(w,z) = f_j(w_1,\ldots,w_m,z_1,\ldots,z_n)$ $C^m \times C^n$ de, bir (w^0,z^0) noktasının cıvarında holomorf olsun. Farzedelim ki $f_j(w^0,z^0) = 0$, $j = 1,\ldots,m$ ve

$$\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial w_k}\right)_{(w^0,z^0)} \neq 0.$$

Bu taktirde, $f_j(w,z) = 0$ denklemlerinin, z^0 cıvarında holomorf bir ve birtek $w(z)$ çözümü vardır $\ni w(z^0) = w^0$.

İspat. $f_j(w,z) = 0$ denklemlerine $2m$ reel bilinmeyenli, $\mathrm{Re}\, w_k$, $\mathrm{Im}\, w_k$, $2m$ reel denklemler: $\mathrm{Re} f_j(w,z) = 0$, $\mathrm{Im} f_j(w,z) = 0$ gözü ile bakılabilir. Bilinen İmplisit fonksyon teoremini tatbik edebilmemiz için ispat etmeliyiz ki, (w^0,z^0) da, $df_j = 0$ ve $dz_l = 0$, $j = 1,\ldots,m$; $l = 1,\ldots,n \Rightarrow dw_k = 0$, $k = 1,\ldots,m$. Fakat bu aşikardır, çünki

$$\Sigma_1^m \frac{\partial f_j}{\partial w_k} dw_k = 0 \qquad j = 1,\ldots,m$$

denklem sisteminin determinantı 0 değildir. Binaenaleyh, $f_j(w,z) = 0$ denklemleri C^1 sınıfına ait, $w(z^0) = w^0$ şartını sağlayan z^0 ın bir cıvarında birtek olarak w_k fonksyonlarını tarif eder. Bu fonksyonların holomorf olduklarını görebilmek için

$$\Sigma_1^m \frac{\partial f_j}{\partial w_k} dw_k + \Sigma_1^n \frac{\partial f_j}{\partial z_l} dz_l = df_j = 0$$

gözönünde bulundurmak kâfidir. Bu sistem dw_k ya göre çözülürse görülür ki dw_k, $dz_1,\ldots,dz_n$ lerin bir lineer kombinezonudur. Yani w_k holomorftur.

TARİF 18. $B_1, B_2 \subset C^n$ iki açık cümle olsun. $g : B_1 \to B_2$ tasvirine biholomorfiktir denir şayet g bijektif ve g, g^{-1} holomorfik iseler.

Teorem 16.1.9.2 de $m = n$ farzedelim. $w(z)$ çözümünü

$$w_k = w_k(z_1,\ldots,z_n),\ k = 1,\ldots,n,$$

şeklinde yazar ve

$$w_k = u_k + iv_k,\ z_k = x_k + iy_k$$

vazedersek

$$J = \frac{\partial(u_1,\ldots,u_n;\ v_1,\ldots,v_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n;\ y_1,\ldots,y_n)} = \left| \frac{\partial(w_1,\ldots,w_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)} \right|^2 .$$

Görülüyor ki $J \geq 0$, yani bir holomorfik tasvir yönü muhafaza eder. Şayet $J \neq 0$, $w = (w_1,\ldots,w_n)$ tasviri lokal olarak 1–1 dir, bir w^{-1} inversi vardır ve w^{-1} holomorfiktir. Binaenaleyh, bir holomorfik tasvir, şayet $J \neq 0$ ise holomorf fonksyonları holomorf fonksyonlara dönüştürür.

Öte yandan, bir holomorfik tasvir altında, sınırlı bir bölge C^n nin tamamına tasvir edilebilir. Açıları muhafaza gibi basit bir geometrik karakterizasyonu yoktur, Riemann tasvir teoremi mevcut değildir. Daire gibi kanonik bölgeler yoktur. Keyfi bölgeler düşünmek zorunluğu vardır.

16.1.10. **∂ ve $\bar{\partial}$ operatörlerinin tariflerinin keyfi diferansyel formlara teşmili.** İlk kavramlar için § 13.2.4 e müracaat edilebilir.

Bir f diferansyel formuna (p,q) tipindendir denir şayet aşağıdaki şekilde yazılabilirse.

$$f = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} f_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Burada,

$$I = (i_1,\ldots,i_p), \quad J = (j_1,\ldots,j_q)$$

çok-indislerdir, yani 1 ile n arasında indis dizileridir. Ve

$$dz^I \wedge dz^J = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Herbir diferansyel form, bir ve birtek şekilde (p,q), $0 \leq p,q \leq n$, tipinde formların toplamı olarak yazılabilir.

f diferansyel formu (p,q) tipinde ise, dış diferansyel

$$df = \Sigma\, df_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

$$df = \partial f + \bar{\partial} f$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\partial f = \sum_{I,J} \partial f_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J, \quad \partial f_{I,J} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial z_\nu} dz_\nu$$

$$\bar{\partial} f = \sum_{I,J} \bar{\partial} f_{I,J} \wedge dz \wedge d\bar{z}, \quad \bar{\partial} f_{I,J} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu$$

sırasıyla $(p+1, q)$ ve $(p,q+1)$ tipindendirler.

Diğer taraftan, $d^2 f = (dod) f = (\partial + \bar{\partial}) \circ (\partial + \bar{\partial}) f = \partial^2 f + \partial\bar{\partial} f + \bar{\partial}\partial f + \bar{\partial}^2 f \Rightarrow$

$$0 = d^2 f = \partial^2 f + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) f + \bar{\partial}^2 f,$$

ve bütün terimler farklı tipte olduklarından: $\partial^2 f, (p+2,q)$; $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial$, $(p+1,q+1)$; $\bar{\partial}^2 f$, $(p,q+2)$, tipindendirler ve birtek şekilde yazılabileceklerinden,

$$\partial^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0.$$

Dolayısıyla, f $(0,1)$ tipinden ise,

$$\bar{\partial} w = f, \tag{16.1.10.1}$$

denkleminin, $\bar{\partial} f = 0$ şartı sağlanmadıkça, bir w çözümü olamaz. Bu da gösteriyor ki, sırf w fonksyonları için (17.1.10.1) Cauchy-Riemann denklemleri ile ilgilenmek istenilse dahi, $\bar{\partial}$ operatörünü, (0,1) ve dolayısıyla (0,2) tipinden formlar için de incelemek gerekecektir.

Şimdi, $B \subset C^n$ açık bir cümle ve w: $B \to C^m$ holomorfik bir tasvir olsun. Şayet

$$f = \Sigma f_{I,J}\, dw^I \wedge d\bar{w}^J$$

formu C^m de w nin değer bölgesinin açık bir civarında tarifli ise, B de bir w^*f formu tarif edilebilir $\ni$

$$w^*f = \Sigma f_{I,J}(w(z))\, dw^I \wedge d\bar{w}^J.$$

Burada, w_k B de holomorf olduğundan, dw_k ve $d\bar{w}_k$, $k = 1,\ldots,m$, B de sırasıyla (1,0) ve (0,1) tipinde formlardır. Binaenaleyh, w^*f formu (p,q) tipindedir şayet $f,(p,q)$ tipinde ise. Üstelik

$$d(w^*f) = w^*(df)$$

olduğundan,

$$\partial(w^*f) = w^*(\partial f), \quad \bar{\partial}(w^*f) = w^*(\bar{\partial} f),$$

ve nihayet,

1. $w^*(f+g) = w^*f + w^*g$
2. $w^*(f \wedge g) = w^*f \wedge w^*g$.

w holomorf olduğundan, bir holomorf fonksyonun holomorf fonksyonu, yani iki holomorf fonksyonun kompozisyonu, yine holomorf olduğundan, w^*, holomorf formları holomorf formlara dönüştürür.

Hatırlatalım ki,

f ye holomorf denir, şayet:

1. f, $(p,0)$ tipinden, ve
2. $\bar{\partial} f = 0$ ise.

f ye antiholomorf denir, şayet:

1. f, $(0,q)$ tipinden, ve
2. $\partial f = 0$ ise.

Açık olarak, f antiholomorftur yalnız ve yalnız $\bar{f}$ holomorf ise.

16.1.11. **De Rham veya d-Kohomolojisi.** $B \subset C^n$ açık bir cümle, ve $f_{I,J}$ B de tarifli fonksyonlar olsun. B üzerinde tarifli fonksyonlarla çarpıma nazaran kapalı, B üzerinde diferansyel formların $\Omega = \Omega^{(p,q)}$ (B) koleksyonu bir modül teşkil eder. Bir başka deyimle, B de tarifli fonksyonlar üzerinde bir vektör uzaydır.

Dış çarpım, çarpım olarak ithal edilirse Ω bir halkadır:

$$(f_{i_1,\ldots,i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}) \wedge (g_{j_1\ldots j_s} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}) = \varepsilon f_{i_1\ldots i_r} g_{j_1\ldots j_s} dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_{r+s}}, \quad \varepsilon = -1,0,1.$$

Şimdi Ω da bir d operatörünü tarif ediyoruz:

$$d : \Omega \to \Omega,$$

d tasviri lineerdir ve $d^2 = 0$. Üstelik aşağıdaki hassaları haizdir, şöyleki:

1. 0-formlar, yani B de tarifli fonksyonlar için

$$d(f_{I,J}) = df_{I,J} \text{ (tam diferansyel)}$$

2. $$d\Big(\sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} f_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J\Big) = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} df_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Teorem 17.1.11.1. (i) $d(f\wedge g) = df\wedge g+(-1)^{p+q}f\wedge dg$. (ii) $d^2f=0, \forall f\in\Omega$

İspat. Notasyonları basitleştirmek için

$$f_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J = a\beta^r$$

vazedelim. Diğer taraftan sadece monomları ele almak kâfi gelecektir.

$$f = a\beta^r, \quad g = b\beta^s$$

olsun. Buradan

$$df = da\wedge\beta^r, \quad dg = db\wedge\beta^s.$$

Diğer taraftan tariflerden dolayı,

$$f\wedge g = ab.\beta^r \wedge \beta^s,$$
$$d(f\wedge g) = d(ab) \wedge \beta^r \wedge \beta^s,$$
$$d(ab) = bda + adb.$$

Bu değer, üstündeki denklemde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} d(f\wedge g) &= bda\wedge\beta^r\wedge\beta^s + adb\wedge\beta^r\wedge\beta^s \\ &= bdf\wedge\beta^s + a(-1)^r\beta^r\wedge db\wedge\beta^s \\ &= df\wedge g + (-1)^r f\wedge dg, \end{aligned}$$

çünki $db\wedge\beta^r = (-1)^r\beta^r\wedge db$.

Gelelim (ii) nin ispatına. Önce f 0-formu ele alalım. Kolaylık olmak üzere $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ farzedelim.

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

$$d^2f = \sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\wedge dx_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j} dx_j \wedge dx_k.$$

$f\in C^2$ farzedilirse, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}$ yazılabilir. Üstelik $dx_j\wedge dx_k = -dx_k\wedge dx_j$ den dolayı $d^2f = 0$.

Şimdi $f = a\beta^r$ olsun. $df = (da)\wedge\beta^r\cdot d^2f = d^2a\wedge\beta^r + (-1)^r da\wedge d\beta^r$.

Fakat $d^2a = 0$ ve $d\beta^r = 0$.

O halde

$$d^2f = 0.$$

$f\in\Omega$ formuna kapalıdır denir şayet $df = 0$ ise.

$f\in\Omega$ formuna tamdır denir şayet bir $g\in\Omega$ için $f = dg$ ise.

Açık olarak kapalı formlar, Ω nın bir $Z(\Omega)$ altgrubunu teşkil ederler. Tam formlar ise $Z(\Omega)$ nın bir $B(\Omega)$ altgrubunu teşkil ederler, çünkü $d^2 = 0$.

Ker $d = Z(\Omega)$ nın elemanlarına kodevir, Im $d = B(\Omega)$ nın elemanlarına kosınır denir. Dolayısıyla, d-kohomoloji grubu: $H(\Omega) = Z(\Omega)/B(\Omega)$.

Teorem 16.1.11.2. Kapalı formlar Ω nın bir althalkasını teşkil ederler öyleki, tam formlar iki-yanlı idealleri teşkil ederler. Yani,

(i) kapalı form $\wedge$ kapalı form = kapalı form.

(ii) kapalı form $\wedge$ tam form = tam form.

(iii) tam form $\wedge$ kapalı form = tam form.

İspat. f ve g birer monom (birtek terim) farzedilebilir.

(i) $df = dg = 0 \Rightarrow d(f\wedge g) = df\wedge g+(-1)^{p+q}f\wedge dg = 0.$

(ii) $g = dh,\ df = 0 \Rightarrow d(f\wedge h) = df\wedge h+(-1)^{p+q}f\wedge dh = (-1)^{p+q}f\wedge g.$

Yani,

$$f\wedge g = d(-1)^{p+q}f\wedge h.$$

(iii) aynı şefiilde ispat edilir.

∂-kapalı, $\bar\partial$-kapalı, ∂-tam, $\bar\partial$-tam formları benzer şekilde tarif edilir.

Bu formlarla ilgili kohomoloji grupları:

∂-kapalı formlar/∂-tam formlar.

$\bar\partial$-kapalı formlar/$\bar\partial$-tam formlar.

Diferansyel formların katsayıları B de holomorf fonksyonlar ise, $\bar\partial$ trivial (yani sıfır) olup $d = \partial$. Bu taktirde kohomoloji grubu (veya kohomoloji halkası):

kapalı holomorfik formlar/tam holomorfik formlar.

16.1.12. **Kompleks Manifoldlar üzerinde Diferansyel Formlar.** Yukarda $B\subset C^n$ için bütün söylediklerimiz X n-boyutlu kompleks manifolduna (tarifi ilerde verilmiştir) teşmil edilebilir.

$z_1,\ldots,z_n$ bir $U\subset X$ açık cümlesinin koordinatları olsun (U, C^n de bir açık cümleye homeomorftur demektir). Bu taktirde $x\in U$ için bir l-form

$$f = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_l\le 2n} f_{i_1}\ldots f_{i_l}(x)\, dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_l}.$$

şeklinde tarif edilir. $f_{i_1\ldots i_l}$ fonksyonları U üzerinde tarifli kompleks fonksyonlardır.

f, $x_0\in U$ da k-defa diferansyellenebilir diyoruz, şayet bütün $f_{i_1\ldots i_l}$ fonksyonları x_0 da k-defa diferansyellenebilirse.

Bu tarif, koordinatların seçimine bağlı değildir.

f, X üzerinde k–defa diferansyellenebilir denir, şayet f, X in her noktasında k–defa diferansyellenebilirse.

Daha doğrusu, $U_\iota, \{\iota\} = I$, X in açık bir örtüsü olsun, öyleki herbir U_ι bir $B \subset C^n$ bölgesine difeomorfiktir, yani homeomorftur ve aynı zamanda k–diferansyellenebilir. Dolayısıyla X üzerinde bir diferansyel form, herbir U_ι için B de bir diferansyel form karşılık tutar, öyleki $U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2} \neq \varnothing$ ise bu arakesitin resimleri difeomorfik olup bahis konusu tasvirlerde k–defa diferansyellenebilir form k–defa diferansyellenebilir forma dönüşür.

Keyfi–defa diferansyellenebilir l–formların tamamını $\Omega^{(l)} = \Omega^{(l)}(X)$ ile göstereceğiz. (p,q) tipinde keyfi-defa diferansyellenebilir formların tamamı ise $\Omega^{(p,q)}$ ile gösterilebilir.

X üzerinde keyfi-defa diferansyellenebilir f fonksyonları için, yani 0–formlar için (ki bunlar $\Omega^{(0)}$ ın elemanlarıdır) $df \in \Omega^{(1)}$ bir total diferansyeldir.

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu.$$

Diğer taraftan, manifoldlar üzerinde d diferansyel operatörü

$$d : \Omega^{(l)} \to \Omega^{(l+1)}$$

şu hassaları haizdir:

1. d C-lineerdir.
2. $d(f) = df$, $f \in \Omega^{(0)}$.
3. $d(f|U) = (df)|U$, $f \in \Omega^{(l)}$.
4. $f \in \Omega^{(r)}$, $g \in \Omega^{(s)} \Rightarrow d(f \wedge g) = df \wedge g + (-1)^r f \wedge dg$.
5. $f|U = \sum_{1 \leq 1_1 < \ldots < 1_l \leq 2n} f_{1_1 \ldots 1_l} \; dz_{1_1} \wedge \ldots \wedge dz_{1_l}$

   $df|U = \sum_{1 \leq 1_1 < \ldots < 1_l \leq 2n} df_{1_1 \ldots 1_l} \wedge dz_{1_1} \wedge \ldots \wedge dz_{1_l}$
6. $d \circ d = d^2 = 0$.
7. d reel bir operatördür. Yani $\overline{df} = d\overline{f}$. Özel olarak

   $$df = d(Re\, f) + i d(Im\, f).$$

16.1.13. **Poincaré Lemması.** Bu lemmaya göre, uygun bir bölgede, 0-form dan farklı her kapalı form tamdır. İspat etmeden önce bazı tarifler vereceğiz.

$B \subset R^n$ bir açık cümle olsun. B de tarifli

$$f = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} f_{i_1 \ldots i_r} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}, \quad 0 \leq r \leq n,$$

diferansyel formunu gözönüne alalım.

$f_{i_1 \ldots i_r} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ monomu için r-dereceden veya r-boyutludur diyoruz şayet derecesi en fazla r olan monomların toplamı ise.

Pür r–boyutludur diyoruz şayet sırf r–dereceden monomların toplamı ise. Bu taktirde görülür ki: $f \wedge = (-1)^{\deg f \deg g} g \wedge f$.

Hatırlatalım ki, B de tarifli herhangibir form birtek şekilde, pür r–boyutlu formların toplamı olarak yazılabilir, $0 \leq r \leq n$.

Şimdi Poincaré lemmasının ispatına yardımcı olan şu lemmayı ispat edelim.

Lemma. $P = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in R^n; \; |x_\nu| < R_\nu \leq \infty \}$, i sabit ve $j \neq i$, $i,j = 1,2,\ldots, n$ olsun. Şayet $f \in C^\infty(P)$ ise, bu taktirde bir $g \in C^\infty(P)$ fonksyonu vardır öyleki $f = \partial g / \partial x_i$. Ve $\partial f / \partial x_j = 0$ ise, bu taktirde $\partial g / \partial x_j = 0$.

İspat. g aşağıdaki gibi tarif edilsin.

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^{x_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \, dt.$$

Teorem 2.3.1.10 dan dolayı,

$$\partial g / \partial x_i = f.$$

Teorem 2.9.2.1 den dolayı da

$$\partial g / \partial x_j = \int_0^{x_i} (\partial f / \partial x_j) \, dt.$$

Binaenaleyh,

$$\partial f / \partial x_j = 0 \Rightarrow \partial g / \partial x_j = 0.$$

Poincaré Lemması. $P \subset R^n$, ve f P de tarifli bir pür r–boyutlu form, $r > 0$, olsun. Şayet $df = 0$ ise, bu taktirde, bir g formu vardır, öyleki $f = dg$.

İspat. Farzedelim ki, $f = \Sigma f_{i_1 \ldots i_r} \, dx_{i_1} \ldots dx_{i_r}$ formu $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \ldots, dx_n$ diferansyellerini bulunduran hiçbir terim ihtiva etmiyor. Şimdi k üzerinde tüme varım metodunu kullanacağız. $k = 1$ için f formunda $dx_2, \ldots, dx_n$ diferansyellerini bulunduran hiçbir terim olmadığına göre, $f = f_1 dx_1$ şeklindedir. O halde $df = 0$ demek, $df_1 \wedge dx_1 = 0$ demektir. Binaenaleyh

$$\partial f_1 / \partial x_j = 0, \; j \geq 2.$$

Lemmadan dolayı, $\exists g_1 \ni \partial f_1 / \partial x_j = 0, \Rightarrow \dfrac{\partial g_1}{\partial x_j} = 0 \; j \geq 2$. Ve

$$f_1 = \partial g_1 / \partial x_1.$$

Dolayısıyla,

$$f = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1.$$

Binaenaleyh, $dg_1 = \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \sum_{j=2}^{n} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_j} dx_j = \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1$ olduğundan $g = g_1$ alındığı takdirde, $dg = (\partial g_1 / \partial x_1) \, dx_1$. Ve lemma $k = 1$ için ispatlanmıştır.

Şimdi lemmayı $k-1$ için doğru kabul edelim. f bir pür r–boyutlu form olsun öyleki bu formda, $dx_{k+1},\dots,dx_n$ diferansyellerini bulunduran terim yoktur. Dolayısıyla, dx_k lı terimleri ayırmak suretiyle $f=(-1)^{r-1}(dx_k\wedge g)+h$ yazabiliriz. Burada, g ve h, sırasıyla, $r-1$ ve r boyutlu pür diferansyel formlar olup her ikisi de dx_j, $j\geq k$, li terimler ihtiva etmemektedirler. Bu taktirde

$$0=df=(-1)^r(dx_k\wedge dg)+dh.$$

Mademki h da $dx_k,dx_{k+1},\dots,dx_n$ li terimler yoktur, dh, sadece, ya dx_j, $j\leq k$ li terimler veya $dx_1,\dots,dx_{k-1}$, $dx_{k+1},\dots,dx_n$ li terimler ihtiva etmektedir. Dolayısıyla, dh da aynı zamanda dx_k ve dx_j, $j>k$, nin bulunduğu terim yoktur. Binaenaleyh, üstteki denklemden dh hesaplanırsa görülür ki, dg, dx_j, $j>k$, li hiçbir terim ihtiva etmemektedir. Bu demektir ki, g nin katsayıları $x_{k+1},\dots,x_n$ ye tâbi değildir.

Şimdi lemmanın yardımı ile g yi şu şekilde tarif ediyoruz:

g de herbir $a(x_1,\dots,x_k)$ katsayısı

$$\tilde{a}(x_1,\dots,x_k)=\int_0^{x_k}a(x_1,\dots,x_{k-1},t)\,dt$$

ile değiştirmek suretiyle elde edilen formdur.

Görülüyor ki $\tilde{g}$ de herbir $\tilde{a}(x_1,\dots,x_k)$ katsayısının x_k ya nazaran türevi g nin değiştirilen katsayısını verir. Dolayısıyla, $d\tilde{g}$ ifadesinde dx_k yı ihtiva eden terimler biraraya getirilirse,

$$d\tilde{g}=(dx_k\wedge g)+\{dx_j,\ j<k,\ \text{yi ihtiva eden terimler.}\}$$

Binaenaleyh, $f-(-1)^{r-1}d\tilde{g}$, $dx_k,dx_{k+1},\dots,dx_n$ yi ihtiva etmiyor, ve bir pür r–formdur. Fakat

$$d(f-(-1)^{r-1}d\tilde{g})=df=0.$$

Tüme varım hipotezinden dolayı, $\exists c,\ni$

$$f-(-1)^{r-1}d\tilde{g}=dc.$$

Buradan

$$f=(-1)^{r-1}d\tilde{g}+dc=d((-1)^{r-1}\tilde{g}+c).$$

Aynı metodla, harfi harfine şu lemma da ispat edilebilir.

Poincare Lemması*. $P\subset C^n$ bir polidisk ve f P de tarifli pür r–boyutlu holomorfik bir diferansyel form, $r>0$, olsun. Şayet $df=0$ ise, bu taktirde bir g holomorfik form vardır öyleki $f=dg$.

Nihayet aynı lemma, (p,q) tipindeki formlar için şu şekilde ifade edilebilir.

Poincare Lemması.** f P de tarifli bir (p,q)–formu, $q\geq 1$, olsun. Şayet $\bar{\partial}f=0$ ise bu taktirde $\exists g,(p,q-1)$–formu öyleki $f=\partial g$.

2. Analitik Temdit ve Holomorfi Bölgeleri

16.2.1. Reinhardt Bölgelerinde Seriye Açılımlar.

TARİF 19. $B_1\subset B_2\subset C^n$ açık cümeleler olsun. Şayet B_1 de holomorf bir f fonksyonu, B_2 de holomorf bir F fonksyonunu intac ediyorsa öyleki $F|B_1=f$, bu taktirde diyoruz ki B_1 ve B_2 Hartogs fevkalade hadisesini meydana getiriyorlar.

Hemen söyleyelim ki böyle bir hadise, $n=1$ halinde vuku bulmamaktadır.

Misal. $0<r'_k<r''_k$, $k=1,\dots,n$, iki reel sayı olsun. $r=(r_1,\dots,r_n)\varepsilon V$ yi o şekilde seçelim ki, $r'_k<r_k<r''_k$, $k=1,\dots,n$. Bu taktirde $T_r=\{z;|z_k|=r_k,\ k=1,\dots,n\}$ n–boyutlu tordur. Diğer taraftan,

$$H=\{z;\ r'_k<|z_k|<r''_k,\ \forall k\}$$
$$P_{r'}=\{z;|z_k|<r'_k,\ \forall k\}$$
$$P_{r''}=\{z;|z_k|<r''_k,\ \forall k\}$$

tarif edilmiş olsun.

Açık olarak H, $P_{r'}$, $P_{r''}$ Reinhardt bölgeleridir.

Şimdi f, H da holomorf olsun. Bu taktirde bütün $r\ \varepsilon\ \tau(H)$ için $C(f|T_r)$, $P_r=\{z;\ |z_k|<r_k,\ \forall k\}$ de holomorf bir fonksyondur. Özellikle $P_{r'}$ de holomorftur. Binaenaleyh f, $P_{r''}$ de holomorftur. Demek ki H ve $P_{r''}$ Hartogs fevkalade hadisesini sergilemektedir.

Teorem 16.2.1.1. $G\subset C^n$ has bir Reinhardt bölgesi ve f G de holomorf bir fonksyon olsun. Bu taktirde G de yakınsak bir $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ kuvvet serisi vardır $\ni z\ \varepsilon\ G$ için $f=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$.

İspat. $z^0\ \varepsilon\ G$ olsun. Bu taktirde $\exists\ z^1\ \varepsilon\ G\ni |z_k^0|<|z_k^1|$, $k=1,\dots,n$. Dolayısıyla $z^0\ \varepsilon\ P_{z^1}$, $z\ \varepsilon\ P_{z^1}$ için $C(f|T_{z^1})=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ yazabiliriz. Burada a_ν ler z^1 e tâbi değildirler. z^0 keyfi olduğundan f nin $z=0$ etrafındaki serisi bütün G de yakınsaktır. Diğer taraftan bu seri $\bigcup_{z^0\varepsilon G}P_{z_1}$ de bir g holomorf fonksyonunu tarif eder, $\ni z=0$ cıvarında $f=g$. Özdeşlik teoreminden dolayı G üzerinde $f=g$.

TARİF 20. $G\subset C^n$ has bir Reinhardt bölgesi olsun. Bu taktirde $\hat{G}=\bigcup_{0\neq z\varepsilon G}P_z$ ye G nin tam kabuğu denir.

$\hat{G}$ nin hassaları:

1. $\hat{G}$ açıktır.
2. $G \subset \hat{G}$: Gerçekten, $z^0 \varepsilon G \Rightarrow 0 \neq z^1 \varepsilon G \ni z^0 \varepsilon P_{z^1} \subset \hat{G}$.
3. $\hat{G}$ bir Reinhardt bölgesidir: $z^0 \varepsilon \hat{G}$, $0 \neq z^1 \varepsilon G \ni z^0 \varepsilon P_{z^1}$ olsun. Bu taktirde, $T_{z^0} \subset P_{z^1} \subset \hat{G}$.
4. $\hat{G}$ tamdır. $0 \neq z^0 \varepsilon \hat{G}$, $0 \neq z^1 \varepsilon G \ni z^0 \varepsilon P_{z^1}$ olsun. Bu taktirde $P_{z^0} \subset P_{z^1} \subset \hat{G}$.
5. $\hat{G}$ minimaldir: $G \subset G_1$, G_1 bir tam Reinhardt bölgesi olsun. $0 \neq z \varepsilon G$ ise bu taktirde, $P_z \subset G_1$. Dolayısıyla $\hat{G} \subset G_1$. Binaenaleyh $\hat{G}$, G yi ihtiva eden en küçük tam bölgedir.

Aşağıdaki teorem, Hartogs fevkalade hadisesi bakımından çok önemlidir.

Teorem 16.2.1.2. $G \subset C^n$ bir has Reinhardt bölgesi ve f, G de holomorf bir fonksyon olsun. Bu taktirde $\hat{G}$ de birtek holomorf F fonksyonu vardır öyleki $F|G = f$.

İspat. Teorem diyor ki, f $\hat{G}$ ye analitik olarak temdit edilebilir.

Teorem 17.2.1.1 den dolayı G de

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu .$$

Bu seri $\hat{G}$ üzerinde de yakınsaktır, hatta bir F holomorf fonksyonuna yakınsaktır. Açık olarak $F|G = f$ ve temditin birtek olduğu özdeşlik teoreminin bir neticesidir.

$n = 2$ için $G \neq \hat{G}$ farklılığı gösteren bir misal veriyoruz.

$P = \{z \varepsilon C^2;\ |z| < 1\}$ merkezi başlangıç noktasında birim polidisk ve $D = \{z \varepsilon C^2;\ q_1 \leq |z_1| < 1,\ |z_2| \leq q,\ 0 < q_1, q < 1\}$ olsun. Bu taktirde $H = P - D$ bir has Reinhardt bölgesi ve $\hat{H} = \bigcup_{0 \neq z \varepsilon H} P_z = P$. (Farkı, somut bir şekilde görebilmek için, V deki projeksyona müracaat edilebilir).

(P,H) çiftine Euclid Hartogs şekli denir.

Bu misal 1 değişkenli kompleks fonksyonlarla farkı açıkça ortaya koymaktadır, şöyle ki C de böyle bir Hartogs şekli yoktur. Biliyoruz ki C de Reinhardt bölgeleri açık daireler ve halkalardır. Binaenaleyh C de has bir Reinhardt bölgesi bir açık dairedir, dolayısıyla bir tam Reinhardt bölgesidir. Binaenaleyh $G, \hat{G}$ nin hakiki bir altcümlesi değildir. Yani $\hat{G} = G$.

16.2.2. **Analitik Temdit.** Önceki paragrafta Reinhardt bölgelerine temditi gördük. Burada ise holomorf fonksyonların analitik temditlerinin sistematik bir incelenmesini yapacağız.

TARİF 21. **(Genel Hartogs şekli).** $P = \{z \varepsilon C^n; |z| < 1\}$ birim polidisk, ve $0 < q_1, \ldots, q_n < 1$ reel sayılar olsun. Bu taktirde, $2 \leq \mu < n$ indisleri için

$$D_\mu = \{z \varepsilon P;\ |z_1| \leq q_1 \text{ ve } q_\mu \leq |z_\mu| < 1\},\ D = \bigcup_{\mu=2}^{n} D_\mu ,$$

$$H = P - D = \bigcap_{\mu=2}^{n} (P - D_\mu)$$

tarif edilmiş olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} H &= \{z \varepsilon P;\ q_1 < |z_1| \text{ veya } |z_\mu| < q_\mu\} \\ &= \{z \varepsilon P;\ q_1 < |z_1|\} \cup \{z \varepsilon P;\ |z_\mu| < q_\mu\}. \end{aligned}$$

Yukarda olduğu gibi (P,H) çiftine C^n de Euclid Hartogs şekli diyoruz. Burada H has bir Reinhardt bölgesi olup $\hat{H} = P$ tam kabuğudur.

Şimdi $(P,H) \subset C^n$ bir Euclid Hartogs şekli olsun. $g = (g_1, \ldots, g_n)$: $P \to C^n$ bir biholomorfik tasvir, ve $\tilde{P} = g(P)$, $\tilde{H} = g(H)$ olsun. Bu taktirde $(\tilde{P}, \tilde{H})$ çiftine genel Hartogs şekli denir.

Misal. (a) $n = 1$ ise, H, C de birim dairedir: $H = \{z \varepsilon P;\ |z_1| < 1\}$. Burada $P = \{z \varepsilon C;\ |z| < 1\}$, $z = z_1$. Diğer taraftan $\hat{H} = P$. Yani birim dairesi kendi kendisinin tam kabuğudur.

(b) $n = 2$. Bu hali biraz önce görmüştük.

Teorem 16.2.2.1. $(\tilde{P}, \tilde{H}) \subset C^n$ bir genel Hartogs şekli ve f, $\tilde{H}$ da holomorf olsun. Bu taktirde $\tilde{P}$ de birtek F holomorf fonksyonu vardır $\ni F|\tilde{H} = f$.

İspat. $(\tilde{P}, \tilde{H}) = (g(P), g(H))$, g: $P \to C^n$ biholomorfik olsun. Bu taktirde $f \circ g$, H da holomorftur. Teorem 12.2.1.2 den dolayı, P de birtek F^* holomorf fonksyonu vardır $\ni F^*|H = f \circ g$. $F = F^* \circ g^{-1}$ vazedelim. Bu taktirde, $F, \tilde{P}$ de holomorf, $F|\tilde{H} = f$. Temditin birtek oluşu, F^* ın birtek oluşunun bir neticesidir.

Teorem 16.2.2.2. (Analitik devamlılık teoremi). $B \subset C^n$ açık bir cümle, f B de holomorf bir fonksyon ve $(\tilde{P}, \tilde{H})$ bir genel Hartogs şekli $\ni \tilde{H} \subset B$ olsun. Şayet $\tilde{P} \cap B$ irtibatlı ise, f birtek olarak $B \cup \tilde{P}$ ye temdit edilebilir.

İspat. Hipotezden dolayı $f_1 = f|\tilde{H}$, $\tilde{H}$ da holomorftur. Teorem 16.2.2.1 den dolayı $\tilde{P}$ de birtek holomorf f_2 fonksyonu vardır $\ni f_1 = f_2|\tilde{H}$.

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \varepsilon B \\ f_2(z) & z \varepsilon \tilde{P} \end{cases}$$

vazedelim. $B \cap \tilde{P}$ bir bölge ve $f|\tilde{H} = f_2|\tilde{H}$ olduğundan, özdeşlik teoreminden

ötürü, F B $\cup \tilde{P}$ üzerinde holomorftur. Açık olarak $F|B = f$. Bu temditin birtek oluşu özdeşlik teoreminin bir neticesidir.

Bu teorem, diğer bütün temdit teoremleri için esastır.

Teorem 16.2.2.3. $n \geq 2$ farzedelim. $P = \{z;\ |z|<1\}$ birim polidisk, $\bar{P}_{r^0} = \{z,\ |z_k| \leq r_k^0,\ 0 \leq r_k^0 < 1,\ k = 1,\ldots,n\}$ ve $G = P - \bar{P}_{r^0}$ olsun. Bu taktirde, G üzerinde holomorf herbir f fonksyonu birtek olarak P üzerinde holomorf bir fonksyona temdit edilebilir.

İspat. Önce G nin bir bölge olduğunu gösterelim. Açık bir cümle olduğu aşikârdır. İrtibatlı olduğunu göstermemiz kâfidir. Bunun için G de farklı iki nokta alalım. $z^\lambda = (z_1^\lambda,\ldots,z_n^\lambda)$, $\lambda = 1,2$. Bu noktalardan geçen T_{z^λ} torlarını gözönüne alalım. Bu taktirde, $\tau(z^\lambda)$ noktaları V mutlak uzayında olup, ayrıca ve sırasıyla T_{z^λ} torları üzerindedir. Diğer taraftan z^λ noktaları sırasıyla T_{z^λ} üzerinde $\tau(z^\lambda)$ noktaları ile birleştirilebilir. Açık olarak $\tau(z^\lambda) \in V$ noktaları V nin eksenlerine paralel doğru parçalarıyla, ki bu doğru parçaları aynı zamanda G ye aittirler, birleştirilebilirler, (meselâ $n = 1$ için, G, birim çember ile $(0,r^0)$ çemberinin belirttiği halkadır. z^1 ve z^2 G de iki nokta ise, bu noktalardan geçen T_{z_1}, T_{z_2} torları sıra ile $(0,|z^1|)$, $(0,|z^2|)$ çemberleridir. $\tau(z^1)$, $\tau(z^2) \in G$ noktaları $V = \{|z|<r;$ pozitif reel eksen üzerinde noktalar$\}$ mutlak uzayındaki $|z^1| = r^1$, $|z^2| = r^2$ noktalarıdır. r^1 ri r^2 ye birleştiren doğru parçası aynı zamanda G ye aittir. Böylece G ye ait herhangi iki noktayı bu noktalardan geçen çember parçalarından ve bir doğru parçasından müteşekkil G ye ait bir eğri ile birleştirmek mümkündür. Dolayısıyla G bir bölgedir). Gerçekten, muhakemeyi basitleştirmek için $n = 2$ farzedelim. $\varphi_\lambda : I \to C^2$ eğrilerini şu şekilde tarif edelim:

$$\varphi_\lambda = (z_1^\lambda(t), z_2^\lambda(t)), \quad z^\lambda = (z_1^\lambda, z_2^\lambda),$$

öyleki,

$$z_k^\lambda(t) = |z_k^\lambda| + t(\max(|z_k^1|, |z_k^2|) - |z_k^\lambda|).$$

Burada $\lambda = 1,2$; $k = 1,2$. Görülüyor ki $\lambda = 1$ için φ_1 in koordinatları $z_1^1(t) = |z_1^1| + t(|z_1^2| - |z_1^1|)$, $z_2^1(t) = |z_2^1|$, φ_2 nin koordinatları ise, $z_1^2(t) = |z_1^2|$, $z_2^2(t) = |z_2^2| + t(|z_2^1| - |z_2^2|)$. Açık olarak $|z_k^\lambda(t)| \geq |z_k^\lambda| \geq r_k^0$.

Dolayısıyla $\varphi_\lambda(t) \in G$, $t \in I$, $\lambda = 1,2$. Başka bir deyim ile, $V = \{|z| = (|z_1|, |z_2|)\}$ de $\tau(P)$ birim karesi, $\tau(\bar{P}_{r^0})$, $\tau(P)$ nin içinde kapalı dikdörtken olup, φ_1, φ_2 sıra ile $|z_1|$, $|z_2|$ eksenlerine paralel ve $\tau(P) - \tau(\bar{P}_{r^0}) \subset G$ de doğru parçalarıdır. Şimdi bu doğru parçaların birleşimi, yani

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_2(2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\tau(z^1) = |z^1|$ ri $\tau(z^2) = |z^2|$ ye birleştirir. Binaenaleyh G irtibatlıdır ve dolayısıyla bölgedir. Şimdi, teorem 16.2.2.2 şartlarını sağlayan bir genel Hartogs şeklinin inşasına geçelim. $E_k = \{z_k \in C;\ |z_k| < 1\}$, $k = 1,\ldots,n$ vazedelim. E_n dairesinde bir z_n^0 noktasını seçelim $\ni r_n^0 < |z_n^0| < 1$, ve

$$Tz_n = \frac{z_n - z_n^0}{\bar{z}_n^0 z_n - 1},$$

E_n yı kendi üzerine dönüştüren sübstitüsyonu gözönüne alalım. Diğer taraftan, $g: P \to P$ biholomorf tasvirini

$$g(z_1,\ldots,z_n) = (z_1,\ldots,z_{n-1}, Tz_n)$$

şeklinde tarif edelim $\ni g(0,\ldots,0,z_n^0) = 0$, $U = U(z_n^0) \subset \{z_n \in C;\ r_n^0 < |z_n| < 1\}$ açık bir cıvar ise, bu taktirde, $E_1 \times \ldots \times E_{n-1} \times U \subset P$, ve dolayısıyla $E_1 \times \ldots \times E_{n-1} \times T(U) \subset g(P)$.

Şimdi Euclid Hartogs şeklini teşkil edelim. Bunun için $q_1,\ldots,q_n$ reel sayılarını seçelim öyleki $r_k^0 < q_k < 1$, $k = 1,\ldots,n-1$ ve $\{w_n;\ |w_n| < q_n\} \subset T(U)$. Bu taktirde

$$H = \{w \in P;\ q_1 < |w_1|\} \cup \{w \in P;\ |w_\mu| < q_\mu,\ \mu = 2,\ldots,n\}$$

g(P) de olup, (P,H) bir Euclid Hartogs şeklidir. $(\tilde{P}, \tilde{H})$ genel Hartogs şekli ise, $\tilde{P} = g^{-1}(P)$, $\tilde{H} = g^{-1}(H)$ ile tarif edilir. Burada $\tilde{H} \subset G$, ve $G \cap \tilde{P} \subset G$ irtibatlıdır. Analitik devamlılık teoreminden dolayı f, $G \cup \tilde{P}$ ye dolayısıyla P ye birtek olarak temdit edilebilir.

Bu teoremin bir neticesi olarak, aşağıdaki ilginç teoremi ispat edeceğiz.

Teorem 16.2.2.4. $n \geq 2$, $B \subset C^n$ açık bir cümle, ve $z^0 \in B$ olsun. Farzedelim ki f, $B' = B - \{z^0\}$ de holomorftur. Bu taktirde f, birtek olarak B ye analitik temdit edilebilir.

İspat. Bu teoremin ifadesine göre $n \geq 2$ ise ayrık singüler nokta yoktur.

Genelliğe halel getirmeden $z^0 = 0$ kabul edebiliriz. P, merkezi z^0 da bir polidisk olsun, $P \subset B$. $P' = P - \{z^0\}$ vazedelim. Teorem 16.2.2.3 den dolayı, P de holomorf bir F' fonksyonu vardır öyleki $F'|P' = f|P'$.

Şimdi,

$$F(z) = \begin{cases} F'(z) & z \in P \\ f(z) & z \in B' \end{cases}$$

vazedelim. Bu taktirde F, f nin B ye holomorf temditidir.

TARİF 22. $G \subset C^{n-1}$ bir bölge, $g: G \to C$ sürekli bir fonksyon olsun. Bu taktirde $\Sigma = \{z \in C \times G;\ z_1 = g(z_2,\ldots,z_n)\}$ ya $2n-2$ boyutlu reel yüzey denir. Şayet g holomorf ise Σ ya analitik yüzey denir.

Misal. $n = 2$ için $G \subset C$, $\Sigma = \{z \in C\times G;\ z_1 = g(z_2)\}$ bilinen 2–boyutlu reel yüzeydir, zira $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$, $g(z_2) = u(x_2,y_2) + iv(x_2,y_2)$ vazedilirse $x_1 = u(x_2,y_2)$, $y_1 = v(x_2,y_2)$ reel yüzeyi elde edilir.

Not. g ye Σ nin grafiği de denir.

Teorem 16.2.2.5. $G \subset C^{n-1}$, $G_1 \subset C$ bölgeler, g: $G \to C$ sürekli bir fonksyon $\ni g(G) \subset G_1$ ve $z^0 \in \Sigma$ olsun. $U = U(z^0) \subset G_1 \times G = \hat{G}$ açık bir cıvar ve f, $S = (\hat{G}-\Sigma) \cup U$ de holomorf bir fonksyon ise, bu taktirde f nin $\hat{G}$ ye birtek analitik temditi vardır.

İspat. $\hat{G}$ bir bölge olduğundan, özdeşlik teoreminden dolayı temdit birtektir. Varlığın ispatı için $G = \{z \in C^{n-1};\ |z|<1\}$, $G_1 = E_1$ (dolayısıyla $\hat{G} = P = E_1 \times G$ C^n de birim polidisk) halini incelememiz kâfidir. Üstelik $\forall\ z \in G$ ve $0 < q < 1$ sabit için $|g(z)| < q < 1$ farzedeceğiz.

1. Önce gösterelim ki $S = (P-\Sigma) \cup U$ bir bölgedir. Bunun için irtibatlı olduğunu göstermemiz kâfidir. Gerçekten ve ilk olarak $z^1, z^2 \in P-\Sigma$ olsun. Kısaca $z^\lambda = (z_1^\lambda, z_2^\lambda, \ldots, z_n^\lambda)$, $\lambda = 1,2$, yazalım. z^λ ya aşağıdaki noktaları tekabül ettirelim.

$$\tilde{z}^\lambda = \left(\frac{1+q}{2},\ z_2^\lambda, \ldots, z_n^\lambda\right), \quad \lambda = 1,2.$$

z^λ ve $\tilde{z}^\lambda$ noktaları, $g(z_2^\lambda, \ldots, z_n^\lambda)$ noktası kaldırılmış

$$(E_1 - \{g(z_2^\lambda, \ldots, z_n^\lambda)\} \times \{(z_2^\lambda, \ldots, z_n^\lambda)\}$$

dairesinde bulunmaktadır. Binaenaleyh z^λ ve $\tilde{z}^\lambda$, Σ yı kesmiyen eğrilerle birleştirilebilir. $\tilde{z}^1$ ve $\tilde{z}^2$ yi birleştiren doğru parçası da $P-\Sigma$ da bulunduğundan, z^1 ve z^2 $P-\Sigma$ ya ait bir eğri ile birleştirilebilir. Saniyen, farzedelim ki $z^1 \in U$, $z^2 \in P-\Sigma$. U_1, z^1 ri ihtiva eden U nun irrtibatlı komponenti olsun. $U_1 - \Sigma \neq \varnothing \Rightarrow z^1 \in U_1$, $\tilde{z}^1 \in U_1-\Sigma$ ya U_1 re ait bir eğri ile birleştirilebilir. Fakat aynı zamanda $\tilde{z}^1 \in P-\Sigma$. Şu halde z^1 ve z^2 $P-\Sigma$ ye ait bir eğri ile birleştirilebilir. Nihayet $z^1, z^2 \in U$ ise $z^\lambda \in U_\lambda$ ve $\tilde{z}^\lambda \in U_\lambda - \Sigma$. z^λ, $\tilde{z}^\lambda$ ya $U_\lambda - \Sigma$ ya ait bir eğri ile birleştirilebilir. Fakat aynı zamanda $\tilde{z}^\lambda \in P-\Sigma$. Binaenaleyh z^1, z^2 $P-\Sigma$ ya ait bir eğri ile birleştirilebilir.

2. Şimdi, π: $C\times C^{n-1} \to C^{n-1}$ ikinci komponent üzerine projeksyon olsun. Bu taktirde $\pi\,|\,\Sigma : \Sigma \to G$ topolojik bir tasvirdir $\ni (\pi\,|\,\Sigma)^{-1} = g$. Üstelik $\pi(\Sigma \cap U)$, $\pi(z^0) = \tilde{z}^0$ ın açık bir V cıvarıdır.

$h(z_1,\ldots,z_n) = (1_{G_1}(z_1), \tilde{h}_2(z_2), \ldots, \tilde{h}_n(z_n))$ vazedelim $\ni 1_{G_1}$, G_1 in özdeş tasviridir ve $\tilde{h}_\mu(z^\mu) = (z_\mu - z_\mu^0)\,/\,(\bar{z}_\mu^0 z_\mu - 1)$. $\mu = 2,\ldots,n$. Görülüyor ki h: $P \to P$ biholomorf bir tasvirdir ve $h(0) = (0, \tilde{z}^0)$. Şimdi $q_1 = q$ vazedelim ve $0 < q_\mu < 1$, $\mu = 2,\ldots,n$ seçelim $\ni$

$$h^{-1}(\{(w_1,\ldots,w_n) \in P;\ |w_\mu| < q_\mu\}) \subset E_1 \times V$$

Nihayet $H = \{w \in P;\ q_1 < |w_1|\} \cup \{w \in P;\ |w_\mu| < q_\mu\}$ vazedelim. Bu taktirde, (P,H) bir Euclid Hartogs şeklidir ve $(P,\tilde{H}) \ni \tilde{H} = h^{-1}(H)$ bir genel Hartogs şeklidir. Açık olarak $\tilde{H} \subset (E_1 \times V) \cup \{z \in P;\ q_1 < |z_1|\} \subset S$.

1. den dolayı $P \cap S$ irtibatlıdır. O halde Analitik temdit teoreminden dolayı teorem ispatlanmıştır.

16.2.3. **Psödokonveks ve Holomorfi Bölgeleri.**

TARİF 23. $B \subset C^n$ açık bir cümle olsun. B ye psödokonveks denir şayet bütün $(\tilde{P}, \tilde{H})$ genel Hartogs bölgeleri için $\ni \tilde{H} \subset \tilde{B}$; P nin tamamı B de ise.

TARİF 24. $B \subset C^n$ açık bir cümle, f B de holomorf ve $z^0 \in \partial B$ olsun. f ye z^0 da tamamen singüler denir şayet bir $V = V(z^0)$ cıvarı varsa öyleki herhangibir irtibatlı $U = U(z^0) \subset V$ cıvarı için hiçbir F holomorf fonksyonu bulunamıyor öyleki $U \cap B$ ye ait boş olmayan herhangibir W altcümlesinde $F\,|\,W = f$.

Başka bir ifade ile $z^0 \in \partial B$ noktasına esas singüler nokta denir.

Demek ki $B_1 \supset B$ ve $z^0 \in B_1$ ise f, B_1 de holomorf hiçbir fonksyonun tahditi değildir. Yani f z^0 ın ötesine temdit edilemez.

TARİF 25. $B \subset C^n$ boş olmıyan bir açık cümle olsun. B ye holomorfi açık cümlesi denir şayet $\exists f$ B de holomorf $\ni f$ ∂B nin herbir z^0 noktasında tamamen singüler ise.

B üstelik irtibatlı ise, B ye holomorfi bölgesi denir.

Misaller.

1. C^n, sınırı olmadığından aşıkar olarak tarifin şartlarını yerine getiriyor. Dolayısıyla bir holomorfi bölgesidir.

2. $E_1 \subset C$ birim dairesi bir holomorfi bölgesidir, zira E_1 in çemberini tabii sınır kabul eden holomorf fonksyonlar vardır.

3. $E_1 \times E_1$ ikili disk bir holomorfi bölgesidir. Gerçekten, f:$E_1 \to C$ ∂E_1 üzerinde tamamen singüler holomorf bir fonksyon ise, g:$E_1 \times E_1 \to C$ öyleki $g(z_1,z_2) = f(z_1) + f(z_2)$, $\partial(E_1 \times E_1)$ üzerinde tamamen singüler olan holomorf bir fonksyondur.

4. (P,H) bir Euclid Hartogs şekli ve $z^0 \in \partial H \cap P$ olsun. Burada $H \subset P$. H da herbir f holomorf fonksyonu için P de holomorf bir F holomorf fonksyonu vardır $\ni F\,|\,H = f$. Şayet $V = V(z^0) \subset P$ herhangibir açık cıvar ve $U = U(z^0) \subset V$ irtibatlı komponent ise $F\,|\,U$ holomorfiktir. $U \cap H \neq \varnothing$ ve $F\,|\,U \cap H = f\,|\,U \cap H$. Binaenaleyh, H bir holomorfi bölgesi değildir.

Lemma. $B \subset C^n$ açık bir cümle, $G \subset C^n$ bir bölge olsun. Farzedelim ki $B \cap G \neq \varnothing$ ve $(C^n - B) \cap G \neq \varnothing$. Bu taktirde $B \cap G$ nin herbir irtibatlı Q komponenti için $G \cap \partial Q \cap \partial B \neq \varnothing$.

İspat. G yi $G = Q \cup (G-Q)$ şeklinde yazalım. Q açık, ve boş değildir. Diğer taraftan, $(C^n-B) \cap G \neq \varnothing \Rightarrow G-Q \neq \varnothing$. Halbuki G bir bölge olduğundan boş olmıyan iki açık cümleye ayrılamaz. Dolayısıyla, G–Q açık değildir. Farzedelim ki $z \in G-Q$ bir iç nokta değildir. Bu taktirde her bir $U(z) \subset G$ cıvarı için $U \cap Q \neq \varnothing$. Dolayısıyla $z \in \partial Q$. Eğer $z \in B$ ise bu taktirde $\exists$ irtibatlı cıvar $V(z) \subset B \cap G \ni V \cap Q \neq \varnothing$. Fakat bu taktirde $Q \cup V \subset B \cap G$ bir irtibatlı açık cümledir ve Q yu ihtiva eder. Oysa Q bir irtibatlı komponent idi. Bu bir tezattır ve dolayısıyla $z \notin B$. Binaenaleyh $z \in \partial Q \cap \partial B \cap G$.

Teorem 16.2.3.1. G bir holomorfi bölgesi olsun. Bu taktirde G psödokonvekstir.

İspat. Aksini kabul ederek farzedelim ki G psödokonveks değildir. Dolayısıyla (P,H) bir Hartogs şekli vardır $\ni H \subset G$ ve fakat $P \cap G \neq P$. $z^0 \in H$ keyfi olsun. $H \subset G$, $H \subset P \Rightarrow H \subset G \cap P$. $Q = C_{P \cap G}(z^0)$ vazedelim. H irtibatlı olduğundan $H \subset Q$. Diğer taraftan $Q \subset P$. $(Q \neq P)$.

Şimdi $P \cap G \neq \varnothing$ ve $(C^n - G) \cap P \neq \varnothing \Rightarrow \exists z \in \partial Q \cap \partial G \cap P$. (Lemma). f, G de holomorf bir fonksyon olsun. Bu taktirde $f|Q$ holomorftur ve analitik devamlılık teoreminden dolayı $\exists F$, $P \cup Q = P$ de holomorf $\ni F|Q = f|Q$. Diğer taraftan, $V = V(z) \subset P$ bir açık irtibatlı altcümle ise, bu taktirde $F|V$ holomorftur, $Q \cap V$ açık ve $\neq \varnothing$ ve $F|Q \cap V = f|Q \cap V$. Dolayısıyla G bir holomorfi bölgesi değildir.

Bu teoremin karşıtı, *Levi Problemi* olarak bilinmektedir. Her psödokonveks bölge bir holomorfi bölgesi midir? Bu problem 1942 de $n = 2$ için Oka tarafından çözülmüştür. 1954 te de $n > 2$ için Oka, Norguet ve Bremermann tarafından çözülmüştür.

16.2.4. **C^n üzerinde Riemann Bölgeleri.** $G \subset C^n$ bir bölge olsun. Akla gelen bir sual şudur: G de holomorf herbir fonksyon G yi ihtiva eden daha geniş bir bölgeye analitik temdit edilebilir mi? Göreceğiz ki, bu mümkündür şayet gözönünde bulundurulan G bölgeleri sadece C^n ye ait bölgeler olmayıp (Schlicht) C^n yi örten bölgeler ise.

TARİF 26. C^n üzerinde Riemann bölgesi diye aşağıdaki tabii şartları sağlıyan (G,π) çiftine denir.

1. G irtibatlı bir Hausdorff uzayıdır.

2. $\pi: G \to C^n$ lokal topolojik bir tasvirdir. π ye tabii projeksyon da denir. Yani $x \in G$ ve $\pi(x) = z \in C^n$ ise, x ve z nin $U = U(x) \subset G$ ve $V = V(z) \subset C^n$ açık cıvarları vardır $\ni$ U ve V π altında homeomorftur. Başka bir deyim ile $\pi|U: U \to V$ topolojiktir.

Not. Bilindiği üzere π sürekli ve G eğrisel irtibatlıdır.

Misal 1. $G \subset C^n$ bir bölge ve $\pi = 1_G$ tabii dahil etme tasviri olsun. Tarif 26 ya göre (G,π), C^n üzerinde bir Riemann bölgesidir.

Misal 2. $\sqrt{z}$ nin Riemann Yüzeyi. $G = \{(w,z) \in C^2;\ w^2 = z, z \neq 0\}$ şeklinde tarif edilsin. G nin topolojisi, C^2 nin tevlid ettiği rölatif topolojidir. Dolayısıyla Hausdorfftur. Üstelik G, eğrisel irtibatlıdır. İrtibatlı olduğunu göstermemiz kâfidir. Gerçekten, $\varphi(t) = (t,t^2)$ şeklinde tarif edilen $\varphi: C-\{0\} \to G$ tasviri topolojiktir. Dolayısıyla $C-\{0\}$ irtibatlı olduğundan G de irtibatlıdır.

Şimdi $\tilde{\pi}: C^2 \to C$, $\tilde{\pi}(w,z) = z$ şeklinde tarif edilsin. Bu taktirde $\pi = \tilde{\pi}|G: G \to C$ süreklidir. Üstelik lokal topolojiktir. Gerçekten, $(w_0,z_0) \in G$ keyfi bir nokta ise, bu taktirde $z_0 \neq 0$ ve $V(z_0) \subset C-\{0\}$ gibi basit irtibatlı bir cıvar bulunabilir. Tek değişkenli fonksiyonlar Teorisinden biliyoruz ki $\exists V$ de analitik bir $f \ni f^2(z) \equiv z$ ve $f(z_0) = w_0$ (teorem 4.10.1.5). Bu f yi $\sqrt{z}$ ile gösterelim. Bu taktirde $\pi^{-1}(V) = U_+ \vee U_-$ ayrık (U_+ ve U_-) açık cümlelerin birleşimi. Burada $U_+ = \{(f(z),z); z \in V)\}$ ve $U_- = \{(-f(z),)z; z \in V\}$. Meselâ $U_+ = U$ yı gözönüne alalım. $f^+(z) = (f(z),z)$ vazedilirse, bu taktirde $(\pi|U)^{-1} = f^+$. Yani $\pi|U$ topolojiktir. Binaenaleyh (G,π), C üzerinde bir Riemann bölgesidir, yani bilinen $\sqrt{z}$ nin Riemann yüzeyi.

16.2.5. **Noktalı Riemann Bölgeleri.** Bu bahisteki Riemann bölgelerinde bir nokta tefrik edilecektir.

TARİF 27. $z^0 \in C^n$ sabit bir nokta olsun. Bu taktirde $G = (G,\pi,x_0)$ üçlüsüne C^n üzerinde noktalı Riemann bölgesi denir şayet

1. (G,π) C^n üzerinde bir Riemann bölgesi ise

2. $\pi(x_0) = z^0$.

x_0 noktasına taban noktası da denir.

Teorem 16.2.5.1. (Yükseltilmenin Birtekliği). (G,π,x_0) C^n üzerinde noktalı bir Riemann bölgesi ve (Y,y_0) noktalı irtibatlı bir topolojik uzay olsun. Şayet $\psi_1, \psi_2: Y \to G$ sürekli tasvirler ise $\ni \psi_1(y_0) = \psi_2(y_0) = x_0$ ve $\pi \circ \psi_1 = \pi \circ \psi_2$, bu taktirde $\psi_1 = \psi_2$.

İspat. $\psi_1 = \psi_2$ eşitliğinin sağlandığı $y \in Y$ noktalarının cümlesini $M = \{y \in Y;\ \psi_1(y) = \psi_2(y)\}$ ile gösterelim. Hipotezden dolayı $y_0 \in M$ ve dolayısıyla $M \neq \varnothing$. G Hausdorff olduğundan M kapalıdır (bk § 11.1.2). Şimdi gösterelim ki M açıktır. Bunun için $y_1 \in M$ herhangibir nokta olsun. Gösterelim ki y_1 bir iç noktadır. Gerçekten, $\psi_1(y_1) = \psi_2(y_1) = x_1$ ve $\pi(x_1) = z^1$. Bir yandan $U(x_1)$, $V(z^1)$ açık cıvarları vardır $\ni \pi|U: U \to V$ topolojiktir. Diğer tarftan, $Q_1(y_1)$, $Q_2(y_1)$ açık cıvarları vardır $\ni \psi_i(Q_i) \subset U$, $i = 1,2$. $Q = Q_1 \cap Q_2$ vazedelim. Bu taktirde, derhal görülür ki

$$\psi_1|Q = (\pi|U)^{-1} \circ \pi \circ \psi_1|Q = (\pi|U)^{-1} \circ \pi \circ \psi_2|Q = \psi_2|Q$$

Dolayısıyla $Q \subset M$. Yani M açıktır. Halbuki $Y(\supset M)$ irtibatlı idi. Dolayısıyla $M = Y$.

Teorem 16.2.5.2. (G_j,π_j,x_j), $j = 1,2$ verilmiş olsun. Bu taktirde en fazla bir sürekli tasvir vardır $\varphi: G_1 \to G_2 \ni \pi_1 = \pi_2 o \varphi$ (φ lifleri muhafaza ediyor) ve $\varphi(x_1) = x_2$.

İspat. Şayet iki sürekli tasvir varsa: $\varphi,\psi : G_1 \to G \ni \pi_2 o \varphi = \pi_1 = \pi_2 o \psi$ ve $\varphi(x_1) = \psi(x_1) = x_2$, bu taktirde teorem 17.2.5.1 den dolayı $\varphi = \psi$.

Aslında bu teoremler umumi olup Cebirsel Topolojiye aittirler.

Netekim, G yerine herhangibir X topolojik uzayı, Riemann bölgesi yerine de örtü uzayı alınabilir. X, ne irtibatlı ne de Hausdorff olmayabilir. Bu sebeple teorem 17.2.5.1 in ispatı biraz değişik olacaktır.

TARİF 26. X ve E iki topolojik uzay ve $\pi: E \to X$ bir tasvir olsun. (E,π) çiftine X in örtü uzayıdır denir şayet herbir $x \in X$ in bir U açık cıvarı varsa öyle ki $\pi^{-1}(U)$ E ye ait S_i açık cümlelerinin ayrık birleşimidir ($\pi^{-1}(U) = \vee_i S_i$), ve herbir S_i için $\pi|S_i : S_i \to U$ topolojiktir.

Bu gibi U lara muntazam şekilde örtülüdür denir. S_i lere U üzerinde yapraklar denir. $\pi^{-1}(x)$ ye ise x üzerinde lif denir. Lifler diskret cümlelerdir, çünki $\pi^{-1}(U)$ ayrık cümlelerden müteşekkildir.

Teorem 16.2.5.1. (E, π, e_0) noktalı bir örtü uzayı olsun. $\pi:(E,e_0) \to (X,x_0)$, $\pi(e_0) = x_0$. $f: (Y,y_0) \to (X,x_0)$ herhangibir sürekli tasvir olsun. Y yi irtibatlı farzedelim. Bu taktirde, şayet $\psi: (Y,y_0) \to (E,e_0)$ sürekli tasviri varsa $\ni \pi o \psi = f$, $\psi(y_0) = e_0$, ψ birtektir.

İspat. İkinci bir tasvirin varlığını kabul edelim:

$$\psi': (Y,y_0) \to (E,e_0),\ \pi o \psi' = f,\ \psi'(y_0) = e_0 ,$$

Diğer tardftan, $M = \{y \in Y;\ \psi(y) = \psi'(y)\}$, $N = \{y \in Y; \psi(y) \neq \psi'(y)\}$ vazedelim. Bu taktirde $Y = M \vee N$ (yani $Y = M \cup N$, $M \cap N = \varnothing$) vazedelim. $y_0 \in M \Rightarrow M \neq \varnothing$. Gösterelim ki bu iki cümle açıktır. Y irtibatlı farzedildiğinden $N = \varnothing$.

$y_1 \in Y$ keyfi verilmiş olsun. U, $f(y_1)$ in π tarafından muntazam şekilde örtülü bir cıvarı olsun. $y_1 \in M$ ise $\psi(y_1) = \psi'(y_1)$ noktası $\pi^{-1}(U)$ nun bir S yaprağında bulunmaktadır. Dolayısıyla $\psi^{-1}(S) \cap \psi'^{-1}(S)$, y_1 in M de açık bir cıvarıdır. $y_1 \in N$ ise, $\psi(y_1)$ bir S_1 yaprağındadır, $\psi'(y_1)$ ise diğer bir S_2 yaprağındadır. Dolayısıyla, $\psi^{-1}(S_1) \cap \psi'^{-1}(S_2)$ y_1 in N de açık bir cıvarıdır. İspat tamamlanmıştır.

Cebirsel Topolojinin en önemli problemlerinden biri, temdit probleminin duali olan yükseltilme problemidir. E,X,Y topolojik uzay ve $\pi:E \to X$, $f:Y \to X$ sürekli tasvirler olsun. f nin yükseltilmesi problemi, $f = \pi o f'$ şartını sağlıyan bir $f': Y \to E$ sürekli tasvirinin var olmasının veya olmamasının tesbitidir. Başka bir deyimle, aşağıdaki diagramı komütatif yapan ve noktalı ok ile gösterilen sürekli bir f' tasvirinin var olup veya olmaması problemidir.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "f'"] & X \end{tikzcd}$$

Böyle bir f' tasviri varsa, bu taktirde f, E ye yükseltilmiş olur, ve f' ye f nin yükseltilmesi denir.

Bu hususlar gözönünde bulundurularak konuya devam edelim. Ancak bundan sonra X topolojik uzayını lokal irtibatlı farzedeceğiz. π bir lokal homeomorfizm olduğundan E de lokal irtibatlıdır.

Şimdi $J = \{j\}$ bir indis cümlesi ve (E_j,π_j,e_j), X üzerinde örtü uzayları olsun, $\pi_j(e_j) = x_0$.

$$Z = \bigvee_{j \in J} E_j = \bigcup_{j \in J} (E_j \times \{j\})$$

E_j uzaylarının ayrık birleşimini göstersin. Herbir $k \in K = \{k\}$ indisine bir başka $N_k = \{\nu_k\}$ indis cümlesini tekabül ettirelim. Farzedelim ki her $k \in K$ için

$$Z_k = \{Z^k{}_{\nu_k};\ \nu_k \in N_k\}$$

Z nin bir bölünmesidir. Yani,

1. $Z^k{}_{\nu_k} \subset Z$
2. $\bigcup_{\nu_k} Z^k{}_{\nu_k} = Z$
3. $\nu'_k \neq \nu''_k$ için $Z^k{}_{\nu_k'} \cap Z^k{}_{\nu_k''} = \varnothing$

Meselâ K, Z üzerinde tarif edilen bütün "$\approx$" gibi eşdeğerlik bağıntıları olabilir. Bu taktirde Z_k bölünmesi $Z^k{}_{\nu_k}$, $\nu_k \in N_k$ eşdeğerlik sınıflarının cümlesidir.

Bu anlaşıldıktan sonra, $Z = \{Z_k\}$ bu bölünmelerin ailesini göstersin. Diyorum ki Z nin bir Z^* bölünmesi vardır $\ni$ bu bölünme bütün Z_k, $k \in K$ bölünmelerinden daha incedir. Başka bir deyim ile $\exists Z^* = \{Z_\nu;\ \nu \in N\} \ni$ herhangibir ν ve k için $\exists \nu_k \ni Z_\nu \subset Z^k{}_{\nu_k}$. Gerçekten,

$$N = \mathop{\times}_{k \in K} N_k;\ Z_\nu = \bigcap_{k \in K} Z^k{}_{\nu_k},\ \nu = (\nu_k) \in N ;$$

$$Z^* = \{Z_\nu;\ \nu \in N\}$$

Bu taktirde herbir $\nu \in N$ için, $Z_\nu \subset Z$ ve

$$\bigcup_{\nu \in N} Z_\nu = \bigcup_{\nu} \Big(\bigcap_{k \in K} Z^k{}_{\nu_k}\Big) = \bigcap_{k \in K} \Big(\bigcup_{\nu_k} Z^k{}_{\nu_k}\Big) = \bigcap_{k \in K} Z = Z$$

ve $\nu \neq \nu'$ için

$$Z_\nu \cap Z_{\nu'} = (\bigcap_{k\varepsilon K} Z^k{}_{\nu_k}) \cap (\bigcap_{k\varepsilon K} Z^k{}_{\nu'_k}) = \bigcap_{k\varepsilon K} (Z^k{}_{\nu_k} \cap Z^k{}_{\nu'_k}) = \varnothing.$$

Dolayısıyla Z^*, Z nin bir bölünmesidir ve her ν için

$$Z_\nu = \bigcap_{k\varepsilon K} Z^k{}_{\nu_k} \subset Z^k{}_{\nu_k}.$$

Demek ki Z^* herhangibir Z_k, $k \varepsilon K$, bölünmesinden daha incedir.

TARİF 28. Z üzerinde "$\sim$" eşdeğerlik bağıntısı (P) hassasını haizdir diyoruz şayet $\forall j_1, j_2 \varepsilon J$ için

1. $(e_{j_1}, j_1) \sim (e_{j_2}, j_2)$

2. $I = [0,1]$ olmak üzere, $\varphi_{j_1}: I \to E_{j_1}$, $\varphi_{j_2}: I \to E_{j_2}$ sürekli eğriler ise $\ni (\varphi_{j_1}(0), j_1) \sim (\varphi_{j_2}(0), j_2)$ ve $\pi_{j_1} \circ \varphi_{j_1} = \pi_{j_2} \circ \varphi_{j_2}$, bu taktirde $(\varphi_{j_1}(1), j_1) \sim (\varphi_{j_2}(1), j_2)$.

Misal. $z, z' \varepsilon Z$ olsun. Şayet $\pi_{j_1}(z) = \pi_{j_2}(z')$ ise $(z, j_1) \sim (z', j_2)$ yazıyoruz. Açıkça $\sim$, Z üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır, ve üstelik (P) hassasını haizdir.

Şimdi yukarda da belirttiğimiz gibi, K, Z üzerindeki bütün eşdeğerlik bağıntılarının cümlesi olsun. Ayrıca, (P) hassasını haiz olduklarını farzedelim. $k\varepsilon K$ için Z_k, $\overset{k}{\sim}$ eşdeğerlik bağıntısına tekabül eden Z nin bir bölünmesidir, yani $Z^k{}_{\nu_k}$, $\nu_k \in N_k$, eşdeğerlik sınıflarının cümlesidir. Bu bölünmelerin koleksyonunu $Z = \{Z_k; k \varepsilon K\}$ ile gösterirsek, yukarda olduğu gibi Z_k bölünmelerinden daha ince bir bölünme inşa edebiliriz. $Z^* = \{Z_\nu; \nu \varepsilon N\}$. Hemen göreceğiz ki bu incelmede herbir Z_ν eşdeğerlik sınıfı bir liften ibarettir. Yani $Z^k{}_{\nu_k}$ sınıflarının Z_ν sınıfına irca edilişidir.

Lemma 1. Z^* tarafından Z üzerinde tarif edilen $\sim$ bağıntısı (P) hassasını haizdir. Üstelik, herbir Z_ν eşdeğerlik sınıfı yalnız $x_\nu \varepsilon X$ (esas taban) noktası üzerinde noktalar ihtiva eder.

İspat. Önce de belirtildiği gibi K, Z üzerindeki bütün $\overset{k}{\sim}$ eşdeğerlik bağıntılarının cümlesidir. Bu taktirde her k ve $j_1, j_2 \varepsilon J$ için $(e_{j_1}, j_1) \overset{k}{\sim} (e_{j_2}, j_2)$. Şu halde her $k \varepsilon K$ için bir $\nu_k \varepsilon N_k$ vardır $\ni (e_{j_1}, j_1)$, (e_{j_2}, j_2) aynı zamanda $Z_{K\nu_k}$ cümlesindedir. Binaenaleyh $\bigcap_{k\varepsilon K} Z^k{}_{\nu_k} = Z_\nu$ cümlesindedir. Bu demektir ki $(e_{j_1}, j_1) \sim (e_{j_2}, j_2)$. Aynı şekilde (P) nin 2. hassasının da sağlandığı görülür. O halde, Z^*, (P) hassasını haiz Z üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısını tarif eden, Z nin en ince bölünmesidir. Diğer taraftan, (z, j_1), (z', j_2) noktaları $Z_\nu = \bigcap_{k\varepsilon K} Z^k{}_{\nu_k}$ de ise bu taktirde her $k \varepsilon K$ için $(z, j_1) \overset{k}{\sim} (z', j_2)$, özellikle misalde işaret edilen eşdeğerlik bağıntısı için de aynı eşdeğerlik yazılabilir. Fakat bu taktirde $\pi_{j_1}(z) = \pi_{j_2}(z')$. Z_ν tarafından tesbit edilen bu tek esas noktayı x_ν ile göstereceğiz.

$Z^* = \{Z_\nu; \nu \varepsilon N\}$, (P) hassasını haiz Z üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı tarif eden, Z nin en ince bölünmesi olsun. Bu taktirde $E^* = \{Z_\nu; \nu \varepsilon N\}$, ve $\pi^*(Z_\nu) = x_\nu$ şeklinde tarif edilen $\pi^*: E^* \to X$ vazedilebilir. Özel olarak, (e_j, j), $j \varepsilon J$ bütün taban noktalarını ihtiva eden eşdeğerlik sınıfı da $e_0{}^* = Z_{\nu_0}$ ile gösterilebilir.

İlerde göstereceğiz ki, $(E^*, \pi^*, e_0{}^*)$ ye öyle bir topoloji: B^* uygulanabilir ki $(E^*, \pi^*, e_0{}^*)$ bir örtü uzayıdır.

Şimdi şu tasvirleri gözönüne alalım: $j \varepsilon J$ için $\varphi_j : E_j \to E^*$ şu şekilde tarif ediliyor: $z \varepsilon E_j$ ise $\varphi_j(z) = Z_\nu(j) \varepsilon E^*$ z yi ihtiva eden eşdeğerlik sınıfıdır. Açık olarak $\pi^* \circ \varphi_j(z) = \pi_j(z)$ ve $\varphi_j(e_j) = e_0{}^*$. Yine göreceğiz ki B^* topolojisinde bütün φ_j tasvirleri süreklidirler.

Lemma 2. (z_1, j_1) ve $(z_2, j_2) \varepsilon Z$ eşdeğer iki nokta, $x_1 \varepsilon X$ ortak esas nokta, $V = V(x_1) \subset X$ irtibatlı açık bir cıvar, $U_i = U_i(z_i) \subset E_j$, $i = 1,2$, açık cıvarlar olsun $\ni \pi_{j_i}|U_i: U_i \to V$ topolojiktir. Bu taktirde, her $x \varepsilon V$ için $((\pi_{j_1}|U_1)^{-1}(x), j_1) \sim ((\pi_{j_2}|U_2)^{-1}(x), j_2)$.

İspat. φ, x yi x_1 e birleştiren V de bir eğri olsun. Bu taktirde, $\psi_i = (\pi_{j_i}|U_i)^{-1} \circ \varphi$, $i = 1,2$, sıra ile U_i de z_i yi $(\pi_{j_i}|U_i)^{-1}(x)$ ye birleştiren eğrilerdir. Başlangıç noktalar eşdeğer olduklarından, son noktalar da eşdeğerdirler.

Lemma 3. Bütün $j_1, j_2 \varepsilon J$ için şayet $M \subset E_{j_1}$ açık ise, bu taktirde $\varphi_{j_2}{}^{-1}(\varphi_{j_1}(M)) \subset E_{j_2}$ açıktır.

İspat. $\varphi_{j_2}{}^{-1}(\varphi_{j_1}(M)) = \{z \varepsilon E_{j_2};\ \exists y \varepsilon M \ni \varphi_{j_1}(y) = \varphi_{j_2}(z)\} = \{z \varepsilon E_{j_2};\ \exists y \varepsilon M \ni (y, j_1) \sim (z, j_2)\}$. $z \varepsilon \varphi_{j_2}{}^{-1}(\varphi_{j_1}(M))$ verilmiş olsun. Gösterelim ki z bir iç noktadır. $z \Rightarrow \exists y \varepsilon M \ni (y, j_1) \sim (z, j_2)$ ve üstelik $\pi_{j_1}(y) = \pi_{j_2}(z) = x$. $\exists$ açık cıvarlar: $U_1 = U_1(y)$, $U_2 = U_2(z)$, ve irtibatlı bir cıvar: $V = V(x) \ni \pi_{j_1}|U_1: U_1 \to V$, $\pi_{j_2}|U_2: U_2 \to V$ topolojik tasvirlerdir. $\varphi = (\pi_{j_2}|U_2)^{-1} \circ (\pi_{j_1}|U_1): U_1 \to U_2$ tasviri gözönüne alalım. φ topopojiktir ve lemma 2 den dolayı $y' \varepsilon U_1$ için $(\varphi(y'), j_2) \sim (y', j_1)$.

M açık olduğundan, $U_1' = M \cap U_1$ ve $U_2' = \varphi(U'_1) \subset U_2$ açıktırlar. Fakat $z \varepsilon U_2' \subset \varphi_{j_2}{}^{-1}(\varphi_{j_1}(M))$.

Lemma 4. $M_{j_1} \subset E_{j_1}$, $M_{j_2} \subset E_{j_2}$ keyfi altcümleler olsun. Bu taktirde $\varphi_{j_1}(M_{j_1}) \cap \varphi_{j_2}(M_{j_2}) = \varphi_{j_2}(M_{j_2} \cap \varphi_{j_2}{}^{-1}(\varphi_{j_1}(M_{j_1})))$.

İspat. 1. Önce $y \varepsilon \varphi_{j_1}(M_{j_1}) \cap \varphi_{j_2}(M_{j_2})$ olsun. Bu taktirde $\exists$ $y_1 \varepsilon M_{j_1}$, $y_2 \varepsilon M_{j_2} \ni \varphi_{j_1}(y_1) = \varphi_{j_2}(y_2) = y$. Halbuki açıkça $y_2 \varepsilon \varphi_{j_2}{}^{-1}(\varphi_{j_1}(M_{j_1})) \cap M_{j_2}$. Demek ki $y \varepsilon \varphi_{j_2}(M_{j_2} \cap \varphi_{j_2}{}^{-1}(\varphi_{j_1}(M_{j_1})))$.

2. Şimdi y sağdaki cümleye ait olsun. Bu taktirde $\exists y_2 \varepsilon M_{j_2} \cap \varphi_{j_2}{}^{-1}(\varphi_{j_1}(M_{j_1})) \ni \varphi_{j_2}(y_2) = y$. Diğer taraftan $\exists y_1 \varepsilon M_{j_1} \ni \varphi_{j_2}(y_2) = \varphi_{j_1}(y_1)$. Dolayısıyla $y \varepsilon \varphi_{j_1}(M_{j_1}) \cap \varphi_{j_2}(M_{j_2})$.

Şimdi E^* üzerinde bir topoloji tesis edelim. E^* ın aşağıdaki şekilde tarif edilen altcümleleriyle bir B sistemini teşkil edelim.

$B = \{A \subset E^*;\ \exists j \in J,\ M_j \subset E_j$ açık $\ni \varphi_j(M_j) = A\} \cup \{E^*\}$

Bu taktirde,

1. Her $j \in J$ için $\varphi_j(\varnothing) = \varnothing$. Dolayısıyla $\varnothing \in B$.

2. $E^* \in B$. Tariften dolayı

3. $A_1 \cap A_2 \in B$ şayet $A_1, A_2 \in B$ ise. Lemma 4.3 ten dolayı,

Görülüyor ki B, bir topoloji tabanı için aksyomları sağlıyor. Binaenaleyh, E^* ın topolojisi B nin elemanlarının keyfi birleşimlerinin cümlesidir. Bu topolojiye B^* diyelim.

Teorem*. $E^* = (E^*, \pi^*, e^*_0)$, X üzerinde esas noktalı bir örtü uzayıdır. Üstelik E_j irtibatlı ise E^* irtibatlıdır ve X Hausdorff ise E^* da Hausdorfftur.

İspat. 1. E^* bir topolojik uzaydır ve $\pi^*(e_0^*) = x_0 = \pi_j(e_j)$.

2. E^* irtibatlıdır. $y \in E^* \Rightarrow \exists j \in J$ ve $y_j \in E_j \ni y = \varphi_j(y_j)$. ψ, E_j de y_j yi e_j ye birleştiren bir eğri olsun. Bu taktirde $\varphi_j \circ \psi : I \to E^*$ tasviri altında $\varphi_j \circ \psi(0) = y$ ve $\varphi_j \circ \psi(1) = e_0^*$. Gösterelim ki $\varphi_j \circ \psi$ süreklidir yani bir eğridir. Bunun için $\varphi_j : E_j \to E^*$ tasvirinin B^* topolojisinde sürekli olduğunu göstermemiz kâfidir. Bunun için $M \subset E^*$ açık ve $j_0 \in J$ herhangibir indis ise $\varphi_{j_0}^{-1}(M)$ nin E_{j_0} da açık olduğunu göstermek kâfidir. Gerçekten, B şartından dolayı, $M = \bigcup_{j \in J} \varphi_j(M_j)$, $M_j \subset E_j$, herbir $j \in J$ için açıktır (veya $\varnothing$). Dolayısıyla, $j_0 \in J$ için, $\varphi_{j_0}^{-1}(M) = \bigcup_{j \in J} \varphi_{j_0}^{-1}(\varphi_j(M_j))$ E_{j_0} da açıktır.

3. $\pi^* : E^* \to X$ süreklidir. Yine $V \subset X$ açık olsun. $M = \pi^{*-1}(V)$ vazedelim. Bu taktirde $j \in J$ için $\varphi_j^{-1}(M) = \varphi_j^{-1}(\pi^{*-1}(V)) = (\pi^* \circ \varphi_j)^{-1}(V) = \pi_j^{-1}(V)$, E_j de açıktır. Dolayısıyla $M = \bigcup_{j \in J} \varphi_j(\varphi_j^{-1}(M))$, B şartından dolayı açıktır.

4. π^* lokal topolojiktir. $y \in E^* \Rightarrow \exists j \in J, y_j \in E_j, \ni \varphi_j(y_j) = y$. $x = \pi^*(y) = \pi_j(y_j)$ olsun. Bu taktirde $\exists U_j(y_j)$ ve $V(x)$ açık cıvarları $\ni \pi_j | U_j : U_j \to V$ topolojiktir. B şartından dolayı $U = \varphi_j(U_j)$, y nin açık bir cıvarıdır, (B^* topolojisinde φ_j ler açık tasvirlerdir), $\pi^* | U : U \to V$ sürekli ve sürjektiftir. Üstelik, $(\varphi_j | U_j) \circ (\pi_j | U_j)^{-1} = (\pi^* | U)^{-1}$ gösteriyor ki $\pi^* | U$ injektiftir ve $(\pi^* | U)^{-1}$ süreklidir.

5. X uzayı Hausdorff ise E^* da Hausdorfftur.

a) Farzedelim ki $\pi^*(y_1) = x_1 \neq x_2 = \pi^*(y_2)$. X Hausdorff olduğundan $\exists V(x_1), V(x_2) \ni V \cap V' = \varnothing$. π^* sürekli olduğundan $\pi^{*-1}(V) \cap \pi^{*-1}(V') = \varnothing$.

b) $x = \pi^*(y_1) = \pi^*(y_2)$. Bu taktirde $\exists z_1 \in E_{j_1}$, $z_2 \in E_{j_2} \ni \varphi_{j_1}(z_1) = y_1$, $\varphi_{j_2}(z_2) = y_2$. Diğer taraftan $\exists U_i(z_i) \subset E_{j_i}$, $i = 1,2$ açık cıvarları ve

$V(x) \subset X$ irtibatlı açık cıvarı $\ni \pi_{j_i} | U_i : U_i \to V$ tasvirleri topolojiktir. (z_i, j_i) noktaları eşdeğer değildirler, dolayısıyla da lemma 2 den ötürü $\varphi_{j_1}(U_2) \cap \varphi_{j_2}(U_2) = \varnothing$.

5. Özellikten dolayı, X yerine $G \subset C^n$, E örtü uzayları yerine de G Riemann bölgelerini alabiliriz.

TARİF 28. $G_j = (G_j, \pi_j, x_j)$, $j = 1, 2$, verilmiş olsun. $G_1 < G_2$ (G_1, G_2 ye dahildir) diyoruz şayet lifleri muhafaza eden sürekli bir $\varphi : G_1 \to G_2$ ($\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$) tasviri varsa öyleki $\varphi(x_1) = x_2$.

φ tasvirine kanonik tasvir de denir. φ birtektir (teorem 16.2.5.2).

Teorem 16.2.5.3. "$<$" bağıntısı zayıf bir sıralamadır, yani

1. $G < G$

2. $G_1 < G_2, G_2 < G_3 \Rightarrow G_1 < G_3$.

İspat. Tarif 28 in aşikâr bir neticesidir.

TARİF 29. G_1, G_2 izomorfiktir denir ve $G_1 \simeq G_2$ yazılır şayet $G_1 < G_2$ ve $G_2 < G_1$ ise.

Teorem 16.2.5.4. $G_1 \simeq G_2$ yalnız ve yalnız lifleri muhafaza eden topolojik bir $\varphi : G_1 \to G_2$ tasviri varsa $\ni \varphi(x_1) = x_2$.

İspat. Farzedelim ki $G_1 \simeq G_2$. Bu demektir ki lifleri muhafaza eden sürekli $\varphi_1 : G_1 \to G_2$, $\varphi_1(x_1) = x_2$ ve $\varphi_2 : G_2 \to G_1$, $\varphi_2(x_2) = x_1$ tasvirleri vardır.

Bu taktirde $\varphi_2 \circ \varphi_1 : G_1 \to G_1$ süreklidir. Diğer taraftan,

$$\pi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) = (\pi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = \pi_2 \circ \varphi_1 = \pi_1 \text{ ve } \varphi_2 \circ \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2) = x_1.$$

Dolayısıyla teorem 17.2.5.2 den ötürü $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 1_{G_1}$. Aynı şekilde, $\varphi_1 \circ \varphi_2 = 1_{G_2}$ Binaenaleyh φ_1 in hem sağ hem de sol inversi vardır, dolayısıyla φ_1 bijektiftir ve $\varphi_2 = \varphi_1^{-1}$. $\varphi_1 = \varphi$ vazedilirse teoremdeki φ tasviri elde edilir. Karşıt iddiaya gelince, $\varphi_1 = \varphi$ ve $\varphi_2 = \varphi^{-1}$ vazedilir.

TARİF 30. C^n üzerinde (G, π, x_0) Riemann bölgesine schlichttir denir şayet:

1. $G \subset C^n$ ise

2. $\pi = 1_G$ tabii dahil etme tasviri ise. Özel olarak $x_0 = z^0$.

Teorem 16.2.5.5. $G_1 < G_2 \Leftrightarrow G_1 \subset G_2$ şayet G_1, G_2 schlicht iseler.

İspat. Tarif 28 ve 30 un aşikâr bir neticesidir.

Misal. $G_1 = (G, \pi, x_0)$, $\sqrt{z}$ nin Riemann yüzeyi olsun $\ni x_0 = (1,1)$. Diğer taraftan $G_2 = (C, 1_C, 1)$ olsun. Bu taktirde $\varphi = \pi : G \to C$ süreklidir. Üstelik lifleri muhafaza eder, zira $1_C \circ \varphi = \pi$ ve $\varphi(x_0) = 1$. O halde $G_1 < G_2$.

Teorem 16.2.5.5. $\{G_j = (G_j, \pi_j, x_j)\}$, $j \in J$, C^n üzerinde noktalı Riemann bölgelerinin bir ailesi olsun. Farzedelim ki $G^* = (G^*, \pi^*, x_0^*)$, $\pi^*(x_0^*) = z^0 = \pi_j(x_j)$, $\bigvee_{j \in J} G_j$ ayrık birleşimin bölünmelerinin en ince bölünmesinin meydana getirdiği C^n üzerinde Riemann bölgesidir. Bu taktirde,

1. Her $j \varepsilon J$ için $G_j < G^*$.

2. G^*, bütün G_j leri ihtiva eden C^n üzerinde en küçük Riemann bölgesidir.

İspat. $\varphi_j : G_j \to G^*$ tasvirleri hem lifleri muhafaza eder, $\pi_j = \pi^* o \varphi_j$ hem de süreklidir (teorem*ın 2. şıkkının ispatı). O halde $G_j < G^*$.

Farzedelim ki $\exists \tilde{G} = (\tilde{G}, \tilde{\pi}, \tilde{x}_0) \ni \tilde{\pi}(\tilde{x}_0) = z^0 = \pi_j(x_j) \ni G_j < G$. Bu demektir ki lifleri muhafaza eden sürekli $\tilde{\varphi}_j : G_j \to \tilde{G}$ tasvirleri vardır. "$(y, j_1) \backsim (y', j_2)$ yalnız ve yalnız $\tilde{\varphi}_{j_1}(y) = \tilde{\varphi}_{j_2}(y')$" yardımı ile $\bigvee_{j \varepsilon J} G_j$ üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı tesis edilebilir. Şöyle ki: şayet $\psi_{j_i} : I \to G_{j_i}$, $i = 1,2$, iki eğri iseler $\ni (\psi_{j_1}(0), j_1) \backsim (\psi_{j_2}(0), j_2)$ ve C^n deki izdüşümleri aynıdır, yani $\pi_{j_1} o \psi_{j_1} = \pi_{j_2} o \psi_{j_2}$, bu taktirde eşdeğerlik şartından dolayı $\tilde{G}$ de $\tilde{\varphi}_{j_1} o \psi_{j_1}(0) = \varphi_{j_2} o \psi_{j_2}(0)$. Diğer taraftan, (liflerin muhafazasından dolayı $(\tilde{\pi} o \tilde{\varphi}_j = \pi_j)$), C^n de, $\tilde{G}$ ye ait $\tilde{\varphi}_{j_1} o \psi_{j_1}$ ve $\tilde{\varphi}_{j_2} o \psi_{j_2}$ eğrilerinin $\tilde{\pi}$ altındaki izdüşümleri aynıdır: $\tilde{\pi} o (\tilde{\varphi}_{j_1} o \psi_{j_1}) = \tilde{\pi} o (\tilde{\varphi}_{j_2} o \psi_{j_2})$ Yükseltilmenin birtekliği teoreminden dolayı da G deki eğriler de aynıdır: $(\tilde{\varphi}_{j_1} o \psi_{j_1}) = (\tilde{\varphi}_{j_2} o \psi_{j_2})$. Özel olarak $(\psi_{j_1}(1), j_1) = (\psi_{j_2}(1), j_2)$ yani (P) hassası sağlanmıştır. Bu demektir ki $\exists \varphi : G^* \to \tilde{G} \ni \varphi o \varphi_j = \tilde{\varphi}_j$. Burada φ sürekli lifleri muhafaza eder (çünki φ_j ve $\tilde{\varphi}_j$ lifleri muhafaza ediyorlar). Yani $G^* < \tilde{G}$.

G^* a G_j lerin birleşimi denir ve $G^* = \bigcup_{j \varepsilon J} G_j$ yazılır.

16.2.6. **Holomorfi kabukları.** *TARİF* 31. (G, π) C^n üzerinde bir Riemann bölgesi olsun. $f : G \to C$ fonksyonuna $x_0 \varepsilon G$ noktasında holomorftur denir, şayet $U = U(x_0)$, $V = V(\pi(x_0))$ açık cıvarları varsa öyleki $\pi | U : U \to V$ topolojik ve $f o (\pi | U)^{-1} : V \to C$ holomorftur.

f, G üzerinde holomorftur denir, şayet f, herbir $x_0 \varepsilon G$ noktasında holomorf ise

Lemma. $G_i = (G_i, \pi_i, x_i)$, $i = 1,2$ C^n üzerinde noktalı Riemann bölgeleri ve $G_1 < G_2$ olsun (yani $\varphi : G_1 \to G_2$ lifleri muhafaza eden, $\pi_1 = \pi_2 o \varphi$, sürekli bir tasvirdir $\ni \varphi(x_1) = x_2$). Bu taktirde $\exists V = V(z)$, $U_1 = U_1(y_1)$ açık cıvarları, $y_i \varepsilon G_i$, $y_2 = \varphi(y_1)$ ve $z = \pi_i(y_i) \ni$ aşağıdaki komütatif diagramda bütün tasvirler topolojiktir.

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[rr, "\varphi|U_1"] \arrow[dr, "\pi_1|U_1"'] & & U_2 \arrow[dl, "\pi_2|U_2"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

İspat. Önce $V'(z)$, $U_i'(y_i)$ cıvarları bulunabilir $\ni \pi_i | U_i' : U_i' \to V'$ topolojiktir. Diğer taraftan φ sürekli olduğundan, $\exists U_2 \subset U_2'$ açık cıvar $\ni U_1 = \varphi^{-1}(U_2)$ açıktır ve $U_1 \subset U'_1$. $V \subset V'$ o şekilde seçilebilir ki, istenilen netice elde edilir.

TARİF 32. $G_i = (G_i, \pi_i, x_i)$, $i = 1,2$ ve $G_1 < G_2$ olsun. f, G_2 üzerinde bir kompleks fonksyon ise, f nin G_1 re tahditi $f | G_1 = f o \varphi$ şeklinde yazılır.

Teorem 16.2.6.1. Tarif 32 deki şartlar altında, f G_2 de holomorf ise $f | G_1$, G_1 de holomorftur.

İspat. $y_1 \varepsilon G_1$ keyfi, $y_2 = \varphi(y_1)$ ve $z = \pi_1(y_1) = \pi_2(y_2)$ olsun. Lemmadaki diagram, tarif 31 ve tarif 32 gözönünde tutulursa

$$(f | G_1) o (\pi_1 | U_1)^{-1} = (f o \varphi) o (\pi_1 | U_1)^{-1} = f o (\varphi o (\pi_1 | U_1)^{-1})$$
$$= f o (\pi_2 | U_2)^{-1} : V \to C, \quad \text{ve}$$

ispat tamamlanmıştır.

TARİF 33. f ye $f | G_1$ in G_2 ye holomorf temditidir denir.

TARİF 34. (G_i, π_i), $y_i \varepsilon G_i$, $\pi_i(y_i) = z$, $i = 1,2$ verilmiş olsun. Farzedelim ki f_1, y_1 de holomorftur. f_1 ve f_2 eşdeğerdir diyor ve $(f_1)_{y_1} = (f_2)_{y_2}$ yazıyoruz, şayet $\exists V(z)$, $U_i(y_i)$ açık cıvarları $\ni \pi_i | U_i : U_i \to V$ topolojiktir ve $\ni f_1 o (\pi_1 | U_1)^{-1} = f_2 o (\pi_2 | U_2)^{-1}$.

Açık olarak $(f_1)_{y_1} = (f_2)_{y_2} \Rightarrow f_1(y_1) = f_2(y_2)$, ve hatta $f_1(U_1) = f_2(U_2)$.

Teorem 16.2.6.2. (G_1, π_1) Riemann bölgeleri ve $\psi_i : I \to G_i$ eğrileri $\ni \pi_1 o \psi_1 = \pi_2 o \psi_2$ verilmiş olsun. Diğer taraftan farzedelim ki f_i, G_i üzerinde holomorftur, $i = 1,2$. Bu taktirde $(f_1)_{\psi_1(0)} = (f_2)_{\psi_2(0)} \Rightarrow (f_1)_{\psi_1(t)} = (f_2)_{\psi_2(t)}$ ve özel olarak $(f_1)_{\psi_1(1)} = (f_2)_{\psi_2(1)}$.

İspat. $x_1 \varepsilon G_i \ni \pi_1(x_1) = z^0$ olsun. Bu taktirde $\exists U_1(x_1)$ açık cıvarı ve $V(z^0)$ irtibatlı cıvarı $\ni \pi_i | U_i : U_i \to V$ tasvirleri topolojiktir. Şimdi, $x'_i \varepsilon U_i$ noktaları varsa öyleki $\pi_i(x'_i) = z'$ ve $(f_1)_{x'_1} = (f_2)_{x'_2}$. Bu taktirde tarif 34 ten dolayı V ye ait z' nin bir cıvarında $f_1 o (\pi_1 | U_1)^{-1} = f_2 o (\pi_2 | U_2)^{-1}$, ve özdeşlik teoreminden dolayı da bütün V de. Binaenaleyh $(f_1)_{x_1} = (f_2)_{x_2}$ ise bu taktirde $\forall x_i' \varepsilon U_1$, $\pi(x_i') = z'$ için $(f_1)_{x'_1} = (f_2)_{x'_2}$. Şayet $(f_1)_{x_1} \neq (f_2)_{x_2}$ ise $\forall x'_i \varepsilon U_i$, $\pi(x'_i) = z'$ için $(f_1)_{x'_1} \neq (f_2)_{x'_2}$.

Bu anlaşıldıktan sonra $W = \{t \varepsilon I;\ (f_1)_{\psi_1(t)} = (f)_{\psi_2(t)}\}$ cümlesini göz önüne alalım. Hipotezden dolayı $0 \varepsilon W$. Yani $W \neq \varnothing$. Diğer taraftan $t \varepsilon I$ ve $x_i = \psi_i(t)$ ise ya $(f_1)_{x_1} = (f_2)_{x_2}$ veya $(f_1)_{x_1} \neq (f_2)_{x_2}$. Her iki halde de x_i nin bir U_i cıvarında eşitliğin veya eşitsizliğin varlığı sözkonusu olduğundan, t, W nin veya I—W nin bir iç noktasıdır. Yani W ve I–W açıktır. Dolayısıyla $W = I$, çünki I irtibatlıdır.

Teorem 16.2.6.3. $G_i = (G_i, \pi_i, x_i)$, $\pi_i(x_i) = z^0$, $i = 1,2$ ve $G_1 < G_2$ olsun. Farzedelim ki f, G_1 üzerinde holomorf ve F, f nin G_2 ye temditidir. Bu taktirde F birtektir.

İspat. F_1, F_2 f nin G_2 ye holomorf temditleri olsun. Lemmadan ötürü $\varphi|U_1 : U_1 \to U_2$ tasviri topolojiktir. Diğer taraftan, tarif 32 ve teorem 17. 2.6.1 den $F_1 o \varphi|U_1 = f|U_1$. Dolayısıyla, $F_1|U_2 = F_2|U_2$. Yani $(F_1)_{x_2} = (F_2)_{x_2}$. Halbuki herbir $x \in G_2$ noktası x_2 ye birleştirilebilir. Teorem 16.2.6.2 den dolayı $F_1 = F_2$.

TARİF 35. $G = (G,\pi,x_0)$, C^n üzerinde esas noktalı bir Riemann bölgesi olsun. Farzedelim ki $F \subset A(G)$, G üzerinde holomorf fonksyonların boş olmayan bir cümlesidir. $\{G_j, j \in J\}$ aşağıdaki şartları haiz C^n üzerinde esas noktalı Riemann bölgelerinin cümlesi olsun.

1. $G < G_j$, $\forall j \in J$.

2. $j \in F$ verilmiş olsun. Bu taktirde her $j \in J$ için bir $F_j \in A(G_j)$ vardır öyleki F_j, j nin holomorfik temditidir: $F_j|G = f$.

Bu taktirde, $H_F(G) = \bigcup_{j \in J} G_j$ ye, G nin F ye nazaran holomorfik kabuğu denir. $F = A(G)$ ise sadece holomorfik kabuğu denir ve H(G) ile gösterilir.

Not. Burada A(G), G üzerinde holomorfik fonksyonların tamamıdır. A(G) sabit fonksyonlardan başka da holomorfik fonksyonlar ihtiva eder. Netekim; $\pi_j : C^n \to C$, $\pi_j(z_1,\ldots,z_j,\ldots,z_n) = z_j$, $j = 1,\ldots,n$, j. komponent üzerine projeksyon ve (G,π), C^n üzerinde bir Riemann bölgesi ise, $z_j = \pi_j o \pi$ G üzerinde bir holomorfik fonksyondur.

Teorem 16.2.6.3. G, F, $H_F(G)$ tarifteki gibi olsun. Bu taktirde $G < H_F(G)$. $H_F(G) = (\hat{G},\hat{\pi},\hat{x})$ vazedelim, herbir $f \in F$ için birtek $\hat{F} \in A(\hat{G})$ vardır $\ni \hat{F}$, f nin holomorfik temditidir: $\hat{F}|G = f$. $H_F(G)$ kabuğu, herbir f nin holomorfik temditinin mümkün olduğu maksimal Riemann bölgesidir.

İspat. $Z = \bigvee_{j \in J} G_j$ üzerinde (P) hassasını haiz en ince eşdeğerlik bağıntısını "$\sim$" ile gösterelim. Bu taktirde $\hat{G}$, "$\sim$" ye nazaran eşdeğerlik sınıfların cümlesidir. Şimdi tarifteki 2. şartı da içine alan, Z üzerinde yeni bir eşdeğerlik bağıntısı tarif edelim. $(y,j_1) \simeq (y',j_2)$, $y,y' \in Z$, yalnız ve yalnız

1. $\pi_{j_1}(y) = \pi_{j_2}(y')$

2. $f \in F$ ve $F_i \in A(G_{j_i})$, $i = 1,2$, f nin holomorfik temditleri ise, bu taktirde $(F_1)_y = (F_2)_{y'}$. Diyorum ki "$\simeq$" (P) hassasını haizdir.

a) Taban noktaları eşdeğerdirler: $(x_{j_1},j_1) \simeq (x_{j_2},j_2)$. Gerçekten, tarif 35, 1. den dolayı her j için $\exists\, \varphi_j : G \to G_j$ lifleri muhafaza eden sürekli bir tasvir $\ni \varphi_j(x_0) = x_j$. Dolayısıyla, $U(x_0) \subset G$, $U_i(x_{j_i}) \subset G_{j_i}$, $i = 1,2$ ve $V(\pi(x_0))$ açık cıvarları bulunabilir $\ni i = 1,2$ ye tekabül eden komütatif diagramlarda bütün tasvirler topolojiktir. Bu taktirde

$$F_1 o(\pi_{j_1}|U_1)^{-1} = F_1 o \varphi_{j_1} o(\pi|U)^{-1} = f o(\pi|U)^{-1} = F_2 o \varphi_{j_2} o(\pi|U)^{-1}$$
$$= F_2 o(\pi_{j_2}|U_2)^{-1}.$$

İlk ve son ifadeler karşılaştırılırsa, $(F_1)_{x_{j_1}} = (F_2)_{x_{j_2}}$ elde edilir.

Diğer taraftan $\pi_{j_1}(x_{j_1}) = \pi_{j_2}(x_{j_2})$. O halde $(x_{j_1},j_1) \simeq (x_{j_2},j_2)$.

b) Şimdi gelelim (P) hassasının 2. şartına.

Farzedelim ki $\psi_j : I \to G_{j_i}$, $i = 1,2$ eğrilerdir $\ni (\psi_1(0), j_1) \simeq (\psi_2(0),j_2)$ ve $\pi_{j_1} o \psi_1 = \pi_{j_2} o \psi_2$. Bu taktirde, 2. den dolayı $(F_1)_{\psi_1(0)} = (F_2)_{\psi_2(0)}$.

Teorem 16.2.6.2 den ötürü de, $(F_1)_{\psi_1(1)} = (F_2)_{\psi_2(1)}$. Yani $(\psi_1(1), j_1) \simeq (\psi_2(1), j_2)$. Madem ki "$\sim$" (P) hassasını sağlayan en ince eşdeğerlik bağıntısıdır, o halde $(y,j_1) \sim (y',j_2) \Rightarrow (y,j_1) \simeq (y',j_2)$. Yani "$\sim$" aynı zamanda 1. ve 2. hassalarını haizdir. Dolayısıyla, $\forall j \in J$ için $G < G_j < \bigcup_{j \in J} G_j = H_F(G)$.

$\hat{\varphi}_j : G_j \to \hat{G}$ ve $\hat{\varphi} : G \to \hat{G} \ni \hat{\varphi} = \hat{\varphi}_j o \varphi_j$ kanonik tasvirler olsun. Şimdi Z üzerinde "$\sim$" eşdeğerlik bağıntısını teorem 17.5.5.2 deki gibi tarif edelim: $(y,j_1) \sim (y',j_2)$ yalnız ve yalnız $\hat{\varphi}_{j_1}(y) = \hat{\varphi}_{j_2}(y')$.

Aynı şekilde gösterilebilir ki, "$\simeq$" (P) hassasını haizdir. "$\sim$" (P) hassasını haiz en ince eşdeğerlik bağıntısı olduğundan "$\sim$" $\Rightarrow$ "$\simeq$". O halde $f \in F$ verilmiş olsun. $\hat{y} \in \hat{G} \Rightarrow \exists\, j_1 \in J$, $y_{j_1} \in G_{j_1} \ni \hat{\varphi}_{j_1}(y_{j_1}) = \hat{y}$. $F_1 \in A(G_{j_1})$, f nin bir holomorfik temditi olsun. $F(\hat{y}) = F_1(y_{j_1})$ vazedelim. Şayet $y_{j_2} \in G_{j_2}$ ve $\hat{\varphi}_{j_2}(y_{j_2}) = \hat{y}$ ise $(y_{j_1},j_1) \sim (y_{j_2},j_2)$, üstelik $F_2 \in A(G_{j_2})$ f nin bir holomorfik temditi ise bu taktirde $(y_{j_1},j_1) \sim (y_{j_2},j_2) \Rightarrow (y_{j_1},j_1) \simeq (y_{j_2},j_2) \Rightarrow (F_1)_{y_{j_1}} = (F_2)_{y_{j_2}}$ ve özellikle $F_1(y_{j_1}) = F_2(y_{j_2})$. Bu da gösteriyor ki F tariflidir.

Üstelik, $F o \hat{\varphi} = F o \hat{\varphi}_j o \varphi_j = F_j o \varphi_j = f$. Yani F, f nin bir temditidir. Diyorum ki F holomorftur. Gerçekten, $\hat{y} \in \hat{G}$, $\hat{y} = \varphi_j(y_j)$ ve $z = \hat{\pi}(\hat{y})$ olsun. $\exists U_1(y_j)$, $U_2(\hat{y})$, $V(z)$ ve bir komütatif diagram $\ni$ bütün tasvirler topolojiktir. Binaenaleyh,

$$F o(\hat{\pi}|U_2)^{-1} = F o \varphi_j o(\pi_j|U_1)^{-1} = F_j o(\pi_j|U_1)^{-1}.$$

Sonuncusu holomorfik olduğundan, birinci de holomorfiktir.

$H_F(G)$ nin maksimum oluşu, inşanın bir neticesidir.

Teorem 16.2.6.4. $G_i = (G_i,\pi_i,x_i)$, $i = 1,2$, ve $G_1 \cup G_2 = (G^*,\pi^*,x^*)$ olsun. Farzedelim ki $f_i : G_i \to C$ holomorf fonksyonlardır. Şayet bir $G = (G,\pi,x_0)$ Riemann bölgesi varsa öyleki $G < G_i$, $i = 1,2$ ve $f_1|G = f_2|G$, bu taktirde, G^* da bir f^* holomorf fonksyonu vardır $\ni f^*|G_i = f_i$.

İspat. $f = f_1|G = f_2|G$ ve $F = \{f\}$ vazedelim. Butaktirde teorem 17.2.6.3 ten dolayı $G_1 < H_F(G)$. Fakat teorem 17.2.5.5 ten dolayı $G_1 \cup G_2 < H_F(G)$. Şimdi $\hat{f}$, f nin $H_F(G)$ ye holomorfik temditi ve $f^* = \hat{f}|G$ olsun. Bu taktirde, $f^*|G = (\hat{f}|G^*)|G = \hat{f}|G = f = f_1|G$. Binaenaleyh, $f^*|G_i = f_i$, $i = 1,2$.

Şimdi, $P \subset C^n$ birim polidisk, (P,H) Euclid Hartogs şekli ve $\Phi : P \to B \subset C^n$ biholomorfik tasvir olsun. Bu taktirde $(B, \Phi(H))$ çifti bir genel Hartogs şeklidir. P ve H irtibatlı Hausdorff uzayları ve Φ özellikle lokal topolojik olduğundan, $\mathbf{P} = (P, \Phi, 0)$ ve $\mathbf{H} = (H, \Phi, 0)$, C^n üzerinde noktalı Riemann bölgeleridir. Üstelik $\mathbf{H} < \mathbf{P}$. Dolayısıyla, (P,H) çiftine, bir genel Hartogs şekli nazarı ile bakılabilir.

Teorem 16.2.6.5. (G, π) C^n üzerinde bir Riemann bölgesi ve (P,H) verilmiş olsun. $x_0 \varepsilon G$ o şekilde seçilsin ki $\mathbf{H} < \mathbf{G} = (G, \pi, x_0)$. Bu taktirde herbir $f \varepsilon A(G)$, $\mathbf{G} \cup \mathbf{P}$ ye holomorfik temdit edilebilir.

İspat. $f|H$ nın bir $F \varepsilon A(G)$ holomorfik temditi vardır. $G_1 = \mathbf{G}$, $G_2 = \mathbf{P}$ ve $f_1 = f$, $f_2 = F$ vazedelim. $\mathbf{H} < \mathbf{G}_i$, $i = 1,2$ ve $f_1|H = f_2|H$ olduğundan, teorem 17.2.6.4 ten netice açıktır.

TARİF 36. C^n üzerinde bir (G, π) Riemann bölgesine psödokonveks denir, şayet (P,H) bir genel Hartogs şekli, ve $x_0 \varepsilon G$ için $\mathbf{H} < \mathbf{G} = (G, \pi, x_0)$ ise, $\mathbf{G} \cup \mathbf{P} < \mathbf{G}$.

TARİF 37. Bir $\mathbf{G} = (G, \pi, x_0)$ bölgesine bir holomorfi bölgesi denir, şayet $\exists f \varepsilon A(G) \ni H_f(G). = \mathbf{G}$

Teorem 16.2.6.6. (i) $\mathbf{G} = (G, \pi, x_0)$ C^n üzerinde noktalı bir Riemann bölgesi ve $F \neq \varnothing$ G üzerinde holomorf fonksyonların bir cümlesi ise, $H_F(G)$ psödokonveks bir bölgedir. (ii) Her holomorfi bölgesi psödokonvekstir.

İspat. Aşikârdır.

Ancak karşıt teoremin ispatı "G psödokonveks ise bir holomorfi bölgesidir" aşikâr değildir (Oka, 1953).

3. Holomorf Fonksyonların Sıfırları

16.3.1. **Kuvvet Serilerinin Cebiri.** Bu kısımda $z = 0$ etrafında yakınsak $\Sigma a_\nu z^\nu$ kuvvet serileri gözönüne alınarak, teorem 4.8.5.3 ün bir benzeri teoremi (Weierstrass hazırlık teoremi) ispat edilecektir.

Hatırlatalım ki, bir $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ formel kuvvet serisine yakınsaktır denir şayet $f(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$, $z = 0$ etrafında bir polidiskte yakınsak ise.

$z = 0$ etrafında bir polidiskte yakınsak kuvvet serilerinin halkası H_n ile gösterilecektir. Bu kısımda H_n ile ilgileneceğiz.

TARİF 37. Bir B cümlesine C-cebiri denir, şayet şu şartlar sağlanıyorsa:

(i) B, bir C–vektör uzayıdır

(ii) B, 1 özdeş elemanlı komütatif bir halkadır.

(iii) $\forall f, g \varepsilon B$ ve $\forall c \varepsilon C$ için $c(f.g) = (cf).g = f.(cg)$.

Bu tarife göre, $z = 0$ etrafında ki yakınsak kuvvet serilerinin cümlesi, ki C yi ihtiva ediyor, aynı zamanda bir halka ve bir C–cebiridir.

TARİF 38. $t = (t_1, \ldots, t_n) \varepsilon R^n$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$, ve $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ olsun. f nin t ye nazaran normu diye

$$\|f\|_t = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| t^\nu \geq 0$$

sayısına denir.

$t_1, \ldots, t_n \geq 0$ yerine kısaca $t \geq 0$ yazacağız. $t \leq t^*$ demek $t_i \leq t_i^*$, $i = 1, \ldots, n$ demektir. $t \leq t^* \Rightarrow \|f\|_t \leq \|f\|_{t^*}$.

Teorem 16.3.1.1. $f = \sum_\nu a_\nu z^\nu$ yakınsaktır yalnız ve yalnız $\exists t \geq 0$, $\ni \|f\|_t < \infty$.

İspat. Farzedelim ki $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ merkezi $z = 0$ da olan bir P polidiskinde yakınsaktır. Bu demektir ki $\exists t > 0 \ni P_t \subset P$, ve dolayısıyla $\|f\|_t < \infty$.

Karşıt olarak, şayet $\|f\|_t = \sum_\nu |a_\nu| t^\nu < \infty$ ise, bu taktirde $f(z)$, t noktasında yakınsaktır ve dolayısıyla, bütün P_t de yakınsaktır.

Notasyon:

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \text{ ise } \nu' = (\nu_2, \ldots, \nu_n)$$
$$t = (t_1, \ldots, t_n) \text{ ise } t' = (t_2, \ldots, t_n)$$
$$z = (z_1, \ldots, z_n) \text{ ise } z' = (z_2, \ldots, z_n)$$

vazediliyor ve $\nu = (\nu_1, \nu')$, $t = (t_1, t')$. $z = (z_1, z')$ yazılıyor. $t > 0$ demek, $t_1 t_2 \ldots t_n > 0$ demektir.

Diğer taraftan, $f = \sum_\nu a_\nu z^\nu \in B$ (Formel serilerin Banach cebiri)

$$f(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(z') z_1^\lambda , \qquad (17.3.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$f_\lambda(z') = \sum_{\nu'=0}^{\infty} a_{\lambda, \nu'} (z')^{\nu'}.$$

(17.3.1.1) temsiline, f nin z_1 re nazaran açılımı denir.

TARİF 39. $t > 0$ için $B_t = \{f(z) \varepsilon B; \|f\|_t < \infty\}$.

Not. Bir karışıklığa mahal vermiyen hallerde, $t > 0$ verilmiş ise, B_t, B'_t, $\|f\|_t$ yerine sırasıyla, B, B', $\|f\|$ yazacağız.

TARİF 40. Bir B cümlesine Banach Cebri denir şayet

1. B bir C–cebiri ise

2. Her $f \varepsilon B$ ye bir $\|f\| \geq 0$ sayısı tahsis edildiğinde bu sayı bir normun özelliklerini haiz ise:

a. $c \varepsilon C$, $f \varepsilon B$ için $\|cf\| = |c| \, \|f\|$

b. $f, g \varepsilon B$ için $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$

c. $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

3. $\|f.g\| \leq \|f\| \, \|g\|$, $f,g \varepsilon B$

4. Normlu C–vektör uzayı olarak, B tam ise.

Yani, B ye ait herbir (f_ν) Cauchy dizisi B ye ait bir f elemanına yakınsıyorsa.

Görülür ki her $t > 0$ için B_t bir Banach cebridir.

Teorem 16.3.1.2. $t > 0$ verilmiş olsun.

1. $f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda z_1^\lambda \varepsilon B_t$, yy. $f_\lambda \varepsilon B_t' = B_t \cap B'$, $\forall \lambda$; ve

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \|f_\lambda\| \, t_1^\lambda < \infty .$$

2. $\|z_1^s f\| = t_1^s \, \|f\|$, $s \geq 0$ tam sayı.

3. $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu < \infty$ ve $a_0 = 0$ ise bu taktirde, her $\varepsilon > 0$ için, $\exists$ $t > 0 \ni \|f\|_t < \varepsilon$.

İspat. Mesela, 1. yi ispat edelim.

$$\|f\| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| t^\nu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu'=0}^{\infty} |a_{\lambda,\nu'}| \, t'^{\nu'} \right) t_1^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \|f_\lambda\| t_1^\lambda .$$

TARİF 41. $f \in B$ ye birim denir şayet $\exists g \varepsilon H_n \ni fg = 1$. Yani $f^{-1} \varepsilon H_n$ ise.

Teorem 16.3.1.3. B bir Banach cebiri, $f \varepsilon B$ ve $\|1-f\| < 1$ ise, bu taktirde, f B de bir birimdir ve $\|f^{-1}\| \leq 1/(1-\|1-f\|)$.

İspat. $g = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (1-f)^\lambda$ serisini gözönüne alalım ve kolaylıklık olmak üzere $\varepsilon = \|1-f\|$ vazedelim. Bu taktirde $0 \leq \varepsilon < 1$ ve $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon^\lambda$, g nin bir majorantıdır. Dolayısıyla $\sum_{\lambda=0}^{\infty} (1-f)^\lambda < \infty$ ve $g \varepsilon B$. Üstelik $fg = (1-(1-f))g = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (1-f)^\lambda - \sum_{\lambda=0}^{\infty} (1-f)^{\lambda+1}$ özdeşliğinde seriler açılır ve terim terime

toplanırsa $fg = (1-f)^0 = 1$ bulunur. Diğer taraftan

$$\|g\| = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon^\lambda = \frac{1}{1-\varepsilon} .$$

TARİF 42. $g \varepsilon B$, z_1 re göre regülerdir denir şayet $g(z_1,0) \not\equiv 0$.

TARİF 43. $g = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda z_1^\lambda$, z_1 re göre regüler olsun. Bu taktirde g nin mertebesi diye, ord(g) yazılır, $s \geq 0$ sayısına denir $\ni g_0(0) = \ldots = g_{s-1}(0)$, $g_s(0) \neq 0$.

Teorem 16.3.1.4. $g_1, g_2 \varepsilon B$, için

1. $g_1 g_2$, z_1 re göre regülerdir yy. g_1 ve g_2 z_1 re göre regüler ise.

2. ord$(g_1 g_2)$ = ord(g_1) + ord(g_2)

3. ord$(g_1+g_2) \geq$ min(ord(g_1), ord(g_2))

4. ord$(g) = 0$ yy. g bir birim ise.

İspat. İster formel kuvvet serilerinin cümlesi, ister B olsun, 1 özdeş elemanlı bu komütatif halkalar aynı zamanda bir tamlık bölgesidir, yani sıfır böleni yoktur, bu demektir ki halkaya ait iki elemanın çarpımı 0 ise çarpanlardan en az birtanesi sıfırdır. Bu hatırlatıldıktan sonra, mesela 1. yi ispatlayalım.

$$(g_1 g_2)(z_1,0) = g_1(z_1,0) \, g_2(z_1,0)$$

olduğundan, B de bir tamlık bölgesi olduğuna göre istenilen netice elde edilir.

Lemma. $g \varepsilon B$, z_1 re göre regüler ve ord$(g) = s$ olsun. Bu taktirde herbir $\varepsilon > 0$ ve herbir $t_0 > 0$ ra karşılık bir $t \leq t_0$ vardır $\ni g \varepsilon B_t$, g_s, B_t' de bir birimdir ve $\| z_1^s - g g_s^{-1} \|_t \leq \varepsilon t_1^s$.

İspat. $g = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda z_1^\lambda$, g nin z_1 re nazaran açılımı olsun. Bu taktirde hipotezden ötürü, $g_\lambda(0) = 0$, $\lambda = 0,1,\ldots,s-1$ ve $g_s(0) \neq 0$.

1. g yakınsak olduğundan, $\exists t^1 = (t_1^1,\ldots,t_n^1) > 0 \ni$ $\| g \|_{t^1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \| g_\lambda \|_{t^1} (t_1^1)^s < \infty$. Binaenaleyh, $g_\lambda \varepsilon B'_{t^1}$ (teorem 16.3.1.2). Özel olarak,

$$\frac{g_s(z')}{g_s(0)} - 1 = f(z') \varepsilon B'_t .$$

Fakat $f(0) = 0$ olduğundan $\exists t^2 < t^1 \ni$ bütün $t \leq t^2$ için $\|f\|_t < 1$. Teorem 16.3.1.3 den dolayı $g_s/g_s(0)$ ve dolayısıyla g_s, B_t' de bir birimdir. Üstelik açık olarak $g \in B_t$ (teorem 16.3.1.2).

2. $h = z_1^s - gg_s^{-1}$ vazedelim. Bu taktirde $h \varepsilon B_t$, $\forall t \leq t^2$, ve

$h = \sum_{\lambda=0}^{\infty} h_\lambda z_1^\lambda$ yazabiliriz. O halde $\sum_{\lambda=0}^{\infty} h_\lambda z_1^\lambda = z_1^s - \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_s^{-1} g_\lambda z_1^\lambda$. Dolayısıyla,

$h_s = 0$, $\lambda \neq s$ için $h_\lambda = -g_\lambda g_s^{-1}$, ve $\lambda = 0,1,\ldots, s-1$ için $h_\lambda(0) = 0$.

Binaenaleyh, $t \leq t^2$ için

$$\| \sum_{\lambda=s+1}^{\infty} h_\lambda z_1^\lambda \|_t = \| z_1^{s+1} \sum_{\lambda=s+1}^{\infty} h_\lambda z_1^{\lambda-s-1} \|_t$$

$$= t_1^{s+1} \| \sum_{\lambda=s+1}^{\infty} h_\lambda z_1^{\lambda-s-1} \|_t \leq t_1^{s+1} \| \sum_{\lambda=s+1}^{\infty} h_\lambda z_1^{\lambda-s-1} \|_{t^2}$$

3. t_1 yeter derecede küçük alınırsa

$$t_1 \| \sum_{\lambda=s+1}^{\infty} h_\lambda z_1^{\lambda-s-1} \|_{t^2} < \tfrac{1}{2} \varepsilon .$$

Dolayısıyla,

$$\| \sum_{\lambda=s+1}^{\infty} h_\lambda z_1^\lambda \|_t \leq \tfrac{1}{2} \varepsilon t_1^s .$$

Diğer taraftan, $\lambda = 0,1,\ldots,s-1$ için $h_\lambda(0) = 0$ olduğundan, t_1 için yeteri kadar küçük bir t' seçebiliriz $\ni$

$$\sum_{\lambda=0}^{s-1} \| h_\lambda \|_{t'} t_1^\lambda < \tfrac{1}{2} \varepsilon t_1^s .$$

Neticede $t = (t_1, t')$ için

$$\| h \|_t \leq \sum_{\lambda=0}^{s-1} \| h_\lambda \|_{t'} t_1^\lambda + \| \sum_{\lambda=s+1}^{\infty} h_\lambda z_1^\lambda \|_t \leq \varepsilon t_1^s .$$

Not. Bir biholomorfik tasvir ile, $0 \not\equiv g \varepsilon H_n$ daima z_1 re göre regüler bir g' εH_n kuvvet serisine dönüştürülebilir.

TARİF 44. Galois Teorisindeki notasyona uyarak, $H_{n-1}[z_1]$, katsayıları H_{n-1} halkasına ait z_1 re göre polinomların halkasını gösterecektir.

Polinomların dereceleri ∂ notasyonu ile gösterilecektir.

Teorem 16.3.1.5 (Weierstrass Formülü). $g \varepsilon B(H_n)$ z_1 regöre regüler ve $\mathrm{ord}(g) = s$ olsun. Herbir $f \varepsilon B(H_n)$ için $\exists$ birtek $q \varepsilon B(H_n)$ ve birtek $r \varepsilon B'[z_1](H_{n-1}[z_1])$, $\partial r < s$, $\ni f = qg + r$.

İspat. Lemmadan ötürü $0 < \varepsilon < 1$ için $\exists t > 0 \ni f, g \varepsilon B_t$, $g_s \varepsilon B'_t$ bir birimdir ve $\| z_1^s - gg_s^{-1} \|_t \leq \varepsilon t_1^s$.

Bir $f \varepsilon B$ den başlamak üzere, tüme varım ile (f_λ), (q_λ) ve (r_λ) dizilerini inşa edelim. $f_0 = f$ vazedelim ve farzedelim ki $f_0, \ldots, f_\lambda$ inşa edilmiştir. f_λ yı aşağıdaki şekilde temsil edelim.

$$f_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} f_{\lambda,k} z_1^k ,$$

ve

$$q_\lambda = \sum_{k=s}^{\infty} f_{\lambda,k} z_1^{k-s}, \quad r_\lambda = \sum_{k=0}^{s-1} f_{\lambda,k} z_1^k, \quad f_{\lambda+1} = (z_1^s - gg^{s-1}) q_\lambda$$

tarif edilsin. Bu taktirde,

$$f_\lambda = z^s{}_1 q_\lambda + r_\lambda, \; f_{\lambda+1} = hq_\lambda = (z_1^s - gg_s^{-1}) q_\lambda = z_1^s q_\lambda - gg_s^{-1} q_\lambda ,$$

yazılabilir ve

$$f_\lambda - f_{\lambda+1} = r_\lambda + gg_s^{-1} q_\lambda .$$

Açık olarak,

(1) $\| r_\lambda \| \leq \| f_\lambda \|$,

(2) $\| q_\lambda \| \leq t_1^{-s} \| f_\lambda \|$,

(3) $\| f_{\lambda+1} \| \leq \| h \| . \| q_\lambda \| < \varepsilon \| f_\lambda \|$, (lemma)

ve dolayısıyla $\| f_{\lambda+1} \| < \varepsilon \| f_\lambda \|$ elde edilir ve $\lambda = 0,1,\ldots,\lambda-1$ yapılır taraf tarafa çarpılırsa,

(4) $\| f_\lambda \| < \varepsilon^\lambda \| f \|$

bulunur. Şimdi,

(5) $q = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_s^{-1} q_\lambda, \quad r = \sum_{\lambda=0}^{\infty} r_\lambda$

vazedelim. Bu taktirde,

$$\| g_s^{-1} q_\lambda \| < \varepsilon^\lambda t_1^{-s} \| g_s^{-1} \| . \| f \|, \quad \| r_\lambda \| = \varepsilon^\lambda \| f \|.$$

Mukayese testlerinden dolayı seriler yakınsaktır. Herbir r_λ polinomunun derecesi $\partial(r_\lambda) \leq s-1$ olduğundan $\partial(r) \leq s-1$.

Nihayet $\sum_{\lambda=0}^{\infty} r_\lambda < \infty$ olduğundan

$$f = f_0 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda - \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (f_\lambda - f_{\lambda+1}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (r_\lambda + gg_s^{-1} q_\lambda)$$

$$= g \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_s^{-1} q_\lambda + \sum_{\lambda=0}^{\infty} r_\lambda = gq + r.$$

Birtekliğin ispatına gelince, farzedelim ki f iki şekilde ifade edilebilir. Yani,

$$f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2.$$

Bu taktirde $0 = (q_1 - q_2)g + (r_1 - r_2)$. Diğer taraftan, $g = g_0(z_1^0 - h) \ni \|h\| < \varepsilon t_1^s$. O halde,

$$0 = (q_1 - q_2)\, g_s z_1^s - (q_1 - q_2)\, g_s h + (r_1 - r_2)\,,$$

ve

$$\begin{aligned} \|(q_1 - q_2)\, g_s z_1^s\| &\leq \|(q_1 - q_2)\, g_s z_1^s + (r_1 - r_2)\| \\ &= \|(q_1 - q_2)\, g_s h\| \leq \varepsilon t_1^s \|(q_1 - q_2) g_s\| \\ &= \varepsilon \|(q_1 - q_2)\, g_s z_1^s\|\,. \end{aligned}$$

Fakat $\varepsilon < 1$ olduğundan $\|(q_1 - q_2) g_s z_1^s\| = 0$. O halde $q_1 = q_2$ ve dolayısıyla $r_1 = r_2$.

Not. (5), (2) ve (4) gözönünde tutulursa:

$$\|g_s q\| = \|\sum_{\lambda=0}^{\infty} q_\lambda\| \leq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \|q_\lambda\| \leq t_1^{-s} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \|f_\lambda\| = t_1^{-s} \|f\| \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon^\lambda = t_1^{-s} \|f\| \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Netice Teorem. Şayet $f, g \in B'[z_1]$ ve $\partial(g) = s$ ise bu taktirde $q \in B'[z_1]$.

Teorem 16.3.1.6. (Weierstrass Hazırlık teoremi). $g \in B(H_n)$ z_1 re göre regüler ve $\mathrm{ord}(g) = s$ olsun. Bu taktirde $\exists$ birtek birim $e \in B(H_n)$ ve birtek normalize polinom $\omega \in B'[z_1](H_{n-1}[z_1])$, $\partial(\omega) = s \ni g = e\omega$. Yani $g = e(z_1^s + \omega_1 z_1^{s-1} + \ldots + \omega_s)$, $\omega_i \in B'(H_{n-1})$.

İspat. Lemmadan dolayı $\exists t > 0 \ni B_t$ de g şu şartları sağlıyor.

a) $g_s \in B_t'$ bir birimdir.

b) $\|z_1^s - g g_s^{-1}\| < \frac{1}{2} t_1^s$.

Şimdi Weierstarss formülünü $f = z_1^s$ ye tatbik edelim. Bu taktirde birtek $q \in B_t$ ve birtek $r \in B_t'[z_1]$ vardır $\ni$

$$z_1^s = qg + r, \quad \partial(r) < s \tag{16.3.1.1}$$

(Lemmada ve dolayısıyla teorem 16.3.1.5 de $\varepsilon < \frac{1}{2}$ alınıyor). Fakat bu taktirde, (17.3.1.1) de gözönünde bulundurulursa,

$$z_1^s - g g_s^{-1} = (q - g_s^{-1}) g + r$$

Weierstrass formülü anlamında bir temsildir. Teorem 16.3.1.5 ile ilgili not üstteki formüle tatbik edilirse,

$$\|q g_s - 1\| = \|(q - g_s^{-1}) g_s\| \leq t_1^{-s} \|z_1^s - g g_s^{-1}\| \frac{1}{1-\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1.$$

Binaenaleyh, teorem 16.3.1.3 den dolayı $q g_s$ ve dolayısıyla q, B_t de bir birimdir. Şimdi,

$$e = q^{-1}, \quad \omega = z_1^s - r$$

vazedilir ve (17.3.1.1) gözönünde bulundurulursa,

$$e\omega = q^{-1}(z_1^s - r) = g$$

bulunur.

Farzedelim ki g nın iki temsili vardır:

$$g = e_1\omega_1 = e_1(z_1^s - r_1), \quad g = e_2(z_1^s - r_2).$$

Bu taktirde,

$$g e_1^{-1} + r_1 = z_1^s = g e_2^{-1} + r_2\,.$$

Fakat (16.3.1.1) de q, r birtektirler. Şu halde $e_1 = e_2$, $r_1 = r_2$.

Netice Teorem. g, z_1 re göre bir polinom ise, e de z_1 in bir polinomudur.

Not 1. $\omega = z_1^s + \omega_1 z_1^{s-1} + \ldots + \omega_s$ normalize polinomuna Weierstrass polinomu denir. $\omega_i \in B'(H_{n-1})$, $i = 1,\ldots,s$, katsayılarında sabit terim yoktur.

Gerçekten,

$$\mathrm{ord}\,(g) = \mathrm{ord}\,(e) + \mathrm{ord}\,(\omega).$$

Binaenaleyh,

$$s = \mathrm{ord}\,(z_1^s + \omega_1 z_1^{s-1} + \ldots + \omega_s).$$

Farzedelim ki bir ω_i için $\mathrm{ord}(\omega_i) = 0$. Bu taktirde,

$$\mathrm{ord}\,(z_1^s + \omega_1 z_1^{s-1} + \ldots + \omega_s) = s - i < s.$$

2. g nin sıfırda bir sıfırı vardır yalnız ve yalnız $\omega(0) = 0$ ise, ve $\omega(0) = 0$ yalnız ve yalnız $\omega_s(0) = 0$ ise. Halbuki $\omega_s = \omega_s(z') \in B'(H_{n-1})$. Demek ki Weierstrass hazırlık teoremi holomorf fonksyonların sıfırlarını adım adım incelemek için bir kriterdir.

4. Kuvvet Serileri Halkaları

16.4.1. **Tamlık Bölgeleri.** Biliyoruz ki, $z_1,\ldots,z_n$ ye göre bir nokta etrafındaki formel kuvvet serileri veya yakınsak kuvvet serilerinin cümlesi 1 özdeş elemanlı komutatif ve sıfır böleni olmayan bir halka teşkil ederler.

Bu halkalara tamlık bölgesi denir. Aksi söylenmedikçe, R daima bir tamlık bölgesini gösterecektir. Bunlar hakkında Standart bilgileri hatırlatıyoruz.

TARİF 45. 1. Bir $a \in R$ elemanına birim denir, şayet a nın R de bir inversi varsa, başka bir deyim ile 1 ri bölüyorsa.

2. $a, b \in R$ elemanlarına eşdeğer dir diyoruz şayet $a = eb$, e birim, yazılabiliyorsa.

3. $a \in R$, indirgeniyor denir, şayet a, birim olmıyan iki elemanın çarpımı olarak yazılabiliyorsa: $a = bc$, $b, c \in R$.

Aksi halde, a ya indirgenmiyor veya asal[1] denir.
Yani $a = bc \Rightarrow$ ya b veya c birimdir.

TARİF 46. R ye, çarpanlara birtek şekilde ayrılış (UFD) bölgesi denir, şayet R ye ait ve birim olmıyan herbir eleman, sıra ve eşdeğerlik hariç, birtek şekilde asalların çarpımı olarak yazılabiliyorsa.

TARİF 47. R nin bir I altcümlesine İdeal denir şayet

(i) $a,b \varepsilon I \Rightarrow a-b \varepsilon I$

(ii) $a \varepsilon I,\ r \varepsilon R \Rightarrow ar \varepsilon I$.

TARİF 48. R nin bir I idealine has ideal denir şayet $I \neq R$ ise.

TARİF 49. $I \subset R$ idealine maksimaldir denir şayet I bir has ideal ise $\ni J, I \subset J \subset R$ şartını sağlıyan herhangibir ideal ise, ya $I = J$ veya $J = R$ dir.

TARİF 50. R halkasına lokal halka denir şayet birtek maksimal ideali var ise.

TARİF 51. R ye ait birtek a elemanı tarafından tevlid edilen ideale, aslî ideal denir, ve I_a veya (a) ile gösterilir. Demek ki $I_a = \{ra;\ r \varepsilon R\}$.

TARİF 52. R ye aslî ideal bölge (PID) denir şayet R de herbir ideal aslî ise.

Teorem 16.4.1. F bir cisim ise F[X] polinom halkası bir UFD dir.

İspat. F[X] de Euclid algoritması muteberdir. Bu algoritmadan yararlanarak herbir idealin bir aslî ideal olduğu gösterilebilir. Fakat biliniyor ki herbir PID bir UFD dir. (bk. Galois Teorisi).

TARİF 53. 1. R bir tamlık bölgesi olsun. Bu taktirde, R nin bölüm cismi diye, Q(R) ile gösterilir,

$$Q = Q(R) = \{\frac{a}{b};\ a,b \varepsilon R,\ b \neq 0\}$$

cümlesine denir. R[X], R üzerinde polinom halkasıdır.

2. Q[X], Q üzerinde polinom halkasıdır. Normalize polinomların cümlesi $R^0[X]$ ve $Q^0[X]$ ile gösteriliyor.

Her iki cümle yalnız çarpıma nazaran kapalıdır.

Teorem 16.4.1.2. R bir UFD olsun. Farzedelim ki $\omega_1,\omega_2 \varepsilon Q^0[X]$ ve $\omega \varepsilon R^0[X]$ ve $\omega = \omega_1\omega_2$. Bu taktirde, $\omega_1,\omega_2 \varepsilon R^0[X]$.

İspat. $\lambda = 1,2$ için $\omega_\lambda = X^{s_\lambda} + a_{\lambda,1}X^{s_\lambda - 1} + \ldots + a_{\lambda,s_\lambda}$, $a_{\lambda,\mu_\lambda} \varepsilon Q$.
Binaenaleyh, $\exists d_\lambda \varepsilon R \ni d_\lambda\omega_\lambda \varepsilon R[X]$.

[1] İndirgenmiyor ve asal tabirleri bir UFD (bk Tarif 46) bölgesinde çakışırlar. Yani her asal indirgenmiyordur fakat karşıtı her tamlık bölgesi için doğru değildir.

$d = d_1d_2$ vazedelim. Farzedelim ki $\exists p$, asal eleman $\ni p \mid d$.

Bu demektir ki d, $d_\lambda\omega_\lambda$ yı bölmüyor. d_λ katsayısından başlamak üzere farzedelim ki d nin bölmediği ilk katsayı a_{λ,μ_λ} dir. Bu takdirde $(d_1\omega_1)\ (d_2\omega_2) = \ldots + X^{\mu_1+\mu_2}[(d_1a_{1,\mu_1})\ (d_2a_{2,\mu_2}) + p$ tarafından bölünen terimler$] + \ldots$. Dolayısıyla, $X^{\mu_1+\mu_2}$ nin katsayısı p ile bölünmüyor. Binaenaleyh p, $(d_1\omega_1)\ (d_2\omega_2)$ yı bölmüyor. Bu ise $\omega \in R^0[X]$ ile $p \mid d$ ye tezattır. Yani d nin asal bölenleri yoktur. O halde R de $d = d_1d_2$ bir birimdir. Binaenaleyh d_λ bir birimdir. Halbuki $d_\lambda\omega_\lambda \in R[X]$ idi. $d_\lambda \in R$ birim olduğundan $d_\lambda^{-1} \in R$ ve $d_\lambda^{-1}d_\lambda\omega_\lambda \in R[X]$. Fakat $d_\lambda^{-1}d_\lambda = 1$. Dolayısıyla $\omega_\lambda \in R^0[X]$.

Lemma 1 (Gauss). R UFD ise R[X] ve $R^0[X]$ de UFD dir.

İspat. Hatırlatalım ki normalize iki polinomun çarpımı yine normalizedir, fakat toplamı değildir. Binaenaleyh $R^0[X]$ notasyonu yalnız çarpımla alakalıdır.

Farzedelim ki $\omega \in R^0[X]$. Fakat $R^0[X] \subset Q[X]$ ve dolayısıyla $\omega \in Q[X]$. Teorem 17.3.2.1 den dolayı birtek olarak $\omega = \omega_1 \ldots \omega_k \ni \omega_\lambda \in Q[X]$ asaldır, $\lambda = 1, \ldots, k$. d_λ, ω_λ nın başkatsayısı olsun (en yüksek dereceli terimin katsayısı). Açık olarak $1 = d_1 \ldots d_k$. Binaenaleyh

$$\omega = \frac{\omega}{d_1 \ldots d_k} = \left(\frac{\omega_1}{d_1}\right) \ldots \left(\frac{\omega_k}{d_k}\right).$$

Görülüyor ki, genelliğe halel getirmeden ω_λ normalize farzedilebilir.

Teorem 16.4.1.2 den dolayı $\omega_\lambda \in R^0[X]$. Yine de göstermeliyiz ki ω_λ, $R^0[X]$ de de asaldır. Farzedelim ki $\omega_\lambda \mid \omega'\omega''$, $\omega', \omega'' \in R^0[X]$. Bu idoia Q[X] de de muteberdir. Yani $\omega_\lambda \mid \omega'$ veya $\omega_\lambda \mid \omega''$. Diyelim ki $\omega_\lambda \mid \omega'$. Bu taktirde, $\omega' = \omega_\lambda.\omega_\lambda'$, $\omega_\lambda' \in Q[X]$ yazabiliriz. Dolayısıyla $\omega_\lambda' \in Q^0[X]$. Teorem 17.4. 1.2 den dolayı $\omega_\lambda' \in R^0[X]$. O halde, ω_λ $R^0[X]$ de asaldır.

TARİF 43 te, $g \in H_n$ serisinin mertebesinin tarifinde $g = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda z^\lambda{}_1$ temsili kullanılmıştı. Oysa doğrudan doğruya $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ serisi kullanılabilir. Ancak burada serinin, homogen polinomların serisi şeklinde mütala edilmesinde yarar vardır: $f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda$

TARİF 54. $\mathrm{ord}(f) = \min\{\lambda \geq 0;\ p_\lambda \neq 0\}$, $\mathrm{ord}(0) = \infty$.

Teorem 16.4.1.3. $f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda$ herhangibir kuvvet serisi olsun. Bu seri değişkenlerin bir lineer değişimi ile z_1 re göre regüler bir seri şeklinde yazılabilir. Bu değişken değişiminde mertebe: $\mathrm{ord}(f)$ değişmez.

İspat. f yakınsak ve $\mathrm{ord}(f) = s$ olsun.

$$z_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\zeta_k, \quad \det(\alpha_{jk}) \neq 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

vazedelim. Bu taktirde,

$$g(\zeta) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k}\zeta_k,\dots,\sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk}\zeta_k\Big) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda'(\zeta).$$

Görülür ki $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(f)$. Hatta $\mathrm{ord}(p_\lambda) = \mathrm{ord}(p'_\lambda)$.

Diğer taraftan, $\zeta_2 = \zeta_3 = \dots = \zeta_n = 0$ için

$$f(\alpha_{11}\zeta_1,\dots,\alpha_{n1}\zeta_1) = g(\zeta_1,0).$$

Binaenaleyh, $p'_s(\zeta_1,0)$, α_{j1}, $j = 1,\dots,n$, uygun seçildiği taktirde, sıfır değildir. Nihayet (α_{jk}) matrisi $\det(\alpha_{jk}) \neq 0$ olacak şekilde tamamlanabilir.

Şayet, $f(z)$ yakınsak değilse,

$$f = p_s + p_{s+1} + \dots p_s \not\equiv 0,$$

$\ni p_j$, $j = s, s+1,\dots$, $z_1,\dots,z_n$ ye göre homogen polinomlardır $\ni \mathrm{ord}(p_j) = j$. Bu taktirde yukardaki muhakeme p_s ye tatbik edilebilir.

Teorem 16.4.1.4. H_n bir UFD dir.

İspat. n üzerinde tüme varım ile yürütülecektir. $n = 1$ halinde, birimler ve mertebeleri 1 olan elemanlar indirgenmiyorlar. Gerçekten, $f \varepsilon H_1$ birim değil, ve $\mathrm{ord}(f)$ 1 ise $f = zg$, $g \varepsilon H_1$ birim. Fakat $\mathrm{ord}(f) > 1$ eşitsizliğini sağlıyan bütün elemanlar indirgeniyor. Zira, $\mathrm{ord}(f) = s > 1 \Rightarrow$

$$f = z^s g(z),$$

$g(z) \in H_1$ birim. Üstelik yukardaki ayrılış birtektir.

Şimdi farzedelim ki H_{n-1} bir UFD dir. $f \varepsilon H_n$ olsun. Farzedelim ki f, orijinde normalizedir. Weierstrass hazırlık teoremine göre

$$f = e\omega = e(z_1^s + a_1 z^{s-1} + \dots + a_s), \quad \omega \varepsilon H_{n-1}[z_1].$$

1. Önce gösterelim ki f, H_n de asaldır yy. ω, $H_{n-1}[z_1]$ de asal ise. Gerçekten, farzedelim ki ω indirgeniyor, yani $\omega = \omega_1\omega_2$, $\omega_1,\omega_2 \varepsilon H_{n-1}[z_1]$. Bu taktirde, $f = e\omega_1\omega_2 \varepsilon H_n$, $\omega_1,\omega_2 \varepsilon H_n$.

Karşıt olarak, farzedelim ki, f indirgeniyor: $f = f_1 f_2$, $f_1, f_2 \varepsilon H_n$. Fakat $f_1 = e_1\omega_1$, $f_2 = e_2\omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \varepsilon H_{n-1}[z_1]$. Dolayısıyla, $f = (e_1e_2)\omega_1\omega_2$. Bir teklikten dolayı $e_1e_2 = e$ ve $\omega = \omega_1\omega_2 \varepsilon H_{n-1}[z_1]$.

2. $f \varepsilon H_n \Rightarrow f = e\omega$. $H_{n-1}[z_1]$ hem hipotez hem de Gauss lemmasından dolayı UFD olduğundan, $\omega = \omega_1 \dots \omega_r$ nin indirgenmeyen Weierstrass polinomlarına ayrılışı birtektir. Gösterelim ki H_n de

$$f = e\omega_1 \dots \omega_r$$

ayrılışı da birtektir. Aksi halde,

$$f = t_1 \dots t_l,$$

f nin ikinci bir ayrılışı olsun. Weierstrass hazırlık teoreminden ötürü

$$t_i = e_i\omega'_i, \quad \omega'_i \varepsilon H_{n-1}[z_1], \quad i = 1,\dots,l,$$

yazabiliriz. Birteklikten dolayı $e = e_1 \dots e_l$ ve $H_{n-1}[z_1]$ de

$$\omega_1 \dots \omega_r = \omega'_1 \dots \omega'_l.$$

Halbuki $H_{n-1}[z_1]$ UFD dir. Dolayısıyla,

$$\{\omega_1,\dots,\omega_r\} = \{\omega'_1,\dots,\omega'_l\}.$$

16.4.2. **Hensel Halkaları.** R, I özdeş elemanlı komütatif bir C-cebri, I de R nin, birim olmıyan bütün elemanlarından müteşekkil bir ideali olsun. Diğer taraftan, $\pi: R \to R/I$ sürjektif kanonik projeksyon ve $\iota: C \to R$ kanonik monomorfizm olsun.

Lemma 2. F bir cisim, R bir halka ve $\Phi: F \to R$ bir homomorfizm olsun. Bu taktirde, Φ ya sıfır homorfizmdir, veya bir monomorfizmdir.

İspat. Farzedelim ki Φ momorfizm değildir. Gösterelim ki bu taktirde Φ bir sıfır homomorfizmdir. Gerçekten, Φ birebir olmadığından, F ye ait iki farklı a,b elemanları vardır $\ni \Phi(a) = \Phi(b)$. Şimdi $k = a-b$ vazedelim. Bu taktirde,

$$\Phi(k) = \Phi(a+(-b)) = \Phi(a) + \Phi(-b) = \Phi(a) - \Phi(b) = 0.$$

Diğer taraftan,

$$a \neq b \Rightarrow k \neq 0 \Rightarrow \exists k^{-1}.$$

O halde, $x \varepsilon F$, herhangibir eleman ise,

$$x = k(k^{-1}x)$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\Phi(x) = \Phi(k(k^{-1}x)) = \Phi(x)\Phi(k^{-1}x) = 0.$$

Yani Φ bir sıfır homomorfizmdir.

Not. R bir cisim ise Φ, özdeş elemanı özdeş elemana tasvir ettiğinden monomorfizmdir.

Teorem 16.4.2.1. (i) I, R nin yegâne maksimal idealidir.

(ii) R/I bir cisimdir. (iii) $\pi o \iota: C \to R/I$ bir monomorfizmdir.

İspat. (i) $M \subset R$ herhangibir maksimal ideal olsun. M bir birim ihtiva ediyorsa 1 ri ihtiva eder. Bu taktirde $M = R$. Halbuki M has bir idealdir. O halde $M \neq R$. Dolayısıyla $M \subset I$ ve $M = I$. (ii) $0 \neq \pi(a) \varepsilon R/I$ olsun. $\pi(a) \neq 0 \Rightarrow a \notin I \Rightarrow a$ birim değildir. $\Rightarrow \exists a' \varepsilon R \ni aa' = 1 \Rightarrow \pi(a)\pi(a') = \pi(aa') = \pi(1) = 1 \varepsilon R/I$. Binaenaleyh R/I bir cisimdir.

(iii) $\pi o \iota : C \to R/I$ bir halka homomorfizmidir. R/I cisim olduğundan lemma 2 den dolayı $\pi o \iota$ bir monomorfizmdir.

TARİF 55, R, 1 elemanlı komütatif bir halka, R ye lokal C-cebri denir şayet,

1. R ye ait bütün birimlerin cümlesi R nin bir ideali,
2. $\pi o \iota : C \to R/I$ kanonik halka monomorfizmi bir izomorfizm ise.

Teorem 16.4.2.2. H_n bir lokal C-cebridir.

İspat. 1. $I = \{f \in H_n;\ f(0) = 0\}$ açık olarak H_n nin bir idealidir. Hatta yegâne maksimal idealidir. 2. $f \in H_n$, $f = \iota(f(0)) + (f - \iota(f(0)))$ şeklinde yazılabilir. Bu yazılışta, $f - \iota(f(0)) \in I$. Dolayısıyla $\pi(f) = \pi o \iota(f(0))$. Binaenaleyh, R/I de herhangibir $\pi(f)$ elemanı verildiğinde $\exists f(0) \in C \ni f(0) = (\pi o \iota)^{-1} o \pi(f)$.

Şimdi, R bir lokal C-cebri, I yegâne maksimal ideali ve $\pi : R \to R/I$, $\iota : C \to R$ kanonik tasvirler olsun. Bu taktirde $\exists \rho : R[X] \to C[X] \ni \rho\left(\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu X^\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{n} (\pi o \iota)^{-1} o \pi(r_\nu) X^\nu$. Açıkça ρ sürjektiftir.

TARİF 56. R bir lokal C-cebri ve $\rho : R[X] \to C[X]$ yukardaki gibi olsun. R ye henselyendir denir şayet $\exists f_1, f_2 \in R[X]$ normalize polinomları $\ni \rho(f_1) = g_1$, $\rho(f_2) = g_2$ ve $f \in R[X]$ normalize polinom $\ni f = f_1 f_2$ ise, $\rho(f) = g_1 g_2$, $g_1, g_2 \in C[X]$ olmak üzere, $\rho(f)$ ifadesinde, g_1, g_2 normalize rölatif asal polinomlardır.

Lemma 3 (Hensel). $\omega(u,z) \in H_n^0[u]$ katsayıları H_n de olan normalize bir polinom olsun. Farzedelim ki $z = 0$ için $\omega(u,0) = \prod_{\lambda=1}^{l} (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$, ($\nu \neq \mu$ için $c_\nu \neq c_\mu$, ve $s_1 + \ldots + s_l = s = \partial\omega$) lineer çarpanlara ayrılıyor. Bu taktirde, birtek olarak $\omega_1, \ldots, \omega_l \in H^0_n[u]$ polinomları tesbit edilebilir $\ni$, $\partial\omega_\lambda = s_\lambda$ ve $\omega_\lambda(u,0) = (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$, $\lambda = 1, \ldots, l$ ve $\ni \omega = \omega_1 \ldots \omega_l$.

İspat. l üzerinde tüme varımla ispat edeceğiz. $l = 1$ için teorem aşikardır. Farzedelim ki teorem l—1 için de doğrudur.

1. Önce, $\omega(0,0) = 0$ farzedelim. Bu taktirde, mesela, $c_1 = 0$ alabiliriz. O halde $\omega(u,0) = u^{s_1}.h(u)$, $\partial h = s - s_1$ ve $h(0) \neq 0$. Bu demektir ki, ω, u ya göre regüler ve $\mathrm{ord}(\omega) = s_1$. Weierstrass hazırlık teoremi tatbik edilebilir: $\exists$ birim $e \in H_{n+1}$ ve $\omega_1 \in H^0_n[u]$, $\partial\omega_1 = s_1 \ni \omega = e\omega_1$. Netice teoremden dolayı $e \in H^0_n[u]$. Diğer taraftan, $\omega(0,0) = 0$ ve $e(0,0) \neq 0 \Rightarrow \omega_1(0,0) = 0$. Binaenaleyh, $\omega_1(u,0) = u^{s_1}$. Dolayısıyla $e(u,0) = h(u) = \prod_{\lambda=2}^{l} (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$. Tüme varım hipotezinden dolayı $\exists\, \omega_2, \ldots, \omega_l \in H^0_n[u]$, $\partial\omega_\lambda = s_\lambda$, $\omega_\lambda(u,0) = (u - c_\lambda)^{s_\lambda}$, ve $e = \omega_2 \ldots \omega_l$. Binaenaleyh $\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_l$ istenilen ayrılıştır.

2. $\omega(0,0) \neq 0$ ise, $\omega'(u,z) = \omega(u + c_1, z)$ vazedilir. Hal 1. şıkka irca edilmiş olur. Neticede, $\omega' = \omega'_1 \ldots \omega'_l$ ayrılışı bulunur. $\omega_\lambda(u,z) = \omega'_\lambda(u - c_1, z)$ vazedildiği taktirde teoremin istediği ayrılış elde edilir.

Teorem 16.4.2.3. H_n henseleyen bir halkadır.

İspat. Lemmanın bir neticesidir.

16.4.3. **Noether Halkaları.**

TARİF 57. R, 1 elemanlı komütatif bir halka olsun. R ye Noetheryen denir şayet herbir $I \subset R$ ideali sonlu tevlid ediliyorsa. Bir başka deyim ile, $\exists e_1, \ldots, e_q \in I$, $\ni$ herbir $e \in I$,

$$e = \sum_{\nu=1}^{q} r_\nu e_\nu, \quad r_\nu \in R,$$

şeklinde yazılabiliyorsa.

TARİF 58. Bir (sol) M, R–modülü, bir M Abelyen grup ve I elemanlı komütatif bir R halkasından müteşekkildir öyleki, $p : R \times M \to M$ operasyonu $p(r,e) = re$ şeklinde yazılmış olup aşağıdaki şartları sağlamaktadır.

1. $(r + r')e = re + r'e$, $\quad (rr')e = r(r'e)$
2. $r(e + e') = re + re'$, $\quad 1e = e$.

Bir M R–modülü bir vektör uzaydır $\ni$ skalerler R halkasını teşkil ederler. Yani, M, R üzerinde bir vektör uzaydır.

Misal 1. Herbir Abelyen grubuna bir Z–modül nazarı ile bakılabilir. Burada Z, tam sayılar cümlesidir.

2. $I \subset R$ bir ideal ise, $(I, +)$ ye bir R–modül nazarı ile bakılabilir. Burada $e \in I$, $r \in R$ olmak üzere $r\,e$ halkadaki çarpım operasyonudur.

TARİF 59. Bir M R–modülünün bir S altcümlesine altmodül denir ($S \subset M$ yazılır) şayet S, toplama nazaran kapalı ise ve $r \in R$, $s \in S \Rightarrow rs \in S$. Bu taktirde S nin kendisi bir R–modüldür. R nin kendisi de bir R–modüldür. R nin bir I altcümlesi öyle ki I toplama nazaran kapalı ve $rI \subset I$ dir, R nin bir altmodülüdür ve aynı zamanda R nin bir idealidir.

Bu izahatlar gözönünde tutulursa

TARİF 60. Bir M R–modülüne sonludur denir şayet $e_1, \ldots, e_q \in M$ elemanları varsa öyleki herbir $e \in M$ elemanı $e = \sum_{\nu=1}^{q} r_\nu e_\nu$, $r_\nu \in R$ şeklinde yazılabilir. Yani M sonlu tevlid ediliyor.

Diğer bir ifade ile, bir M R–modülüne sonludur denir şayet bir $q > 0$ tam sayısı ve bir $\varphi : M^q \to M$ R–modül epimorfizmi varsa. Burada M^q sembolü ile kartezyen çarpımın R–modülünü kastediyoruz, yani M^q R–modülünü kastediyoruz.

Not. Yukarda dedik ki R nin kendisi de bir R–modüldür. Burada $M = (R,+)$. Bu sebeple modül nazarı ile bakılan halkalarda M den bahis edilmez.

Teorem 16.4.3.1. R Noetheryen ise, R^q nun herbir altmodülü sonlu tevlid ediliyor. Başka bir deyimle R^q Noetheryen bir R-modüldür.

İspat. $q = 1$ ise, teorem tarif 57 den ibarettir. Teoremin *q–1* için doğru olduğunu kabul edelim. M, R^q nun herhangibir altmodülü ve π, R^q nun birinci komponentine projeksyonu olsun:

$$\pi(r_1,\ldots,r_q) = r_1.$$

πM, R nin bir ideali olduğundan sonlu tevlid ediliyor. Binaenaleyh, $m_1,\ldots,m_l \in M$ seçilebilir $\ni \pi m_1,\ldots,\pi m_l$, πM yi tevlid ediyor. Dolayısıyla, herbir $m \in M$ elamanı,

$$m = r_1 m_1 + \ldots + r_q m_q + m_0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $r_1,\ldots,r_q \in R$ ve $m_0 \in M \ni \pi m_0 = 0$. Fakat

$$M_0 = \{m \in M;\ \pi m = 0\},$$

ra R^{q-1} in bir altmodülü nazarı ile bakılabilir. Tüme varım hipotezinden dolayı M_0 ın sonlu tevlid edildiği kabul edilebilir. Dolayısıyla M sonlu tevlid ediliyor.

Teorem 16.4.3.2. H_n noetheryen bir halkadır.

İspat. $n = 0$ için $H_n = C$ ve teorem aşikârdır. Teoremin *n–1* için doğru olduğunu kabul edelim. $I \subset H_n$ bir ideal olsun. Farzedelim ki I, sıfır ideal değildir. Bu taktirde $\exists 0 \neq g \in I$. Bir σ lineer dönüşüm ile $g' = g \circ \sigma z_1$ re göre regüler ve $\mathrm{ord}(g') = \mathrm{ord}(g) = s$. $\sigma \Rightarrow \sigma^* : H_n \to H_n$ izomorfizm $\ni \sigma^*(g) = g'$. Aynı zamanda $\sigma^*(I)$ H_n de bir idealdir ve $\sigma^*(I)$ sonlu tevlid ediliyorsa $I = (\sigma^*)^{-1}\sigma^*(I)$ de sonlu tevlid ediliyor. Binaenaleyh genelliğe halel getirmeden g yi z_1 re nazaran regüler ve $\mathrm{ord}(g) = s$ farzedebiliriz. Şimdi, $\Phi_g : H_n \to (H_{n-1})^s$ homomorfizmini şöyle tarif ediyoruz. Biliyoruz ki her $f \in H_n$ için birtek $q \in H_n$ ve birtek $r = r_0 + r_1 z_1 + \ldots + r_{s-1} z_1^{s-1} \in H_{n-1}[z_1]$ elemanı vardır $\ni f = qg + r$. $\Phi_g(f) = (r_0,\ldots,r_{s-1})$ vazedelim. Φ_g bir H_{n-1} modül homomorfizmidir. Tüme varım hipotezinden dolayı H_{n-1} noetheryendir ve teorem 16.4.3.1 den ötürü de $(H_{n-1})^s$, noetheryen bir H_{n-1}-modüldür. $M = \Phi_g(I)$ bir H_{n-1} altmodüldür ve dolayısıyla sonludur. $r_\lambda = (r_0^\lambda,\ldots,r^\lambda{}_{s-1})$, $\lambda = 1,\ldots,l$ M nin generatörleri olsun. $f \in I$ keyfi ise, $f = qg + (r_0 + r_1 z_1 + \ldots + r_{s-1} z_1^{s-1})$

ve $a_1,\ldots,a_l \in H_{n-1}$ elemanları vardır öyleki $(r_0,r_1,\ldots,r_{s-1}) = \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda r_\lambda$.

Binaenaleyh

$$f = qg + \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda (r_0^\lambda + r_1^\lambda z_1 + \ldots + r^\lambda{}_{s-1} z_1^{s-1})$$

temsili elde edilir. Bir başka deyim ile

$$\{g, r_0^1 + \ldots + r^1{}_{s-1} z_1^{s-1}, \ldots, r_0^l + \ldots + r^l{}_{s-1} z_1^{s-1}\},$$

I nin bir generatör sistemidir.

TARİF 61. Gösterildi ki, H_n UFD, henselyen ve noetheryen C–cebridir. Şayet $I \subset H_n$ has bir ideal ise $A = H_n/I$ ye analitik cebir denir. A noetheryen ve henselyendir. Analitik cebirler, kompleks uzayların lokal teorisinde kat'i rol oynamaktadırlar.

Kompleks uzaylar, analitik cümleler teorisinin bir teşmilidir.

TARİF 62. $B \subset C^n$ açık bir cümle, $M \subset B$ bir altcümle ve $z^0 \in B$ bir nokta olsun. M ye z^0 da analitiktir denir şayet $\exists U = U(z^0) \subset B$ ve $f_1,\ldots,f_l$, U da holomorf $\ni$

$U \cap M = \{z \in U;\ f_1(z) = \ldots = f_l(z) = 0\}$.

M, B de analitiktir denir, şayet M, B nin her noktasında analitik ise.

TARİF 63. Şayet $B \subset C^n$ bir açık cümle ve $f_1,\ldots,f_l \in A(B)$ ise,

$$N(f_1,\ldots,f_l) = \{z \in B;\ f_1(z) = \ldots = f_l(z) = 0\}$$

cümlesine, $f_1,\ldots,f_l$ fonksyonlarının sıfır cümlesi denir.

Teorem 16.4.3.3. Şayet $B \subset C^n$ bir açık cümle ve $M \subset B$, B de bir analitik cümle ise, bu taktirde M, B de kapalıdır.

İspat. Göstereceğiz ki B–M açıktır. Şayet $z^0 \in B-M$ ise bu taktirde $\exists U = U(z^0) \subset B$ ve $f_1,\ldots,f_l \in A(U)$ öyleki $N(f_1,\ldots,f_l) = U \cap M$, $\ni$ meselâ $f_1(z^0) \neq 0$. Bu taktirde bütün bir $V = V(z^0) \subset U$ cıvarında $f_1|V \neq 0$, ve dolayısıyla $V \subset B-M$. Binaenaleyh $z^0 \in B-M$ bir iç noktadır.

5. Demet Teorisi

16.5.1. **Nüve kavramı.** $z^0 \in C^n$ bir nokta olsun. z^0 ın bir cıvarında tarifli fonksyonları gözönüne alalım. İki fonksyona eşdeğer diyeceğiz şayet bu iki fonksyon z^0 ın bir cıvarında çakışıyorlarsa. Bu bir eşdeğerlik bağıntısı tarif eder, ve f nin z^0 daki eşdeğerlik sınıfı f_{z^0} ile gösterilir ve f nin z^0 daki nüvesi denir (veya fonksyon elemanı).

f bir holomorf fonksyon ise f_{z^0} nüvesi, z^0 etrafında yakınsak bir kuvvet serisinden ibarettir: $f_{z^0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z^0)^\nu$.

Binaenaleyh, $z^0 \varepsilon C^n$ ise, bu taktirde $\mathcal{O}_{z^0} = (H_n)$, z^0 etrafında yakınsak f_{z^0} kuvvet serilerinin C–cebrini veya balkasını gösterir.

Demek ki her $z \varepsilon C^n$ için bir $\mathcal{O}_z$C–cebri vardır.

$\mathcal{O}_z$C–cebirlerinin $\mathcal{O} = \bigvee_{z \varepsilon C^n} \mathcal{O}_z$ ayrık birleşimi C^n üzerinde bir cümledir.

$\pi: \mathcal{O} \to C^n$ tabii projeksyonu f_z yi f_z kuvvet serisinin etrafında açıldığı z noktasına dönüştürür.

TARİF 64. Herbir $z \varepsilon C^n$ noktasına tekabül eden $\mathcal{O}_z$C–cebrine sap denir.

$\mathcal{O}$ cümlesi üzerinde tabii bir topoloji vardır öyleki bu topoloji π yi sürekli bir tasvir yapar ve herbir $\mathcal{O}_z$ sapı üzerinde diskret bir topoloji tevlid eder. Gerçekten,

$f_{z^0} \varepsilon \mathcal{O}$ ise, bir $U(z^0) \subset C^n$ açık cıvarı ve U üzerinde holomorf bir f fonksyonu vardır $\ni f_{z^0}$ serisi U da f ye üniform yakınsaktır. Bu kere f, U nun herbir z noktasında yakınsak bir kuvvet serisine açılabilir. Böylece, f bir $s: U \to \mathcal{O}$ tasvirini istintac eder $\ni$

1. $\pi o s = 1_U$
2. $s(z^0) = f_{z^0} \varepsilon s(U) \subset \mathcal{O}$.

Binaenaleyh, $s(U) = \bigcup_{z \varepsilon U} f_z$ açık cümle olarak tarif edilir, bu gibi cümlelerin koleksyonu da açık cümlelerin tabanını teşkil ettiklerinden, $\mathcal{O}$ da bir topoloji tarif edilmiş olur.

TARİF 65. $\mathcal{O}$ ya yukardaki topoloji uygulandığı taktirde $\mathcal{O}$ topolojik uzayına, yakınsak kuvvet serilerinin demeti denir.

$\mathcal{O}_z = \pi^{-1}(z)$ C–cebrine demetin sapı denir.

π lokal topolojiktir ve $\mathcal{O}$ daki cebirsel operasyonlar bu topolojide süreklidirler.

Not. $B \subset C^n$ bir açık cümle olsun. B de holomorf bir f fonksyonundan, B nin herbir z noktasına, bu noktanın üzerinde bir f_z nüvesini karşılık tutan $f: B \to \mathcal{O}$ tasviri anlaşılabilir.

$\mathcal{O}_z$ sıfır böleni olmayan bir tamlık bölgesi olduğundan her $z \varepsilon B$ için M_z bölüm cismini teşkil edebiliriz. $M = \bigcup_{z \varepsilon B} M_z$ cümlesinde şu şekilde bir topoloji tarif edebiliriz. $\varphi \varepsilon M$ olsun. Bu taktirde $\varphi \varepsilon M_{z^0}$ ve $\varphi = f_{z^0}/g_{z^0}$, burada f, g z^0 da holomorftur, ve birtek çarpanlara ayrılıştan dolayı, f ve g z^0

da rölatif asal alınabilir. $U = U(z^0)$, z^0 ın bir cıvarı olsun $\ni f, g$ U da rölatif asaldır. Her $z \varepsilon U$ için, f_z/g_z ile teşkil edilen M_z bölüm cismini gözönüne alalım. Yukarda olduğu gibi $\bigcup_{z \varepsilon U} M_z$ birleşimini bir açık cümle, ve bu gibi cümlelerin koleksyonunu da topoloji için taban alabiliriz. Böylece M de bir topoloji tarif edilmiş olur.

M_z nin elemanlarına, z üzerinde meromorfik fonksiyonların nüveleri denir. Demek ki,

TARİF 66. $B \subset C^n$ açık cümlesinde bir meromorfik fonksyon sürekli, bir tasvirdir $\ni$ B nin her bir noktasına, bu noktanın üzerinde meromorfik bir nüve tahsis eder.

Meromorfik fonksyonlar bir cisim teşkil ederler.

Bir $z^0 \varepsilon B \subset C^n$ noktasında bir φ meromorfik fonksyonu z^0 da holomorf, rölatif asal iki fonksyonun: f, g nin bölümü olarak tarif edilir.

16.5.2. **Demet.**

TARİF 67. X, S iki topolojik uzay ve $\pi: S \to X$ lokal topolojik bir tasvir olsun. Bu taktirde, (S, π) çiftine, X üzerinde demet denir.

$\forall\ x \varepsilon X$ için, $S_x = \pi^{-1}(x)$ ye x üzerinde, (S, π) nin veya sadece S nin sapı denir.

TARİF 68. (S, π), X üzerinde bir demet olsun. $S^* \subset S$ açık bir cümle ve $\pi^* = \pi | S^*$ ise, bu taktirde, (S^*, π^*) a S nin altdemeti denir.

Not. Herbir altdemet bir demettir. Bunu görebilmek için $\pi^*: S^* \to X$ tasvirinin lokal topolojik olduğunu görmek kafidir. Gerçekten, herbir $\sigma \varepsilon S^*$ için $\exists\ U(\sigma) \subset S$ ve $V(\pi(\sigma)) \subset X$ açık cıvarları $\ni \pi \mid U: U \to V$ tasviri topolojiktir. Fakat $U^* = U \cap S^*$ ve $V^* = \pi(U^*)$ sırasıyla, σ nın S^* da ve $\pi(\sigma)$ nın X de açık cıvarlarıdır. Diğer taraftan, $\pi^* \mid U^* = \pi \mid U^*: U^* \to V^*$ topolojiktir.

$W \subset X$ açık, ve $\pi^{-1}(W) = S \mid W$ S nin W ye tahditi ise, bu taktirde, $S|W$ açıktır ve $(S|W, \pi|(S|W))$ de bir demettir, S nin W ye tahditidir.

TARİF 68. (S, π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ açık bir cümle, ve $s: W \to S$ sürekli bir tasvir olsun, ve öyleki $\pi o s = 1_W$. Bu taktirde s ye S nin W üzerinde kesiti denir.

S nin W üzerinde kesitlerinin tamamını $\Gamma(W, S)$ ile göstereceğiz.

Teorem 16.5.2.1. (S, π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açık cümle, ve $s \varepsilon \Gamma(W, S)$ olsun. Bu taktirde $\pi: s(W) \to W$ topolojiktir ve $s = (\pi|S(W))^{-1}$.

İspat. $x \varepsilon W$ için, $\pi o s = 1_W$ gözönünde tutulursa,

$$s o (\pi \mid s(W)) o s(x) = s o (\pi o s)(x) = s(x).$$

Teorem 16.5.2.2. (S, π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açık cümle ve $s: W \to S$ bir tasvir olsun, $\ni \pi o s = 1_W$. Bu taktirde, $s \in \Gamma(W, S)$, yy. $s(W)$ S de açık ise.

İspat. Farzedelim ki s süreklidir. $\sigma_0 \in s(W)$ ve $x_0 = \pi(\sigma_0) \Rightarrow s(x_0) = \sigma_0$. Üstelik, $V(x_0) \subset W$, $U(\sigma_0) \subset S$ açık cıvarları vardır $\ni \pi|U: U \to V \cap W$ topolojiktir. Süreklilik hipotezinden dolayı $\exists\ V'(x_0) \subset V \ni s(V') \subset U$. Binaenaleyh, $(\pi|U) \circ (s|V') = (\pi o s)|V' = 1_{V'}$. Fakat bu taktirde, $(\pi|U)^{-1}(V') = s(V') \subset s(W)$ σ_0 ın açık bir cıvardır. Yani σ_0, $s(W)$ nin bir iç noktasıdır.

Farzedelim ki $s(W)$ açıktır, $x_0 \in W$ ve $\sigma_0 = S(x_0)$. Bu taktirde $\exists\ V(x_0) \subset W$, $U(\sigma_0) \subset s(W)$ açık cıvarları $\ni \pi|U: U \to V$ topolojiktir.

Şimdi, $s = (\pi|s(W))^{-1}$ ve dolayısıyla $s|V = (\pi|U)^{-1}$ ve bu tasvir x_0 da süreklidir.

Teorem 16.5.2.3. (S, π), X üzerinde bir demet ve $W \subset X$ bir açık cümle olsun. Şayet $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$ kesitleri bir $x \in W$ noktasında eşit iseler: $s_1(x) = s_2(x)$, bu taktirde bir $V(x) \subset W$ cıvarında eşittirler: $s_1|V = s_2|V$.

İspat. $\sigma = s_1(x) = s_2(x)$ vazedelim. Bu taktirde $U = s_1(W) \cap s_2(W)$, σ nın açık bir civarıdır, ve $\pi|U: U \to V = \pi(U) \subset W$ tasviri topolojiktir. Dolayısıyla $s_1|V = (\pi|U)^{-1} = s_2|V$.

TARİF 69. (S_1, π_1), (S_2, π_2), X üzerinde iki demet olsun.

1. $\varphi: S_1 \to S_2$ sapları muhafaza ediyor denir, şayet $\pi_2 o \varphi = \pi_1$ ise. (Dolayısıyla, $\varphi((S_1)_x) = (S_2)_x\ \forall x \in X$).

2. Demet morfizmi diye, sapları muhafaza eden sürekli $\varphi: S_1 \to S_2$ tasvirlerine denir.

3. Demet izomorfizmi diye, sapları muhafaza eden topolojik $\varphi: S_1 \to S_2$ tasvirlerine denir. Bu taktirde S_1, S_2 demetleri izomorfiktir veya izomorftur denir.

Teorem 16.5.2.4. (S_i, π_i), $i = 1,2$ X üzerinde iki demet, ve $\varphi: S_1 \to S_2$ sapları muhafaza eden bir tasvir olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler muadildirler.

1. φ bir demet izomorfizmidir.

2. Herbir $W \subset X$ açık cümlesi ve herbir $s \in \Gamma(W, S_1)$ kesiti için, $\varphi o s \in \Gamma(W, S_2)$.

3. Herbir $\sigma \in S_1$ için bir $W \subset X$ açık cümlesi ve bir $s \in \Gamma(W, S_1)$ kesiti vardır $\ni \sigma \in s(W)$ ve $\varphi o s \in \Gamma(W, S_2)$.

İspat. 1. φ sürekli, $W \subset X$ açık ve $s \in \Gamma(W, S_1)$ ise, bu taktirde, $\varphi o s$ de süreklidir. Üstelik $\pi_2 o (\varphi o s) = (\pi_2 o \varphi) o s = \pi_1 o s = 1_W$. Dolayısıyla $\varphi o s \in \Gamma(W, S_2)$. 2. $\sigma \in S_1$ ise, bu taktirde bir $W \subset X$ açık cümlesi ve bir $s \in \Gamma(W, S_1)$ vardır $\ni \sigma \in s(W)$. 2. deki şartlar da sağlanmış ise, bu taktirde $\varphi o s \in \Gamma(W, S_2)$. 3. deki şartlar altında, $s: W \to s(W)$ topolojiktir. Dolayısıyla, $\varphi|s(W) = (\varphi o s) o s^{-1}: s(W) \to S_2$ süreklidir, ve binaenaleyh, φ, σ da süreklidir.

TARİF 70. Farzedelim ki herbir $W \subset X$ açık cümlesine bir M_W cümlesi tekabül ediyor, ve herbir (V, W), $V \subset W$, açık cümle çifti için bir $\gamma_{W,V}: M_W \to M_V$ tasviri verilmiştir $\ni$

1. $\gamma_{W,W} = 1_{M_W}$, $\forall\ W \subset X$, W açık (16.5.2.1)
2. $U \subset V \subset W \Rightarrow \gamma_{V,U} \circ \gamma_{W,V} = \gamma_{W,U}$.

Bu taktirde $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$ koleksyonuna öndemet denir. $\gamma_{W,V}$ tasvirlerine, tahdit edici tasvirler denir.

Herbir (S, π) demetine tabii bir şekilde bir öndemet tekabül eder:

Nitekim, V, W, X in açık cümleleri ise, $M_W = \Gamma(W,S)$ ve $\gamma_{W,V}(s) = s|V$, $s \in M_W$ vazedilebilir. Bu taktirde, $\{X, \Gamma(W, S), \gamma_{W,V}\}$ bir öndemettir. Bu öndemete, S demetinin kanonik öndemeti denir.

İlerde bu teoremin karşıtını ispat edeceğiz.

Şimdilik, geniş bir alanı kapsıyan bir misal üzerinde duracağız.

TARİF 71. 1. Bir X topolojik uzayının bir $U = \{u_i\}$ açık örtüsü verilmiş olsun. U ya lokal sonludur denir şayet X in herbir noktasının bir açık cıvarı U ya ait sonlu sayıda u_i leri kesiyorsa.

2. V açık örtüsü, U açık örtüsünün bir incelmesidir denir, şayet V nin herbir açık cümlesi U nun bir açık cümlesinin içinde bulunuyorsa

3. Bir X topolojik uzayı parakompakttır denir, şayet X Hausdorff uzayı ise, ve her açık örtüsünün bir lokal sonlu incelmesi varsa.

X, parakompakt bir topolojik uzay, $U = \{u_i\}$, X ni bir açık örtüsü $\ni u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 \cap u_2 \in U$ olsun. Herbir $u_i \in U$ ye bir $\Gamma(u_i)$ abelyen grubunu tekabül ettirelim $\ni$ şayet $u_i \subset u_j$ ise bir $\gamma_{ji}: \Gamma(u_j) \to \Gamma(u_i)$ homomorfizmi vardır $\ni$

$$u_i \subset u_j \subset u_k \Rightarrow \gamma_{ji} \circ \gamma_{kj} = \gamma_{ki}. \qquad (16.5.2.1)$$

TARİF 70 e göre $\{X, \Gamma(u_i), \gamma_{ji}\}$ bir öndemettir.

(16.5.2.1) şartları topolojide çok önemlidir. Bu sebeple asıl mahiyeti hakkında gerekli izhatı vereceğiz. Kohomoloji modülleri işlenirken, matlup olan kohomoloji modülleri, umumiyetle singüler kohomoloji modülleri değildir, ve fakat bunlarla limite geçilerek elde edilen başkalarıdır. Limite geçme işlemi ise tamamen cebirseldir ve çok önemlidir.

Limitler, (incelmiş) yönlendirilmiş cümleler üzerinde alınmaktadır. Bu bir I cümlesidir öyleki elemanlarından bazı (i, i') eleman çiftleri $i \leq i'$ kısmi

sıralamaya tabi tutulmuştur, ve öyleki, herhangi $i, i' \varepsilon I$ için $\exists\, i'' \varepsilon I \ni i \leq i''$, $i' \leq i''$.

Misal 1. K, bir X uzayının bir alt cümlesi olsun. I ise, K yı ihtiva eden X in altcümlelerinin cümlesi olsun. $V' \subset V$ yi $V \leq V'$ ile tarif edelim. Bu taktirde, herhangi V, V' için $V \cap V'$ cümlesi yönlendirilme şartını sağlar. Parakompakt uzayı ile ilgili misalimiz bu düşünce çerçevesi içindedir.

Misal 2. I, sıfırdan farklı tamların cümlesi olsun. $i \mid i'$yi $i \leq i'$ ile tarif edelım. Bu taktırde herhangi i, i' nün en küçük ortak böleni yönlendirilme şartını sağlamaktadır.

Misal 3. I, bir (X, x_0) noktalı uzayının, taban noktalı bütün (E, π, e_0) örtü uzaylarının cümlesini göstersin. Evvelce de görüldüğü gibi lifleri muhafaza eden $f:(E', e_0') \to (E, e_0)$, $\pi' = \pi f$, sürekli tasvirleri $(E, \pi, e_0) \leq (E', \pi', e'_0)$ ile tarif edelim. Şimdi, yönlendirme şartını sağlamak için, aşağıda verilen liflerin kartezyen çarpımını ele alalım:

$$E'' = \{(e, e') \varepsilon E \times E';\ \pi e = \pi' e'$$

$$e''_0 = (e_0, e'_0)$$

$$\pi''(e, e') = \pi e = \pi' e'.$$

Burada E'' deki topoloji, EXE'deki topolojiden mütevellit rölatif topolojidir.

Bu hususlar hatırlatıldıktan sonra, (17.5.2.1) in mücerret tarifini verelim.

TARİF 72. I yönlendirilmiş bir cümle ve $(M_i)_{i\varepsilon I}$, I tarafından indislenmiş bir R–modülleri ailesi olsun. Farzedelim ki, $i \leq i'$ için $\gamma_{i',i}: M_i \to M_{i'} \ni$

1. $\gamma_{i,i} = 1_{M_i}$ (özdeş)
2. $\gamma_{i'',i'} \circ \gamma_{i',i} = \gamma_{i'',i}$ şayet $i \leq i' \leq i''$ ise.

Böyle bir yapıya direkt (indüktif) modül sistemi denir.

TARİF 73. Bir direkt (indüktif) modül sisteminin direkt (indüktif) limiti bir M modülüdür $\ni$ birlikte, I ile indislenmiş ve $i \leq i'$ ise $\gamma_i' \circ \gamma_{i',i} = \gamma_i$ şartını sağlıyan $\gamma_i : M_i \to M$ homomorfizmlerinin ailesi verilmiştir, $\ni$ bu yapı, aşağıdaki özelliğe nazaran üniverseldir:

Herhangibir N modülü, ve $\psi_{i'} \circ \gamma_{i',i} = \psi_i$, $i \leq i'$ ise, şartını sağlıyan herhangibir $\psi_i : M_i \to N$ homomorfizm ailesi için birtek $\psi : M \to N$ homomorfizmi vardır $\ni$ $\psi_i = \psi \circ \gamma_i$, $\forall i$.

Üniversel hassadan açıkça görülür ki, herhangi iki indüktif limit M, N, en son şartı sağlıyan bir izomorfizm altında izomorfturlar.

Bu sebeple, bir sistemin indüktif limitinden bahisedilebilir. Bu limit

$$\varinjlim M_i$$

ile gösterilir.

$$\begin{tikzcd}
 & & & N \\
\longrightarrow M_i \arrow[rrur, "\psi_i"] \arrow[r, "\gamma_{i',i}"'] & M_{i'} \arrow[rru, "\psi_{i'}"'] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M \arrow[u, dashed, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Misal. Farzedelim ki M_i lerin hepsi bir modülün altmodülleridir ve $i \leq i'$, M_i nin M_i' nün altmodülü demek olsun, $\ni \gamma_{i',i}$ dahil etme monomorfizmidir. Bu taktirde indüktif limit olarak $\cup_i M_i$ alınabilir.

Şimdi tekrar X parakompakt uzayına dönelim.

Teorem 16.5.2.5. Her bir öndemete bir demet tekabül ettirilebilir. Bu demete, öndemet tarafından tarif edilen demet denilir.

İspat. Parakompakt X uzayını taban uzayı olarak alalım. Her $x \varepsilon X$ için $\{u_i;\ u_i \varepsilon U,\ x \varepsilon u_i\}$ koleksyonu yönlendirilmiştir. $\Gamma(u_i)$ gruplarının direkt limitini S_x ile gösterelim. $S = \bigcup_{x\varepsilon X} S_x$ vazedelim. S de şu şekilde bir topoloji tarif edebiliriz. Birkere $s \varepsilon S \Rightarrow s \varepsilon S_x$; $x \varepsilon u_x \varepsilon U$. Bu taktirde, $\{s_y;\ s_y \varepsilon S_y,\ y \varepsilon u_x\}$ bir açık cümledir ve bunların kolleksyonu S nin topolojisi için bir taban teşkil ederler.

Teorem 16.5.2.6. Herbir demet bir öndemet tarafından tariflidir.

İspat. $U = \{u_i;\ u_i \varepsilon X$ açık$\}$ yı gözönüne alalım. $\Gamma(u_i)$ u_i üzerindeki kesitlerin cümlesi olsun. Tahditlerle γ_{ji} tarif edilsin.

Tarif 70 e göre, $\{X, \Gamma(u_i), \gamma_{ji}\}$ bir öndemettir.

Şimdi teorem 17.5.2.5 yi, daha genel olarak ele alalım. Bu genelleştirmede X herhangi bir topolojik uzay, notasyonlar ise Tarif 70 deki notasyonlardır.

Teorem 16.5.2.5*. Herbir $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ öndemetine bir demet tekabül ettirilebilir. (İndüktif limiti teşkil etmek suretiyle).

İspat. $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ sistemi verilmiş olsun. $x \varepsilon X$ noktası sabit tutuluyor. $\{(W, s);\ W$ x in bir açık cıvarı, $s \varepsilon M_w\}$ ailesi üzerinde şu eşdeğerlik bağıntısını tarif ediyoruz: $(W_1, s_1) \overset{x}{\sim} (W_2, s_2)$ diyoruz yalnız ve yalnız x in bir V açık cıvarı varsa $\ni V \subset W_1 \cap W_2$ ve $\gamma_{w_1,v}(s_1) = \gamma_{w_2,v}(s_2)$. (W, s) çiftlerinin eşdeğerlik sınıfını $(W, s)_x$ ile, $(W, s)_x$ sınıflarının tamamını ise S_x ile gösteriyoruz. Nihayet $S = \bigvee_{x\varepsilon X} S_x$ vazediyoruz. $\pi : S \to X$ kanonik projeksyon olsun.

Şimdi S de bir topoloji tarif edeceğiz öyleki π lokal topolojiktir.

$W \subset X$ açık ve $s \varepsilon M_w$ ise, herbir s elemanına, $\gamma s(x) = (W, s)_x$, $x \varepsilon W$ ile tarif edilen, $\gamma s : W \to S$ tasvirini karşılık tutuyoruz ($\gamma s = \gamma o s$ demektir).

Diyorum ki $B = \{\gamma s(W); W \subset X$ açık, $s \varepsilon M_w\} \cup \{S\}$. S üzerinde bir topoloji tabanıdır: $W_1, W_2 \subset X$ açık cümleler, $s_1 \varepsilon M_{w_1}$, $s_2 \varepsilon M_{w_2}$ ise

$$W : \{x \varepsilon W_1 \cap W_2 ; \gamma s_1(x) = \gamma s_2(x)\}$$

vazedelim.

1. W açıktır. $x_0 \varepsilon W \Rightarrow (W_1, s_1)_{x_0}$. Binaenaleyh, $\exists\ V(x_0) \subset W = W_1 \cap W_2 \ni \gamma_{w_1,v}(s_1) = \gamma_{w_2,v}(s_2)$. Fakat bu taktirde, her $x \varepsilon V$ için de $(W_1, s_1)_x = (W_2, s_2)_x$ Dolayısıyla, $\gamma s_1(x) = \gamma s_2(x)$. O halde $V \subset W$ ve x_0, W nın bir iç noktasıdır.

2. $s = \gamma_{w_1,w}(s_1) \varepsilon M_w$ vazedelim. Bu taktirde $\gamma s_1(W_1) \cap \gamma s_2(W_2) = \gamma s(W) : \sigma \varepsilon S \Rightarrow \sigma \varepsilon \gamma s_1(W_1) \cap \gamma s_2(W_2)$ yalnız ve yalnız $x \varepsilon W_1 \cap W_2$ varsa $\ni \gamma s_1(x) = \sigma = \gamma s_2(x)$, yani $x \varepsilon W \ni \gamma s_1(x) = \sigma$. Bu ise sağlanmıştır yalnız ve yalnız $\sigma = (W_1, s_1)_x = (W, s)_x = \gamma s(W)$.

Demek ki $\gamma s_1(W_1), \gamma s_2(W_2) \varepsilon B \Rightarrow \gamma s_1(W_1) \cap \gamma s_2(W_2) \varepsilon B$.

Binaenaleyh B, S üzerinde bir topoloji için bir taban olup, açık cümleler, B ye ait elemanların keyfi birleşimleridir.

Nihayet, π nin lokal topolojik olduğunu gösterelim:

1. $\sigma \varepsilon S$ ve $x = \pi(\sigma)$ olsun. Bu taktirde, $x \varepsilon W$ olmak üzere bir $W \subset X$ açık cümlesi vardır, ve $\exists\ s \varepsilon M_w \ni \sigma = (W, s)_x = \gamma s(x)$. Şimdi $U = \gamma s(W)$ vazedelim. U, σ nın S de açık bir cıvarıdır ve $\pi o \gamma s = 1_w$, $\gamma s o (\pi | U) = 1_U$. Dolayısıyla, $\pi | U : U \to W$ bijektiftir, $\gamma s = (\pi | U)^{-1}$.

2. Herbir $U' \subset U$ açık cümlesi, $U' = \bigcup_{\iota \varepsilon I} \gamma s_\iota (W_\iota)$ şeklindedir. Burada herbir $W_\iota \subset W$, W de açıktır ve $s_\iota \in M_{w_\iota}$. Binaenaleyh $\pi(U') = \bigcup_{\iota \varepsilon I} W_\iota$ W de açıktır. Bu taktirde $\pi | U$, açık cümleleri açık cümlelere dönüştürür. Dolayısıyla $(\pi | U)^{-1} = \gamma s$ süreklidir.

3. $W' \subset W$ açık ise, bu taktirde, her $x \varepsilon W'$ için $(W, s) \overset{x}{\sim} (W', \gamma_{w,w'}(s))$, ve dolayısıyla, $\gamma s | W' = \gamma(\gamma_{w,w'} s)$ (çünkü $\gamma_{w,w'} s = s | W'$). Binaenaleyh $\gamma s(W') = \gamma(\gamma_{w,w'} s)(W')$. Bu cümle ise açıktır. Demek ki γs de açık cümleleri açık cümlelere dönüştürür. Yani $\pi | U$ süreklidir.

Özet. İndüktif limiti teşkil etmek suretiyle, herbir $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ öndemeti X üzerinde bir S demetini tarif eder. Herbir $s \varepsilon M_w$ elemanı bir $\gamma s \varepsilon \Gamma(W, S)$ kesiti ile eş tutulmuştur. $x \varepsilon X$ ve $\sigma \varepsilon S_x$ ise, bu taktirde, bir $W(x) \subset X$ açık cıvarı ve $s \varepsilon M_w$ elemanı vardır $\ni \sigma = \gamma s(x)$.

Misal. X yerine bir $B \subset C^n$ açık cümlesini gözönüne alalım. S_x yerine $\mathcal{O}_z$ C–cebirini, $z \in B$, S yerine de $\mathcal{O}$ yı ele alalım.

$\mathcal{O}_z$ sapının bir $(W, f)_z$ elemanı, (W_ι, f_ι) çiftlerinin bir eşdeğerlik sınıfıdır. Burada, W_ι, z nin bir açık cıvarı, f_ι ise W_ι üzerinde holomorf bir fonksyondur. Şimdi (W_1, f_1) ve (W_2, f_2) eşdeğerdirler, şayet bir $V(z) \subset W_1 \cap W_2$ açık cıvarı varsa $\ni f_1 | V = f_2 | V$, yani yalnız ve yalnız f_1 ve f_2 nin z etrafındaki kuvvet serileri aynı ise. Binaenaleyh, $\mathcal{O}_z$ sapını, yakınsak serilerin C–cebiri ile özdeş kabul edebiliriz. Özel olarak f_z kuvvet serisi $(W, f)_z$ eşdeğerlik sınıfı ile çakışır.

Nihayet, herbir $W \subset B$ açık cümlesi için $\gamma : M_w \to \Gamma(W, \mathcal{O})$ bir C–cebir homomorfizmi olduğunu ilerde göreceğiz. Üstelik, $f \varepsilon M_w$ holomorf ise $\gamma(f | V) = \gamma f | V$. Gerçekten, M_w, W de holomorf fonksyonların cümlesi, $\gamma_{w,v}$: $M_w \to M_v$ ve $\gamma_{w,v}(f) = f | V$ istenilen netice elde edilir.

Açık olarak $\{B, M_w, \gamma_{w,v}\}$ C–cebirlerinin bir öndemetidir. Öndemete tekabül eden $\mathcal{O}$ demeti, C–cebirlerin demetidir.

Bu $\mathcal{O}$ demetine, B üzerinde holomorf fonksyonların nüvelerinin demeti denir.

Teorem 16.5.2.6. S, X üzerinde bir demet olsun. $\{X, \Gamma(W, S), \gamma_{w,v}\}$ kanonik öndemet tarafından tarif edilen demet S ye kanonik izomorftur.

İspat. Kanonik öndemetin tarif ettiği demeti (S^*, π^*) ile gösterelim.

1. $(W_1, s_1) \overset{x}{\sim} (W_2, s_2) \Leftrightarrow s_1(x) = s_2(x)$ bağıntısı, $\varphi : (W, s)_x \to s(x)$ tasvirinin belirttiği $\varphi : S^* \to S$ tasviri injektif ve sapları muhafaza eder. Şimdi φ nin sürjektif olduğunu görelim. Gerçekten, $\sigma \varepsilon S_x$ ise, bu taktirde, bir $W(x)$ cıvarı ve bir $s \varepsilon \Gamma(W, S)$ vardır $\ni s(x) = \sigma$. Binaenaleyh, $\gamma s(x) = (W, s)_x \varepsilon S^*_x$ ve $\varphi(\gamma s(x)) = \sigma$.

2. $\varphi, \sigma^* = \gamma s(x)$ de süreklidir. Gerçekten, bu taktirde, bir $W \subset X$ açık cümle, ve bir $s \varepsilon \Gamma(W, S)$ elemanı vardır $\ni \sigma^* = (W, s)_x = \gamma s(x)$. Dolayısıyla, $\gamma s \varepsilon \Gamma(W, S^*)$, $\sigma^* \varepsilon \gamma s(W)$ ve $\varphi o \gamma s = \gamma s \varepsilon \Gamma(W, S)$. Buradan φ nin σ^* da sürekli olduğu çıkar.

3. φ^{-1} süreklidir. $W \subset X$ açık ve $s \varepsilon \Gamma(W, S)$ ise, bu taktirde $\varphi^{-1}(s) = \gamma s \varepsilon \Gamma(W, S^*)$

TARİF 74. $\varphi : S_1 \to S_2$ demet morfizmine açık tasvir denir, şayet S_1 de herhangibir açık cümle S_2 de bir açık cümleye dönüşüyorsa,

Teorem 16.5.2.7. Herbir demet morfizmi bir açık tasvirdir.

İspat. $\varphi : S_1 \to S_2$ bir demet morfizmi olsun. S_1, $\{X, \Gamma(W, S_1), \gamma_{w,v}\}$ kanonik öndemet ile tarif edilen S_1^* re kanonik izomorf olduğundan, $s(W), \ni s \varepsilon \Gamma(W, S_1)$, cümleleri S_1 üzerindeki topoloji için bir taban teşkil ederler. Şayet $s \varepsilon \Gamma(W, S_1)$ ise, bu taktirde, $\varphi o s \varepsilon \Gamma(W, S_2)$, ve dolayısıyla, $\varphi(s(W)) =$

$(\varphi o s)(W)$, S_2 de açıktır. $s(W)$ S_1 de açık olduğundan teoremin ispatı tamamlanmıştır.

TARİF 75. $(S_1, \pi_1), \ldots, (S_l, \pi_l)$, X üzerinde demetler olsun. $W \subset X$ açık için. $M_w = \Gamma(W, S_1) \times \ldots \times \Gamma(W, S_l)$ kartezyen çarpımını teşkil edelim. $s = (s_1, \ldots, s_l) \in M_w$ ve $V \subset W$ açık için $\gamma_{w,v}(s) = (S_1|V, \ldots, s_l|V)$ olsun. Bu taktirde, $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ bir öndemettir. Bu öndemetin tarif ettiği demete; $S^* = S_1 \oplus \ldots \oplus S_l$, Witney toplamı denir.

Teorem 16.5.2.8. $\{X, M^i_w, \gamma^i_{w,v}\}$ öndemetinin tarif ettiği demet S_i, $i = 1, \ldots, l$; $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ öndemetinin tarif ettiği detemet ise S olsun. Farzedelim ki, her $W \subset X$ açık cümlesi için bir $\varphi_w : M^1_w \times \ldots \times M^l_w \to M_w$ tasviri vardır öyleki,

$$\gamma_{w,v}\, \varphi_w(s_1, \ldots, s_l) = \varphi_v(\gamma^1_{w,v} s_1, \ldots, \gamma^l_{w,v} s_l). \qquad (16.5.2.1)$$

Burada $V \subset W$ açık ve $s_i \in M^i_w$ $i = 1, \ldots, l$, keyfi elemanlardır. Bu taktirde birtek $\varphi : S_1 \oplus \ldots \oplus S_l \to S$ demet morfizmi vardır $\ni$

$$\varphi(\gamma s_1, \ldots, \gamma s_l) = \gamma\, \varphi_w(s_1, \ldots, s_l).$$

İspat. 1. $W, W' \subset X$ açık, $x \in W \cap W'$ ve $(W, s_i) \overset{x}{\sim} (W'_i, s'_i)$, $i = 1, \ldots, l$, olsun. Bu taktirde $V(x) \subset W \cap W'$ açık cıvarı vardır $\ni$

$$\gamma^i_{w,v} s_i = \gamma^i_{w',v} s'_i, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Fakat (17.5.2.1) den dolayı,

$$\gamma_{w,v}\, \varphi_w(s_1, \ldots, s_l) = \varphi_v(\gamma^1_{w,v} s_1, \ldots, \gamma^l_{w,v} s_l)$$
$$= \varphi_v(\gamma^1_{w',v} s'_1, \ldots, \gamma^l_{w',v} s'_l)) = \gamma_{w',v}\, \varphi_{w'}(s'_1, \ldots, s'_l).$$

Binaenaleyh,

$$(W, \varphi_w(s_1, \ldots, s_l)) \overset{x}{\sim} (W', \varphi_{w'}(s'_1, \ldots, s'_l)).$$

Göstermiş olduk ki, $\exists$

$$\varphi : ((W, s_1)_x, \ldots, (W, s_l)_x) \to (W, \varphi_w(s_i, \ldots, s_l)).$$

Yani,

$$\varphi : (\gamma s_1(x), \ldots, \gamma s_l(x)) \to \gamma\, \varphi_w(s_1, \ldots, s_l)(x).$$

Dolayısıyla, $\varphi : S_1 \oplus \ldots \oplus S_l \to S$ sapları muhafaza eder ve

$$\varphi(\gamma s_1, \ldots, \gamma s_l) = \gamma\, \varphi_w(s_1, \ldots, s_l).$$

Binaenaleyh φ birtek olarak belirlidir.

2. φ süreklidir: $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$ verildiği taktirde, bir $W(x)$ cıvarı, ve $s_i \in M^i_w$ elemanları vardır $\ni \sigma_i = (W, s_i)_x$, $i = 1, \ldots, l$. Bu taktirde,

$s = (\gamma s_1, \ldots, \gamma s_l) \in \Gamma(W, S_1 \oplus \ldots \oplus S_l)$, $\sigma \in s(W)$ ve $\varphi o s = \gamma\, \varphi_w(s_1, \ldots, s_l) \in \Gamma(W, S)$. Dolayısıyla φ süreklidir.

6. Cebirsel Yapılı Demetler.

16.6.1. **C–cebirleri Demeti**. Tarif 67, 68 de S demetinin ve $s \in \Gamma(W, S)$ kesitinin tarifleri verildi. Görüldü ki, $W \subset X$, X de açık ise; π, lokal topolojik olduğundan, $s(W)$ S de açıktır, ve S nin açık cümleleri, bu tip açık cümlelerin birleşimidir. Diğer taraftan, yine gördük ki, $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$, ve bir $x \in W$ için $s_1(x) = s_2(x)$ ise bu taktirde bütün W de $s_1 = s_2$. Nihayet S nin herbir elemanına, S ye ait kesitlerin birer nüvesi gözü ile bakılabilir.

Bizi alakadar eden demetlerde bir de Cebirsel yapı vardır. Mesela, S ye abelyen grupların demetidir diyoruz şayet $S_x = \pi^{-1}(x)$ herbir x için bir abelyen grup ise, ve bir $W \subset X$ açık cümlesi üzerinde herhangi $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$ iki kesit için $x \to s_1(x) - s_2(x)$ $x \in W$, tasviri (grup operasyonu) bir kesit ise.

Aynı şekilde, halkaların demetini tarif ederken, halkayı oluşturan cebirsel operasyonların, kesitlere tatbik edildiğinde yine bir kesit vermesi şartı koşulmaktadır. Netekim, C^n de tarifli (veya bir kompleks manifold) holomorf fonksyonların nüvelerinin $\mathcal{O}$ demeti, halkaların bir demetidir.

$\mathcal{O}$, X üzerinde halkaların bir demeti ise, $\mathcal{O}$–modüllerin demeti diye abelyen gruplarının bir S demetine denir öyleki,

1. herbir $x \in X$ için, S_x bir $\mathcal{O}_x$–modüldür.
2. $\mathcal{O}$ nun bir kesiti ile S nin bir kesitinin çarpımı, S de bir kesittir.

X herhangibir $B \subset C^n$ açık cümlesi (veya bir kompleks manifold) ve $\mathcal{O}$, holomorf fonksyonların nüvelerinin demeti ise, bu taktirde, S ye analitik demet denir.

Şimdi bir özetini verdiğimiz bu hususları detaylı olarak C–cebri için işleyeceğiz.

TARİF 77. X üzerinde bir (S, π) demetine C–cebri demeti denir şayet şu şartlar sağlanıyorsa:

1. Herbir S_x sapı, 1 li komütatif C–cebridir.
2. $S \oplus S \xrightarrow{+} S$ (yani $(\sigma_1, \sigma_2) \to (\sigma_1 + \sigma_2)$ süreklidir.
3. $S \oplus S \xrightarrow{\cdot} S$ (yani $(\sigma_1, \sigma_2) \to \sigma_1 \cdot \sigma_2$ süreklidir.
4. Herbir $c \in C$ için, $S \xrightarrow{c} S$ (yani $\sigma \to c.\, \sigma$) süreklidir.
5. $I : x \to I_x \in S_x \Rightarrow I \in \Gamma(X, S)$. (Birim kesit)

TARİF 78. $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ aşağıdaki hassaları haiz bulunan bir öndemet olsun:

1. Herbir M_w bir C–cebirdir.
2. $\gamma_{w,v} : M_w \to M_v$ daima bir C–cebri homomorfizmidir.

Bu taktirde $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ ye C–cebirlerinin bir öndemeti denir.

Teorem 16.6.1.1. $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$, C–cebirlerinin bir öndemeti, ve S mütekabil demet olsun. Bu taktirde S, C–cebirleri demetidir, ve herbir $W \subset X$ açık cümlesi için $\gamma: M_w \to \Gamma(W, S)$ C–cebirlerinin homomorfizmidir.

İspat. $W \subset X$ için $\varphi_w: M_w \times M_w \to M_w$ operasyonu, mesela, $\varphi_w(s_1, s_2) = s_1 + s_2$ (aynı şey çarpım için söylenebilir). Bu taktirde,

$$\gamma_{w,v}(\varphi_w(s_1, s_2)) = \gamma_{w,v}(s_1 + s_2) = \gamma_{w,v}(s_1) + \gamma_{w,v}(s_2) = \varphi_v(\gamma_{w,v}(s_1), \gamma_{w,v}(s_2)).$$

En son teoremden dolayı birtek $\varphi: S \oplus S \to S$ homomorfizmi vardır $\ni$

$$\varphi(\gamma s_1, \gamma s_2) = \gamma\varphi_w(s_1, s_2) = \gamma(s_1 + s_2)$$

Diğer taraftan, $S \oplus S \xrightarrow{+} S: \sigma_1 + \sigma_2 = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) \Rightarrow$

$$\gamma s_1(x) + \gamma s_2(x) = \varphi(\gamma s_1(x), \gamma s_2(x)) = \varphi(\gamma s_1, \gamma s_2)(x)$$
$$= \gamma(s_1 + s_2)(x).$$

Binaenaleyh,

$$\gamma s_1 + \gamma s_2 = \gamma(s_1 + s_2).$$

Aynı şey diğer operasyonlar için de yapılabilir. Netice olarak görüyoruz ki γ, C–cebirlerin bir homomorfizmidir ve operasyonları saplara intikal ettirmektir.

TARİF 79. $\mathcal{A}$, X üzerinde C–cebirlerin bir demeti, ve S, X üzerinde bir demet olsun. S, $\mathcal{A}$–modüllerin demetidir denir, şayet şu şartlar sağlanıyorsa:

1. Her $x \in X$ için, S_x 1 li bir $\mathcal{A}_x$–modüldür.
2. $S \oplus S \xrightarrow{+} S$ süreklidir.
3. $S \oplus S \to S$ süreklidir.

Not. O_x, S_x in sıfır elemanı olsun. $O: x \to O_x$ sıfır kesitini tarif eder, $O \in \Gamma(X, S)$. Herbir W için $\Gamma(W, S)$ bir $\Gamma(W, \mathcal{A})$–modüldür.

TARİF 80. $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ C–cebirlerinin bir öndemeti, $\{X, \tilde{M}_w, \tilde{\gamma}_{w,v}\}$ ise abelyen gruplarının bir öndemeti olsun. $\mathcal{A}$ ve S sıra ile mütekabil demetleri göstersin. Şayet herbir $W \subset X$ için $\tilde{M}_w$ 1 li bir M_w–modül, ve her $s \in M_w$ ve her $\tilde{s} \in \tilde{M}_w$ için $\tilde{\gamma}_{w,v}(s.\tilde{s}) = \gamma_{w,v}(s).\tilde{\gamma}_{w,v}(\tilde{s})$ ise, bu taktirde, $(\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}, \{X, \tilde{M}_w, \tilde{\gamma}_{w,v}\})$ ye modüllerin öndemeti denir.

Teorem 16.6.1.1 in bir benzeri olarak, gösterilebilir ki, modüllerin öndemeti, $\mathcal{A}$–modüllerin demetini tarif eder.

Bu taktirde, $\gamma: \tilde{M}_w \to \Gamma(W, S)$ abelyen grupların bir homomorfizmidir, öyleki $\gamma(s.\tilde{s}) = \gamma(s).\gamma(\tilde{s})$.

Misal. X yerine bir $B \subset C^n$ açık cümlesini alalım. $W \subset B$ bir açık cümle, M_w, W de holomorf fonksyonların cümlesi, ve $\gamma_{w,v}: M_w \to M_v$, $\gamma_{w,v}(f) = f|V$ ile tarif edilmiş olsun. Bu taktirde, $\{B, M_w, \gamma_{w,v}\}$ C–cebirlerinin bir öndemetidir. Bu öndemetin tarif ettiği $\mathcal{O}$ demeti, C–cebirlerin bir demetidir. Budemete, B de holomorf fonksyonların nüvelerinin demeti denir.

Teorem 16.6.1.1 den ötürü de, her bir $W \subset B$ açık cümlesi için $\theta: M_w \to \Gamma(M, \mathcal{O})$ C–cebirlerinin homomorfizmidir, ve $\theta(f|V) = \theta(f)|V$.

Teorem 16.6.1.2. $\gamma: M_w \to \Gamma(M, \mathcal{O})$ C–cebirleri izomorfizmidir.

İspat. θ nın bijektif olduğunu göstermemiz kâfidir.

1. Farzedelim ki, $\gamma f = O$. Bu taktirde, her $z \in W$ için, $\gamma f(z) = O_z$. Yani $(W, f)_z = O_z$. Bu demektir ki bir $V(z) \subset W$ açık cıvarı vardır $\ni f|V = 0$, ve özel olarak $f(z) = 0$. O halde $f = 0$.

2. Şimdi W üzerinde bütün kesitlerin $\Gamma(W, \mathcal{O})$ cümlesini gözönüne alalım ve $s \in \Gamma(W, \mathcal{O})$ olsun. Bu taktirde herbir $z \in W$ için bir $U(z) \subset W$ cıvarı ve U üzerinde bir f holomorf fonksyonu vardır öyleki $(U, f)_z = s(z)$. Bu taktirde $V(z) \subset U$ cıvarı vardır $\ni \gamma f | V = s|V$..

Şimdi, $(U_\iota)_{\iota \in I}$, W nin bir açık örtüsü olsun $\ni$ herbir U_ι üzerinde, bir f_ι holomorf fonksyonu vardır ve öyleki $\theta(f_\iota) = s|U_\iota$. Bu taktirde W üzerinde, $f|U_\iota = f_\iota$ ların oluşturduğu bir f holomorf fonksyonu vardır $\ni$

$$\gamma f|U_\iota = \gamma(f|U_\iota) = \gamma f_\iota = s|U_\iota.$$

Binaenaleyh $f \in M_w$ ve $\gamma f = s$.

Misal. Bütün V, W için $M_w = C$ ve $\gamma_{w,v} = 1_C$ olsun. Bu taktirde, $\{B, M_w, \gamma_{w,v}\}$ C–cebirlerinin bir öndemetidir, hakikatte cisimlerin bir öndemetidir. $\mathcal{A}$ mütekabil demet olsun. $(W_1, c_1) \overset{z}{\sim} (W_2, c_2)$ yalnız ve yalnız $c_1 = c_2$ ise, yani $\mathcal{A}_z = C$, $\forall z \in B$.

Şayet $s \in \Gamma(W, \mathcal{A})$ ve $z \in W$ ise, bu taktirde, $c = s(z) \in \mathcal{A}_z = C = M_w$, ve $\gamma c(z) = c = s(z)$. Binaenaleyh, bir $V(z) \subset W$ açık cıvarı vardır $\ni s|V = \gamma c|V$, yani $s(z) = c$, $z \in V$. Dolayısıyla, s ye lokal olarak sabit bir kompleks fonksyon nazarı ile bakılabilir.

$\mathcal{A}$ ya kompleks sayıların sabit demeti denir. Açık olarak $\mathcal{A}$, $\mathcal{O}$ nun bir altdemetidir.

Evvelce verilen analitik demetin tarifi şimdi şu muadil şekli alır.

TARİF 81. B üzerinde $\mathcal{O}$–modüllerin S demetine B üzerinde analitik demet denir.

Bu demektir ki analitik demetin herbir elemanı bir holomorf fonksyonun nüvesi ile çarpılabilir. Daha kesin bir idafe ile S analitik demetinin herbir S_z sapı bir $\mathcal{O}_z$–modüldür, ve bu çarpım süreklidir.

Misal 1. $\mathcal{O}$ bir analitik demettir.

2. S bir analitik demet ve $S^* \subset S$ bir altdemet olsun.

Şayet her $z \varepsilon B$ için, $S^*_z \subset S_z$ bir altmodül ise, bu taktirde, S^* da bir analitik demettir. Gerçekten, $(s_1, s_2) \varepsilon \Gamma(W, S^* \oplus S^*) \subset \Gamma(W, S \oplus S) \Rightarrow (s_1 + s_2) \in \Gamma(W, S)$, ve dolayısıyla $(s_1 + s_2) \in \Gamma(W, S^*)$. Bu gösteriyorki toplam süreklidir. Skalerle çarpım aynı şekilde gösterilir. Üstelik, $S^* \subset S$ bir analitik altdemet ise, bu taktirde, $\Gamma(W, S^*) \subset \Gamma(W, S)$ bir $\Gamma(W, \mathcal{O})$–altmodüldür.

3. $q>0$ için $\mathcal{O}^q = \underbrace{\mathcal{O} + \ldots +}_{q \text{ defa}} \mathcal{O}$ daima bir analitik demettir.

Hatta şu teorem geçerlidir.

Teorem 16.6.1.3. $S_1, \ldots, S_l$, B üzerinde analitik demetler olsun. Bu taktirde $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_l$ bir analitik demettir.

İspat. $S_z = (S_1)_z \times \ldots \times (S_l)_z$ daima bir $\mathcal{O}_z$–modüldür. Operasyonların sürekli olduklarının gösterilmesi kalıyor.

Toplam için gösterelim:

$$(s, s') \varepsilon \Gamma(W, S \oplus S) = \Gamma(W, S) = \Gamma(W, S) \times \Gamma(W, S)$$

$$(s_i, s_i') = (p_i \circ s, p_i \circ s') \varepsilon \Gamma(W, S_i) \times \Gamma(W, S_i) = \Gamma(W, S_i \oplus S_i).$$

Burada $p_i : S_1 \oplus \ldots \oplus S_l \to S_i$ $(\sigma_i = p_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_l))$ kanonik projeksyonlardır (demet morfizmleridir, gerçekten p_i ler sapları muhafaza ederler.

$\sigma \varepsilon (S_1 \oplus \ldots \oplus S_l)_z = (S_1)_z \times \ldots \times (S_l)_z \Rightarrow \exists\, s_i \varepsilon S_i \ni s_i(z) = p_i(\sigma)$. Ve $s = (s_1, \ldots s_l)$ için $\gamma s(z) = \sigma$. Binaenaleyh $p_i \circ \gamma s = s_i$ süreklidir, p_i bir demet morfizmidir).

Bu taktirde,

$$s_i + s_i' \varepsilon \Gamma(W, S_i), \; i = 1, \ldots, l$$

ve dolayısıyla,

$$s + s' = (s_1 + s_1', \ldots, s_l + s_l') \varepsilon \Gamma(W, S_1) \times \ldots \times \Gamma(W, S_l) = \Gamma(W, S).$$

4. $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ bir analitik altdemet ise, $\mathcal{J}_z \subset \mathcal{O}_z$ bir idealdir. Bu sebeple, $\mathcal{J}$ ya ideal demet diyoruz.

TARİF 82. $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ bir ideal demet olsun. Bu taktirde $N(\mathcal{J}) = \{z \varepsilon B; \mathcal{O}_z \neq \mathcal{J}_z\}$ cümlesine $\mathcal{J}$ nın sıfır cümlesi denir.

$f_z \varepsilon \mathcal{O}_z \Rightarrow f_z$, z cıvarında bir f holomorf fonksyonuna yakınsaktır.

Teorem 16.6.1.4. $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$, $B \subset C^n$ açık cümlesi üzerinde bir ideal demet olsun. Bu taktirde $N(\mathcal{J}) = \{z \varepsilon B;$ bütün $f_z \varepsilon \mathcal{J}_z$ için $f(z) = 0\}$.

İspat. 1. $z \varepsilon N(\mathcal{J})$, $f_z \varepsilon \mathcal{J}_z$ ve fakat $f(z) \neq 0$ farzedelim. Bu taktirde, z nin bir cıvarında $1/f$ holomorfiktir, ve $I_z = \gamma 1(z) = \gamma(1/f)\,\gamma(f)\,(z) \varepsilon \mathcal{J}_z$. Binaenaleyh $\mathcal{J}_z = \mathcal{O}_z$. Bu tezat gösteriyor ki $f(z) = 0$.

2. $z \notin N(\mathcal{J})$ ise, $\mathcal{J}_z = \mathcal{O}_z$. Dolayısıyla $I_z \varepsilon \mathcal{J}_z$, fakat diğer taraftan $1(z) \neq 0$.

16.6.2. **Bölüm Demetler.** S, B üzerinde bir analitik demet, ve $S^* \subset S$ bir analitik altdemet olsun. Biraz önce misal 2. de gösterdik ki S bir analitik demet, $S^* \subset S$ bir altdemet ve her $z \varepsilon B$ için $S^*_z \subset S_z$ bir altmodül ise, bu taktirde S^* da bir analitik demettir. Buradan görülür ki $\Gamma(W, S^*) \subset \Gamma(W, S)$ bir $\Gamma(W, \mathcal{O})$–altmodülüdür. Şimdi $W \subset B$ açık cümleleri için $N_w = \Gamma(W, \mathcal{O})$ vazedelim ve $M_w = \Gamma(W, S)/\Gamma(W, S^*)$ yi N_w–modül şeklinde tefsir edelim. $q : \Gamma(W, S) \to M_w$ kanonik projeksiyon ve $s \varepsilon \Gamma(W, S)$ olsun. $q(s) = [s]$ vazedelim. Bu taktirde $V \subset W \subset B$ için

$$\gamma_{w,v}([s]) = [s|V], \quad [s] \varepsilon M_w$$

tarif edilebilir. $\gamma_{w,v}$ iyi tariflidir, zira $[s_1] = [s_2]$ yalnız ve yalnız $s_1 - s_2 \varepsilon \Gamma(W, S^*)$. Diğer taraftan, $(s_1 - s_2)|V \varepsilon \Gamma(V, S^*)$. Dolayısıyla $[s_1|V] = [s_2|V]$. Binaenaleyh, $\{B, M_w, \gamma_{w,v}\}$ abelyen gruplarının bir öndemetidir. Üstelik $f \varepsilon N_w$ ve $[s] \varepsilon M_w$ için

$$\gamma_{w,v}(f.[s]) = \gamma_{w,v}([f.s]) = [(f.s)|V] = [(f|V).(s|V)]$$
$$= (f|V).[s|V] = (f|V).\gamma_{w,v}([s]).$$

Yani tarif 80 den dolayı, $(\{B, N_w, \gamma_{w,v}\}, \{B, M_w, \gamma_{w,v}\})$ çifti modüllerin bir öndemetidir. Bu öndemetin tarif ettiği Q demeti bir analitik demettir. Q ya S nin S^* ile bölüm demeti denir ve

$$Q = S/S^*$$

yazılır.

Teorem 16.6.2.1. S, B üzerinde bir analitik demet, $S^* \subset S$ bir analitik altdemet, ve $Q = S/S^*$ bölüm demet olsun. Bu taktirde her $z \varepsilon B$ için, Q_z ve S_z/S_z^* ($\mathcal{O}_z$–modül) arasında bir

$$\psi : Q_z \to S_z/S^*_z$$

izomorfizmi vardır öyleki $\psi((W, [s])_z) = \overline{s(z)} = \bar{\sigma}$. Burada $\bar{\sigma}$, $\sigma \varepsilon S_z$ nin S_z/S^*_z deki resmidir.

İspat. 1. ψ iyi tarifli ve injektiftir: $(W_1, |s_1|) \overset{z}{\sim} (W_2, |s_2|)$ yalnız ve yalnız $V(z) \subset W_1 \cap W_2$ cıvarı varsa öyleki,

$$[s_1|V] = \gamma_{w_1,v}([s_1]) = \gamma_{w_2,v}([s_2]) = [s_2|V].$$

Fakat bu demektir ki, $(s_1 - s_2)|V \varepsilon \Gamma(V, S^*)$. $s_1 - s_2$ sürekli olduğundan $s_1(z) - s_2(z) \varepsilon S^*$ yazılabilir. Binaenaleyh $\overline{s_1(z)} = \overline{s_2(z)}$. Yani ψ iyi tariflidir ve birebirdir.

2. ψ, $\mathcal{O}_z$–modül homomorfizmidir:

a) $(W, [s_1])_z + (W, [s_2])_z = (W, [s_1 + s_2])_z$. Yani,

$$\psi(\sigma_1 + \sigma_2) = \psi(\sigma_1) + \psi(\sigma_2).$$

$b)\ \psi(f_z.(W,[s])_z) = \dot{\psi}((W,\ [f.s])_z) = \overline{(f.s)(z)} = f_z.\overline{s(z)}$
$= f_z.\ \psi((W,\ [s])_z).$

3. $\dot{\psi}$ sürjektiftir: $\bar{\sigma} \varepsilon S_z/S^*_z$ olsun. Bu taktirde $W(z) \subset B$ cıvarı ve bir $s \varepsilon \Gamma(W, S)$ vardır öylcki $s(z) = \sigma$. Fakat bu taktirde, $(W,[s])_z \ \varepsilon\ Q_z$, ve $\psi((W,[s])_z) = \overline{s(z)} = \bar{\sigma}$.

Bu izomorfizmden ötürü bundan sonra, Q_z ile S_z/S_z^* yı özdeş kabul edeceğiz.

Not. $s \varepsilon \Gamma(W, S) \Rightarrow \gamma([s]) \ \varepsilon\ \Gamma(W,Q)$. Şayet $\bar{s}:W \to Q$ tasviri $\bar{s}(z) = \overline{s(z)}$ ile tarif edilirse, bu taktirde,

$$\dot{\psi} \circ \gamma([s]) = \bar{s}.$$

Binaenaleyh, $\gamma([s])$ ile $\bar{s}$ özdeş kabul edilebilir.

16.6.3. **Analitik Demet Morfizmleri.**

TARİF 83. S_1, S_2, B üzerinde analitik morfizmler, ve $\varphi:S_1 \to S_2$ bir demet morfizmi olsun. φ ye analitik demet morfizmi veya demet homomorfizmi denir şayet her $z \varepsilon B$ için, $\varphi:(S_1)_z \to (S_2)_z$ bir $\mathcal{O}_z$–modül homomorfizmi ise; başka bir deyim ile

(i) φ sürekli

(ii) φ nin $(S_1)_z$ ye tahditi, $(S_1)_z$ grubunun $(S_2)_z$ ye bir homomorfizmi ise.

Hatırlatalım ki, (i) in mânası, S_1 in kesitlerinin φ ile kompozisyonu S_2 nin kesitleridir.

Misaller:

1. S, B üzerinde bir analitik demet ve $S^* \subset S$ bir analitik altdemet olsun. Farzedelim ki $q:S \to S/S^*$ kanonik projeksyondur, ve $q(\sigma) = \bar{\sigma}$. Bu taktirde, $q:S_z \to S_z/S^*_z$ daima bir $\mathcal{O}_z$-modül homomorfizmdir, ve $s \varepsilon \Gamma(W, S)$ için $q \circ s = \bar{s} = \gamma([s]) \ \varepsilon\ \Gamma(W,\ S/S^*)$. Binaenaleyh, q bir sürjektif demet homomorfizmidir, yani bir demet epimorfizmidir.

2. S bir analitik demet ise, bu taktirde sadece birtek $S \to O\ (= \bigvee_{z \varepsilon B} \{O_z\})$[1] demet morfizmi vardır. Açık olarak bu bir demet epimorfizmidir.

3. $S^* \subset S$ bir analitik altdemet olsun. Bu taktirde, $\iota = 1_S|S^*$ injeksyonu (dahil etme tasviri) bir demet morfizmidir. Hakikatte bir kanonik demet monomorfizmidir.

4. $S_1,\ldots,S_l$ analitik demetler ise,

$$p_i:S_1 \oplus \ldots \oplus S_l \to S_i$$

kanonik projeksyonları, demet epimorfizmleridir.

5. $j_i:\mathcal{O} \to \mathcal{O}^q$ kanonik injeksyonlar olsun.

[1] $\pi : O \to B$ kanonik tasvir olsun. O ya B nin topolojisi uygulanırsa, π bir topolojik tasvir olur. Böylece O bir analitik demet, sıfır demet, olur.

Şayet **O**, $\mathcal{O}$ nun sıfır–kesiti, **I** de birim 1–kesiti ise, bu taktirde $\mathcal{O}^q$ da birim kesitler

$$e_i:j_i \circ \mathbf{I} = (\mathbf{O}\ ,\ldots,\mathbf{I}\ ,\ldots,\mathbf{O}),\ \mathbf{I}\ \varepsilon\ \Gamma(B,\mathcal{O}),$$

şeklinde tarif edilir.

Şimdi $\varphi:\mathcal{O}^q \to S$ bir analitik demet morfizmi, ve $s_i = \varphi \circ e_i \ \varepsilon\ \Gamma(B,S)$ olsun. Bu taktirde, $(a_1\ ,\ldots,a_q) \ \varepsilon\ \mathcal{O}^q$ için

$$\varphi\ (a_1\ ,\ldots,a_q) = \varphi(\sum_{i=1}^{q} a_i e_i(z)) = \sum_{i=1}^{q} a_i s_i(z).$$

Binaenaleyh, $s_1\ ,\ldots,s_q$ kesitleri homomorfizmi tamamen belirtirler. Karşıt olarak, $s_1\ ,\ldots,s_q$ cinsinden yukardaki denklem aracılığı ile bir $\varphi = \varphi_{(s_1,\ldots,s_q)}$ analitik demet morfizmi tarif edilebilir.

6. $\varphi:S_1 \to S_2$ ve $\dot{\psi}:S_2 \to S_3$ analitik morfizmler ise, $\dot{\psi} \circ \varphi : S_1 \to S_3$ kompozisyonu da bir analitik morfizmdir.

TARİF 84. $\varphi:S_1 \to S_2$ bir analitik demet morfizmi olsun. φ nin resmi, $\mathrm{Im}\varphi = \varphi(S_1) \subset S_2$ ile tarif edilir. φ nin çekirdeği ise $\mathrm{Ker}\ \varphi = \varphi^{-1}(O) \subset S_1$ ile tarif edilir.

Teorem 16.6.3.1. $\varphi:S_1 \to S_2$ bir analitik demet morfizmi ise, bu taktirde, $\mathrm{Im}\varphi$ ve $\mathrm{Ker}\varphi$ analitik demetlerdir.

İspat. Her demet morfizmi açık tasvir olduğundan, $\mathrm{Im}\varphi = \varphi\ (S_1) \subset S_2$, S_2 de açıktır. Dolayısıyla bir altdemettir. Diğer taraftan, $(\mathrm{Im}\varphi)_z = \varphi\ ((S_1)_z) \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi$ analitiktir.

φ sürekli ve $O \subset S_2$ açık $\Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(O) \subset S_1$ açık. Dolayısıyla, $\mathrm{Ker}\varphi$ bir altdemettir. Diğer taraftan,

$(\mathrm{Ker}\varphi)_z = \{\sigma \ \varepsilon\ (S_1)_z;\quad \varphi(\sigma) = \mathbf{O}_z \ \varepsilon\ (S_2)_z\} = \mathrm{Ker}(\varphi\,|(S_1)_z) \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi$ analitiktir.

TARİF 85. S_1, S_2, B üzerinde analitik demetler olsun. Bir $\varphi:S_1 \to S_2$ tasvirine bir analitik demet izomorfizmi denir şayet

1. φ sapları muhafaza ediyor

2. φ topolojik

3. Her $z \varepsilon B$ için $\varphi\,|(S_1)_z:(S_1)_z \to (S_2)_z$ bir $\mathcal{O}_z$–modül izomorfizm ise, bu taktirde $S_1 \simeq S_2$ yazıyoruz.

Not. Tarif 83 ile karşılaştırırsak, $\varphi:S_1 \to S_2$ bijektif bir demet homomorfizmi ise, bu taktirde bir analitik demet izomorfizmidir. Başka bir deyim ile, φ sapları muhafaza eder ve süreklidir, ve her $z \in B$ için $\varphi\,|(S_1)_z:(S_1)_z \to (S_2)_z$ bir $\mathcal{O}_z$–modül izomorfizmidir.

Madem ki her demet morfizmi açıktır, o halde φ^{-1} süreklidir.

Binaenaleyh φ topolojiktir.

Teorem 16.6.3.2 Şayet $\varphi:S_1 \to S_2$ analitik demet morfizmi ise, bu taktirde $S_1/\mathrm{Ker}\varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi$.

İspat. $q:S_1 \to S_1/\mathrm{Ker}\varphi$ kanonik projeksyon, $\sigma \varepsilon (S_1)_z$ ve $q(\sigma) = \bar{\sigma} \varepsilon (S_1/\mathrm{ker}\varphi)$ olsun. Bu taktirde, $\bar{\varphi}(\bar{\sigma}) = \varphi(\sigma)$ ile tarif edilen

$$\bar{\varphi}:S_1/\mathrm{Ker}\varphi \to \mathrm{Im}\,\varphi$$

tasviri sapları muhafaza eden bijektif bir tasvir olup, herbir sapta bir $\mathcal{O}_z$–modül izomorfizmdir. $\bar{\sigma} \varepsilon (S_1/\mathrm{Ker}\varphi)_z$ ise, bu taktirde, bir $W(z)$ civarı ve bir $s \varepsilon \Gamma(W, S_1)$ vardır öyleki $\bar{s}(z) = \bar{\sigma}$ ve $\bar{\varphi}o\bar{s} = \varphi o s \varepsilon \Gamma(W, \mathrm{Im}\varphi)$. Dolayısıyla $\bar{\varphi}$ süreklidir. Ohalde $\bar{\varphi}$ bir demet izomorfizmidir.

Not. $\varphi:S_1 \to S_2$ bir analitik demet morfizmi, $q:S_1 \to S_1/\mathrm{Ker}\varphi$, $\iota:\mathrm{Im}\varphi \to S_2$ (injeksyon) kanonik tasvirler olsun. Bu taktirde, φ nin şu kanonik dekompozisyonu (ayrılışı) vardır:

$$\varphi = \iota o \bar{\varphi} o q:S_1 \to \mathrm{Im}\varphi \xrightarrow{z} S_2, \mathrm{Im}\varphi \simeq S_1/\mathrm{Ker}\varphi.$$

TARİF 86. (S_1, π_1), (S_2, π_2) B üzerinde analitik demetler olsun. Bütün $\varphi:S_1 \to S_2$ analitik demet morfizmleri $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(S_1, S_2)$ ile gösterilir.

Şayet, $(\varphi_1 + \varphi_2)(\sigma) = \varphi_1(\sigma) + \varphi_2(\sigma)$ ve $(f.\varphi)(\sigma) = f_{\pi_1(\sigma)}.\varphi(\sigma)$; $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \varepsilon S_1$, ve $f \varepsilon \Gamma(B, \mathcal{O})$, vazedilirse, bu taktirde, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(S_1, S_2)$ bir $\Gamma(B, \mathcal{O})$–modül olur. $((\varphi_1 + \varphi_2)os = \varphi_1 os + \varphi_2 os$ ve $(f.\varphi)os = f.(\varphi os)$ yine kesittirler, ve dolayısıyla, $\varphi_1 + \varphi_2$ ve $f.\varphi$ süreklidirler.

TARİF 87. $S_1, \ldots, S_l$ B üzerinde analitik demetler, ve $\varphi_i:S_i \to S_{i+1}$, $i = 1, \ldots, l-1$, analitik demet morfizmleri olsun. Bu taktirde,

$$S_1 \xrightarrow{\varphi_1} S_2 \xrightarrow{\varphi_2} S_3 \to \ldots \to S_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} S_l \qquad (17.6.3.1)$$

dizisine, analitik demet dizisi denir.

TARİF 88. (16.6.3.1.) dizisi S_i de tıpatıptır (exact) denir şayet

$$\mathrm{Im}\varphi_{i-1} = \mathrm{Ker}\varphi_i$$

ise.

TARİF 89. (16.6.3.1) dizisi tıpatıptır denir, şayet her S_i de tıpatıp ise.

Teorem 16.6.3.3. 1. $O \to S' \xrightarrow{\varphi} S$ tıpatıptır yalnız ve yalnız φ injektif ise.

2. $S \xrightarrow{\psi} S'' \to O$ tıpatıptır yalnız ve yalnız ψ sürjektif ise

3. $\varphi_1:S_1 \to S_2$ bir analitik demet morfizmi olsun. Bu taktirde

$$O \to \mathrm{Ker}\varphi_1 \to S_1 \to \mathrm{Im}\varphi_1 \to O$$

kanonik dizisi tıpatıptır.

a) φ_1 injektif ise, bu taktirde $\mathrm{Ker}\varphi_1 = O$ ve $S_1 \simeq \mathrm{Im}\varphi_1$.

b) φ_1 sürjektif ise, bu taktirde $S_1/\mathrm{Ker}\varphi_1 \simeq S_2$.

İspat. Aşikârdır (bk. Galois Teorisi)

16.6.4 **Tutarlı (İnsicamlı) Demetler.** B herhangibir X kompleks Manifold olabilir.

TARİF 90. B üzerinde bir S analitik demetine (global) sonlu tevlid ediliyor, veya kısaca sonludur denir şayet sonlu sayıda (global) $s_1, \ldots s_q$ kesitleri varsa öyleki her $z \varepsilon B$ için, $\sigma \varepsilon S_z$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{q} a_i s_i(z), \quad a_i \varepsilon \mathcal{O}_z.$$

Başka bir deyim ile, her $z \varepsilon B$ için, açık bir $W(z) \subset B$ cıvarı, bir $q > 0$ tam sayısı, ve bir $\varphi:\mathcal{O}^q|W \to S|W$ demet epimorfizmi varsa.

Bu demektir ki: e_i, $\mathcal{O}^q$ nun i. birim kesiti, ve $s_i = \varphi o(e_i|W)$ φ altında resmi olsun. Şayet $\sigma \varepsilon S_z$ ise, σ bir $(a_1, \ldots, a_q) \varepsilon \mathcal{O}^q$ elemanının resmidir. O halde

$$\sigma = \varphi(a_1, \ldots, a_q) = \sum_{i=1}^{q} a_i s_i(z).$$

Binaenaleyh, $s_1, \ldots, s_q$ kesitleri bütün W üzerinde S_z $\mathcal{O}_z$–modülünü aynı zamanda (yani global olarak) tevlid eder.

Görülüyor ki, tarif 90 nın muadil ifadesi şöyledir:

TARİF 90*. B üzerinde bir S analitik demetine, sonlu tevlid edilir denir, şayet her $z \varepsilon B$ için açık bir $W(z)$ cıvarı ve sonlu sayıda $s_1, \ldots, s_q \varepsilon \Gamma(W, S)$ kesitleri varsa öyleki $s_1, \ldots, s_q$ kesitleri bütün W üzerinde, S_z $\mathcal{O}_z$–modülünü aynı zamanda tevlid eder.

TARİF 91. B üzerinde bir S analitik demetine lokal sonlu denir, şayet her $z \varepsilon B$ nin bir N_z cıvarı varsa öyleki N_z üzerinde $S(N_z)$ demeti global sonlu ise.

TARİF 92. S bir analitik demet, $U \subset B$ açık ve $s_1, \ldots, s_q$ $S(U)$ nun kesitleri ve $z \varepsilon U$ olsun. Şayet $(a_1, \ldots, a_q) \varepsilon \mathcal{O}^q{}_z$ varsa öyleki

$$\sum_{i=1}^{q} a_i s_i(z) = \mathbf{O},$$

bu taktirde $(a_1, \ldots, a_q)$ q–lusuna, z de $s_1, \ldots, s_q$ kesitlerinin demet bağlantısı denir.

Başka bir ifade ile, $s_i \varepsilon \Gamma(U, S)$, $\varphi:\mathcal{O}^q|U \to S|U$ epimorfizmi altında, $e_i \varepsilon \Gamma(U, \mathcal{O}^q)$ i. birim kesitinin resmi olsun. Bu taktirde $(a_1, \ldots, a_q) \varepsilon \mathcal{O}^q$ elemanı $\mathbf{O}_z$ üzerine dönüşür yalnız ve yalnız

$$\sum_{i=1}^{q} a_i s_i(z) = \mathbf{O},$$

"bağıntısı" sağlanıyorsa. Görülüyor ki tarif, "Kerφ ye $s_1, \ldots, s_q$ kesitlerinin demet bağlantısı denir" şeklini almaktadır.

TARİF 93. S, B üzerinde bir analitik demet olsun. S ye tutarlıdır denir eğer

1. S lokal sonlu ise

2. Her açık $U \subset B$ için, U üzerinde herhangi sonlu sayıda kesitlerin demet bağlantısı lokal sonlu tevlid ediliyorsa. (Yani $U \subset B$ açık ve $\varphi:\mathcal{O}^q|U \to S|U$ bir analitik demet morfizmi ise, Kerφ lokal sonlu.). Kısaca, S sonlu bağlantılı ise.

Not. Yukarda da hatırlatıldığı üzere, verilen tariflerin, lokal olma hususiyeti dolayısıyla, ilerde tarifi görüleceği kompleks Manifoldlara teşmili açıktır.

Bir anlam karışıklığına meydana vermedikçe, global ve lokal kelimelerinden sarfı nazar edeceğiz.

Teorem 16.6.4.1. S tutarlı ve $S^* \subset S$ sonlu bir altdemet ise, bu taktirde S^* tutarlıdır.

İspat. $W \subset B$ açık, $\varphi:\mathcal{O}^q|W \to S^*|W$ bir analitik demet morfizmi ve $\iota:S^*|W \to S|W$ kanonik injeksiyon olsun. Bu taktirde

$$\iota o\varphi:\mathcal{O}^q|W \to S|W$$

bir analitik demet morfizmidir. Fakat Kerφ = Ker $(\iota o\varphi)$ olduğundan Kerφ sonludur. Binaenaleyh S^* sonludur.

Teorem 16.6.4.2. (Yükseltmenin Varlığı). $\varphi:S \to S^*$ bir demet epimorfizmi, $\varepsilon^*:\mathcal{O}^q \to S^*$ keyfi demet homomorfizmi olsun.

Bu taktirde, her $z^0 \varepsilon B$ için bir $U(z^0) \subset B$ cıvarı ve bir $\varepsilon:\mathcal{O}^q|U \to S|U$ demet homomorfizmi vardır öyleki $\varphi o\varepsilon = \varepsilon^*$. ε na ε^* ın bir yükseltilmesi denir.

İspat. $s_i^* = \varepsilon^* o e_i \ \varepsilon \ \Gamma(B, S^*)$, $i = 1, \ldots, q$ olsun. Bu taktirde $z^0 \ \varepsilon B$ için $\exists \ \sigma_i \ \varepsilon \ S_{z^0} \ni \varphi(\sigma_i) = s_i^*(z^0)$. Dolayısıyla, bir $W(z^0) \subset B$ cıvarı ve $s_i \ \varepsilon \ \Gamma(W,S)$ kesitleri bulunabilir öyleki $s_i(z^0) = \sigma_i$. Binaenaleyh $\varphi o s_i(z^0) = s_i^*(z^0)$. Dolayısıyla, bütün bir $U(z^0) \subset W$ cıvarında $\varphi o s_i$ ile s_i^* eşittirler.

Şimdi, $(a_1, \ldots, a_q) \ \varepsilon \ \mathcal{O}^q{}_z$ için

$$\varepsilon^*(a_1, \ldots, a_q) = \sum_{i=1}^{q} a_i s^*{}_i(z) = \sum_{i=1}^{q} a_i (\varphi o s_i)(z)$$

$$= \varphi o \sum_{i=1}^{q} a_i s_i(z) = \varphi o \varepsilon (a_1, \ldots, a_q)$$

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{O}^q \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon^*"] & S^* \end{tikzcd}$$

Teorem 16.6.4.3. $O \to S^* \xrightarrow{j} S \xrightarrow{p} S^{**} \to O$ B üzerinde analitik demetlerinin bir tıpatıp dizisi olsun. S^* ve S^{**} tutarlı iseler, S de tutarlıdır.

1. S sonludur. S^*, S^{**} sonlu tevlid edildiklerinden, her $z^0 \ \varepsilon \ B$ için bir $W(z^0) \subset B$ cıvarı ve W üzerinde $\varepsilon^*:\mathcal{O}^{q*} \to S^*$ ve $\varepsilon^{**}:\mathcal{O}^{q**} \to S^{**}$ demet epimorfizmleri vardır. Şimdi, $p:S \to S^{**}$ sürjektif olduğundan, ε^{**} bir ε yükseltilmesi vardır.

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{O}^{q**} \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon^{**}"] & S^{**} \end{tikzcd}$$

$$\varepsilon:\mathcal{O}^{q**} \to S, \ p o \varepsilon = \varepsilon^{**}.$$

Gaye, her $z \ \varepsilon \ B$ için açık bir $W(z) \subset B$ cıvarı, bir $q > 0$ tamsayısı ve bir $\varphi:\mathcal{O}^q|W \to S|W$ demet epimorfizmi bulmaktır. Bunun için

$$\mathcal{O}^{q*} \oplus \mathcal{O}^{q**} = \mathcal{O}^q, \ q = q^* + q^{**}$$

yı teşkil edelim. $\varphi:\mathcal{O}^q \to S$ tasvirini şu şekilde tarif edelim: $p_1:\mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^{q*}$, $p_2:\mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^{q**}$ kanonik projeksyonları, $\sigma_1 \ \varepsilon \ \mathcal{O}^q{}_z{}^{**}$, $\sigma_3 \ \varepsilon \ \mathcal{O}_z{}^{q*}$ ve $(\sigma_3, \sigma_1) \ \varepsilon \ \mathcal{O}^q{}_z$ olsun. Bu taktirde,

$$\varphi(\sigma_3, \sigma_1) = j o \varepsilon^* o p_1(\sigma_3, \sigma_1) + \varepsilon o p_2(\sigma_3, \sigma_1)$$
$$= j o \varepsilon^*(\sigma_3) + \varepsilon(\sigma_1).$$

Gösterelim ki φ sürjektiftir. $\sigma \ \varepsilon \ S_z$ ve $z \ \varepsilon \ W$ olsun. Bu taktirde $\exists \sigma_1 \ \varepsilon \ \mathcal{O}_z{}^{q**} \ni \varepsilon^{**}(\sigma_1) = p(\sigma)$. Açık olarak $\sigma - \varepsilon(\sigma_1) \in$ Ker$p$ = Imj. Dolayısıyla $\exists \ \sigma_2 \ \varepsilon \ S_z{}^* \ni j(\sigma_2) = \sigma - \varepsilon(\sigma_1)$. Üstelik $\sigma_3 \ \varepsilon \ \mathcal{O}_z{}^{q*}$ bulunabilir $\ni \varepsilon^*(\sigma_3) = \sigma_2$.

Binaenaleyh,

$$\varphi(\sigma_3, \sigma_1) = j o \varepsilon^*(\sigma_3) + \varepsilon(\sigma_1) = j(\sigma_2) + \varepsilon(\sigma_1)$$
$$= \sigma - \varepsilon(\sigma_1) + \varepsilon(\sigma_1) = \sigma.$$

2. S sonlu bağlanıtılıdır. $W \subset B$ açık ve $\varphi:\mathcal{O}^q|W \to S|W$ bir demet epimorfizmi olsun. $z^0 \ \varepsilon \ W$ keyfi alınıyor. Göstermeliyiz ki Kerφ sonludur. S^{**} sonlu bağlantılı olduğundan, $\exists$ bir $V(z^0) \subset W$ açık cıvarı, ve V üzerinde bir ψ_1 demet epimorfizmi, $\ni$

$$\psi_1:\mathcal{O}^r|V \to \text{Ker}(p o \varphi)|V.$$

Bu ise

$$\mathcal{O}^r|V \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{O}^q|V \xrightarrow{p o \varphi} S^{**}$$

tıpatıp dizisini verir.

$\mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}j \simeq S^*$ olduğundan, $\varphi o \psi_1 : \mathcal{O}^r \to \mathrm{Ker}p$ tasvirine $\varphi o \psi_1 : \mathcal{O}^r \to S^*$ tasviri gözü ile bakılabilir. Diğer taraftan, S^* sonlu bağlantılı olduğundan, $\exists$ bir $U(z^0) \subset V$ civarın ve U üzerinde bir ψ_2 demet epimorfizmi, $\ni$

$$\psi_2 : \mathcal{O}^s | U \to \mathrm{Ker}\,(\varphi o \psi_1) | U.$$

Bu ise

$$\mathcal{O}^s | U \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{O}^r | U \xrightarrow{\varphi o \psi_2} S$$

tıpatıp dizisini verir.

Binaenaleyh, U üzerinde

(i) $\varphi o\,(\psi_1 o \psi_2) = (\varphi o \psi_1) o \psi_2 = 0$

(ii) $\sigma \varepsilon \mathcal{O}^q$ ve $\varphi(\sigma) = \mathbf{O}$ ise, bu taktirde, $p o \varphi\,(\sigma) = \mathbf{O}$, ve bir $\sigma_2 \varepsilon \mathcal{O}^s$ vardır öyleki $\psi_2(\sigma_2) = \sigma_1$. Dolayısıyla $\psi_1\, o \psi_2\,(\sigma_2) = \sigma$.

(i) ve (ii) $\Rightarrow$

$$\mathcal{O}^s | U \xrightarrow{\psi_1 o \psi_2} \mathcal{O}^q | U \xrightarrow{\varphi} S | U$$

dizisi tıpatıptır. Binaenaleyh, $\mathrm{Ker}\varphi$ sonludur.

Teorem 16.6.4.4. $S^* \xrightarrow{j} S \xrightarrow{p} S^{**} \to O$ B üzerinde analitik demetlerinin bir tıpatıp dizisi olsun. S^* ve S tutarlı iseler, S^{**} da tutarlıdır.

İspat. 1. p sürjektif olduğundan S^{**} sonludur.

2. $\varepsilon^{**} : \mathcal{O}^{q**} \to S^{**}$ bir $W \subset B$ açık cümlesi üzerinde keyfi bir demet homomorfizmi, ve $\varepsilon : \mathcal{O}^{q**} \to S$ ε^{**} ın bir yükseltilmesi olsun: $p o \varepsilon = \varepsilon^{**}$. S^* sonlu olduğundan, $\exists$ bir $V(z^0) \subset W$ açık cıvarı, ve her $z^0 \varepsilon W$ için V üzerinde bir $\varepsilon^* : \mathcal{O}^{q*} \to S^*$ demet epimorfizmi. Şimdi, V üzerinde bir

$$\varphi : \mathcal{O}^{q*} \oplus \mathcal{O}^{q**} \to S$$

demet morfizmi

$$\varphi\,(\sigma_1, \sigma_2) = j o \varepsilon^*\,(\sigma_1) + \varepsilon(\sigma_2)$$

ile tarif edilmiş olsun. S tutarlı olduğundan bir $U(z^0) \subset V$ cıvarında,

$$\mathcal{O}^q \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}^{q*} \oplus \mathcal{O}^{q**} \xrightarrow{\varphi} S$$

tıpatıp dizisi mevcuttur. $\alpha : \mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^{q**}$, $\alpha = p_2 o \psi$ ile tarif edilmiş olsun. Teorem ispatlanmış olacaktır şayet

$$\mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^{q**} \xrightarrow{\varepsilon^{**}} S^{**}$$

dizisinin tıpatıp olduğu gösterilebilirse. Oysa aşağıdaki ifadeler muadildirler.

1. $\sigma \varepsilon \mathrm{Ker}\varepsilon^{**}$.

2. $\varepsilon(\sigma) \varepsilon \mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}j$.

3. $\exists\, \sigma_1 \varepsilon \mathcal{O}_z^{q*} \ni j o \varepsilon^*\,(\sigma_1) = \varepsilon\,(\sigma)$

4. $\varphi\,(-\sigma_1, \sigma) = \mathbf{O}, \sigma_1 \varepsilon \mathcal{O}_z^{q*}$.

5. $\exists\, \sigma_2 \varepsilon \mathcal{O}^q{}_z \ni \psi(\sigma_2) = (-\sigma_1, \sigma)$

6. $\sigma = p_2 o \psi\,(\sigma_2) = \alpha\,(\sigma_2) \in \mathrm{Im}\alpha$.

Teorem 16.6.4.5. $O \to S^* \xrightarrow{j} S \xrightarrow{p} S^{**}$ B üzerinde analitik demetlerinin tıpatıp dizisi olsun. S ve S^{**} tutarlı iseler, S^* da tutarlıdır.

İspat. S^* a S nin bir analitik altdemeti, nazarı ile bakılabilir. Binaenaleyh S^* ın sonlu olduğu gösterilmesi kâfidir. $z^0 \varepsilon B$ keyfi fakat sabit olsun. S ve S^{**} tutarlı olduklarından, $\exists$ bir $W(z^0) \subset B$ civarı, ve W üzerinde bir $\varepsilon : \mathcal{O}^q \to S$ demet epimorfizmi ile bir $\varphi : \mathcal{O}^{q*} \to \mathcal{O}^q$ demet epimorfizmi, $\ni$

$$\mathcal{O}^{q*} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^q \xrightarrow{p o \varepsilon} S^{**}$$

dizisi tıpatıptır.

Bu taktirde,

$$\varepsilon o \varphi(\mathcal{O}^{q*}) = \varepsilon\,(\mathrm{Im}\varphi) = \varepsilon\,(\mathrm{Ker}(p o \varepsilon)) = \mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}j.$$

Dolayısıyla,

$$\varepsilon o \varphi\,(\mathcal{O}^{q*}) \simeq S^*.$$

Yani S^* sonludur.

Teorem 16.6.4.6. $\varphi : S_1 \to S_2$ B üzerinde tutarlı demetlerin bir homomorfizmi olsun. Bu taktirde $\mathrm{Ker}\varphi$ ve $\mathrm{Im}\varphi$ de tutarlıdır.

İspat. $O \to \mathrm{Ker}\varphi \to S_1 \to S_2$ tıpatıptır. O halde $\mathrm{Ker}\varphi$ tutarlıdır. Diğer taraftan, $\mathrm{Im}\varphi \simeq S_1/\mathrm{Ker}\varphi$. Oysa $S_1/\mathrm{Ker}\varphi$ nın tutarlı olduğu aşağıdaki lemmanın bir neticesidir.

Lemma. S, B üzerinde tutarlı ve $S^* \subset S$ tutarlı bir analitik altdemet ise bu taktirde S/S^* tutarlıdır.

İspat. $O \to S^* \to S \to S/S^* \to O$ kanonik dizisi tıpatıptır, ve teorem 16.6.4.4 ten dolayı netice açıktır.

Teorem 16.6.4.7. (Serre'in beş lemması).

$S' \xrightarrow{j_1} S'' \xrightarrow{j_2} S \xrightarrow{p_1} S^* \xrightarrow{p_2} S^{**}$ tıpatıp bir demet dizisi olsun. Şayet S', S'', S^*, S^{**} tutarlı iseler, S de tutarlıdır.

İspat. $O \to S''/\mathrm{Im}j_1 \to S \to \mathrm{Ker}p_2 \to O$ tıpatıptır, ve $S''/\mathrm{Im}j_1$ ve $\mathrm{Ker}p_2$ demetleri tutarlıdır. Teorem 17.6.4.3 ten dolayı netice açıktır.

Not. Diğer teoremler Serre'in beş lemmasının birer neticesidir. Mesela, $O \to S^* \to S \to S^{**}$ tıpatıp ise

$$O \to O \to S^* \to S \to S^{**}$$

dizisi de tıpatıptır. O halde, S ve S** tutarlı iseler, Serre'ın beş lemmasından dolayı S* da tutarlıdır.

Misal. $M \subset B$ bir analitik cümle, $\mathcal{J}(M)$ ideal demeti ve $Q(M) = \mathcal{O}/\mathcal{J}(M)$. $\mathcal{J}(M)$ tutarlı olduğundan Q(M) de tutarlıdır.

$M = \{0\} \subset C^n$ seçilirse, bu taktirde, $\mathcal{J}(M)_0 = \{f_0; f(0) = 0\}$ $\mathcal{O}_0$ da maksimal idealdir, $(\mathcal{J}(M)_z = \mathcal{O}_z,\ z \neq 0)$. Binaenaleyh,

$$Q(M)_z = \begin{cases} C & z = 0 \text{ ise} \\ 0 & z \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Not. B yerine herhangibir X topolojik uzayı alınabilir.

TARİF 94. X bir topolojik uzay ve $\mathcal{R}$, X üzerinde C–cebirlerin bir demeti olsun. X üzerinde bir $\mathcal{R}$–modül demetine tutarlıdır denir şayet sonlu ve sonlu bağlantılı ise.

Özel olarak, $\mathcal{R}$ nin kendisi tutarlıdır, şayet herbir $U \subset X$ açık cümlesi ve herbir $\varphi: \mathcal{R}^q | U \to \mathcal{R} | U$ $\mathcal{R}$–homomorfizmi için, Kerφ $\mathcal{R}$ üzerinde sonlu ise.

Teorem 16.6.4.8. $\mathcal{R}$, X üzerinde, tutarlı bir C–cebirleri demeti, ve $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ tutarlı bir ideal demet olsun. Bu taktirde, C–cebirleri demeti olarak $\mathcal{R}/\mathcal{J}$ tutarlıdır.

İspat. Biliyoruz ki $\mathcal{R}$–modül demeti olarak $\mathcal{R}/\mathcal{J}$ tutarlıdır. Şimdi $\pi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}/\mathcal{J}$ kanonik projeksyon, $U \subset X$ açık ve $\varphi: (\mathcal{R}/\mathcal{J})^q | U \to (\mathcal{R}/\mathcal{J}) | U$ bir $(\mathcal{R}/\mathcal{J})$–homomorfizmi olsun.

π bir $\pi_q: \mathcal{R}^q \to (\mathcal{R}/\mathcal{J})^q$ $\mathcal{R}$–homomorfizmini istintaç eder. $\psi = \varphi \circ \pi_q$: $\mathcal{R}^q | U \to (\mathcal{R}/\mathcal{J}) | U$ vazedelim. ψ bir $\mathcal{R}$–homomorfizmidir ve dolayısıyla, her $x_0 \in U$ için bir $V(x_0) \subset U$ açık cıvarı, ve $s_1, \ldots, s_l$, $s_i \in \Gamma(V, \ker\psi)$ kesitleri vardır $\ni$ V üzerinde Kerψ yi tevlid ederler. Diğer taraftan,

$$\tilde{s}_i = \pi_q(s_i) \in \Gamma(V, (\mathcal{R}/\mathcal{J})^q)$$

kesitleri için,

$$\varphi(\tilde{s}_i) = \varphi \circ \pi_q(s_i) = \psi(s_i) = 0,$$

ve dolayısıyla, $\tilde{s}_i \in \Gamma(V, \operatorname{Ker}\varphi)$.

Kolayca görülür ki $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_l$ kesitleri, V üzerinde Kerφ demetini bir $(\mathcal{R}/\mathcal{J})$–modül olarak tevlid ederler.

7. Kompleks Manifold

16.7.1. **Kompleks Halka Uzayları.** R bir lokal C–cebri, I yegâne maksimal ideali ve $\pi: R \to R/I$ kanonik projeksyon olsun. Biliyoruz ki $R/I \simeq C$. $f \in R$ ise $\pi(f) = [f] \in C$ yazabiliriz. Demek ki $[f]$, f de aldığı kompleks değerdir

Misal. f, $B \subset C^n$ de holomorf ve $z^0 \in B$ bir nokta olsun. Bu taktirde, $f_{z^0} = (W, f)_{z^0}$ $\mathcal{O}_{z^0}$ lokal C–cebirinin bir elemanıdır, ve $\gamma f \in \Gamma(B, \mathcal{O}) \ni \gamma f(z^0) = f_{z^0}$.

Burada $[\gamma f]$ kompleks değerli fonksyon

$$[\gamma f](z^0) = [\gamma f(z^0)]$$

ile tarif edilir. Bu taktirde $[\gamma f](z^0) = [f_{z^0}] = \pi(f_{z^0}) = f(z^0)$. Binaenaleyh $[\gamma f] = f$. ($\pi(f_{z^0}) = f(z^0)$ demek, $\pi: \mathcal{O}_{z^0} \to \mathcal{O}_{z^0}/I_{z^0} \simeq C$ yani z^0 daki kuvvet serisinin z^0 da aldığı $f(z^0)$ değeri demektir.)

TARİF 94. (X,H) çiftine kompleks halkalı uzay denir, şayet

1. X bir topolojik uzay,
2. H, X üzerinde lokal C–cebirlerin bir demeti ise.

$W \subset X$ açık bir cümle, ve F(W,C), W üzerinde bütün kompleks değerli fonksiyonların cümlesi olsun.

$f \in \Gamma(W,H)$ ise, bu taktirde $\exists\ [f] \in F(W,C) \ni x \in W$ için

$$[f](x) = [f(x)] \in H_x/I_x \simeq C.$$

$f \to [f]$ ile verilen $\Gamma(W,H) \to F(W,C)$ tekabülü C–cebri homomorfizmidir, fakat umumiyetle ne sürjektif ne de injektiftir.

Şayet, $W \subset X$ açık ve (X, H) bir kompleks halkalı uzay ise (W, H|W) de bir kompleks halkalı uzaydır.

TARİF 95. (X_1, H_1) ve (X_2, H_2) kompleks halkalı uzaylar olsun. Bu kompleks halkalı uzaylar arasında bir izomorfizm vardır denir, ve $(X_1, H_1) \overset{\varphi}{\simeq} (X_2, H_2)$ yazılır şayet bir $\varphi = (\tilde{\varphi}, \varphi^*)$ çifti varsa $\ni$

1. $\tilde{\varphi}: X_1 \to X_2$ topolojiktir.
2. $\varphi^*: H_1 \to H_2$ topolojiktir.
3. φ^*, $\tilde{\varphi}$ ye nazaran sapları muhafaza eder, yani aşağıdaki diagram komütatiftir.

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\pi_1"'] & H_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & X_2 \end{tikzcd}$$

4. Her $x \in X$ için $\varphi^* | (H_1)_x: (H_1)_x \to (H_2)_{\tilde{\varphi}(x)}$ bir C–cebri homomorfizmidir.

Teorem 16.7.1.1. $(X_1, H_1) \overset{\varphi}{\simeq} (X_2, H_2)$ olsun. Bu taktirde her açık $V \subset X_2$ cümlesi için $\exists$ C–cebri izomorfizmi:

$$\psi : \Gamma(V, H_2) \to \Gamma(\tilde{\varphi}^{-1}(V), H_1)$$

öyleki

$$\psi(s) = \varphi^{*-1} \circ s \circ \tilde{\varphi}.$$

İspat. $\psi(s)$: $\tilde{\varphi}^{-1}(V) \to H_1$ süreklidir, ve

$$\pi_1 \circ (\varphi^{*-1} \circ s \circ \tilde{\varphi}) = (\pi_1 \circ \varphi^{*-1}) \circ (s \circ \tilde{\varphi}) = (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \pi_2) \circ (s \circ \tilde{\varphi})$$
$$= \tilde{\varphi}^{-1} \circ (\pi_2 \circ s) \circ \tilde{\varphi} = 1_{\tilde{\varphi}^{-1}(V)}$$

Açıkça ψ, bir C– cebri homorfizmidir. Üstelik, inversi

$$\psi^{-1}(t) = \varphi^* \circ t \circ \tilde{\varphi}^{-1}$$

Lemma 1. R bir lokal C–cebiri, ve $I \subset R$ yegâne maksimal ideal olsun. Bu taktirde $a \in I$ yalnız ve yalnız bütün $c \in C-\{0\}$ için $a-c.1 \notin I$ ise.

İspat. 1. Farzedelim ki $a \in I$. Gösterelim ki $\forall\, c \in C-\{0\}$ için $a-c.1 \notin I$. Aksini kabul ederek farzedelim ki $a \in I \Rightarrow \exists\, c \in C-\{0\} \ni a-c.1 \in I$. Bu taktirde $c.1 = a-(a-c.1) \in I$. Fakat I has olduğundan $c = 0$. Bu ise bir tezattır.

2. Farzedelim ki $\forall\, c \in C-\{0\}$ için $a-c.1 \notin I$. Gösterelim ki $a \in I$. Aksini farzedelim, yani $a \notin I$. $\pi: R \to R/I \simeq C$ olduğundan $\pi(a) = c \neq 0$ vazedebiliriz. Bu taktirde $\pi(a-c.1) = 0$ şeklinde yazabiliriz. O halde $a-c.1 \in I$. Bu tezat gösteriyor ki $c = 0$ ve dolayısıyla $a \in I$.

Lemma 2. ρ: $R_1 \to R_2$ (lokal C–cebirleri) bir C–cebri homomorfizmi olsun. Bu takdirde, $\rho(I_1) \subset I_2$ (I_1, I_2 sırasıyla R_1, R_2 nin yegâne maksimal idealidir). ρ bir izomorfizm ise $\rho(I_1) = I_2$.

İspat. $\sigma \in I_1 \Rightarrow$ bütün $c \in C-\{0\}$ için $\sigma - c.1 \notin I_1$ (lemma 1). Bu taktirde her $c \in C-\{0\}$ için $\exists\, \sigma_c \ni \sigma_c \,.\, (\sigma-c.1) = 1$, çünki hipotezden dolayı $\sigma-c.1$ bir birimdir. Bu taktirde,

$$\rho(\sigma_c).(\rho(\sigma)-c.1) = 1.$$

Binaenaleyh, $\rho(\sigma)-c.1 \notin I_2$. Dolayısıyla $\rho(\sigma) \in I_2$ (lemma 1).

ρ bir izomorfizm ise, $\rho(I_1)$ R_2 nin bir idealidir. I_2 maksilmal olduğundan $\rho(I_1) \subset I_2$. Fakat $\rho^{-1}\rho(I_1) \subset \rho^{-1}(I_2) \subset I_1$. Yani $I_1 \subset I_1$. Binaenaleyh $\rho(I_1) = I_2$.

Teorem 16.7.1.2. $(X_1, H_1) \overset{\varphi}{\simeq} (X_2, H_2)$ olsun. Bir $V \subset X_2$ açık cümlesi için ψ: $F(V,C) \to F(\tilde{\varphi}^{-1}(V), C)$ tasviri $\psi(f) = f \circ \tilde{\varphi}$ ile tarif edilmiş olsun. Bu taktirde her $s \in \Gamma(V, H_2)$ için

$$[\varphi^{*-1} \circ s \circ \tilde{\varphi}] = [s] \circ \tilde{\varphi}.$$

İspat. $V \subset X_2$ açık, $y \in V$, $x = \tilde{\varphi}^{-1}(y)$ ve $s \in \Gamma(V, H_2)$ olsun. Bu taktirde, $s(y) = ([s](y)).1 + \sigma^*$, $\sigma^* \in (I_2)_y$, binaenaleyh

$$\varphi^{*-1}(s(y)) = ([s](y)).1 + \varphi^{*-1}(\sigma^*),\ \varphi^{*-1}(\sigma^*) \in (I_1)_x.$$

Dolayısıyla,

$$[\varphi^{*-1} \circ s \circ \tilde{\varphi}](x) = [\varphi^{*-1}(s(y))] = [s](y) = [s] \circ \tilde{\varphi}(x).$$

TARİF 96. Kompleks manifold diye, bir (X, H) kompleks halkalı uzayına denir öyleki,

1. X bir Hausdorff uzayıdır.

2. Herbir $x_0 \in X$ noktası için $\exists$ bir $U(x_0) \subset X$ ve bir $B \subset C^n$ açık cümlesi $\ni (U, H|U) \simeq (B, \mathcal{O})$.

Not 1. $U \subset X$ açık, $B \subset C^n$ bir açık cümle ve $\varphi:(U, H) \to (B, \mathcal{O})$ bir izomorfizm ise, bu taktirde herbir $V \subset U$ açık altcümlesi için bir $f \in F(V, C)$ fonksyonu holomorftur yalnız ve yalnız $f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ holomorf ise.

2. $U \subset X$ açık, $B \subset C^n$ bir açık cümle ve $\varphi:(U, H) \to (B, \mathcal{O})$ bir izomorfizm ise, bu taktirde $(U, \tilde{\varphi})$ çiftine X için bir kompleks koordinat sistemi denir.

$(U_1, \tilde{\varphi}_1)$, $(U_2, \tilde{\varphi}_2)$ iki kompleks koordinat sistemi ve $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ ise, bu taktirde $\tilde{\varphi}_{12} = \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} : \tilde{\varphi}_2(U_1 \cap U_2) \to \tilde{\varphi}_1(U_1 \cap U_2)$ bir homeomorfizmdir.

3. Şayet f, $\tilde{\varphi}_1(U_1 \cap U_2)$ üzerinde holomorf ise, bu taktirde 1. den d olayı $f \circ \tilde{\varphi}_1$, $U_1 \cap U_2$ üzerinde holomorftur. Binaenaleyh, $f \circ \tilde{\varphi}_{12} = (f \circ \tilde{\varphi}_1) \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}$, $\tilde{\varphi}_2(U_1 \cap U_2)$ üzerinde holomorftur.

Bu taktirde $\tilde{\varphi}_{12}$ holomorfik bir tasvirdir.

Karşıt olarak gösterelim ki, bir kompleks koordinat sistemi ile, bir kompleks manifold tarif etmek mümkündür.

X bir Hausdorff uzayı, ve $\{U_\iota\}$, $\iota \in I$, X in açık bir örtüsü olsun. Herbir U_ι için, U_ι den bir $B_\iota \subset C^n$ açık cümlesi üzerine bir $\tilde{\varphi}_\iota : U_\iota \to B_\iota$ homeomorfizmi verilmiş olsun, ve öyleki herbir koordinat transformasyonu:

$$\tilde{\varphi}_{\iota_1} \circ \tilde{\varphi}_{\iota_2} : \tilde{\varphi}_{\iota_2}(U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2}) \to \tilde{\varphi}_{\iota_1}(U_{\iota_2} \cap U_{\iota_2}) \qquad (16.7.1.1)$$

holomorfiktir.

$\{(U_\iota, \tilde{\varphi}_\iota)\}$ sistemine, X in bir kompleks atlası denir.

X'e ise n boyutlu kompleks manifold denir.

Şimdi, $W \subset X$ açık, $f \in F(W, C)$ ve $x_0 \in W$ olsun. f ye x_0 da holomorftur denir, şayet $U(x_0) \subset W \cap U_{\iota_0}$, $x_0 \in U_{\iota_0}$, açık cıvarı varsa öyleki $f \circ \tilde{\varphi}_{\iota_0}^{-1}$

$\tilde{\varphi}_{t_0}(U) \subset B_{t_0}$ da holomorftur. f, W de holomorftur denir şayet f herbir $x \varepsilon W$ noktasında holomorf ise.

f, x_0 da holomorf ise, (17.7.1.1) uygunluk şartından dolayı, x_0 ı ihtiva eden her U_t için, $f o \tilde{\varphi}_t^{-1}$, $\tilde{\varphi}_t(x_0)$ da holomorftur.

M_w, W üzerinde holomorf fonksyonların cümlesi, $\gamma_{w,v}: M_w \to M_v$ bilindiği üzere f yi V ye tahdit eden tasvir olsun: $\gamma_{w,v}(f) = f|V, f \varepsilon M_w$. Bu taktirde $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ bir öndemettir. Mütekabil H demetine, X üzerinde holomorf fonksyonların nüvelerinin demeti denir.

Şayet, $x_0 \varepsilon U_t \cap W$ ve $f \varepsilon M_w$ ise, bu taktirde,

$$(W, f)_{x_0} = (W \cap U_t, f|W \cap U_t)_{x_0}.$$

Açık olarak $M_{w \cap U_t}$ ile mütekabil tahdit edici tasvirler, $H|U_t$ demeti için bir öndemet teşkil ederler.

$H|U_t$ ile $\mathcal{O}|B_t$ nin öndemetleri arasında, $f \to f o \tilde{\varphi}_t^{-1}$ tasviri ile tarif edilen izomorfizm, $\varphi^*_t: H|U_t \to \mathcal{O}|B_t$ izomorfizmini istintaç eder. Böylece H, lokal C-cebirlerin bir demeti olup,

$$\varphi_t = (\tilde{\varphi}_t, \varphi^*_t) : (U_t, H) \to (B_t, \mathcal{O})$$

kompleks halka uzaylarının bir izomorfizmidir, ve (X,H) bir kompleks manifolddur.

Not. Analitik kompleks manifold daha uygun bir tâbir olacaktır.

16.7.2. Kompleks Manifoldlar Üzerinde Fonksyonlar Teorisi.

TARİF 97. (X,H) bir kompleks manifold, ve $x_0 \varepsilon X$ olsun. Bu taktirde bir $U(x_0) \subset X$ cıvarı ve bir $\varphi: U \to B \subset C^n$ homeomorfizmi vardır. Buradaki n tabii sayısı özel olarak seçilmiş φ ye tabi değildir. x_0 a da tâbi değilse:

(X,H) ya n-boyutlu kompleks manifold diyoruz.

TARİF 98. Bir (X,H) kompleks manifolduna irtibatlıdır diyoruz şayet altında yatan X topolojik uzayı irtibatlı ise.

Teorem 16.7.2.1. *(Özdeşlik teoremi)*, (X,H) bir irtibatlı kompleks manifold, f, g X üzerinde holomorf fonksyonlar, ve $V \subset X$ boş olmıyan bir açık cümle olsun. Şayet $f|V = g|V$ ise, bu takdtirde $f = g$.

İspat. $W = \{x \varepsilon X; \gamma f(x) = \gamma g(x)\}$ ve $W^c = X - W$ olsun. $W \neq \varnothing$ çünki $V \subset W$ ve $V \neq \varnothing$. Üstelik W açıktır, çünki, iki kesitin çakıştığı cümle daima açıktır. Şimdi $x_0 \varepsilon W^c$ keyfi olsun. Bu taktirde X de bir $U(x_0)$ açık cıvarı ve bir $(U,H) \simeq (B,\mathcal{O})$, $B \subset C^n$ bölge, izomorfizmi vardır. $x_0 \varepsilon W^c$ bir iç nokta değil ise, bu taktirde $U \cap W \neq \varnothing$ bir açık cıvardır ve $\gamma f|U \cap W = \gamma g|U \cap W$. Fakat bu taktirde C^n için ispat edilen özdeşlik teoreminden dolayı bütün U

da $\gamma f = \gamma g$. O halde özellikle $x_0 \varepsilon W$. Bu tezattan dolayı $x_0 \varepsilon W^c$ bir iç noktadır. x_0 keyfi olduğundan W^c açıktır. Fakat X irtibatlı olduğundan $W = X$, yani $f = g$.

Teorem 16.7.2.2. *(Maksimum Prensibi)*. (X,H) bir irtibatlı kompleks manifold, f X üzerinde holomorf ve $x_0 \varepsilon X$ bir nokta olsun. Şayet $|f|$ nin x_0 da bir lokal maksimumu varsa, f sabittir.

İspat. Bir $U(x_0) \subset X$ cıvarı ve bir $\varphi: (U,H) \to (B,\mathcal{O})$ izomorfizmi vardır. Genelliğe halel getirmeden $\tilde{\varphi}(x_0) = 0$, ve B için merkezi orijinde olan bir polidisk alabiliriz. $z \varepsilon B$ ve $z \neq 0$ için $E_z = \{tz; t \varepsilon C\}$ olsun. Bu taktirde $E_z \cap B$ t-kompleks düzleminde merkezi orijinde bir dairedir ve $|(f o \tilde{\varphi}^{-1} | E_z \cap B)|$ nın orijinde bir lokal maksimumu vardır. Fakat fonksyonlar teorisinin maksimum prensibine göre $f o \tilde{\varphi}^{-1} | E_z \cap B$ sabittir. Özel olarak $f(\tilde{\varphi}^{-1}(z)) = f(x_0)$. $z \varepsilon B$ keyfi olduğundan, $f|U$ sabittir. Özdeşlik teoreminden dolayı f X de sabittir.

Teorem 16.7.2.3. (X,H) bir irtibatlı kompakt kompleks manifold olsun. Bu taktirde X üzerinde holomorf her fonksyon sabittir.

İspat. f, X üzerinde holomorf olduğundan, $|f|$ X üzerinde süreklidir. Weierstrass teoreminden dolayı X üzerinde en az bir noktada maksimum değerini alır. Maksimum prensibinden ötürü f sabittir.

Not. Mücerret bir Riemann Yüzeyi irtibatlı 1-boyutlu kompleks manifolddur.

TARİF 99. X_1, X_2 iki kompleks manifold olsun. Bir $\varphi: X_1 \to X_2$ sürekli tasvirine holomorfik denir, şayet her $U \subset X_2$ açık cümlesi için, $g o \varphi$, g U üzerinde holomorf olmak üzere, $\varphi^{-1}(U)$ üzerinde holomorf ise.

Eğer φ topolojik ve φ, φ^{-1} holomorfik iseler, bu taktirde φ ye biholomorfik denir.

Not. 1. $1_X: X \to X$ daima biholomorfiktir.

2. İki holomorfik tasvirin kompozisyonu yine holomorfiktir.

3. $f: X \to C$ sürekli olsun. f, tarif 99 mânasında bir holomorfik tasvirdir yalnız ve yalnız f holomorf bir fonksyon ise.

Teorem 16.7.2.4. $\tilde{\varphi}: X_1 \to X_2$ tasviri biholomorfiktir yalnız ve yalnız $\varphi: (X_1, H_1) \to (X_2, H_2)$ bir izomorfizm ise.

İspat: $\tilde{\varphi}: X_1 \to X_2$ bir biholomorfik tasvir ise, $\tilde{\varphi}$ ve $\tilde{\varphi}^{-1}$ holomorf fonksyonları holomorf fonksyonlara taşır, ve dolayısıyla kanonik öndemetler arasında bir izomorfizm meydana getirir. Açık olarak (X_1,H_1), (X_2,H_2) mütekabil demetleri için $\varphi = (\tilde{\varphi}, \varphi^*): (X_1,H_1) \to (X_2,H_2)$ bir izomorfizmdir.

Karşıt olarak $\varphi = (\tilde{\varphi}, \varphi^*):(X_1, H_1) \to (X_2, H_2)$ bir izomorfizm ise, $\tilde{\varphi}$ bir topolojik tasvirdir. Şayet $U \subset X_2$ açık ve g, U üzerinde holomorf ıse, bu taktırde, bir $s \in \Gamma(U, H_2)$ kesiti vardır, öyleki $g = [s]$, ve $g o \tilde{\varphi} = [s] o \tilde{\varphi} = [\varphi^{*-1} o s o \tilde{\varphi}]$ öyleki $\varphi^{*-1} o s o \tilde{\varphi} \in \Gamma(\tilde{\varphi}^{-1}(U), H_2)$. O halde $g o \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}^{-1}(U)$ üzerinde holomorftur. Binaenaleyh $\tilde{\varphi}$ holomorfiktir. Aynı şekilde $\tilde{\varphi}^{-1}$ holomorfiktir.

TARİF 100. X bir kompleks manifold olsun. Bir $M \subset X$ alt cümlesine analitik denir şayet her $x_0 \in X$ için bir $U(x_0) \subset X$ açık cıvarı, ve U üzerinde $f_1, \ldots, f_l$ holomorf fonksyonları varsa öyleki $U \cap M = \{x \in U; f_1(x) = \ldots = f_l(x) = 0\}$.

Teorem 16.7.2.5. X lokal irtibatlı bir kompleks manifold, ve $M \neq X$ bir analitik cümle olsun. Bu taktirde M nin içi $M^0 = \varnothing$.

İspat. $M^0 \neq \varnothing$ ise, bir $x_0 \in \partial M^0$ vardır öyleki herbir $U(x_0) \subset X$ açık cıvarı için $U \cap M^0$ cümlesi açık ve boş değildir. Bu taktirde irtibatlı bir U seçebiliriz öyleki U üzerinde $f_1, \ldots, f_q$ holomorf fonksyonları vardır, $\ni U \cap M = \{x \in U, f_1(x) = \ldots = f_q(x) = 0\}$. Dolayısıyla $f_i | U \cap M^0 = 0$, $i = 1, \ldots q$. Özdeşlik teoreminden dolayı $f_i | U = 0$, ve binaenaleyh, $U \subset M^0$. Bu bir tezattır.

TARİF 101. Bir X kompleks manifolduna holomorfik olarak ayrılabilir denir, şayet her $x_0 \in X$ için X üzerinde $f_1, \ldots, f_l$ holomorf fonksyonları varsa öyleki x_0, $\{x \in X; f_1(x) = \ldots = f_l(x) = 0\}$ cümlesinde ayrık bir noktadır.[1]

Misal. (X, π), C^n üzerinde bir Riemann bölgesi olsun. Bu taktirde, herbir $x_0 \in X$ için $U(x_0) \subset X$ ve $V(\pi(x_0)) \subset C^n$ açık civarları vardır öyleki $\pi | U: U \to V$ topolojiktir. Binaenaleyh, (U, π) bir koordinat sistemidir. Üstelik 1_{C^n} daima bir koordinat transformasyonu olduğundan, X bir kompleks manifoldur. $\pi: X \to C^n$ tasviri ise holomorfiktir (tarif 99).

TARİF 102. X, Y iki topolojik uzay olsun. Bir $\psi: X \to Y$ sürekli tasvirine diskret denir, şayet herbir $y \in Y$ için $\psi^{-1}(y)$ ya boştur, ya da X de diskret bir cümledir.

Teorem 16.7.2.6. π, diskret bir tasvirdir.

İspat. $x_0 \in X$, $z^0 = \pi(x_0)$ ve $x_1 = \pi^{-1}(z^0)$ olsun. Bu taktirde bir $U(x_1) \subset X$ civarı ve bir $V(z^0) \subset C^n$ civarı vardır öyleki $\pi | U: U \to V$ topolojiktir. Fakat bu mümkündür yalnız ve yalnız $\pi^{-1}(z^0) \cap U$ x_1 den ibaret ise. Binaenaleyh $\pi^{-1}(z^0)$ lifi bir diskret cümledir.

Teorem 16.7.2.7. C^n üzerinde herbir (X, π) Riemann bölgesi holomorfik olarak ayrılabilir.

İspat. $g_i(z_1, \ldots, z_n) = z_i - z_i^0$ ve $f_i = g_i o \pi: X \to C$, $i = 1, \ldots, n$ olsun. $f_1, \ldots, f_n$ X üzerinde holomorf fonksyonlardır, ve x_0, $\{x \in X; f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0\} = \pi^{-1}(z^0)$ cümlesinde ayrık bir noktadır.

[1] Gösterilebilir ki daima $l \geq n = \dim X$.

TARİF 103. X bir kompleks manifold olsun.

1. $K \subset X$ keyfi bir altcümle ise

$\hat{K} = \{x \in X; |f(x)| \leq \sup |f(K)|, X$ üzerinde holomorf her f için$\}$ cümlesine, K nın holomorfik konveks kabuğu denir.

2. X topolojik uzayına holomorfik konveks denir şayet $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow \hat{K} \subset X$ da kompaktır.

TARİF 104. X e bir Stein manifoldu denir şayet

1. X holomorfik olarak ayrılabiliryorsa
2. X holomorfik konveks ise.

Teorem 16.7.2.8. (X, π) C^n üzerinde bir Riemann bölgesi ise aşağıdaki ifadeler muadildirler.

1. X bir Stein manifoldudur
2. X holomorfik konvekstir.
3. X bir holomorfi bölgesidir.

Yalnız 2. ve 3. nün muadeleti aşıkar değildir. 1953 te Oka tarafından ispatlanmıştır.

Not. Ek III deki çalışmada, (17.7.1.1) uygunluk şartındaki holomorfi şartı yerine homeomorfi şartı koşulmuştur. Bu şart altındaki X irtibatlı Hausdorff uzayına 1– boyutlu manifold denilmiştir. Bazı şartlar altında 1– boyutlu manifold bir Riemann yüzeyine dönüştürülmüştür (teorem 1). Sonra da Florack şartı koşularak 1–boyutlu manifoldların cebirsel karakterizasyonu verilmiştir. Kanaatimize göre bu çalışmada ileri sürülen noktai nazar daha genel olup, n–boyutlu manifoldlara teşmilini mümkün kılmaktadır.

8. Kohomoloji Teorisi

16.8.1. **Čech Kohomolojisi.** X bir kompleks manifold, R, 1 li komütatif bir halka, ve S, bir R–modül demeti olsun. Üstelik, $U = \{U_\iota\}$, $\iota \in I$, X in açık bir örtüsü olsun. Bu örtü sabit tutuluyor, ve her $\iota \in I$ için $U_\iota \neq \varnothing$. Şu tarif ve notasyonlar gözönünde tutuluyor.

$$U_{\iota_0, \ldots, \iota_p} = U_{\iota_0} \cap \ldots \cap U_{\iota_p}$$

$$I_p = \{(\iota_0, \ldots, \iota_p); U_{\iota_0 \ldots \iota_p} \neq \varnothing\}.$$

P_n, $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ cümlesinin bütün permütasyonların cümlesi olsun. $\sigma \in P_n$ permütasyonu için

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, \text{ şayet } \sigma, \text{ çift sayıda transpozisyonların çarpımı ise.} \\ -1, \text{ şayet } \sigma, \text{ tek sayıda transpozisyonların çarpımı ise.} \end{cases}$$

TARİF 104. U üzerinde p–boyutlu (alterne) kozincir diye

$$\xi : I_p \to \bigcup_{(\iota_0, \ldots, \iota_p)} \Gamma(U_{\iota_0 \ldots \iota_p}, S)$$

tasvirine denir, öyleki:

1. $\xi(\iota_0, \ldots, \iota_p) \in \Gamma(U_{\iota_0 \ldots \iota_p}, S)$

2. $\xi(\iota_{\sigma(0)}, \ldots, \iota_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \xi(\iota_0, \ldots, \iota_p)$, $\sigma \in P_{p+1}$.

Görülüyor ki bu tasvirin $\xi(\iota_0, \ldots, \iota_p)$ değerleri, kesitlerdir. Üstelik $\xi(\iota_0, \ldots, \iota_p)$, $(\iota_0, \ldots, \iota_p)$ nin alterne bir fonksyonudur. Yani $(\iota_0, \ldots, \iota_p)$ de iki indis yer değiştirdiği taktirde, ξ işaret değiştirir.

TARİF 105. S de değer alan, U üzerinde bütün p–kozincirlerin cümlesi $C^p(U, S)$ ile gösterilir.

TARİF 106.

$$(\xi_1 + \xi_2)(\iota_0, \ldots, \iota_p) = \xi_1(\iota_0, \ldots, \iota_p) + \xi_2(\iota_0, \ldots, \iota_p)$$
$$(r.\xi)(\iota_0, \ldots, \iota_p) = r.\xi(\iota_0, \ldots, \iota_p), \; r \in R$$

Teorem 16.8.1.1. $C^p(U,S)$ bir R–modüldür.

Özel olarak S ye, $(R,+)$ gruplarının demeti nazarı ile bakılırsa $C^p(U,S)$ bir abelyen gruptur.

δ–operatörü. Bu operatöre kosınır operatörü de denir, ve $C^p(U,S)$ den $C^{p+1}(U,S)$ ye bir tasvir olup, şu şekilde tarif edilir.

$$(\delta\xi)(\iota_0, \ldots, \iota_p) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (\xi(\iota_0, \ldots, \hat{\iota}_j, \ldots, \iota_{p+1}) \,|\, U\iota_0, \ldots, \iota_{p+1}),$$

burada $\hat{\iota}_j$ nin mânası, toplamın j. teriminde ι_j silinmiş demektir.

Açık olarak δ–kosınır operatörü bir homomorfizmdir.

Teorem 16.8.1.2. $\delta \circ \delta = \delta^2 = 0$.

İspat. $(\delta^2\xi)(\iota_0, \ldots, \iota_{p+2})$ nın toplamında tipik bir terim,

$$\alpha = \xi(\iota_0, \ldots, \hat{\iota}_j, \ldots, \hat{\iota}_k, \ldots, \iota_{p+2})$$

şeklindedir. Gösterelim ki, bu terimin katsayısı sıfırdır. Gerçekten, şayet önce $\hat{\iota}_k$, sonra $\hat{\iota}_j$ silinirse α nın katsayısı $(-1)^k(-1)^j$ dir. Fakat bu terim bir de önce $\hat{\iota}_j$ sonra $\hat{\iota}_k$ silinerek elde edilir. Bu halde, α nın katsayısı $(-1)^j(-1)^{k-1}$ dir. Zira $j < k$. Binaenaleyh, $(\delta^2\xi)(\iota_0, \ldots, \iota_{p+2})$ de α nın katsayısı $(-1)^k(-1)^j + (-1)^j(-1)^{k-1} = 0$.

Şimdi $C^p(U,S)$ nin yanı sıra şu grupları da ithal edelim.

TARİF 107. (1) $Z^p(U,S) = \{\xi(\iota_0, \ldots, \iota_p);\ \xi \in C^p(U,S),\ \delta\xi = 0\}$, değerleri S de olan p–kodevirlerin grubudur. $C^{-1} = 0$ vazedilir.

(2) $B^p(U,S) = \{(\delta\xi)(\iota_0, \ldots, \iota_{p-1});\ \xi \in C^{p-1}(U,S)\}$ p–kosınırların grubudur.

Demek ki,

$$B^p \subset Z^p \subset C^p. \quad Z^p = \operatorname{Ker} \delta : C^p \to C^{p+1}, \quad B^p = \operatorname{Im} \delta : C^{p-1} \to C^p.$$

TARİF 108. $H^p(U,S) = Z^p(U,S)/B^p(U,S)$ ye, değerleri S de olan, U nun p. Kohomoloji grubu denir.

p = 1 için kriterler. U, X in örtüsü, S bir R–modül demeti ve $\xi \in C^1(U,S)$ olsun.

1. $\xi \in Z^1(U,S)$ yalnız ve yalnız $U_{\iota_0 \iota_1 \iota_2}$ üzerinde

$$\xi(\iota_0, \iota_2) = \xi(\iota_0, \iota_1) + \xi(\iota_1, \iota_2). \tag{16.8.1.1}$$

2. $\xi \in B^1(U,S)$ yalnız ve yalnız bütün ι lar için bir $\rho(\iota) \in \Gamma(U_\iota, S)$ varsa öyleki $U_{\iota_0 \iota_1}$ üzerinde

$$\xi(\iota_0, \iota_1) = \rho(\iota_0) - \rho(\iota_1) \tag{16.8.1.2}$$

(16.8.1.1) şartına, uygunluk şartı denir.

Misal. X bir kompleks manifold ve $U = \{U_\iota\}$, $\iota \in I$, X in bir açık örtüsü olsun. U üzerinde bir p–kozincir diye, her sıralı $p+1$ sayıda $U_{\iota_0}, \ldots, U_{\iota_p}$ lerin $U_{\iota_0 \ldots \iota_p} = U_{\iota_0} \cap \ldots \cap U_{\iota_p}$ arakesiti üzerinde tarifli bir $f_{\iota_0 \ldots \iota_p}$ holomorf fonksyonunu tahsis eden kaideye diyelim ∋

1. (i) ι_j ler farklı ve $U_{\iota_0 \ldots \iota_p} \neq \varnothing$ ise, $f_{\iota_0 \ldots \iota_p}$, $U_{\iota_0 \ldots \iota_p}$ üzerinde holomorftur. (ii) şayet ι_j ler farklı değil iseler veya $U_{\iota_0 \ldots \iota_p} = \varnothing$ ise $f_{\iota_0 \ldots \iota_p} \equiv 0$.

2. P_{p+1} permütasyonu tek ise, $\xi(\iota_0, \ldots, \iota_p) = -f_{\iota_0 \ldots \iota_p}$ ve çift ise $\xi(\iota_0, \ldots, \iota_p) = f_{\iota_0 \ldots \iota_p}$.

Meselâ, 1. Bir 0–kozincir, her $U_\iota \in U$ cümlesine U_ι de tarifli bir f_ι holomorf fonksyonunu tahsis eder.

2. Bir 1–kozincir ise, her sıralı $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}$ arakesiti üzerinde tarifli bir $f_{\iota_0 \iota_1}$ holomorf fonksyonunu tahsis eder öyleki, $f_{\iota_0 \iota_1} \equiv 0$ dır şayet $\iota_0 = \iota_1$ veya $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1} = \varnothing$ ise, aksi halde $f_{\iota_0 \iota_1} = -f_{\iota_1 \iota_0}$.

Aynı boyutta kozincirler toplam operasyonu altında bir abelyen grup teşkil ederler: $C^p = C^p(X, U, \mathcal{O})$, burada $\mathcal{O}$ holomorf fonksyonların sınıfıdır. Hatırlatalım ki, bu grup aynı zamanda, C üzerinde bir vektör uzay ve X üzerinde holomorf fonksyonlar üzerinde bir modüldür ($\mathcal{O}$-modül). Nihayet,

1. $Z^0 = \{X$ üzerinde holomorf fonksyonlar$\}$. Gerçekten

$$0 = (\delta\xi)(\iota_0, \iota_1) = \xi(\iota_1) - \xi(\iota_0). \Rightarrow$$
$$U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1} \text{ üzerinde } f_{\iota_0}(z) = f_{\iota_1}(z).$$

Bu ise X üzerinde, holomorf fonksyonların $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}$ re tahditleridir.

2. $Z^1 = \{$Cousin verileri$\}$.

$$(\delta\xi)(\iota_0, \iota_1, \iota_2) = \xi(\iota_1, \iota_2) - \xi(\iota_0, \iota_2) + \xi(\iota_0, \iota_1) = 0,$$

şayet $\xi(\iota_0, \iota_2) = -\xi(\iota_2, \iota_0)$ gözönünde tutulursa,

$$\xi(\iota_0, \iota_1) + \xi(\iota_1, \iota_2) + \xi(\iota_2, \iota_0) = 0$$

uygunluk şartını intac eder.

Binaenaleyh, $f_{\iota_0\iota_1}(z)$, $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}$ üzerinde tariflidir ve

$f_{\iota_0\iota_1} = -f_{\iota_1\iota_0}$ (antisimetri)

$$f_{\iota_0\iota_1} + f_{\iota_1\iota_2} + f_{\iota_2\iota_0} = 0 \text{ (uygunluk)}$$

şartlarını sağlar.

16.8.2. **Cousin Problemi.** Birinci Cousin problemi, (ikinci bir Cousin problemi de vardır) Fonksyonlar teoresinde gördüğümüz Mittag-Leffler teoreminin doğrudan doğruya teşmilidir.

Bu teoremin ifadesi şöyle idi. G bir bölge, $a_\nu \varepsilon$ G diskret bir nokta cümlesi ve $P_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu}\right)$ esas kısımlar ise, bu taktirde G de bir f meromorf fonksyonu vardır öyleki a_ν de esas kısmı P_ν dür.

Bu teorem şu şekilde de ifade edilebilir. $G = \cup_j U_j$, $U_j \subset C$ açık cümlelerdir, olsun. f_j, U_j de meromorf, ve $\forall\, j,k$ için $f_j - f_k$ $U_j \cap U_k$ da analitik ise, bu taktirde, bir f meromorf fonksyonu bulunabilir öyleki $f - f_j$, her j için U_j de analitiktir.

Cousin Problemi aynı şekilde formüle edilebilir.

TARİF 109. Bir (U_ι, f_ι), $\iota \varepsilon I$, sistemine X üzerinde Cousin I dağılımı denir şayet

1. $U = \{U_\iota\}$, $\iota \varepsilon I$, X in açık bir örtüsü,
2. f_ι, U_ι üzerinde meromorf,
3. Bütün ι_0, ι_1 için $f_{\iota_0} - f_{\iota_1}$, $U_{\iota_0\iota_1}$ üzerinde holomorf ise.

Cousın I dağılımının (veya Probleminin) çözümü diye, X üzerinde bir f meromorf fonksyonuna denir öyleki bütün ι_0, ι_1 ler için $f_\iota - f$, $U_{\iota_0\iota_1}$ üzerinde holomorftur.

Teorem 16.8.2.1. $\{U_\iota, f_\iota\}$, $\iota \varepsilon I$; X üzerinde bir Couisin I dağılımı, H, X in yapı demeti ve $U = \{U_\iota\}$, $\iota \varepsilon I$, X in bir örtüsü olsun. Bu taktirde,

1. $\gamma(\iota_0, \iota_1) = (f_{\iota_0} - f_{\iota_1}) | U_{\iota_0\iota_1}$ bir $\gamma \varepsilon Z^1(U,H)$ elemanını tarif eder.

2. $\{U_\iota, f_\iota)$, $\iota \varepsilon I$ çözülebilir yalnız ve yalnız $\gamma \varepsilon B^1(U,H)$ ise.

İspat. $U_{\iota_0\iota_1\iota_2}$ üzerinde, açık olarak,

$$\gamma(\iota_0, \iota_1) + \gamma(\iota_1, \iota_2) = (f_{\iota_0} - f_{\iota_1}) + (f_{\iota_1} - f_{\iota_2}) = f_{\iota_0} - f_{\iota_2} = \gamma(\iota_0, \iota_2).$$

Kriter 1.den dolayı teoremin 1. şıkkı ispatlanmıştır.

Teoremin 2. şıkkına gelince,

1. Farzedelim ki $\{U_\iota, f_\iota\}$, $\iota \varepsilon I$ çözülebilir. Bu taktirde X üzerinde bir f meromorf fonksyonu vardır, öyleki $(f_\iota - f) | U_\iota$ holomorftur.

$$\rho(\iota) = (f_\iota - f) | U_\iota \varepsilon \Gamma(U_\iota, H)$$

vazedelim. $\rho \varepsilon C^0(U,H)$ ve $U_{\iota_0\iota_1}$ üzerinde,

$$\rho(\iota_0) - \rho(\iota_1) = (f_{\iota_0} - f) - (f_{\iota_1} - f) = f_{\iota_0} - f_{\iota_1} = \gamma(\iota_0, \iota_1).$$

Kriter 2. den dolayı, $\gamma \varepsilon B^1(U,H)$.

2. Farzedelim ki $\gamma \varepsilon B^1(U,H)$. Bu taktirde her $\iota \varepsilon I$ için bir $\rho(\iota) \varepsilon \Gamma(U_\iota, H)$ vardır $\ni U_{\iota_0\iota_1}$ üzerinde,

$$\rho(\iota_0) - \rho(\iota_1) = \gamma(\iota_0, \iota_1).$$

O halde,

$$f_{\iota_0} - f_{\iota_1} = \gamma(\iota_0, \iota_1) = \rho(\iota_0) - \rho(\iota_1).$$

Binaenaleyh $U_{\iota_0\iota_1}$ üzerinde

$$f_{\iota_0} - \rho(\iota_0) = f_{\iota_1} - \rho(\iota_1).$$

Bu taktirde, X üzerinde bir meromorf fonksyonu vardır öyleki $f | U_\iota = f_\iota - \rho(\iota)$ ve öyleki

$$(f_\iota - f) | U_\iota = \rho(\iota) \varepsilon \Gamma(U_\iota, H).$$

Netice Teorem. Şayet $H^1(U,H) = 0$ ise bu taktirde, U örtüsüne bağlı Cousın I dağılımı (problemi) çözülebilir.

İspat. Gerçekten, $H^1 = 0$ ise, bu taktirde herbir ko-devir bir ko-sınırdır. Bu demektir ki $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}$ de holomorf herbir $f_{\iota_0\iota_1}(z)$ için $f_{\iota_0\iota_1} = -f_{\iota_1\iota_0}$ ve $f_{\iota_0\iota_1} + f_{\iota_1\iota_2} + f_{\iota_2\iota_0} = 0$, $\exists\, f_{\iota_0}, f_{\iota_1}$ sırasıyla U_{ι_0}, U_{ι_1} de holomorf $\ni f_{\iota_0\iota_1} = f_{\iota_1} - f_{\iota_0}$. Başka bir ifade ile $H^1 = 0 \Rightarrow$ Cousin I problemi U örtüsü için çözülebilir.

Not. $H^0 = Z^0 = \{$X üzerinde holomorf fonksyonlar$\}$.

İkinci (mültiplikatif) Cousin Problemi. Weierstrass teoremi şu şekilde ifade edilebilir: Bir $G \subset C$ bölgesi, G de a_ν, b_ν diskret bir nokta cümlesi ve n_ν,

m_ν pozitif tamları verilmiş olsun. Bu taktirde G de meromorf bir F fonksyonu vardır öyleki a_ν ler n_ν mertebeden sıfır yerleri, ve b_ν ler m_ν mertebeden kutup noktalarıdır.

Bu teoremin teşmili olan Cousin problemine II. Cousin problemi veya II. Cousin dağılımı denir.

X bir kompleks manifold, ve $U=\{U_\iota\}$, $\iota \in I$ X in bir açık örtüsü olsun. Farzedelim ki F_ι, U_ι de tarifli meromorf fonksyonlardır öyleki F_{ι_0}/F_{ι_1}, $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}$ de holomorturlar. X de tarifli ve meromorf bir $F \neq 0$ fonksyonu varmıdır öyleki F/F_ι U_ι de holomorf olsun.

Görülecektir ki, Cousin II problemi, Cousin I probleminin mültiplikatif yazılışından başka birşey değildir. Cousin I de olduğu gibi, Cousin II probleminde de, demet ve kohomoloji grupları kullanılacaktır.

X bir kompleks manifold, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{O}_x$ in bölüm cismi olsun.

Bu taktirde, $\mathcal{M} = \cup\, \mathcal{M}_x$, $\{f_x/g_x;\, x \in U,\ U \subset X$ açık cümle$\}$ cümleleri tarafından tevlid edilen topolojiyi haiz bir demettir. Burada f, g U üzerinde holomorf fonksyonlardır, ve $x \in U$ için $g_x \neq 0$.

Bilindiği gibi bu demete, meromorf fonksyonların nüvelerinin demeti denir.

Cousin I probleminin verilerini vermek demek, $\mathcal{M}/\mathcal{O} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{M}_x/\mathcal{O}_x$ bölüm demetinin bir kesitini vermek demektir, ve Cousin I problemi, $\mathcal{M}/\mathcal{O}$ nın verilen bir kesitinin, $\mathcal{M}$ nin bir kesitinin görüntüsü olup olmadığının araştırılması problemidir.

$\mathcal{M}$ den 0–kesiti kaldırılırsa, Abelyen gruplarının (burada grup operasyonu çarpımdır) bir $\mathcal{M}^*$ demeti elde edilir. Bu demet, $\mathcal{O}$ nun tersinir elemalanlarının, yani birimlerinin $\mathcal{O}^*$ demetinini bir altdemet olarak ihtiva eder. $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ demetine, X üzerinde bölenlerin nüvelerinin demeti denir. Bir bölen ise, $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ ın X üzerinde bir kesitidir.

Bu kesitler meromorf fonksyon nüvelerinin eşdeğerlik sınıflarıdır. Nüveler ise, bir x noktasında eşdeğerdirler şayet, F_1, F_2 bu nüveleri x noktasında temsil eden fonksyonlar ise bu taktirde F_1/F_2 bir lokal birimdir. Yani F_1/F_2 holomorfik ve x in bir cıvarında 0 dan farklıdır. Nihayet şu noktayı da belirtelim ki, $\{U_\iota\}$ örtüsüne bağlı Cousin verileri, $\mathcal{D}$ nin X üzerinde bir kesiti gözü ile bakılabilir, yani Cousin verilerinin bir eşdeğerlik sınıfıdır, şöyleki, iki adet Cousin verisi eşdeğerdir, şayet ikisi birlikte bir Cousin verisi teşkil ediyorlarsa.

Bu taktirde Cousin II problemi Cousin I problemine benzer şekilde ifade edilebilir.

$\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ bölüm demetinin bir kesiti verildiği taktirde, $\mathcal{M}^*$ da bir kesit bulunabilsin öyleki bu kesit $\mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ kanonik tasvirinde, verilen kesit üzerine tasvir edilsin.

Kohomoloji Grubu. Cousin I probleminde olduğu gibi, Cousin II problemi için de bir kohomoloji grubu teşkil edilebilir. Ancak burada katsayılar $\mathcal{O}^*$ a ait olup ko-devirler mültiplikatiftir.

X bir kompleks manifold , ve $U=\{U_\iota\}$, $\iota \in I$, X in bir açık örtüsü olsun. Farzedelim ki F_ι, U_ι de tarifli meromorf fonksyonlardır, öyleki F_{ι_0}/F_{ι_1}, $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}$ de bir birimdir. Şimdi,

$$F_{\iota_0\iota_1} = F_{\iota_0}/F_{\iota_1}$$

vazedelim. $F_{\iota_0\iota_1}$ bir 1–kozincirdir, zira $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}$ de

$$F_{\iota_0\iota_1} F_{\iota_1\iota_0} = 1.$$

Diğer taraftan bir kodevirdir, zira $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2}$ de

$$\delta F_{\iota_0\iota_1} = F_{\iota_0\iota_1} F_{\iota_1\iota_2} F_{\iota_2\iota_0} = 1.$$

II. Cousin problemi şu şekli almaktadır:

Bir $F_{\iota_0\iota_1}$ ko-deviri verildiği taktirde, bir ko-sınırmıdır?

Başka bir deyimle, $F_{\iota_0\iota_1}$ in kohomoloji sınıfı, mültiplikatif $H^1(X,U,\mathcal{O}^*)$ kohomoloji grubunun özdeş elemanımıdır. Sonuç olarak II. Cousin problemi, $\mathcal{D}$ nin bir kesiti için çözülebilir yalnız ve yalnız, $H^1(X,U,\mathcal{O}^*)$ daki resmi 0 ise.

TARİF 110. U_ι ve $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}$ ler basit irtibatlı iseler $\{U_\iota\}$ örtüsüne mümtaz diyoruz.

$$F_{\iota_0\iota_1} = e^{2\pi i f_{\iota_0\iota_1}}$$

ve

$$F_{\iota_1\iota_0} = e^{2\pi i(-f_{\iota_0\iota_1})}, \quad \iota_0 < \iota_1$$

$$F_{\iota_0\iota_0} = 0, \qquad \iota_0 = \iota_1$$

tarif edilsin. Görülüyor ki,

$$f_{\iota_0\iota_1} = -f_{\iota_1\iota_0}.$$

Binaenaleyh, $f_{\iota_0\iota_1}$, katsayıları holomorf fonksyonlar olan aditif bir 1–kozincirdir. Fakat bir 2–kodevir olmıyabilir. Zira,

$$f_{\iota_0\iota_1} + f_{\iota_1\iota_2} + f_{\iota_2\iota_0} = m_{\iota_0\iota_1\iota_2}.$$

Burada, $m_{\iota_0\iota_1\iota_2}$ bir tam sayıdır.

Z, tam sayılar aditif grubunu göstersin. Z ye sürekli Z–değerli fonksyonların nüvelerinin demeti gözü ile bakılabilir. Diğer taraftan sürekli Z–değerli

fonksyonlar lokal olarak sabittirler, ve dolayısıyla lokal olarak holomorfturlar. Bu sebeple, Z ye $\mathcal{O}$ nun bir altdemeti gözü ile bakılabilir.

Şimdi $m_{\iota_0\iota_1\iota_2}$, katsayıları Z ye ait olmak üzere bir 2–kodevirdir:

1. Antisimetri şartı sağlanmıştır. Zira $m_{\iota_0\iota_1} = m_{\iota_1} - m_{\iota_0}$ daima yazılabilir. O halde $m_{\iota_0\iota_1} = -m_{\iota_1\iota_0}$.

2. $\delta m_{\iota_0\iota_1} = m_{\iota_0\iota_1} + m_{\iota_1\iota_2} + m_{\iota_2\iota_0} = 0$.

Dikkat edilirse, $m_{\iota_0\iota_1\iota_2}$ Cousin II problemi tarafından birtek olarak belirli değildir, zira $f_{\iota_0\iota_1}$, bir tam sayı farkı ile belirlidir.

Fakat $f_{\iota_0\iota_1}$ yerine $f_{\iota_0\iota_1} + n_{\iota_0\iota_1}$ yazıldığı taktirde $m_{\iota_0\iota_1\iota_2}$, $m_{\iota_0\iota_1\iota_2} + (n_{\iota_0\iota_1} + n_{\iota_1\iota_2} + n_{\iota_2\iota_0})$ ile değiştirilmiş olur ki, bu da $H^2(X,U,Z)$ ye ait $[m_{\iota_0\iota_1\iota_2}]$ kohomoloji sınıfına tesir etmez. Çünki $m_{\iota_0\iota_1\iota_2} + \delta(n_{\iota_0\iota_1}) \Rightarrow \delta m_{\iota_0\iota_1\iota_2} = 0$.

TARİF 111. $H^2(X,U,Z)$ deki $m_{\iota_0\iota_1\iota_2}$ ün kohomoloji sınıfına, $\{U_\iota\}$ örtüsüne bağlı Cousin probleminin karakteristik sınıfı denir.

TARİF 112. X üzerinde bir D bölgenine esastır denir şayet, X üzerinde bir F meromorfik fonksyonu varsa öyleki F nin (F) böleni D ye eşittir.

TARİF 113. X üzerinde bir bölene tamdır (pozitif) denir şayet bütün nüveler holomorf fonksyon nüveleri ise.

Örtünün mümtaz olma şartı kaldırılabilir. Zira orijinal örtü inceltilmek suretiyle bir mümtaz örtü haline getirilebilir. Bu sebeple aşağıdaki notasyonlarda U harfinden sarfı nazar edilmiştir.

Yukarıdaki muhakeme tarzı, $H^0(X,\mathcal{D})$ bölenlerin grubunu $H^2(X,Z)$ karakteristik sınıfların grubuna tasvirini ifade etmektedir.

Bu tasvire, $H^1(X,\mathcal{O}^*) \to H^2(X,Z)$ nazarı ile bakılabilir. Gerçekten, farzedelim ki $F_{\iota_0\iota_1}$ ko–deviri bir ko–sınırdır. Bu taktirde,

$$f_{\iota_0\iota_1} = f_{\iota_0} - f_{\iota_1} \text{ ve } m_{\iota_0\iota_1\iota_2} = 0.$$

Yani $F_{\iota_0\iota_1} \to m_{\iota_0\iota_1\iota_2}$ tasviri kohomoloji sınıfları arasında bir tasvirdir:

$$[F_{\iota_0\iota_1}] \to [m_{\iota_0\iota_1\iota_2}].$$

Teorem 16.8.2.2. (Oka–Serre). X üzerinde $H^0(X,\mathcal{D})$ bölenlerin grubundan $H^2(X,Z)$ ye bir C kanonik homomorfizmi vardır öyleki:

(1) D esas ise, $C(D) = 0$.

(2) $H^1(X,\mathcal{D}) = 0$ ve $C(D) = 0$ ise, bu taktirde D esastır. İspata geçmeden önce bir lemma ispat edeceğiz.

TARİF 114. φ, ψ iki fonksyon olsun. Şayet φ/ψ bir birim ise ($\varphi/\psi \in \mathcal{O}^*$), $\varphi \sim \psi$ yazıyor ve φ eşdeğer ψ modülo $\mathcal{O}^*$ diyoruz.

Lemma. X kompleks manifoldun herbir tam böleni esas ise, bu taktirde her Cousin II problemi çözülebilir.

İspat. Herbir bölenin, iki tam bölenin bölümü olduğu gösterilebilirse lemma ispatlanmış olacaktır. $p \ni X$ ve F_p, p nin bir N_p cıvarında meromorf bir fonksyon olsun, öyleki $(F_p) = D \mid N_p$. $F_p = f_p/g_p$ yazalım. Burada f_p, g_p N_p de tarifli holomorf fonksyonlardır $\ni p$ de ve dolayısıyla p nin bir cıvarında, diyelim ki N_p, rölatif asaldırlar. $q \in N_p$, ve $F_p = f_p/g_p$ N_q de tarifli q ya ait mütekabil fonksyon olsun. Eğer, $f_p \backsim f_q$ ve $g_p \backsim g_q$ gösterilebilirse ispat tamamlanmış olacaktır. Gerçekten, $F_p \backsim F_q$. Yani $f_p/g_p \backsim f_q/g_q$, ve dolayısıyla q da $f_p g_q \backsim g_p f_q$. Fakat $f_p g_q$, $g_p f_q$ holomorfiktir ve q nun bir cıvarında eşdeğerdirler. Bu cıvarı öyle seçebiliriz ki, f_q ve g_q o cıvarda rölatif asaldırlar. Fakat f_p, $g_p f_q$ yu böler ve dolayısıyla f_q yu böler. Aynı şekilde f_q, f_p yi böler. Zira f_p ile g_p, N_p de rölatif asaldırlar. Binaenaleyh, f_p/f_q bir birimdir, yani $f_p \backsim f_q$. Aynı şekilde $g_p \backsim g_q$. Şu halde, f_p ve g_p, $p \in X$, tam bölendirler.

Şimdi Teoremin ispatına geçelim. Lemma gözönünde tutulursa, (1) in ifadesine göre C. II çözülebilir $\Rightarrow H^2(X,Z) = 0$. (2) ifadesine göre, C. I çözülebilirse ($H^1(X,\mathcal{O}) = 0$) C. II nin çözülebilmesi için $C(D) = 0$ ($H^2(X,Z) = 0$) yeter şarttır. (1) aynı zamanda şu hususu da intaç etmektedir: İki bölenin farkı bir esas bölen ise, bu iki bölen aynı sınıfa aittirler. Nihayet C bir homomorfizmdir, zira sabit bir U_ι de bölenlerin çarpımı mütekabil 1–kozincirlerin ve dolayısıyla $m_{\iota_0\iota_1\iota_2}$ lerin toplamını intaç eder.

(1) $D = (F)$ olsun. Bu taktirde U_ι üzerinde her ι için $F_\iota \sim F$, ve öyleki $F_{\iota_0\iota_1} = F_{\iota_0}/F_{\iota_1} \sim 1$. Binaenalyh, her ι_0, ι_1 için $f_{\iota_0\iota_1} = 0$ seçilebilir. Dolayısıyla $m_{\iota_0\iota_1\iota_2} = 0$.

(2) $C(D) = 0 \Rightarrow m_{\iota_0\iota_1\iota_2} = n_{\iota_0\iota_1} + n_{\iota_1\iota_2} + n_{\iota_2\iota_0}$. $\hat{f}_{\iota_0\iota_1} = f_{\iota_0\iota_1} - n_{\iota_0\iota_1}$ şeklinde tarif edilirse:

$$F_{\iota_0\iota_1} = e^{2\pi i \hat{f}_{\iota_0\iota_1}} = e^{2\pi i f_{\iota_0\iota_1}}.$$

Bu taktirde $\hat{f}_{\iota_0\iota_1}$ bir ko–devirdir, zira

$$\hat{f}_{\iota_0\iota_1} + \hat{f}_{\iota_1\iota_2} + \hat{f}_{\iota_2\iota_0} = m_{\iota_0\iota_1\iota_2} - (n_{\iota_0\iota_1} + n_{\iota_1\iota_2} + n_{\iota_2\iota_0}) = 0.$$

Binaenaleyh, $\hat{f}_{\iota_0\iota_1}$ ler aynı zamanda ko–sınırdırlar, mademki $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$. O halde $\hat{f}_{\iota_0\iota_1} = f_{\iota_0} - f_{\iota_1}$ ve ispat tamamlanmış sayılır, zira

$$F_{\iota_0\iota_1} = e^{2\pi i f_{\iota_0}} \; e^{-2\pi i f_{\iota_1}} = F_{\iota_0}/F_{\iota_1},$$

ve dolayısıyla,

$$F_{\iota_0} e^{-2\pi i f_{\iota_0}} = F_{\iota_1} e^{-2\pi i f_{\iota_1}}.$$

Binaenaleyh, $F = F_\iota e^{-2\pi i f_\iota}$ U_ι de global olarak belirlidir ve C. II problemi çözülmüştür.

Bu ispat tıpatıp dizilerle tefsir edilebilir. Gerçekten,

$$O \to Z \to \mathcal{O} \xrightarrow{exp(2\pi i.)} \mathcal{O}^* \to O$$

dizisi tıpatıptır. Zira $\mathcal{O}$ da tıpatıptır: ker *exp* $(2\pi i.) = \{f;\ e^{2\pi i f} = 1\}$. $\mathcal{O}^*$ da tıpatıptır: sıfırdan farklı her holomorf fonksyon lokal olarak bir exponansyeldir.

Dolayısıyla bu dizinin intaç etttiği aşağıdaki kohomoloji dizisi tıpatıptır.

$$\ldots \to H^1(X,\mathcal{O}) \to H^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\partial} H^2(X,Z) \to \ldots$$

Burada ∂ tasvirine, dizinin sınır homomorfizmi denir.

Diğer taraftan,

$$H^0(X,\mathcal{D}) \xrightarrow{\delta} H^1(X,\mathcal{O}^*)$$

tasviri gözönünde tutulursa, aşağıdaki kanonik tasvir elde edilir:

$$C = \partial \circ \delta : H^0(X,\mathcal{D}) \to H^2(X,Z).$$

C tasviri herbir $D \in H^0(X,\mathcal{D})$ bölenine $C(D) \in H^2(X,Z)$ Chern sınıfını tahsis eder. D esas bölen ise $\delta(D) = 0$ ve dolayısıyla $C(D) = 0$.

TARİF 114. $F \in Z^1(X,\mathcal{O}^*)$ Cousin II probleminin ko-deviri, $[F] \in H^1(X,\mathcal{O}^*)$ mütekabil koholomoji sınıfı olsun. Bu taktirde $\partial([F]) \in H^2(X,Z)$ ye F nin Chern sınıfı denir.

Şimdi $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$ farzedelim. Bu taktirde

$$H^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\partial} H^2(X,Z)$$

birebirdir. Binaenaleyh $C(D) = 0 \Rightarrow D$ esastır. Ohalde Oka-Serre teoremi şu şekli almaktadır:

Teorem 16.8.2.2 (Oka-Serre). $C: H^0(X,\mathcal{D}) \to H^2(X,Z)$ tasviri vardır

(1) D esas $\Rightarrow C(D) = 0$.

(2) $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$ ve $C(D) = 0 \Rightarrow D$ esastır.

16.8.3. **$\bar\partial$-Kohomolojisi.** Önce demet kavramını özetliyelim. X, S iki topolojik uzay, $\pi : S \to X$ üzerine bir tasvir olsun. (X,S,π) üçlüsüne demet diyoruz şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa:

(i) her $x \in X$ için $S_x = \pi^{-1}(x)$ bir K-modüldür (burada K, PID dir).

(ii) π lokal homomorfizmdir.

(iii) K-modül olarak lokal operasyonlar süreklidirler.

(ii) şartına göre, herbir $\sigma \in S$ için σ yı ihtiva eden bir $A_\sigma \subset S$ açık cümlesi vardır öyleki, $\pi|A_\sigma : A_\sigma \to \pi(A_\sigma)$ üzerine bir homoeomorfizmdir. Burada $\pi(A_\sigma) \subset X$ bir açık cümledir.

Özel olarak, π tasviri sürekli ve açıktır, π^{-1} açıktır, ve $(\pi|A_\sigma)^{-1}$ tasviri, $\pi(A_\sigma)$ üzerinde bir kesittir.

$U \subset X$ bir açık cümle ise, U üzerinde bütün kesitlerin $\Gamma(U,S)$ cümlesi bir K-modüldür.

X bir topolojik uzay, ve X in U açık cümleleri için bir $\mathcal{U} = \{U\}$ tabanı verilmiş olsun. Bilindiği gibi, genel olarak bir demet bir $(S_U\}$ cümlesinden elde edilir, burada S_U, her $U \in \mathcal{U}$ için bir K-mödüldür, ve öyleki, $V \subset U$, $U,V \in \mathcal{U}$ ise, bu taktirde bir

$$\gamma_{U,V} : S_U \to S_V$$

K-homomorfizmi vardır, $\ni W \subset V \subset U$ için

$$\gamma_{U,W} = \gamma_{V,W} \circ \gamma_{U,V}.$$

$\mathcal{U}_x = \{U;\ U \in \mathcal{U},\ x \in U\}$ sistemini gözönüne alalım. $\mathcal{U}_x \neq \varnothing$, ihtiva işareti ile kısmî sıralıdır, $S_x = \lim S_U$ direkt limiti mevcuttur ve bir K-modüldür (çünki modül operasyonları, direkt limit ile yer değiştirir).

$S = \cup_x S_x$ vazedelim, ve $x \in S_x$ için $\pi(\sigma) = x$ tarif edilmiş olsun. Her $x \in U$ için, direkt limit $S_U \to S_x$ K-homomorfizmini tarif eder. U ve $q \in S_U$ verildiği taktirde, bu homomorfizm altında, q nun resmi q_x, $x \in U$ olsun. $A_{q,U} = \{q_x; x \in U\}$ cümlesi, S de bir açık cümle olarak tarif edilmiş olsun. Bu taktirde, $\mathcal{A} = \{A_{q,U};\ U \in \mathcal{U},\ q \in S_U\}$ sistemi, bir taban olarak S de bir topoloji tarif eder. Bu topoloji ile, π bir lokal homeomorfizmdir, ve (X,S,π) bir demettir.

Şimdi X bir kompleks manifold, $\mathcal{E}^{p,q}$ (p,q) tipinden C^∞- formların nüvelerinin demeti, ve $\mathcal{Z}^{p,q}$ (p,q) tipinden $\bar\partial$ kapalı formlarının nüvelerinin demeti olsun. Bu taktirde,

$$O \to \mathcal{Z}^{p,q} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^{p,q} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{Z}^{p,q+1} \to O,$$

dizisi tıpatıptır. Burada i, dahil etme tasviridir. $\bar\partial$ tasviri (üzerine) bir tasvirdir, $\tau \in \mathcal{Z}^{p,q+1}$ ise, bir $\eta \in \mathcal{E}^{p,q}$ nüvesi vardır $\ni \tau = \bar\partial\eta$.

Bu diziye aşağıda gösterilen tıpatıp kohomoloji dizisi tekabül eder:

$$\ldots \to H^{l-1}(X,\mathcal{E}^{p,q}) \to H^{l-1}(X,\mathcal{Z}^{p,q+1})$$
$$\to H(X,\mathcal{Z}^{p,q})) \to H(X,\mathcal{E}^{p,q}) \to \ldots$$

$\mathcal{E}^{p,q}$ inceltilmiş bir demet olduğundan,

$$H^{l-1}(X,\mathcal{E}^{p,q}) = H^l(X,\mathcal{E}^{p,q}) = 0, \quad l > 1,$$

ve dolayısıyla,

$$H^l(X,\mathcal{Z}^{p,q}) \simeq H^{l-1}(X,\mathcal{Z}^{p,q+1}), \quad l > 1.$$

Binaenaleyh,

$$H^l(X,\mathcal{Z}^{p,q}) \simeq H^0(X,\mathcal{Z}^{p,q})/\partial H^0(X,\mathcal{E}^{p,q+l-1}), \quad l \geq 1.$$

Bu formül Dolbeault ye aittir (Sur la Cohomologie des variétés analytiques complexes, C.R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 175–177.)

Nihayet, $\mathcal{Z}^{p,o}$, X üzerinde holomorfik p–formların nüvelerinin demeti olsun.

$$\chi^p = \Sigma^n_{l=o} (-1)^l \dim H^l(X,\mathcal{Z}^{p,0})$$

sayısı X in Π (X) artitmetik cinsidir, ve X in önemli analitik invarientlerindendir.

Diğer ikinci önemli analitik invarient T(X) Todd cinsidir, X in Chern sınıfları ile teşkil edilmiştir (Hirzebruch, F. On Steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the Todd genus, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953), 951–956). Hirzebruch X cebirsel varyeteleri için göstermiştir ki

$$\Pi (X) = T(X),$$

(Arithmetic genera and the theorem of Riemann–Roch for Algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 40 (1954), 110–114).

X, bir varyete, $c_k \in H^{2k}(X,Z)$ X varyetesinin k. Chern sınıfı olsun. Formel olarak

$$1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_n x^n = (1 + \alpha_1 x) \ldots (1 + \alpha_n x)$$

yazalım. Diğer taraftan,

$$Q(x) = -x / (e^{-x} - 1)$$

vazedelim, ve $Q(\alpha_1 x)\ Q(\alpha_2 x) \ldots Q(\alpha_n x)$ çarpımında x^n nin katsayısını gözönüne alalım. Bu katsayı, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ye nazaran simetriktir ve $c_1, \ldots, c_n$ cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla x^n nin katsayısı H^{2n} (X,Z) nin bir elemanını belirtir ve dolayısıyla esas bir ko–devirin bir katıdır. İşte bu kat, bir rasyonel sayı olup, X varyetesinin T(X) Todd cinsini tarif eder.

BÖLÜM XVII

HOMOTOPİ TEORİSİ

1. Kategoriler ve Funktorlar

17.1.1. Kategoriye Giriş.

TARİF 1. Kabaca, elemanlarına "nesne" ismi verilen, yani cümle ve aynı zamanda üzerinde tarifli fonksyonları ihtiva eden elemanlardan müteşekkil, bir "sisteme" kategori denir.

Nesneleri belirten cümleler, bir ek strüktüre sahip olabilirler, cümleler üzerinde tarifli fonksyonlar ise bu ek strüktürleri muhafaza edebilirler.

Bu anlaşıldıktan sonra kategorileri şu şekilde tarif etmek mümkündür:

(a) bir nesne sınıfıdır

(b) her X, Y sıralı nesne çifti için, hom (X,Y) ile gösterilen bir fonksyon cümlesi tarif edilmiştir. Herbir fonksyona morfizm denilir. Herbir morfizmin tarif bölgesi X, değer bölgesi ise Y dir. $f \in \hom(X,Y)$ ise $f{:}X \to Y$ veya $X \xrightarrow{f} Y$ yazılır.

(c) Bir kompozisyon tarif edilmiştir, şöyleki : her X,Y,Z sıralı nesne üçlüsü için,

$$f{:}X \to Y, g{:}Y \to Z \Rightarrow gf = g\circ f{:}X \to Z$$

($gf = g\circ f$ ye f ve g nin terkibi, veya kompozisyonudur denir).

(a), (b), (c) aşağıdaki aksyomları sağlarlar:

(i) Asosyatiflik: $f{:}X \to Y,\ g{:}Y \to Z,\ h{:}Z \to W \Rightarrow h(gf) = (hg)\ f{:}X \to W$

(ii) Özdeşlik: Herbir Y için $\exists\ 1_Y{:}Y \to Y$ morfizmi $\ni f{:}X \to Y \Rightarrow 1_Y f = f$ ve $h{:}Y \to Z \Rightarrow h1_Y = h$.

1_Y morfizmine Y nin özdeş morfizmi denir.

Gösterilebilir ki 1_Y birtektir. ((ii) nin netiscesidir): $1_Y{:}Y \to Y$ ve $1'_Y{:}Y \to Y$ olsun. $f{:}X \to Y \Rightarrow 1_Y f = f$. Burada $X = Y$ ve $f = 1'_Y$ yapalım. Bu taktirde

taktirde $1_Y 1'_Y = 1'_Y$. Keza $h:Y \to Z \Rightarrow h1'_Y = h$. Burada $Y = Z$ $h = 1_Y$ yapalım. Bu taktirde $1_Y 1'_Y = 1_Y$. Binaenaleyh $1_Y = 1'_Y$.

Demek ki kategorinin herbir 1_Y özdeş morfizmi bir ve birtek Y nesneyi belirtir.

TARİF 2. $f:X \to Y$ ve $g:Y \to X$ morfizmleri verilmiş olsun, öyleki:

$$gf = 1_X.$$

Bu taktirde f ye g nin sağ inversi, g ye ise f nin sol inversi denir.

Bir morfizm, f nin aynı zamanda sağ ve sol inversi ise, f nin inversidir denir.

TARİF 3. X,Y nesneleri eşdeğerdirler denir, şayet $\exists\, f \in \hom(X,Y)$, $g \in \hom(Y,X) \ni gf = 1_X, fg = 1_Y$. f ve g nin herbirine bir "eşdeğerlik" denir. Notasyon olarak $f:X \approx Y$ yazılır.

Lemma. Şayet $f:X \to Y$ nin sol ve sağ inversleri varsa, bunlar eşittirler ve f bir eşdeğerliktir.

İspat. f nin bir sol inversi vardır demek, $\exists\, g:Y \to X \ni gf = 1_x$; f nin sağ inversi vardır demek, $\exists\, g':Y \to X \ni fg' = 1_Y$. Binaenaleyh (i) ve (ii) $\Rightarrow$ $g = g1_Y = g(fg') = (gf)g' = 1_x g' = g'$.

Yani $g = g'$. O halde $gf = 1_x$ ve $fg = 1_Y$. Yani $X \approx Y$. Görülüyor ki $X \approx Y$ ise, f nin birtek inversi vardır: $f^{-1}:Y \to X$ ile gösterilir, ve f^{-1} bir eşdeğerliktir.

17.1.2. **Kategori Misalleri.**

1. Topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri katergorisi
2. Gruplar ve homomorfizmleri kategorisi
3. Normlu Halkalar ve sürekli homomorfizmleri kategorisi
4. Cümleler ve injeksyonları (surjeksyon veya bijeksyon) kategorisi
5. Noktalı Topolojik Uzaylar (Noktalı Topolojik Uzay diye, boş olmıyan taban noktalı Topolojik Uzaya denir) ve taban noktaları muhafaza eden sürekli tasvirleri kategorisi.

17.1.3. **Funktorlara giriş.**

Kategorilerle ilgilenmemizin esas sebebi, bir kategoriden diğer bir kategoriye tasvirlerle geçebilmektir. Zira cebirsel topolojinin gayesi, topolojik uzaylara cebirsel veriler tahsis etmek suretiyle topolojik problemleri, halli daha kolay ümid edilen cebirsel problemlere dönüştürmektir. İşte bu intikali temin eden tasvirlere Funktor diyoruz. Böylece herbir X topolojik uzayına

bir F(X) grubu, ve herbir $f:X \to Y$ sürekli tasvirine bir $F(f):F(X) \to F(Y)$ homomorfizmi tahsis olunmaktadır, şöyle ki:

(1) $Y = X$ ve 1_x özdeş tasvir ise

$$F(1_X) = 1_{F(X)}$$

(2) $g:Y \to Z$ ise $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Başka bir deyimle, F, özdeşliği ve kompozisyonu muhafaza etmektedir.

Binaenaleyh funktorlar hakkında şu genel tarifi verebiliriz:

TARİF. C ve D iki kategori olsun. $F:C \to D$ tasvirine funktor veya kovarient funktor (kofunktor veya kontravarient funktor) denir şayet C ye ait herbir X nesneye D de bir F(X) nesne, $f:X \to Y$ morfizmine D de $F(f):F(X) \to F(Y)$ $(F(f):F(Y) \to (F(X))$ tahsis olunmaktadır, şöyle ki

(1) $F(1_x) = 1_{F(x)}$

(2) $F(gf) = F(g)F(f)$ $(F(gf) = F(f)F(g))$.

17.1.4. **Funktor misalleri.**

1. Topolojik Uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisinden, bu uzayları oluşturan taban cümleler ve fonksyonları kategorisine, bir funktor aracılığı ile herbir topolojik uzaya altında yatan taban cümle tahsis edilmektedir. Bu tip bir funktora unutkan funktor denir, zira bu funktor topolojik uzaya taban cümlesini tahsis etmekle topolojik uzayın topoloji yapısını "unutmakta"dır, "sarfı nazar" etmektedir.

2. Kompakt Hausdorff uzayları ve sürekli tasvirlerinin kategorisinden normlu halkalar ve sürekli homomorfizmlerinin kategorisine, yani herbir X kompakt Hausdorff uzayına reel sürekli fonksyonların normlu halkasını tahsis eden bir kontravarient funktor vardır.

17.1.5. **Aydınlatmalar.**

1. E,X,Y topolojik uzayları ve $p:E \to X$, $f:Y \to X$ sürekli tasvirleri gösteren aşağıdaki diagramı gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

şekil 1

Burada karşımıza çıkan problem,

$$pf' = f$$

şartını sağlayan bir f' tasvirinin varlığı problemidir. Başka bir ifade ile yukardaki üçgen diagramı komütatif yapan bir f' tasvirinin varlığı problemidir. Bu gibi problemlere sık rastlanmaktadır.

Bir F funktorunu düşünelim öyleki E,X,Y topolojik uzaylarına F(E), F(X), F(Y) gruplarını tahsis etsin. Görülüyor ki bir çözümün olması için gerek şart, F(Y) grubunun $F(f)$ altındaki resmi, F(X) grubunun, $F(p)$ (F(E)) altgrubunun içinde olmasıdır.

$F(f) = f^*$, $F(X) = X^*$ ile gösterilirse, Şekil 1, aşağıdaki şekle dönüşür:

$$1^*_x = 1_x^*$$

$$(gf)^* = g^* f^*$$

$$\begin{tikzcd} & E^* \arrow[d, "p^*"] \\ Y^* \arrow[ur, "f'^*"] \arrow[r, "f^*"'] & X^* \end{tikzcd}$$

$p^* f'^* = f^*$

Burada E^*, X^*, Y^* grup; p^*, f^* homomorfizmdirler. Bu notasayonlara göre gerek şart,

$$f^*(Y^*) \subset p^*(E^*),\ p^*(E^*) \subset X^*.$$

Gösterilebilir ki, E, X in bir örtü uzayı, başka bir deyim ile p bir projeksyon ise, f keyfi için, $pf' = f$ şartını sağlıyan bir f' yükseltilmesi vardır yalnız ve yalnız yukardaki şart sağlanıyorsa.

Burada uzaylar irtibatlı ve lokal eğrisel irtibatlıdır.

Üstelik herbir uzay noktalı topolojik uzaydır.

Yukarda, uzaylar üzerinde ileri sürülen şartlar gereklidir, zira bu teoremin ispatında Homotopi teorisi kullanılmaktadır. Cebirsel Topolojide bu kavram temeldir.

2. Farzedelim ki $f: X \to Y$ bir homeomorfizmdir. Bu taktirde, $1_{F(X)} = F(1_X) = F(f^{-1}f) = F(f^{-1})\,F(f)$. Dolayısıyla funktoryel olarak $F(f^{-1})$, $F(f)$nin inversidir. Binaenaleyh $F(f)$ bir izomorfizmdir. Demek ki, X ve Y nin homeomorfik olması için gerek şart (umumiyetle kâfi değildir) F(X) ve F(Y) gruplarının izomorf olmasıdır. Benzer topolojik özellikleri olan iki uzayın homeomorf olmadıklarını ispat edebilmek için bu en kolay bir muhakeme usuludur.

3. $A \subset X$ bir altuzay ve $\iota: A \to X$ $(a \in A \Rightarrow \iota(a) = a \in X)$

dahil etme tasviri olsun). Şimdi öyle bir $f: X \to A$ tasviri bulalım ki, $f \circ \iota$, A nın özdeş tasviri olsun. (Böyle bir f tasvirine X in A ya "geriye dönüşü" denir).

Funktoriyel olarak, $F(f)F(\iota)$, F(A) nın özdeş tasviridir. Böylece $F(\iota)$, F(A) yı izomorfik olarak F(X) in bir altgrubuna tasvir etmektedir. Buradan şu çıkmaktadır: Şayet biliniyorsa ki F(X) trivialdir (özdeş elemandan ibaret), F(A) ise değildir, bu taktirde bir geriye dönüş (retract) tasviri mevcut değildir.

2. Eğrilerin Homotopisi

17.2.1 **Giriş.** Y, bir topolojik uzay olsun. Kabaca, Y nin iki altuzayı "homotop" tur denir, şayet birinden diğerine sürekli bir "deformasyon" ile geçilebiliryorsa.

Meseleyi daha da basite irca edebilmek için, Y ye ait basit eğrilerin misalini ele alalım.

$I = [0,1]$, $0 \leq x \leq 1$ kapalı aralığını göstersin. I deki topoloji, bildiğimiz topolojidir, yani $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile tesbit edilen topolojidir. $x,y \in I$.

Basit eğri (yay, yol) diye, $f: I \to Y$ sürekli tasvirinin görüntüsüne (resmine) denir.

α, β iki basit eğri iseler, α, β ya homotoptur denir şayet α sürekli olarak β ya dönüştürülebiliyorsa, daha doğrusu "deforme" edilebiliyorsa.

"Sürekli deformasyon" fikrinin matematik formülasyonu şöyledir: 0 ile 1 arasında değişen bir t parametresi verilmiş olsun, $0 \leq t \leq 1$. Bu kapalı aralığı J ile gösterelim. t parametresine tâbi Y de α_t eğri ailesini düşünelim öyleki, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \beta$, ve öyleki t, J yi taradığı zaman, α_t sürekli olarak değişsin. Bütün mesele, bu sürekliliği matematiksel olarak ifade edebilmektedir. Bunun için bir

$$F(x, t) = F: I \times J \to Y$$

fonksyonu tarif edilmiş olsun. Şayet F tasviri sürekli, ve t nin herbir değerine bir α_t eğrisi tekabül ediyor öyleki, özel olarak $F(x,0) = \alpha_0 = \alpha$ ve $F(x,1) = \alpha_1 = \beta$, bu taktirde F fonksyonu, α_t eğrileri vasıtasıyla α dan β ya "sürekli bir deformasyon" tarif edecektir. Açık olarak F fonksyonu birtek değildir, zira $\alpha_0 = \alpha$, ve $\alpha_1 = \beta$ şartlarını yerine getiren herhangibir α_t sürekli ailesi kullanılabilir.

17.2.2. Bu düşünce esas tutularak, I herhangibir X topolojik uzayı olarak alındığı taktirde, homotopi kavramına en genel şekli verilebilir. Ancak burada, homotopi, görüntüler (resimler) arasında değil, bu görüntüleri temin eden tasvirleri arasında sürekli bir deformasyondur.

Bazı durumlarda, bilhassa esas grupları ilgilendiren hallerde, daha özel tipte homotopiler ele alınmaktadır. Bahis konusu homotopilerde, deformasyon süresince Y nin bazı altcümleleri sabit kalmaktadır.

Yine eğrileri misal almak üzere, farzedelim ki, α ve β nın uç noktaları sırasıyla y_1 ve y_2 dir. Uç noktalar, basit eğrinin tarifinde, $I \to Y$ tasvirinde sıra ile 0 ve 1 in resimleridir.

Bu özel halde, $F:I \times J \to Y$ sürekli tasvirinde, α sürekli olarak β ya deforme edildiğinde, α_t ailesine ait herbir eğrinin uç noktaları y_1 ve y_2 dir. Bu taktirde diyoruz ki, α ve β yı tarif eden tasvirler, Y nin birer altcümlesini teşkil eden y_1 ve y_2 ye nazaran homotopturlar. Diğer bir ifade ile $F:I \times J \to Y$ tasviri $F(0,t) = y_1$, $F(1,t) = y_2$ ekstra şartları ile kısıtlanmıştır, $\forall\ 0 \leq t \leq 1$.

Şimdi, bir homotopinin ve bir cümleye nazaran homotopinin en genel tariflerini veriyoruz.

17.2.3. **Homotopinin genel tarifi.**

TARİF 4. X ve Y iki topolojik uzay olsun. Şayet f ve $g:X \to Y$ sürekli tasvirlerse, ve $\exists F:X \times J \to Y$ sürekli tasvir $\ni F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ $\forall\ x \in X$, bu taktirde diyoruz ki, f, g ye homotoptur ve $f \sim g$ veya $f \overset{F}{\sim} g$ ile gösteriyoruz.

F tasvirine ise, f den g ye homotopi denir. Bazen, F_t notasyonu ile, $F_t(x) = F(x,t)$ ile tarif edilen $F_t:X \to Y$ sürekli tasviri ifade edilmektedir, $x \in X$. Özel olarak $F_0 = f$, $F_1 = g$.

TARİF 5. $X_0 \subset X$ herhangibir altcümle olsun. Şayet f ve $g:X \to Y$ sürekli tasvirlerse $\ni f(x_0) = g(x_0)$ $\forall x_0 \in X_0$, ve $\exists$ $F:X \times J \to Y$ sürekli tasvir $\ni F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ $\forall\ x \in X$, ve $\forall\ x_0 \in X_0$ için $F(x_0,t) = f(x_0) = g(x_0)$ bu taktirde diyoruz ki f, X_0 a nazaran g ye homotoptur, ve

$$f \sim g \text{ rel } X_0$$

yazıyoruz. $X_0 = \varnothing$ ise sadece $f \sim g$ yazıyoruz. Demek ki adî homotopi, rölatif homotopinin bir özel halidir.

TARİF 6. $f,g:X \to Y$ ve $f \sim g$ olsun. Şayet g nin resmi bir noktadan ibaret ise, yani g tasviri sabit ise, bu taktirde f bir sabit homotoptur diyoruz.

Özel olarak, $Y = X, 1_X:X \to X$ özdeş tasviri bir sabite homotop ise, bu taktirde X bir noktaya deforme edilebilir veya büzülebilir diyoruz.

Misal. $E^n := \{x \in R^n;\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$, burada $(x_1, \ldots, x_n) = x$ vazedilmiştir, birim küresi büzülebilir. Gerçekten, $F:E^n \times J \to S^n$ tasviri

$$F(x,t) = ((1-t)\,x_1, \ldots, (1-t)x_n) = (1-t)\,x,\ x \in E^n,$$

şeklinde tarif edilirse, süreklidir. Üstelik,

$$F(x,0) = x \text{ ve } F(x,1) = 0 = (0, \ldots, 0).$$

Binaenaleyh, $1_X: E^n \to E^n$ özdeş tasviri, 0 sabitine homotoptur. Başka bir deyim ile E^n dolu küresi büzülebilir.

Teorem 17.2.3.1. Şayet Y büzülebilir bir topolojik uzay ise, herbir $f:X \to Y$ sürekli tasviri bir sabite homotoptur.

İspat. Y büzülebilir bir topolojik uzay olduğundan, $\exists\ F:Y \times J \to Y$ sürekli $\ni F(y, 0) = y$ yani 1_Y ve $F(y,1) = y_0$, sabit bir eleman.

Şimdi $f:X \to Y$ sürekli bir tasvir olsun.

$G:X \times J \to Y$ aşağıdaki şekilde tarif edilsin.

$$G(x,t) = F(f(x),t),\quad x \in X.$$

Bu taktirde G süreklidir. Üstelik

$$G(x,0) = F(f(x),0) = f(x),\ G(x,1) = F(f(x),1) = y_0.$$

Binaenaleyh, $f \sim g:X \to Y$. Burada $G(x,1) = g(x) = y_0$.

Teorem 17.2.3.2. $f,g:X \to Y$ sürekli tasvirler olsun öyleki $f \sim g$. Diğer taraftan $h:Y \to Z$ bir sürekli tasvir ise, bu taktirde hf, $hg:X \to Z$ sürekli tasvirlerdir ve $hf \sim hg$.

Aynı şekilde, $f':X \to Y$ sürekli bir tasvir ve $g',h':Y \to Z$ homotop tasvirler ise, bu taktirde, $g'f'$, $h'f':X \to Z$ homotop tasvirlerdir.

İspat. $f \sim g \Rightarrow \exists\ F:X \times J \to Y$ sürekli $\ni F(x,0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$. Şimdi $G:X \times J \to Z$ tasvirini $G(x,t) = h(F(x,t))$ şeklinde tarif edelim. Bu taktirde G süreklidir. Diğer taraftan, $G(x,0) = h(F(x,0)) = h(f(x))$ ve $G(x, 1) = h(F(x, 1)) = h(g(x))$. Dolayısıyla, $hg \sim hf$.

Teoremin ikinci kısmı aynı şekilde ispat edilir.

Homotopi Eşdeğerliliği. $f:X \to Y$ sürekli bir tasvir olsun. f tasvirine homotopi eşdeğerlilik denir, şayet sürekli bir $f':Y \to X$ tasviri varsa öyleki

$f'f$: $X \to X$ tasviri 1_X tasvirine, ve

ff': $Y \to Y$ tasviri 1_Y tasvirine

homotop iseler. Notasyon olarak $X \sim Y$ sembolu kullanılabilir.

Böyle bir f nin varlığı halinde, X ve Y uzayları homotopik eşdeğerdirler veya aynı homotopi tipindendir denir.

Açık olarak, X ve Y homeomorf iseler homotopik eşdeğerdirler, zira, $f' = f^{-1}$ ve $f^{-1}f = 1_X$, $ff^{-1} = 1_Y$, ve fakat karşıtı doğru olmıyabilir. Yani

X ve Y homotopik eşdeğer iseler, homeomorfik olmıyabilirler. Mesela büzülebilir bir uzay, birtek noktadan ibaret bir uzay (tek–nokta uzayı) ile homotopik eşdeğer olduğu halde, bu iki uzay homeomorf değildirler, zira büzülebilir bir uzay, bir noktadan ibaret bir uzay (tek nokta uzayı) ile homeomorftur ancak kendisi de birtek noktadan ibaret ise. Başka bir deyim ile:

Teorem 17.2.3.3. Bir uzay büzülebilir yy. tek–nokta uzayı ile aynı homotopi tipinden ise.

İspat. Farzedelim ki X büzülebilir. Yani $x_0 \in X$ ise $1_X \sim x_0$ (sabit tasvir) Y, x_0 dan müteşekkil tek–nokta uzayını göstersin. $f:X \to Y$ ve $\iota:Y \to X$ $(Y \subset X)$ dahil etme tasviri olsun. Bu taktirde, $f\,\iota = 1_X$. Diğer taraftan $\iota\, f = x_0$ Halbuki $x_0 \sim 1_X$ ve dolayısıyla $\iota f \sim 1_X$. Şu halde f bir homotopi eşdeğerliktir.

Karşıt olarak farzedelim ki $X \sim Y$ (tek – nokta uzay). Bu demektir ki $\exists\, f:X \to Y$ bir homotopi eşdeğerlilik ve $f':Y \to X$. Bu taktirde $f'f \sim 1_X$. Halbuki $f', \iota:Y \to X$ tasviridir. O halde $f'f = \iota f = x_0$. Yani $1_X \sim x_0$

Aynı homotopi tipinden olma bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

Gerçekten refleksiflik ve simetri aksyomları doğrudan doğruya tariften sağlandıkları görülür. Tranzitiflik aksyomunun sağlanmasına gelince:

$$X \sim Y,\ Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z.$$

Gerçekten, $X \sim Y \Rightarrow \exists\, f:X \to Y, f':Y \to X \ni f'f \sim 1_X,\ ff' \sim 1_Y$

$$Y \sim Z \Rightarrow \exists\, g:Y \to Z, g':Z \to Y \ni g'g \sim 1_Y,\ gg' \sim 1_Z.$$

Diğer taraftan,

$$h = gf:X \to Z,\ h' = f'g':Z \to X$$

kompozisyonları sürekli tasvirlerdir.

Üstelik,

$$h'h:X \to X,\ hh':Z \to Z.$$

Gösterelim ki, $h'h \sim 1_X$, $hh' \sim 1_Z$.

Gerçekten, $h'h = (f'g')(gf) = f'((g'g)f)$,

halbuki $g'g \sim 1_Y$; teorem 18.2.3.2 den dolayı

$$f'(g'g) \sim f'\,1_Y = f'.$$

Yani,

$$f'(g'g) \sim f'.$$

Dolayısıyla, yine aynı teoremden,

$$f'((g'g)f) \sim f'f.$$

Veya

$$h'h \sim f'f.$$

Oysa $f'f \sim 1_X$. Binaenaleyh, $h'h \sim 1_X$.

Aynı şekilde, $hh' \sim 1_Z$.

Neticede göstermiş oluyoruz ki, yukarda tarifi verilen bağıntı ile, topolojik uzayların sınıfını ayrık sınıflara ayırmak mümkündür, öyleki aynı sınıfa ait iki topolojik uzay aynı tiptendir. Bu sınıflar, topolojik eşdeğer uzayların sınıfından daha geniştirler, zira topolojik eşdeğerlik, homotopi eşdeğerlikten daha kuvvetlidir, şöyle ki, bir homotopi invarient, yani homotopik eşdeğer uzayların taşıdığı bir değer aynı zamanda bir topolojik invarienttir. Aksine, bir topolojik invarient bir homotopi invarienti olmayabilir.

Bu homotopi invarientleri arasında en önemlileri esas grup ile homotopi gruplarıdır. Şimdi bunları inceleyeceğiz.

3. Esas Grup.

17.3.1. Bu kavramın incelenmesinde, bundan önce ele aldığımız eğri kavramına ihtiyacımız olacaktır. Bazı şartlara bağlı kalmak kaydı ile, bunların bir grup teşkil ettiklerini göreceğiz. Bunun için de sürekliliğe ait bazı topolojik bilgilere ihtiyacımız olacaktır: (Bk. Genel Topoloji, § 2).

Bu teoremlerden ve özellikle teorem 11.2.1.4 ten istifade ederek şu teorem ispatlanabilir.

Teorem 17.3.1.1. $\sim$ homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. $f \sim f$ aşikardır, zira $F(x,t) = f(x)\ \forall\, x \in X,\ \forall\, t \in J$, alınabilir. $f \sim g$, ve F, f den g ye bir homotopi ise, bu taktirde $G:X \times J \to Y$,

$G(x,t) = F(x,1-t)$ şeklinde tarif edildiği taktirde, g den f ye bir homotopidir, yani $g \overset{G}{\sim} f$. Nihayet, $f \overset{F}{\sim} g$ ve $g \overset{G}{\sim} h$, ise bu taktirde $f \overset{H}{\sim} h$, burada

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x, 2t-1) & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

H nın sürekliliği ise teorem 11.2.1.5 in neticesidir.

Şimdi tekrar Y topolojik uzayındaki eğrilere dönelim.

Tarif ve Notasyon. Demek ki bütün $f:X \to Y$ sürekli tasvirlerin cümlesi $\sim$ bağıntısı altında eşdeğer sınıflara ayrılmış bulunuyor.

Bu eşdeğer sınıflara homotopi sınıfları denir, ve bütün homotopi sınıflarının cümlesi $[X, Y]$ ile gösterilir. Şayet $f:X \to Y$ ise, f nin homotopi sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

17.3.2. **Topolojik uzayda eğriler** Gördük ki Y topolojik uzayında eğri diye $\alpha:I \to Y$ sürekli tasvirine denir. Burada $I = [0,1] := 0 \le x \le 1$, I deki topoloji bilinen topolojidir.

Y ye ait $\alpha(0)$ ve $\alpha(1)$ noktalarına, eğrinin sıra ile başlangıç ve bitim noktası denir.

α eğrisinin inversi diye $\alpha^{-1} = \alpha^{-1}(x) = \alpha(1-x)$ eğrisine denir. Bu iki eğri, Y de aynı nokta cümlelerini belirtirler, ancak aksi yönlerde tasvir edilmişlerdir. Açık olarak α nın bitim noktası α^{-1} in başlangıç noktası ile çakışır. α nın başlangıç noktası ise α^{-1} in bitim noktası ile çakışır.

TARİF 7. $\alpha:I \to Y$ ve $\beta:I \to Y$ eğrileri verilmiş olsun. Farzedelim ki $\alpha(1) = \beta(0)$, yani α nın bitim noktası ile β nın başlangıç noktası çakışıyor. Bu taktirde bir γ eğrisi tarif edilmiştir diyoruz, $\ni \gamma:I \to Y$

$$\gamma = \gamma(x) = \begin{cases} \alpha(2x) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \beta(2x-1) & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Teorem 11.2.1.5 den dolayı γ, I de süreklidir. Geometrik olarak β eğrisi α yı tarif etmektedir. Tarif olarak $\gamma = \alpha\beta$ yazıyor ve γ ya çarpım eğri diyoruz.

Yukarıdaki şartları sağlıyan bir $\gamma = \alpha\beta$ eğrisine tariflidir diyoruz.

TARİF 8. α sabit bir tasvir ise, yani $\alpha(I)$ Y de birtek noktadan ibaret ise, α eğrisine sıfır eğri diyoruz.

TARİF 9. α eğrisine kapalıdır denir şayet ikinci uç noktası başlangıç noktası ile çakışıyorsa, yani $\alpha(0) = \alpha(1)$. Mesela, $\alpha\alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\alpha$ kapalı eğrilerdir.

TARİF 10. Y de α ve β eğrilerinin başlangıç noktaları ile bitim noktaları aynı olsun. Bu iki eğriye veya tasvirlere homotoptur diyoruz ve $\alpha \sim \beta$ yazıyoruz şayet α ve β, I nın (0,1) altcümlesine nazaran homotop iseler. Demek ki $\alpha \sim \beta$ dan kasıt $\alpha \sim \beta$ rel. (0,1) dir.

Aşağıdaki teoremler, en sonucunsu hariç, esas grubun, grup hassalarının tahkikine yarayacaktır.

Teorem 17.3.2.1. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ Y de eğriler olsun. Farzedelim ki $\alpha \sim \gamma$, $\beta \sim \delta$ ve $\alpha\beta$ tariflidir. Bu taktirde $\gamma\delta$ tariflidir ve $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ (rel.(0,1)).

İspat. $\alpha\beta$ tarifli olduğundan $\alpha(1) = \beta(0)$. Diğer tarftan $\alpha \sim \gamma$, $\beta \sim \delta \Rightarrow$ sıra ile $\alpha(1) = \gamma(1)$, $\beta(0) = \delta(0)$. Buradan $\gamma(1) = \delta(0)$ elde edilir, yani $\gamma\delta$ tariflidir. Şimdi

$$\alpha \sim \gamma \Rightarrow \exists\, F:I\times J \to Y \ni$$
$$F(x,0) = \alpha(x),\ F(x,1) = \gamma(x)$$
$$F(0,t) = \alpha(0) = \gamma(0),\ F(1,t) = \alpha(1) = \gamma(1).$$

Aynı şekilde, $\beta \sim \delta \Rightarrow \exists\, G:I\times J \to Y \ni$

$$G(x,0) = \beta(x),\ G(x,1) = \delta(x)$$
$$G(0,t) = \beta(0) = \delta(0),\ G(1,t) = \beta(1) = \delta(1).$$

Nihayet, I yı ikiye parçalamak suretiyle $H:I\times J \to Y$ yi aşağıdaki şekilde tarif edelim.

$$H(x,t) = \begin{cases} F(2x,t) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ G(2x-1,t) & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Teorem 11.2.1.5 den dolayı H, I de süreklidir, ve üstelik

$$H(x,0) = \begin{cases} \alpha(2x) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \beta(2x-1) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$H(x,1) = \begin{cases} \gamma(2x) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \delta(2x-1) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ve

$$H(0,t) = F(0,t) = \alpha(0) = \gamma(0).$$
$$H(1,t) = G(1,t) = \beta(1) = \delta(1).$$

Binaenaleyh,

$$\alpha\beta \sim \gamma\delta$$

Teorem 17.3.2.2. $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$.

İspat. $\alpha \sim \beta \Rightarrow \exists\, F: I\times J \to Y \ni$

$$F(x,0) = \alpha(x),\ F(x,1) = \beta(x)$$
$$F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0);\ F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1).$$

Şimdi $G:I\times J \to Y$, $G(x,t) = F(1-x,t)$ şeklinde tarif edilirse

$$G(x,0) = F(1-x,0) = \alpha(1-x) = \alpha^{-1}$$
$$G(x,1) = F(1-x,t) = \beta(1-x) = \beta^{-1}$$
$$G(0,t) = F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$$
$$G(1,t) = F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0).$$

Binaenaleyh, $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$.

Teorem 17.3.2.3. α bir eğri, ve β sıfır eğri olsun $\ni \alpha\beta$ tariflidir. Bu taktirde $\alpha\beta \sim \alpha$. Aynı şekilde, γ sıfır eğri ise öyleki $\gamma\alpha$ tariflidir, bu taktirde $\gamma\alpha \sim \alpha$.

İspat. $\alpha\beta$ tarifli ve β sıfır eğri olduğundan $\alpha(1) = \beta(x)$. Şimdi $F:I\times J \to Y$ tasvirini şu şekilde tarif edelim.

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha(2x/(1+t)) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}(1+t) \\ \alpha(1) = \beta(x) & \frac{1}{2}(1+t) \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Teorem 11.2.1.4 den dolayı F süreklidir. Üstelik,

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(2x) & 0 \le x \le 1/2 \\ \alpha(1) & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad F(x,1) = \alpha(x)$$

ve

$$F(0,t) = \alpha(0),\ F(1,t) = \alpha(1).$$

Binaenaleyh, $\alpha\beta \sim \alpha$.

Teorem 17.3.2.4. α,β,γ, Y de üç eğri olsun, öyleki $\alpha\beta$ ve $\beta\gamma$ tariflidirler, bu taktirde $(\alpha\beta)\gamma$ ve $\alpha(\beta\gamma)$ tariflidir ve $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$.

İspat. $F: I\times J \to J$ aşağıdaki şekilde tarif edilsin.

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha(4x/(1+t)) & 0 \le x \le \frac{1}{4}(1+t) \\ \beta(4x-1-t) & \frac{1}{4}(1+t) \le x \le \frac{1}{4}(2+t) \\ \gamma(1-4(1-x))/(2-t) & \frac{1}{4}(2+t) \le x \le 1. \end{cases}$$

F tasviri teorem 11.2.1.5 den dolayı süreklidir. Diğer taraftan,

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(4x) & 0 \le x \le 1/4 \\ \beta(4x-1) & 1/4 \le x \le 1/2 \\ \gamma(2x-1) & 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

ve

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha(2x) & 0 \le x \le 1/2 \\ \beta(2x-1) & 1/2 \le x \le 3/4 \\ \gamma(4x-3) & 3/4 \le x \le 1. \end{cases}$$

Burada $F(x,0) = (\alpha\beta)\gamma$ ve $F(x,1) = \alpha(\beta\gamma)$, üstelik $F(0,t) = \alpha(0) = F(0,0)$; $F(1,t) = \gamma(1) = F(1,1)$.

Binaenaleyh, $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$.

Teorem 17.3.2.5. α, Y de herhangi bir eğri ise $\alpha\alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\alpha$ sıfır eğriye homotopturlar.

İspat. $F: I\times J \to Y$ homotopi tasvirini şu şekilde tarif edelim.

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha(2x(1-t)) & 0 \le x \le 1/2 \\ \alpha(2(1-x)(1-t)) & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Bu taktirde F süreklidir, ve

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(2x) & 0 \le x \le 1/2 \\ \alpha(2-2x) & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$F(x,1) = \alpha(0),\ \text{ve}\ F(0,t) = \alpha(0).$$

Binaenaleyh, $\alpha\alpha^{-1}$, resmi $\alpha(0)$ olan sıfır eğriye homotoptur. Aynı şekilde $\alpha^{-1}\alpha$, resmi $\alpha(1)$ olan sıfır eğriye homotoptur.

Yukardaki teoremlerin bir tatbikatı olarak aşağıdaki teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 17.3.2.6. α,β Y de iki eğri olsun öyleki $\alpha\beta^{-1}$ tariflidir ve kapalıdır. Bu taktirde $\alpha\beta^{-1}$ sıfır eğriye homotoptur yy. $\alpha \sim \beta$ ise.

İspat. $\alpha\beta^{-1}$ tarifli olduğundan $\alpha(1) = \beta(1)$. Mademki $\alpha\beta^{-1}$ kapalıdır, $\alpha(0) = \beta(0)$. Şimdi farzedelim ki $\alpha\beta^{-1}$ bir sıfır eğriye homotoptur. Bu taktirde, teorem 18.3.2.1 ve teorem 18.3.2.3 ten dolayı, $(\alpha\beta^{-1}) \sim \beta$. Halbuki teorem 18.3.2.4 ten dolayı, $(\alpha\beta^{-1})\beta \sim \alpha(\beta^{-1}\beta)$. Fakat teorem 18.3.2.5 ve teorem 18.3.2.3 ten dolayı $\alpha(\beta^{-1}\beta) \sim \alpha$. Neticede $\beta \sim \alpha$.

Karşıt olarak, farzedelim ki $\alpha \sim \beta$. Teorem 18.3.2.1 den dolayı $\alpha\beta^{-1} \sim \beta\beta^{-1}$, ve teorem 18.3.2.5 ten ötürü $\beta\beta^{-1}$, sıfır eğriye homotoptur. Binaenaleyh $\alpha\beta^{-1}$ sıfır eğriye homotoptur.

17.3.3 **Esas Grup.** Y bir topolojik uzay ve $y_0 \in Y$ sabit bir nokta olsun. y_0 da başlıyan ve y_0 da biten kapalı eğrilerin cümlesini gözönüne alalım. y_0 noktasına, eğriler için taban nokta denir, eğrilere ise y_0 da eğriler denir. α, y_0 da bir eğri ise, α ya homotop y_0 da bütün eğrilerin sınıfını $[\alpha]$ ile göstereceğiz. İki sınıfın çarpımı

$$[\alpha]\ [\beta] = [\alpha\beta]$$

ile tarif edilir. Teorem 17.3.2.1 den dolayı yukardaki tarif temsilcilere bağlı değildir. Gerçekten $\alpha \sim \gamma$ ve $\beta \sim \delta$ ise $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ olduğundan $[\gamma]\ [\delta] = [\gamma\delta] = [\alpha\beta]$. Binaenaleyh, $[\alpha]\ [\beta]$ çarpımı $[\alpha]$ ve $[\beta]$ tarafından birtek olarak tarif edildiğinden, çarpım anlamlıdır. Şimdi y_0 da bütün eğrileri gözönüne alalım. Homotopi bağıntısı bu eğrilerin cümlesini ayrık homotopi sınıflarına ayırır. Yukarda tarif edilen çarpım operasyonu ise homotopi sınıflarının cümlesinde bir grup strüktürü tarif eder. Gerçekten, bir evvelki paragrafta ispat edilen teoremler vasıtasıyla aşağıdaki grup aksyomlarının sağlandığı görülür.

1. y_0 da eğrilerin homotopi sınıflarının cümlesi çarpım operasyonuna nazaran kapalıdır. Gerçekten $[\alpha]\ [\beta]$, y_0 da eğrilerin $[\alpha\beta]$ homotopi sınıfına eşittir.

2. $([\alpha]\ [\beta])\ [\gamma] = [\alpha\beta]\ [\gamma] = [(\alpha\beta)\gamma]$

$[\alpha]\ ([\beta]\ [\gamma]) = [\alpha]\ [\beta\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)]$.

Halbuki teorem 17.3.2.4 ten dolayı $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma) \Rightarrow [(\alpha\beta)\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)] \Rightarrow ([\alpha]\ [\beta])\ [\gamma] = [\alpha]\ ([\beta]\ [\gamma])$ yani asosyatiflik caridir.

3. y_0 da sıfır eğrisinin homotopi sınıfını $[1]$ ile gösterirsek, teorem 18.3.2.3 ten dolayı $[\alpha]\ [1] = [\alpha]$. O halde $[1]$ özdeş elemandır.

4. Teorem 17.3.2.5 ten dolayı $[\alpha]\ [\alpha^{-1}] = [\alpha\alpha^{-1}] = [1]$. Yani herbir homotopi sınıfı bir inverse sahiptir.

Binaenaleyh, y_0 da eğrilerin bütün homotopi sınıflarının cümlesi tarif edilen çarpıma nazaran bir gruptur. Bu gruba y_0 da esas grup denir, ve $\pi_1\ (Y, y_0)$ ile gösterilir.

Şimdi göstereceğiz ki, eğrisel irtibatlı bir uzayın herhangi iki noktasında esas gruplar izomorfturlar.

Binaenaleyh, eğrisel irtibatlı uzaylar için, esas grup taban noktasına tâbi değildir.

Teorem 17.3.3.1. Y eğrisel irtibatlı bir topolojik uzayda y_0, y_1 herhangi iki nokta ise $\pi_1(Y,y_0) \simeq \pi_1(Y,y_1)$.

İspat. α, y_0 da bir eğri olsun. Y eğrisel irtibatlı olduğundan, y_0 başlangıç ve y_1 bitim noktası olan Y de bir γ eğrisi mevcuttur. Bu taktirde, $\beta = (\gamma^{-1}\alpha)\gamma$ y_1 de bir eğridir. Teorem 17.3.2.1 den dolayı $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma^{-1}\alpha_1 \sim \gamma^{-1}\alpha_2 \Rightarrow (\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma \sim (\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma$. Yani α_1, α_2 y_0 da iki eğri ise ve $\beta_1 = (\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma$, $\beta_2 = (\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma$ y_1 de mütekabil eğriler ise.

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \sim \beta_2.$$

Diğer taraftan, β y_1 de herhangibir eğri ise $\alpha = (\gamma\beta)\gamma^{-1}$ y_0 da bir eğridir. Teorem 17.3.2.4 ve teorem 17.3.2.5 ten dolayı

$$(\gamma^{-1}\alpha)\gamma = \gamma^{-1}((\gamma\beta)\gamma^{-1})\gamma \sim \beta.$$

Karşıt olarak $\beta_1 \sim \beta_2$ ise $(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma \sim (\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma \Rightarrow \gamma((\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma)\gamma^{-1} \sim \gamma((\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma)\gamma^{-1}$ (teorem 17.3.2.1) ve teorem 17.3.2.4 ile teorem 17.3.2.5 ten dolayı da $\Rightarrow \alpha_1 \sim \alpha_2$. Görülüyor ki herbir $[\alpha]$ homotopi sınıfı birtek olarak bir $[\beta]$ homotopi sınıfını belirtiyor ve karşıt olarak herbir $[\beta]$ homotopi sınıfı birtek olarak bir $[\alpha]$ homotopi sınıfını belirtiyor. Şu halde $\Phi(\alpha) = [\beta]$ tasviri birebirdir. Üstelik $\Phi[\alpha_1]\ \Phi[\alpha_2] = [\beta_1]\ [\beta_2] = [\beta_1\beta_2] = [(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma\ (\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma] = [(\gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2)\gamma] = \Phi[\alpha_1\alpha_2]$
Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi farklı topolojik uzayların esas grupları arasındaki münasebeti inceleyeceğiz.

Teorem 17.3.3.2. $f:Y_0 \to Y_1$ sürekli bir tasvir olsun. Bu taktirde bir $f^*:\pi_1(Y_0, y_0) \to \pi_1(Y_1, f(y_0))$ homomorfizmi vardır. Burada $y_0 \varepsilon Y_1$ herhangibir sabit noktadır.

İspat. $\alpha, \beta, y_0 \varepsilon Y_0$ da iki eğri olsun. Y_1 de γ, δ eğrilerini, yani $\gamma, \delta:I \to Y_1$ tasvirlerini sıra ile $\gamma = f\circ\alpha$ ve $\delta = f\circ\beta$ ile tarif edelim. Bu taktirde, γ, δ Y_1 de tabanı $f((y_0)$ olan kapalı eğrilerdir.

Şayet $\alpha \sim \beta$ ise, $F:I\times J \to Y_0$ homotopi tasviri vardır $\ni$

$$F(x,0) = \alpha(x),\ F(x,1) = \beta(x)$$

$$F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0) = y_0,\ F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1) = y_0.$$

Şimdi $G: I\times J \to Y_1$ tasviri $G(x,t) = f(F(x,t))$ ile tarif edelim. Teorem 11.2.1.1 den dolayı G süreklidir. Üstelik,

$$G(x,0) = f\circ\alpha = \gamma,\ G(x,1) = f\circ\beta = \delta$$

$$G(0,t) = f(y_0),\ G(1,t) = f(y_0).$$

O halde $\gamma \sim \delta$.

Binaenaleyh, $f^*[\alpha] = [f\circ\alpha]$ tarif edilirse, f^*, $y_0 \varepsilon Y_0$ de eğrilerin homotopi sınıflarını, $f(y_0) \varepsilon Y_1$ de eğrilerin homotopi sınıflarına tasvir eder, öyleki $[\alpha]$ birtek olarak $f^*[\alpha]$ yı belirtir. Binaenaleyh f^* tasviri $\pi_1(Y_0,y_0)$ in herbir elemanına $\pi_1(Y_1, f(y_0))$ in birtek elemanını karşılık tutmaktadır. Şimdi göstereceğiz ki, f^* bir homomorfizmdir. α,β Y_0 in y_0 noktasında iki eğri olsun, ve $\gamma = f\circ\alpha$, $\delta = f\circ\beta$ Y_1 in $f(y_0)$ noktasında mütekabil eğriler olsun. Bu taktirde $\alpha\beta$ aşağıdaki şekilde tarif edilen $\rho:I \to Y_0$ eğrisidir:

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha(2x) & 0 \le x \le 1/2 \\ \beta(2x-1) & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Binaenaleyh, $f\circ\rho$ eğrisi aşağıdaki şekilde tarif edilen $\sigma:I \to Y_1$ eğrisidir:

$$\sigma(x) = \begin{cases} f(\alpha(2x)) & 0 \le x \le 1/2 \\ f(\beta(2x-1)) & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Yani $\gamma\delta$ eğrisidir. O halde

$$f^*[\alpha]f^*[\beta] = [\gamma]\ [\delta] = [\gamma\delta] = f^*[\alpha\beta]$$

Dolayısıyla $f^*:\pi_1(Y_0, y_0) \to \pi_1(Y_1, f(y_0))$ bir homomorfizmdir.

f^* tasvirine f tarafından istintaç edilen tasvirdir denir.

Noktalı topolojik uzayların kategorisindeki nesneler (Y_0, y_0) çiftleri ve morfizmler $f:Y_0 \to Y_1$ sürekli tasvirler olup $f(y_0) = y_1 \varepsilon Y_1$ ise f nin istintaç ettiği $f^*:\pi_1(Y_0,y_1) \to \pi_1(Y_1,y_1) \ni f^*[\alpha] = [f\circ\alpha]$ bir homomorfizm olduğunu gösterdik.

Burada π_1 e esas grup funktoru denir ve $\pi_1(f) = f^*$. Üstelik (1) ve (2) şartlarının sağlandığı kolayca tahkik edilebilir:

(1) $Y_0 = Y_1$ ve $f = 1_{Y_1} \Rightarrow \pi_1(1_{Y_1}) = 1_{\pi_1(Y_0,y_0)}$

(2) $g:(Y_1,y_1) \to (Y_2,y_2) \Rightarrow (gf)^* = g^*f^*$

Dolayısıyla, noktalı uzayların kategorisinden, gruplar kategorisine bir π_1 esas grup funktorundan bahis ile aşağıdaki teorem ifade edilebilir. Başka bir deyimle, teorem 17.3.3.2, funktoryel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 17.3.3.3. Noktalı topolojik uzayların kategorisinden grupların kategorisine bir funktor vardır öyleki bu funktor, bir noktalı uzaya esas grubunu, f tasvirine ise f^* homomorfizmini tahsis eder.

Şimdi göstereceğiz ki, f bir homeomorfizm ise f^* bir izomorfizmdir. Daha da genel olarak göstereceğiz ki $f:Y_0 \to Y_1$ bazı şartları sağladığı takdirde f^* bir izomorfizmdir.

Teorem 17.3.3.4. Y_0, Y_1 topolojik uzayları verilmiş olsun. Farzedelim ki $f:Y_0 \to Y_1$ ve $g:Y_1 \to Y_0$ sürekli tasvirleri vardır $\ni$ (i) $y_0 \varepsilon Y_0$ sabit bir nokta ise, $f(y_0) = y_1 \Rightarrow g(y_1) = y_0$, (ii) $gf \sim 1_{Y_0}$ rel y_0, (iii) $fg \sim 1_{Y_1}$ rel y_1. Bu taktirde

$$\pi_1(Y_0, y_0) \simeq \pi_1(Y_1, y_1).$$

İspat. Teorem 17.3.3.2 den dolayı, f, g, gf, fg sürekli tasvirleri sırasıyla f^*, g^*, $(gf)^* = 1_{\pi_1(Y_0,y_0)}$, $(fg)^* = 1_{\pi_1(Y_1,y_1)}$ homomorfizmlerini istintaç ederler.

α, $y_0 \varepsilon Y_0$ da bir eğri olsun. Bu taktirde $(gf)\alpha$ da y_0 da bir eğridir. Çünki $gf(y_0) = g(y_1) = y_0$. Fakat $(gf)\alpha \sim \alpha$, çünki $gf \sim 1_{Y_0}$ rel y_0. O halde $(gf)^* = 1_{\pi_1(Y_0,y_0)}$. Aynı şekilde $(fg)^* = 1_{\pi_1(Y_1,y_1)}$. Şimdi $(gf)\alpha: I \to Y_0$ eğrisini gözönüne alalım. Bu ise $g(f\alpha):I \to Y_0$ ile aynıdır. O halde $\beta = f\alpha$ vazedilirse, $(gf)^*[\alpha] = g^*[\beta]$ yazabiliriz. Aynı şekilde $\beta = f\alpha \Rightarrow f^*[\alpha] = [\beta]$. Demek ki $(gf)^* = g^*f^*$. Keza $(fg)^* = f^*g^*$. Binaenaleyh

$$g^*f^* = 1_{\pi_1(Y_0,y_0)}, \quad f^*g^* = 1_{\pi_1(Y_1,y_1)}$$

Öteyandan, $f^*[\alpha] = [\beta] \Rightarrow g^*f^*[\alpha] = g^*[\beta] \Rightarrow [\alpha] = g^*[\beta]$. Binaenaleyh, şayet $f^*[\alpha_1] = f^*[\alpha_2]$ ise $[\beta_1] = [\beta_2] \Rightarrow g^*[\beta_1] = g^*[\beta_2] \Rightarrow [\alpha_1] = [\alpha_2]$. Dolayısıyla f^* birebirdir. Aynı şekilde g^* birebirdir. Üstelik, $\pi_1(Y_1,y_1)$ in herbir elemanı, $\pi_1(Y_0,y_0)$ a ait bir $[\gamma]$ elamanı için $f^*[\gamma]$ şeklindedir, yani f^* epimorfizmdir. Neticede f^* izomorfizmdir. Ayni şekilde g^* izomorfizmdir.

Bu teoremin bir neticesi olarak

Teorem 17.3.3.5. Y_0 ve Y_1 homeomorf iseler, $\pi_1(Y_0,y_0) \simeq \pi_1(Y_1,y_1)$. Burada y_1, homeomorfizm altında y_0 ın resmidir.

İspat. $f:Y_0 \to Y_1$ homeomorfizm alınır ve $g = f^{-1}$ vazedilir.

Karşıtı umumiyetle doğru degildir.

Teorem 17.3.3.1 ve teorem 17.3.3.5 in neticesi olarak şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 17.3.3.6. Eğrisel irtibatlı bir topolojik uzayın esas grubu topolojik invarienttir.

Hatta, daha genel olarak,

Teorem 17.3.3.7. Eğrisel irtibatlı bir topolojik uzayın esas grubu homotopik invarienttir.

Bu teorem, teorem 17.3.3.4 ün daha genel bir hali olan aşağıdaki teoremin neticesidir.

Teorem 17.3.3.8. Y_0 ve Y_1 topolojik uzayları aynı tipten iseler, başka bir deyimle, $f:Y_0 \to Y_1$ bir homotopi eşdeğerlik ise $\pi_1(Y_0,y_0) \simeq \pi_1(Y_1, f(y_0))$ $\forall\, y_0 \varepsilon Y_0$.

Olabilir ki, bir uzayın esas grubu birtek elemandan ibarettir. Bu taktirde ucları aynı olan her iki eğri homotoptur. Böyle bir uzaya basit irtibatlı denir.

Kesin olarak şu tarifi verebiliriz.

TARİF 11. Bir uzay basit irtibatlıdır şayet esas grubu birtek elemandan ibaret ise.

Kısaca diyebiliriz ki, basit irtibatlı bir uzayın esas grubu trivialdir.

Misal 1. R^n Euclid uzayı basit irtibatlıdır.

Gerçekten, $y = (y_1, \ldots, y_n) \varepsilon R^n$ herhangibir noktayı göstersin. 0, R^n nin orijini, $\alpha:I \to R^n$, 0 da herhangibir eğri olsun. $\alpha:y = f(x)$ ile de gösterilebilir. $F(x,t) = (1-t)f(x)$ sürekli tasviri α yı 0 da sıfır eğrisine deforme eder. Yani $\alpha \overset{F}{\sim} 1$. Dolayısıyla, R^n nin esas grubu birtek elemandan ibarettir.

Misal. 2. S^2 küresi: $= \{y \varepsilon R^3; \|y\| = 1\}$. Esas grubu trivialdir. Gerçekten, herhangibir kapalı eğri bir sıfır eğriye homotoptur.

Misal. 3. S^1 çemberi: $= \{y \varepsilon R^2; \|y\| = 1\}$. P, çember üzerinde herhangibir nokta olsun. P de bir eğri, ya bir sıfır eğridir veya çemberi bir veya birden fazla devreden eğrilerdir. α, P de bir eğri olsun. Farzedelim ki α çemberi r defa devretsin. β, P de diğer bir eğri olup, çemberi s defa devretsin. Bu taktirde, mesela $r > s$ ise $\alpha \nsim \beta$, zira $\alpha\beta^{-1}$ P de bir eğri olup, çemberi, r–s defa devreder. Böyle bir eğri ise sıfır eğriye homotop olamaz. Demek ki P de eğrilerin homotopi sınıfları tam sayılar aditif grubu ile birebir tekabül etmektedir. Bu tekabülün bir izomorfizm olduğu aşikârdır.

4. Homotopi Grupları.

17.4.1. Bundan önceki paragraflarda, I kapalı aralığının bir Y topolojik uzayına sürekli tasvirlerini ele alarak, Y nin sabit bir y_0 noktasında eğrilerin (tabanı y_0 olan kapalı eğrilerdir) homotopi sınıflarını teşkil ederek bunların esas grup denilen bir grup meydana getirdiklerini görmüştük. Bu grup $\pi_1(Y,y_0)$ ile gösterilmiştir. Bu notasyonda 1 indeksi, R–Euclid uzayının (Reel eksen) bir parçası olan I nin boyutunu ifade etmektedir. Şayet I yerine R^n nin bir parçası olan n–boyutlu I_n kübü gözönüne alınırsa, esas grup kavramı n–boyuta teşmil edilebilir. Ancak bu genelleştirmede, yani $n > 1$ halinde esas grup yerine homotopi grubu tabiri kullanılmaktadır. Sebebi aşağıda izah edilecektir. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ R^n de herhangi bir nokta ise,

$$I_n = \{x \varepsilon R^n; 0 \leq x_i \leq 1\}, \quad , \quad i = 1, \ldots, n .$$

I_n deki topoloji $\|x-y\|$ ile tesbit edilen topolojidir. Burada $\|x\| = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$.

I_n nin sınırını $\dot{I}_n$ ile göstereceğiz. Yani $\dot{I}_n$, $x_1, \ldots, x_n$ koordinatlarından birtanesine 0 veya 1 değerini vermekle elde edilen I_n nin altcümlelerinin birleşimidir.

Mesela, $n = 2$ ye tekabül eden I_2, birim karenin içi ve kenarlarından mümütəşekkil olup, $\dot{I}_2$, karenin çevresidir.

17.4.2. **Homotopi ve Tasvirlerin Çarpımı.**

Y bir topolojik uzay, ve $\alpha,\beta:I_n \to Y$ sürekli tasvirler olsun öyleki $\alpha(\dot{I}_n) = \beta(\dot{I}_n) = y_0, y_0 \varepsilon Y$ sabit bir noktadır. $\alpha \sim \beta$ rel $\dot{I}_n$, şayet $\exists\, F:I_n \times J \to Y$, $F = F(x,t), \ni F(x,0) = \alpha$, $F(x,1) = \beta$, ve $F(\dot{I}_n \times J) = y_0$. Burada $F(\dot{I}_n \times J) = F(\dot{x},t) = F(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,t)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n) \varepsilon \dot{I}_n$ Tekrar hatırlatalım ki, $n = 1$ ise, α,β y_0 da eğrilerdir. Şimdi $\gamma:I_n \to Y$ tasvirini aşağıdaki şekilde tarif edelim.

$$\gamma = \begin{cases} \alpha\,(2x_1,x_2,\ldots,x_n) & 0 \le x_1 \le 1/2 \\ \beta\,(2x_1-1,x_2,\ldots,x_n) & 1/2 \le x_1 \le 1. \end{cases}$$

γ tasviri teorem 11.2.1.5 den ötürü süreklidir. Üstelik $\gamma(\dot{I}_n) = y_0$, $n = 1$ ise, γ, α ve β eğrilerinin çarpımıdır. $n > 1$ için α ve β tasvirlerinin çarpımını $\gamma = \alpha\beta$ şeklinde göstermeye şimdilik devam edeceğiz.

Teorem 17.4.2.1. $\alpha,\beta,\gamma,\delta, : I_n \to Y$ sürekli tasvirler olsun $\ni$ $\alpha(\dot{I}_n) = \beta(\dot{I}_n) = \gamma(\dot{I}_n) = \delta(\dot{I}_n) = y_0$. Farzedelim ki $\alpha \overset{E}{\sim} \gamma$ rel $\dot{I}_n$, $\beta \overset{G}{\sim} \delta$ rel $\dot{I}_n$. Bu taktirde $\alpha\beta \overset{H}{\sim} \gamma\delta$ rel. $\dot{I}_n$.

İspat. $\alpha \overset{E}{\sim} \beta$ rel. $\dot{I}_n \Rightarrow \exists\, F:\dot{I}_n \times J \to Y \ni$

$$F(x_1,\ldots,x_n,0) = \alpha(x_1,\ldots,x_n)$$

$$F(x_1,\ldots,x_n,1) = \gamma(x_1,\ldots,x_n)$$

$$F(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,t) = y_0,\ \dot{x} = (\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n) \varepsilon \dot{I}_n.$$

Aynı şekilde, $\beta \overset{G}{\sim} \delta$ rel. $\dot{I}_n \Rightarrow \exists\, G:\dot{I}_n \times J \to Y \ni$

$$G(x_1,\ldots,x_n,0) = \beta(x_1,\ldots,x_n)$$

$$G(x_1,\ldots,x_n,1) = \delta(x_1,\ldots,x_n)$$

$$G(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,t) = y_0.$$

Nihayet $H:I_n \times J \Rightarrow Y$ şu şekilde tarif edilsin

$$H(x_1,\ldots,x_n,t) = \begin{cases} F(2x_1,\ldots,x_n,t) & 0 \le x_1 \le 1/2 \\ G(2x_1-1,\ldots,x_n,t) & 1/2 \le x_1 \le 1. \end{cases}$$

Bu taktirde teorem 11.2.1.5 den otürü H süreklidir ve üstelik,

$$H(x_1,\ldots,x_n,0) = \begin{cases} F(2x_1,\ldots,x_n,0) = \alpha(2x_1,\ldots,x_n) & 0 \le x_1 \le 1/2 \\ G(2x_1-1,\ldots,x_n,0) = \beta(2x_1-1,\ldots,x_n) & 1/2 \le x_1 \le 1. \end{cases}$$

Yani $H(x_1,\ldots,x_n,0) = \alpha\beta$. Aynı şekilde $H(x_1,\ldots,x_n,1) = \gamma\delta$. Diğer taraftan, $H(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,t) = y_0$. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Şimdi, $\alpha(\dot{I}_n) = y_0$ şartını sağlıyan bütün $\alpha:I_n \to Y$ sürekli tasvirlerini gözönüne alalım. $\sim$ bağıntısı, α tasvirlerini ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayırır. Bu sınıflara, homotopi sınıfları rel $\dot{I}_n$ diyoruz.

Teorem 17.4.2.1 Gözönünde tutulursa, homotopi sınıfların cümlesinde anlamlı bir çarpım operasyonu tarif edilebilir. Bu operasyona göre, homotopi sınıfların cümlesi bir grup teşkil eder. Bu grup $\pi_n(Y,y_0)$ ile gösterilir ve bu gruba, y_0 da Y nin n–boyutlu homotopi grubu denir.

$n > 1$ için ispat edilebilir ki, $\pi_n(Y,y_0)$ komütatiftir. Bu bakımdan, α, β gibi iki tasvirin çarpımı, toplam şeklinde yazılır. Homotopi sınıfı $[\alpha]$ ile gösterilirse, homotopi sınıfların toplamı bahis konusudur.

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]\ ,\ n > 1.$$

Başta da söylediğimiz gibi $n = 1$ re tekabül eden $\pi_1(Y,y_0)$ homotopi grubuna esas grup denir, ve yahut tarifi tamamlamak için esas gruba 1–boyutlu homotopi grubu denir. Bu grup $n > 1$ de olduğu gibi her zaman komütatif değildir.

Şayet Y eğrisel irtibatlı ise, gösterilebilir ki, $y_0,y_1 \varepsilon Y$ gibi iki farklı noktada $\pi_n(Y,y_0) \simeq \pi_n(Y,y_1)$.

Yine gösterilebilir ki, aynı homotopi tipinden iki uzayın homotopi grupları izomorfturlar. bu teoremin bir özel hali de: Homeomorf uzayların homotopi grupları izomorfturlar.

$n > 1$ için $\pi_n(Y,y_0)$ homotopi grubunun komütatif olduğunun ispatı ile grupların hesaplanmaları, P.J.Hilton, An Introduction to Homotopy Theory, Cambridge Un. Press 1953 ve N.E. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton Un. Press, 1957 2nd ed. gibi eserlerde bulunabilir.

Şimdi homotopiyi daha genel bir açıdan tetkik edeceğiz. Bu bahiste, yalnız topolojik uzayların homotopi kategorilerinden değil, bunları içine alan "topolojik çift"lerin homotopi kategorilerini ele alacağız.

5. Topolojik Çift

17.5.1. *TARİF.* Bir topolojik çift, bir X topolojik uzayından ve onun bir $A \subset X$ altuzayından ibarettir. Bir topolojik çift (X,A) ile gösterilecektir.

$A = \varnothing$ ise, $(X,\varnothing)$ çifti ile X uzayı arasında hiçbir fark gözetilmiyecektir. $X = (X, \varnothing)$ yazacağız.

İki topolojik çifti (X',A'), (X,A) verildiği taktirde, şayet $X' \subset X$ ve $A' \subset A$ ise, $(X', A') \subset (X,A)$ yazılır ve (X', A'), (X,A) nın bir altçiftidir denir.

(X,A), (Y,B) iki topolojik çift iseler, f: $(X,A) \to (Y,B)$ tasvirinin mânası $f:X \to Y$ sürekli bir tasvir demektir öyleki $f(A) \subset B$. Çiftler ve tasvirleri, to-

polojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin meydana getirdikleri kategoride tarif edilen "kompozisyon" altında yeni bir kategori teşkil ederler.

Bu yeni kategori, topolojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin kategorisini ve aynı şekilde noktalı topolojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin kategorisini bir altkategori olarak ihtiva eder.

17.5.2. **Homotopi Kavramı.** (X,A) çifti verilmiş olsun. (X×J, A×J) çiftini (X,A)×J ile gösterelim. $X' \subset X$ olsun ve farzedelim ki $f_0, f_1:(X,A) \to (Y,B)$ sürekli tasvirlerinin X′ ye tahditleri eşittir, yani $f_0|X' = f_1|X'$. Bu taktirde, f_0, f_1 re homotop rel. X′ diyor ve $f_0 \sim f_1$ rel. X′ yazıyor şayet $\exists$

$$F:(X,A)\times J \to (Y,B)$$

sürekli $\ni$ $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$, $x \in X$ ve $F(x,t) = f_0(x) = f_1(x)$, $x \in X'$ ve $t \in J$.

F Tasvirine rel.X′ homotopi denir ve bu homotopi, kısaca

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1 \text{ rel.}X'$$

ile ifade edilir. Şayet $X' = \varnothing$ ise rel.X′ sıfatı kaldırılır. Açık olarak, $f_0 \sim f_1$ rel.X′ $\Rightarrow f_0 \sim f_1$ rel.X″ şayet $X'' \subset X'$ ise.

Homotopinin Geometrik mânası. Bilindiği üzere, $F(x,t)$, birtek t parametresine tâbi, x ve t nin aynı zamanda sürekli fonksyonudur. $F(x,t)$ nin sürekliliği geometrik olarak şöyle ifade edilebilir. Her $t \in J$ için

$$h_t: (X,A) \to (X,A)\times J, \quad h_t = h_t(x),$$

tasvirini gözönüne alalım. Bu taktirde, $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X′ $\Rightarrow$

$$Fh_0 = f_0,\ Fh_1 = f_1 \text{ ve } Fh_t|X' = f_0|X' \ \forall\ t \in J.$$

Demek ki, $\{Fh_t\}_{t\in J}$ tasvir koleksyonu, $f_0 = Fh_0$ tasvirini $f_1 = Fh_1$ tasvirine bağlıyan, (X,A) dan (Y,B) ye sürekli tasvirlerin 1–parametre ailesidir. Üstelik, $Fh_t|X' = f_0|X'$.

Özel Hal. $(X,A) = (X, \varnothing) = X = I$ alınır, $X' = (0,1)$ kabul edilir, $h_t: I \to I\times J$, her t için $I\times J$ karesinde I ye paralel I_t kapalı aralıkları gösterirse $Fh_t = \alpha_t, I_t$ nin Y ye sürekli tasviridir. t, J yi taradığı zaman, I_t, $I_0 = I$ dan I_1 e (karenin karşıt kenarı) sürekli olarak kareyı tarar. Buna mukabil I_t nin α_t resmi sürekli olarak α_0 eğrisini (veya tasvirini) α_1'e deforme eder. Eğer $Fh_t = \alpha_t|(0,1) = y_0$ şartı da varsa $\alpha_0 \overset{F}{\sim} \alpha_1$ rel. (0,1).

Misal 1. $X = Y = R^n$; $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$, $x \in R^n$, kabul edilirse, ve $F:R^n\times J \to R^n$ tasviri

$$F(x,t) = (1-t)x$$

şeklinde tarif edilirse, $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel 0.

Hatırlatalım ki, $f_0 = 1_{R_n}$ ve f_1, R^n nin orijine sabit tasviridir.

Misal 2. X keyfi bir topolojik uzay ve Y,R^n de konveks bir altcümle olsun. $f_0, f_1:X \to Y$ sürekli tasvirler olsun öyleki $X' \subset X$ için $f_0|X' = f_1|X'$. Bu taktirde,

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1 \text{ rel. } X'.$$

Gerçekten,

$$F(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$$

homotopiyi temin eden sürekli tasvirdir. f_0 in f_1 e deformasyonunda, f_0 ın Y deki herbir değeri, Y de doğrular boyunca f_1 in mütekabil değerlerine deforme edilmiştir.

Teorem 17.5.2.1. $\sim$ rel.X′, (X,A) dan (Y,B) ye sürekli tasvirler cümlesinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. Teorem 17.9.1.1 deki gibidir. Refleksiftir. Zira, $f:(X,A) \to (Y,B)$ için $f \overset{F}{\sim} f$ rel. X′, $F(x,t) = f(x)$ şeklinde tarif edilir. Simetriktir. $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X′ verildiği taktirde $\Rightarrow f_1 \overset{F'}{\sim} f_0$ rel. X′, burada $F'(x,t) = F(x,1-t)$. Tranzitiftir. $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X′ ve $f_1 \overset{G}{\sim} f_2$ rel. X′ $\Rightarrow f_0 \overset{H}{\sim} f_2$ rel.X′. Gerçekten,

$$H = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

teorem 11.2.1.5 den dolayı süreklidir, zira H nın, $X\times[0,\frac{1}{2}]$, $X\times[\frac{1}{2}, 1]$ kapalı cümlelerine tahditleri süreklidirler.

$\sim$rel.X′, (X,A) $\to$ (Y,B) sürekli tasvirlerin cümlesini ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayırır. Bunların herbirine homotopi sınıfı rel. X′denir. Homotopi sınıfların cümlesi $[X, A; Y, B]_{X'}$, notasyonu ile gösterilir. $f:(X,A) \to (Y,R)$ sürekli bir tasvir ise, f nin belirttiği homotopi sınıfı $[f]_{X'}$ notasyonu ile gösterilir. Eğer $X' = \varnothing$ ise yukardaki notasyonlarda X′sarfınazar edilir.

Teorem 17.5.2.2. Homotopik tasvirlerin terkipleri (kompozisyonları) homotopik tasvirlerdir.

İspat. $f_0, f_1:(X,A) \to (Y,B)$ homotopik rel.X′, ve g_0, $g_1:(Y,B) \to (Z,C)$ homotopik rel.Y′, $f_1(X') \subset Y'$, olsun. göstermek istiyoruz ki g_0f_0, g_1f_1: (X,A) $\to$ (Z,C) homotopik rel.X′. Bunun için $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X′ ve $g_0 \overset{G}{\sim} g_1$ rel. Y′ homotopilerini gözönüne alalım. Teorem 17.2.3.2 den dolayı,

$$(X,A)\times J \xrightarrow{F} (Y,B) \xrightarrow{g_0} (Z,C)$$

kompozisyonu, g_0f_0 dan g_0f_1 re bir g_0 F homotopi rel.X′ dir, ve

polojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin meydana getirdikleri kategoride tarif edilen "kompozisyon" altında yeni bir kategori teşkil ederler.

Bu yeni kategori, topolojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin kategorisini ve aynı şekilde noktalı topolojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin kategorisini bir altkategori olarak ihtiva eder.

17.5.2. **Homotopi Kavramı.** (X,A) çifti verilmiş olsun. (X×J, A×J) çiftini (X,A)×J ile gösterelim. $X' \subset X$ olsun ve farzedelim ki $f_0, f_1:(X,A) \to (Y,B)$ sürekli tasvirlerinin X′ ye tahditleri eşittir, yani $f_0|X' = f_1|X'$. Bu taktirde, f_0, f_1 re homotop rel. X′ diyor ve $f_0 \sim f_1$ rel. X′ yazıyor şayet ∃

$$F:(X,A)\times J \to (Y,B)$$

sürekli ∋ $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$, $x \in X$ ve $F(x,t) = f_0(x) = f_1(x)$, $x \in X'$ ve $t \in J$.

F Tasvirine rel.X′ homotopi denir ve bu homotopi, kısaca

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1 \text{ rel.}X'$$

ile ifade edilir. Şayet $X' = \varnothing$ ise rel.X′ sıfatı kaldırılır. Açık olarak, $f_0 \sim f_1$ rel.X′ $\Rightarrow f_0 \sim f_1$ rel.X″ şayet $X'' \subset X'$ ise.

Homotopinin Geometrik mânası. Bilindiği üzere, $F(x,t)$, birtek t parametresine tâbi, x ve t nin aynı zamanda sürekli fonksyonudur. $F(x,t)$ nin sürekliliği geometrik olarak şöyle ifade edilebilir. Her $t \in J$ için

$$h_t: (X,A) \to (X,A)\times J, \quad h_t = h_t(x),$$

tasvirini gözönüne alalım. Bu taktirde, $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X′ ⇒

$$Fh_0 = f_0, \; Fh_1 = f_1 \text{ ve } Fh_t|X' = f_0|X' \; \forall\, t \in J.$$

Demek ki, $\{Fh_t\}_{t\in J}$ tasvir koleksyonu, $f_0 = Fh_0$ tasvirini $f_1 = Fh_1$ tasvirine bağlıyan, (X,A) dan (Y,B) ye sürekli tasvirlerin 1–parametre ailesidir. Üstelik, $Fh_t|X' = f_0|X'$.

Özel Hal. $(X,A) = (X, \varnothing) = X = I$ alınır, $X' = (0,1)$ kabul edilir, $h_t: I \to I\times J$, her t için $I\times J$ karesinde I ye paralel I_t kapalı aralıkları gösterirse $Fh_t = \alpha_t, I_t$ nin Y ye sürekli tasviridir. t, J yi taradığı zaman, I_t, $I_0 = I$ dan I_1 e (karenin karşıt kenarı) sürekli olarak kareyı tarar. Buna mukabil I_t nin α_t resmi sürekli olarak α_0 eğrisini (veya tasvirini) α_1'e deforme eder. Eğer $Fh_t = \alpha_t|(0,1) = y_0$ şartı da varsa $\alpha_0 \overset{F}{\sim} \alpha_1$ rel. (0,1).

Misal 1. $X = Y = R^n$; $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$, $x \in R^n$, kabul edilirse, ve $F:R^n\times J \to R^n$ tasviri

$$F(x,t) = (1-t)x$$

şeklinde tarif edilirse, $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel 0.

Hatırlatalım ki, $f_0 = 1_{R_n}$ ve f_1, R^n nin orijine sabit tasviridir.

Misal 2. X keyfi bir topolojik uzay ve Y,R^n de konveks bir altcümle olsun. $f_0, f_1:X \to Y$ sürekli tasvirler olsun öyleki $X' \subset X$ için $f_0|X' = f_1|X'$. Bu taktirde,

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1 \text{ rel. } X'.$$

Gerçekten,

$$F(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$$

homotopiyi temin eden sürekli tasvirdir. f_0 in f_1 e deformasyonunda, f_0 ın Y deki herbir değeri, Y de doğrular boyunca f_1 in mütekabil değerlerine deforme edilmiştir.

Teorem 17.5.2.1. ∼ rel.X′, (X,A) dan (Y,B) ye sürekli tasvirler cümlesinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. Teorem 17.9.1.1 deki gibidir. Refleksiftir. Zira, $f:(X,A) \to (Y,B)$ için $f \overset{F}{\sim} f$ rel. X′, $F(x,t) = f(x)$ şeklinde tarif edilir. Simetriktir. $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X′ verildiği taktirde ⇒ $f_1 \overset{F'}{\sim} f_0$ rel. X′, burada $F'(x,t) = F(x,1-t)$. Tranzitiftir. $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X′ ve $f_1 \overset{G}{\sim} f_2$ rel. X′ ⇒ $f_0 \overset{H}{\sim} f_2$ rel.X′. Gerçekten,

$$H = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

teorem 11.2.1.5 den dolayı süreklidir, zira H nın, $X\times[0,\frac{1}{2}]$, $X\times[\frac{1}{2}, 1]$ kapalı cümlelerine tahditleri süreklidirler.

∼rel.X′, (X,A) → (Y,B) sürekli tasvirlerin cümlesini ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayırır. Bunların herbirine homotopi sınıfı rel. X′denir. Homotopi sınıfların cümlesi $[X, A; Y, B]_{X'}$, notasyonu ile gösterilir. $f:(X,A) \to (Y,R)$ sürekli bir tasvir ise, f nin belirttiği homotopi sınıfı $[f]_{X'}$ notasyonu ile gösterilir. Eğer $X' = \varnothing$ ise yukardaki notasyonlarda X′sarfınazar edilir.

Teorem 17.5.2.2. Homotopik tasvirlerin terkipleri (kompozisyonları) homotopik tasvirlerdir.

İspat. $f_0, f_1:(X,A) \to (Y,B)$ homotopik rel.X′, ve g_0, $g_1:(Y,B) \to (Z,C)$ homotopik rel.Y′, $f_1(X') \subset Y'$, olsun. göstermek istiyoruz ki g_0f_0, g_1f_1: (X,A) → (Z,C) homotopik rel.X′. Bunun için $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X′ ve $g_0 \overset{G}{\sim} g_1$ rel. Y′ homotopilerini gözönüne alalım. Teorem 17.2.3.2 den dolayı,

$$(X,A)\times J \overset{F}{\to} (Y,B) \overset{g_0}{\to} (Z,C)$$

kompozisyonu, g_0f_0 dan g_0f_1 re bir g_0F homotopi rel.X′ dir, ve

polojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin meydana getirdikleri kategoride tarif edilen "kompozisyon" altında yeni bir kategori teşkil ederler.

Bu yeni kategori, topolojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin kategorisini ve aynı şekilde noktalı topolojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin kategorisini bir altkategori olarak ihtiva eder.

17.5.2. **Homotopi Kavramı.** (X,A) çifti verilmiş olsun. (X×J, A×J) çiftini (X,A)×J ile gösterelim. $X' \subset X$ olsun ve farzedelim ki $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ sürekli tasvirlerinin X' ye tahditleri eşittir, yani $f_0|X' = f_1|X'$. Bu taktirde, f_0, f_1 re homotop rel. X' diyor ve $f_0 \sim f_1$ rel. X' yazıyor şayet $\exists$

$$F:(X,A)\times J \to (Y,B)$$

sürekli $\ni$ $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$, $x \in X$ ve $F(x,t) = f_0(x) = f_1(x)$, $x \in X'$ ve $t \in J$.

F Tasvirine rel.X' homotopi denir ve bu homotopi, kısaca

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1 \text{ rel.}X'$$

ile ifade edilir. Şayet $X' = \varnothing$ ise rel.X' sıfatı kaldırılır. Açık olarak, $f_0 \sim f_1$ rel.$X' \Rightarrow f_0 \sim f_1$ rel.X'' şayet $X'' \subset X'$ ise.

Homotopinin Geometrik mânası. Bilindiği üzere, $F(x,t)$, birtek t parametresine tâbi, x ve t nin aynı zamanda sürekli fonksyonudur. $F(x,t)$ nin sürekliliği geometrik olarak şöyle ifade edilebilir. Her $t \in J$ için

$$h_t : (X,A) \to (X,A)\times J, \quad h_t = h_t(x),$$

tasvirini gözönüne alalım. Bu taktirde, $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.$X' \Rightarrow$

$$Fh_0 = f_0,\ Fh_1 = f_1 \text{ ve } Fh_t|X' = f_0|X' \ \forall\ t \in J.$$

Demek ki, $\{Fh_t\}_{t\in J}$ tasvir koleksyonu, $f_0 = Fh_0$ tasvirini $f_1 = Fh_1$ tasvirine bağlıyan, (X,A) dan (Y,B) ye sürekli tasvirlerin 1–parametre ailesidir. Üstelik, $Fh_t|X' = f_0|X'$.

Özel Hal. $(X,A) = (X, \varnothing) = X = I$ alınır, $X' = (0,1)$ kabul edilir, $h_t : I \to I\times J$, her t için $I\times J$ karesinde I ye paralel I_t kapalı aralıkları gösterirse $Fh_t = \alpha_t, I_t$ nin Y ye sürekli tasviridir. t, J yi taradığı zaman, I_t, $I_0 = I$ dan I_1 e (karenin karşıt kenarı) sürekli olarak kareyı tarar. Buna mukabil I_t nin α_t resmi sürekli olarak α_0 eğrisini (veya tasvirini) α_1'e deforme eder. Eğer $Fh_t = \alpha_t|(0,1) = y_0$ şartı da varsa $\alpha_0 \overset{F}{\sim} \alpha_1$ rel. (0,1).

Misal 1. $X = Y = R^n$; $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$, $x \in R^n$, kabul edilirse, ve $F:R^n\times J \to R^n$ tasviri

$$F(x,t) = (1-t)x$$

şeklinde tarif edilirse, $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel 0.

Hatırlatalım ki, $f_0 = 1_{R_n}$ ve f_1, R^n nin orijine sabit tasviridir.

Misal 2. X keyfi bir topolojik uzay ve Y,R^n de konveks bir altcümle olsun. $f_0, f_1 : X \to Y$ sürekli tasvirler olsun öyleki $X' \subset X$ için $f_0|X' = f_1|X'$. Bu taktirde,

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1 \text{ rel. } X'.$$

Gerçekten,

$$F(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$$

homotopiyi temin eden sürekli tasvirdir. f_0 in f_1 e deformasyonunda, f_0 ın Y deki herbir değeri, Y de doğrular boyunca f_1 in mütekabil değerlerine deforme edilmiştir.

Teorem 17.5.2.1. $\sim$ rel.X', (X,A) dan (Y,B) ye sürekli tasvirler cümlesinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. Teorem 17.9.1.1 deki gibidir. Refleksiftir. Zira, $f:(X,A) \to (Y,B)$ için $f \overset{F}{\sim} f$ rel. X', $F(x,t) = f(x)$ şeklinde tarif edilir. Simetriktir. $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X' verildiği taktirde $\Rightarrow f_1 \overset{F'}{\sim} f_0$ rel. X', burada $F'(x,t) = F(x,1-t)$. Tranzitiftir. $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X' ve $f_1 \overset{G}{\sim} f_2$ rel. $X' \Rightarrow f_0 \overset{H}{\sim} f_2$ rel.X'. Gerçekten,

$$H = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

teorem 11.2.1.5 den dolayı süreklidir, zira H nın, $X\times[0,\frac{1}{2}]$, $X\times[\frac{1}{2},1]$ kapalı cümlelerine tahditleri süreklidirler.

$\sim$rel.X', (X,A) $\to$ (Y,B) sürekli tasvirlerin cümlesini ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayırır. Bunların herbirine homotopi sınıfı rel. X'denir. Homotopi sınıfların cümlesi $[X, A; Y, B]_{X'}$, notasyonu ile gösterilir. $f:(X,A) \to (Y,R)$ sürekli bir tasvir ise, f nin belirttiği homotopi sınıfı $[f]_{X'}$ notasyonu ile gösterilir. Eğer $X' = \varnothing$ ise yukardaki notasyonlarda X'sarfınazar edilir.

Teorem 17.5.2.2. Homotopik tasvirlerin terkipleri (kompozisyonları) homotopik tasvirlerdir.

İspat. $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ homotopik rel.X', ve g_0, $g_1 : (Y,B) \to (Z,C)$ homotopik rel.Y', $f_1(X') \subset Y'$, olsun. göstermek istiyoruz ki g_0f_0, g_1f_1: (X,A) $\to$ (Z,C) homotopik rel.X'. Bunun için $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$ rel.X' ve $g_0 \overset{G}{\sim} g_1$ rel. Y' homotopilerini gözönüne alalım. Teorem 17.2.3.2 den dolayı,

$$(X,A)\times J \xrightarrow{F} (Y,B) \xrightarrow{g_0} (Z,C)$$

kompozisyonu, g_0f_0 dan g_0f_1 re bir g_0 F homotopi rel.X' dir, ve

$$(X,A)\times J \xrightarrow{f_1\times 1_J} (Y,B)\times J \xrightarrow{G} (Z,C)$$

kompozisyonu, g_0f_1 den g_1f_1 re bir Gf_1 homotopi rel. $f_1^{-1}(Y')$. Fakat $X'\subset f_1^{-1}(Y')$ olduğundan $g_0f_1 \overset{Gf_1}{\sim} g_1f_1$ rel. X'. $g_0f_0 \overset{g_0F}{\sim} g_0f_1$ rel.X' ile karşılaştırılırsa, teorem 17.5.2.1 den ötürü $g_0f_0 \overset{H}{\sim} g_1f_1$ rel. X'.

17.5.3. **Çiftlerin Homotopi Kategorisi.** Teorem 17.5.2.2 gösteriyor ki, (X,A) topolojik çiftlerin bir "homotopi kategorisi" vardır, ∋ bu kategoriye ait nesneler (X,A) topolojik çiftlerdir, morfizmler ise $[f]$ homotopi sınıflarıdır.

"Çiftlerin homotopi kategorisi", altkategoriler olarak sırasıyla, topolojik uzayların ve noktalı topolojik uzayların homotopi kategorilerini ihtiva ederler.

(X,A) topolojik çiftlerin ve $f:(X,A)\to(Y,B)$ sürekli tasvirlerinin, $f(A)\subset B$ kategorisinden çiftlerin homotopi kategorisine bir π funktoru (kovarient) vardır ∋

$$\pi(X,A) = (X,A),\ \pi f = [f].$$

Bu durum gözönünde tutularak şu tarifi verebiliriz.

TARİF 12. Topolojik çiftler ve tasvirlerinden oluşan bir diagrama "homotopi kömütatif" denir şayet bahis konusu diagramda herbir tasvirin yerine o tasvirin homotopi sınıfı ikame edildiğinde elde edilen ve bu kere "homotopi kategorisi"ne ait bulunan diagram komütatif ise.

Aynı şekilde,

TARİF 13. $f:[X,A]\to(Y,B)$ tasvirine "homotopi eşdeğerlilik" denir, şayet $\pi f = [f]$, çiftlerin homotopi kategorisinde bir eşdeğerlilik ise.

g: $(Y,B)\to(X,A)$ tasvirine f nin "homotopi inversi" denir şayet çiftlerin homotopi kategorisinde $[g] = [f]^{-1}$ ise.

(X,A) ve (Y,B) çiftlerine aynı "homotopi tip"indendir denir, şayet çiftlerin homotopi kategorisinde "eşdeğer" iseler.

Hatırlatalım ki, boş olmıyan en basit uzay "tek–nokta" uzayıdır.

Bu gibi uzayların homotopi tipi şu şekilde karakterize edilebilir.

TARİF 14. Bir X topolojik uzayına büzülebilir denir şayet X in özdeş tasviri 1_x, X yi kendi kendisine tasvir eden sabit bir tasvire homotop ise, Mesela X yi kendi kendisine tasvir eden sabit tasvir $x_0 \in X$ ise, $1_x \backsim x_0$ homotopisine, X in x_0 a büzülmesi denir.

Mesela R^n büzülebilir, R^n nin herhangibir konveks altcümlesi ve özellikle E^n (dolu küre) büzülebilir.

Teorem 17.5.3.1. Y büzülebilir bir topolojik uzay olsun. $f,g:X\to Y$ herhangi sürekli iki tasvir ise, $f\sim g$.

İspat. Y büzülebilir demek $1_Y \sim y_0$. Burada $y_0 \in Y$, Y yi kendine tasvir eden sabit tasvirdir. Teorem 17.5.2.2 den ötürü $f = 1_Y f \sim y_0 f$. Aynı şekilde, $g \sim y_0 g$. Fakat $y_0 f = y_0 g$. Teorem 17.5.2.1 den dolayı da $f \sim g$.

Bu teoremin şu neticesini elde ediyoruz.

Teorem 17.5.3.2. Y büzülebilir bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde,

(i) Y yi kendi kendisine tasvir eden sabit herhangi iki tasvir homotopturlar

(ii) 1_Y özdeş tasviri, Y yi kendi kendisine tasvir eden sabit herhangi bir tasvire homotoptur.

İspat. (i) Hipotezden dolayı $1_Y \sim y_0$, $1_Y \sim y_1$. Teorem 18.5.3.1 den ötürü $y_0 \sim y_1$. (ii), (i) in neticesidir.

Not. Teorem 17.5.3.1 rölatif homotopide doğru olmıyabilir. Diğer bir ifade ile, $X' \subset X$, Y büzülebilir ve $f,g:X\to Y$ sürekli ve X'ye kısıtlamaları eşit ise, $f \sim g$ rel X' doğru olmıyabilir.

17.5.4. **Temdit (genişletme) Problemi.** Bu problemin funktorlar ve homotopilerle önemli ilişkilerine değinmek istiyoruz.

Önce funktorların bu probleme nasıl tatbik edilebilir onu gösterelim.

Bir (X,A) topolojik çifti ve $f:A\to Y$ sürekli tasviri verilmiş olsun. Genişletme problemi, f nin X e sürekli bir temditinin var olup olmadığının tesbitidir. Başka bir deyimle, aşağıdaki diagramda, bu diagramı komütatif yapacak şekilde ve noktalı ok ile gösterilen bir sürekli tasvirin var olup olmadığının tesbitidir.

$$f'\iota = f'|A = f$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Burada $\iota:A\to X$ dahil etme tasviridir.

Teorem 17.5.4.1. Topolojik uzayların ve sürekli tasvirlerinin kategorisinden bir başka kategoriye bir T kovarient (kontravarient) funktoru verilmiş olsun. $f:A\to Y$ sürekli tasvirinin X e genişletilebilmesi için gerek şart, $\varphi\circ T(\iota) = T(f)$ $(T(\iota)\circ\varphi = T(f))$ şartını sağlıyan bir $\varphi:T(X)\to T(Y)$ $(\varphi:T(Y)\to T(X))$ morfizminin var olmasıdır. Burada $\iota:A\to X$ dahil etme tasviridir.

İspat. Farzedelim ki $f':X\to Y$ f nin bir temditidir. Bu taktirde, $f'\iota = f$. O halde

$$T(f')\circ T(\iota) = T(f) \quad (T(\iota)\circ T(f') = T(f)).$$

Burada φ morfizmi olarak $T(f')$ alınabilir.

17.5.5. **Homotopi ve Temdit.** Bu paragrafta homotopi ile tasvirlerin genişletilebilmeleri arasındaki münasebeti açıklıyan bir misal üzerinde duracağız. (Teorem 17.5.5.1).

TARİF 13. $f:X \to Y$ tasvirine "sıfır–homotopik"tir denir şayet f sabit bir tasvire homotop ise.

Aşağıdaki teoremde kullanacağımız şu notasyonları (standard) hatırlatıyoruz.

$S^n = \{x \in R^{n+1}; \|x\| = 1\}$ n–küre de denir.

$E^{n+1} = \{x \in R^{n+1}; \|x\| \leq 1\}$ n hücre de denir.

E^{n+1} ve sınırı S^n en basit bir topolojik çifttir.

Teorem 17.5.5.1. $x_0 \in S^n$ keyfi sabit bir nokta, $f:S^n \to Y$ sürekli bir tasvir olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdirler.

(i) f sıfır–homotopiktir.

(ii) f sürekli olarak E^{n+1} re genişletilebilir.

(iii) f, x_0 ra nazaran sıfır–homotopiktir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii). Gerçekten, hipotezden dolayı f sıfır–homotopiktir demek $\exists\, F:f \to y_0$ demektir, burada $y_0 \in Y$, S^n nin Y ye sabit tasvirini ifade eder. f nin E^{n+1} re bir f' temditini şöyle tarif edelim:

$$f'(x) = \begin{cases} y_0 & 0 \leq \|x\| \leq 1/2 \\ F(x/\|x\|, 2-2\|x\| & 1/2 \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

$\forall\, x \in S^n$ için $F(x,1) = y_0$ olduğundan, f' tasviri $\|x\| = \frac{1}{2}$ de tariflidir. Üstelik f' süreklidir, zira $\{x \in E^{n+1}; 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2}\}$ ve $\{x \in E^{n+1}; \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$ kapalı cümlelere tahditi süreklidir. Nihayet, $x \in S^n$ için $f'|S^n = f = F(x,0)$. Binaenaleyh, f', f nin E^{n+1} re sürekli temditidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). $f':E^{n+1} \to Y$, nin sürekli bir temditi ise $f'|S^n = f = F(x,0)$ ve $F(x,1) = f'(x_0)$ şartlarını sağlayan $F:S^n \times J \to Y$ homotopisi

$$F(x,t) = f'((1-t)x + tx_0)$$

şeklinde tarif edilebilir. Nihayet $F(x_0, t) = f'(x_0)$, $\forall\, t \in J$, olduğundan, $f \overset{F}{\sim} f'(x_0)$ rel. x_0.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Aşikârdır

Bu misalin geometrik tefsirini verelim. Önce,

TARİF 14. X bir cümle ve J bir indeks cümlesi olsun. Ayrıca $\{X_j\}$ topolojik uzay kolleksyonu ve $f_j:X \to X_j$, $j \in J$, tasvirleri verilmiş olsun. $\{f_j\}$ koleksyonu tarafından X üzerinde intaç edilen topoloji herbir f_j nin sürekli olduğu en kaba topolojidir.

Bu topolojiyi şu şekilde karakterize etmek mümkündür, ve bu karakterizasyon tarif yerine geçebilir.

$\{f_j\}$ koleksyonu tarafından intaç edilen X üzerindeki topoloji şu özellikle karakterize edilebilir: Y herhangi bir topolojik uzay olsun. $g:Y \to X$ tasviri süreklidir yy. $f_j \circ g:Y \to X_j$ tasvirleri sürekli iseler.

Bu tarifin "düali" ise şöyledir.

TARİF 15. Bir X cümlesi, $\{X_j\}$ bir topolojik uzay koleksyonu ve $g_j:X_j \to X$ tasvirleri verilmiş olsun. $\{g_j\}$ koleksyonu tarafından X üzerinde kointaç edilen topoloji, en büyük (kuvvetli) veya en ince topolojidir, öyleki herbir g_j süreklidir.

Karakterizasyonuna gelince,

$\{g_j:X_j \to X\}$ tarafından X üzerinde kointaç edilen topoloji şu özellikle karakterize edilebilir: Y herhangi bir topolojik uzay ise, $f:X \to Y$ tasviri süreklidir yy. $f \circ g_j:X_j \to Y$ tasvirleri sürekli iseler.

Koleksyonun birtek elemandan ibaret olması halinde uygulama:

TARİF 16. X bir topolojik uzay ve $X/\sim = X'$ olsun. $\pi: X \to X'$ tabii projeksyonunun X' üzerinde kointaç ettiği topolojiyi haiz bulunan X'ye "bölüm uzay" denir.

Şayet $A \subset X$ ise, X/A diye, A nın bütün noktalarını birtek nokta ile özdeş yapmakla elde edilen bölüm uzaya denir.

Şimdi teorem 17.5.5.1 e dönelim. $S^n \times J$ silindirinde, üst taban S_1^n ile gösterilirse $S^n \times J/S_1^n$ bir konidir. Herbir t ye $\|x\| = 1-t$ yarıçaplı S^n_t küresi tekabül eder. $t = 1-\|x\|$ vazedilirse bu küreler, S^n nin merkezinde, merkezlenmiş S_t^n küreleridir. S_t^n nin E^{n+1} i taraması, f nin E^{n+1} e temditi f' tasvirini verir.

17.5.6. **Geriye dönüş ve Deformasyon.** "Geriye dönüş"ün başka bir açıdan tarifini vereceğiz.

TARİF 17. (X,A) topolojik çiftini gözönüne alalım. A altuzayına, X in geriye dönüşüdür denir, şayet $\iota:A \to X$ "dahil etme tasvirinin topolojik uzaylar ve sürekli tasvirlerinin kategorisinde, bir sol inversi varsa.

Başka bir deyimle, A, X in bir geriye dönüşüdür, şayet $r:X \to A$ sürekli tasviri varsa $\ni r\iota = 1_A$ (Yani, $x \in A$ için $r(x) = x$). Böyle bir r tasvirine X den A ya bir "geriye dönüşüm" denir. (Üçgen diagramında, $Y = A$, $f = 1_A$, $f' = r$ vazedilmiştir.

$A \subset X$ altuzayına X in zayıf bir geriye dönüşüdür denir, şayet $\iota:A \to X$ tasvirinin bir sol homotopi inversi varsa, yani homotopi kategorisinde bir sol inversi varsa.

Başka bir deyimle, A, X in zayıf bir geriye dönüşüdür, şayet $r:X \to A$ sürekli tasviri varsa $\ni r\iota \sim 1_A$.

Böyle bir r tasvirine X den A ya zayıf bir geriye dönüşüm denir.

Misal. Herhangibir tek–nokta uzayı, bu uzayı ihtiva eden daha geniş bir uzayın geriye dönüşüdür.

Öteyandan, bir noktadan fazla nokta ihtiva eden diskret bir uzay, hiçbir zaman kendisini ihtiva eden irtibatlı bir uzayın zayıf bir geriye dönüşü olamaz.

A, X in bir geriye dönüşü ise aynı zamanda zayıf bir geriye dönüşüdür. Karşıtı umumiyetle doğru değildir. Böyle olmakla beraber, bazı özel hallerde bu iki kavram çakışmaktadır.

TARİF 18. (X,A) bir topolojik çift ve Y bir topolojik uzay olsun. (X, A), Y ye nazaran homotopi temdit hassasını haizdir denir, şayet $g:X \to Y$, ve $G:A \times J \to Y$, $\ni g|A = G(x,0)$, $x \in A$, ise $\exists$ $F:X \times J \to Y \ni F(x,0) = g(x)$, $x \in X$ ve $F|A \times J = G$.

Kısaca aşağıdaki diagramı komütatif yapacak bir F homotopisinin varlığı söz konusudur.

$$\begin{tikzcd}
A \times 0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr] & A \times J \arrow[d, "\iota"] \arrow[dl, "G"'] \\
X \times 0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[ur, "g"] & X \times J \arrow[u, dashed, "F"]
\end{tikzcd}$$

Binaenaleyh, (X,A), Y ye nazaran homotopi temdit hassasını haiz, ve g_0, $g_1:A \to Y$ homotop iseler, bu taktirde, g_0 X e temdit edilebiliyorsa, g_1 de temdit edilebilir. Gerçekten, $g:X \to Y$, g_0 ın bir temditi, ve $G:A \times J \to Y$, g_0 dan g_1 e bir homotopi ise, homotopi temdit hassası $\Rightarrow \exists$ $F:X \times J \to Y \ni F$, G nin bir temditidir. Bu da demektir ki, $F(x, 1)$, g_1 in bir temditidir. O halde, $A \to Y$ tasvirinin X e temdit edilip edilemiyeceği, bu tasvirin homotopi sınıfına ait bir hususiyettir.

Neticede, homotopi temdit hassası, $A \to Y$ tasvirlerinin temdit probleminin homotopi kategorisine ait bir problem olduğunu ortaya koyar.

Bu tarifi genelleştirmek üzere şu tarifi yapıyoruz.

TARİF 19. Bir $f:X' \to X$ tasvirine kolifleme denir, şayet, Y keyfi olmak üzere, $g:X \to Y$ ve $G:X' \times J \to Y$ verildiği taktirde $\ni x' \in X'$ için $g(f(x'))$

$= G(x', 0)$, $\exists$ $F:X \times J \to Y \ni x \in X$ için $F(x,0) = g(x)$ ve $x' \in X'$ için $F(f(x'), t) = G(x', t)$ $\forall$ $t \in J$.

Kısaca, F nin varlığı demek, aşağıdaki diagramı komütatif yapacak noktalı ok ile gösterilen bir tasvirin varlığı demektir.

$$\begin{tikzcd}
X' \times 0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f \times 1_0"'] \arrow[dr] & X' \times J \arrow[d, "f \times 1_J"] \arrow[dl, "G"'] \\
X \times 0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[ur, "g"] & X \times J \arrow[u, dashed, "F"]
\end{tikzcd}$$

Görülüyor ki $\iota:A \to X$ dahil etme tasviri bir koliflemedir yy. (X,A), herhangibir uzaya nazaran homotopi temdit hassasını haiz ise.

Teorem 17.5.6.1. (X,A), A ya nazaran homotopi temdit hassasını haiz ise, bu taktirde, A, X in zayıf bir geriye dönüşüdür yy. A, X in bir geriye dönüşü ise.

İspat. Gösterelim ki herhangibir $r:X \to A$ zayıf geriye dönüş hakikatte bir geriye dönüşe homotoptur. Hipotezden dolayı $\iota:A \to X$ ise $r\iota \sim 1_A$. $G:A \times J \to A$, $r\iota$ den 1_A ya bir homotopi olsun. Bu taktirde, $G(x,0) = r(x)$, $x \in A$. (X,A), A ya nazaran homotopi temdit hassasını haiz olduğundan, $F:X \times J \to A$ tasviri vardır öyleki, $x \in X$ için $F(x,0) = r(x)$ şartını sağlar ve G yi temdit eder. Şimdi $r':X \to A$ tasviri, $r'(x) = F(x,1)$ olarak tarif edilirse, bu taktirde r', X den A ya bir geriye dönüşümdür. Üstelik, $r \overset{E}{\sim} r'$.

Dikkat edilirse, bir $\iota:A \to X$ dahil etme tasvirinin hiçbir surette, $A = X$ hariç, topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisinde bir sağ inversi yoktur.

Diğer taraftan, homotopi kategorisinde bir sağ homotopi inversi mümkün olabilir.

TARİF 20. (i) $X' \subset X$ verilmiş olsun. X' nün X de D deformasyonu diye, $D:X' \times J \to X$ homotopisine denir öyleki $D(x',0) = x'$, $x' \in X'$.

(ii) Üstelik, şayet $D(X' \times I) \subset A \subset X$ ise, D ye X' nün X de A ya deformasyonu denir. X' ye ise, X de A ya deformabl, (veya deforme edilebilir) denir.

(iii) Bir X uzayına, bir $A \subset X$ altuzayına deforme edilebilir denir şayet X de A ya deforme edilebilirse.

Dolayısıyla bir X uzayı büzülebilir, yy. X de herhangibir noktasına deforme edilebilirse.

TARİF 21. G bir grup ve $A \subset G$ bir altcümle olsun. G, A tarafından serbest tevlid ediliyor, veya A, G için bir serbest tevlid edici, veya bir tabandır denir, şayet H herhangi bir grup olmak üzere herhangibir $f:A \to H$ tasviri verildiği taktırde, $\exists$ birtek $\varphi:G \to H$ homomorfizmi $\ni \varphi, f$ nin bir temditidir.

Yani $\exists\ \varphi, \ni$ aşağıdaki diagram komütatiftir.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/\mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$A \subset G$ Normal altgrup ise, φ nin intaç ettiği $\bar{\varphi}$ monomorfizmi bilindiği üzere şu diagram ile verilmektedir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

TARİF 22. Bir gruba serbesttir denir, şayet bu grup bir altcümlesi tarafından serbestçe tevlid ediliyorsa.

A herhangibir cümle ise, A tarafından tevlid edilen serbest bir grup, A yı serbest tevlid edici bir altcümle olarak ihtiva eden gruptur.

Misal. I birim aralık ve $\dot{I} = (0,1)$ altcümlesini göstersin. Diyorum ki $\dot{I}$ nin özdeş tasviri bir $I \to \dot{I}$ sürekli tasvirine temdit edilemez. Bunun için, topolojik uzayların sürekli tasvirlerinin kategorisinden, Abel grupların ve homomorfizmlerin kategorisine geçişi sağlıyan ve aşağıdaki şartları haiz H_0 funktorunu gözönüne alalım: X herhangibir topolojik uzay ise $H_0(X)$, X in komponentleri tarafından tevlid edilen serbest Abel grubudur. Üstelik, $f:X \to Y$ ise, bu taktirde $H_0(f):H_0(X) \to H_0(Y)$ tasviri, $H_0(f)C = C'$ şartını sağlıyan homomorfizmdir. Burada C, X in bir komponenti ve $C', f(C)$ yi ihtiva eden Y nin komponentidir.

Şimdi teorem 17.5.4.1 tatbik edilirse gerek şart:

$\varphi:H_0(I) \to H_0(\dot{I}) \ni$

$$\varphi \circ H_0(\iota) = H_0(1_{\dot{I}}).$$

Burada $\iota:\dot{I} \to I$ dahil etme tasviridir ($\dot{I} \subset I$ hatırlatılır.).

Halbuki, $H_0(\dot{I})$ iki generatör ile ((0,1)) tevlid edilen serbest Abel grubudur, $H_0(I)$ ise birtek generatör ile (I) tevlid edilen Abel grubudur. Dolayısıyla φ mevcut değildir.

Aynı şekilde, 1_{S^n} özdeş tasvirinin bir $E^{n+1} \to S^n$ sürekli tasvirine temdit edilemiyeceği gösterilebilir.

Ek I

On The Constant a[1]

Let S be the class of functions

$$w = f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots,$$

analytic and schlicht in the unit disc $|z|<1$. For the purpose of obtaining a lower bound on a (defined below), Landau [1] considered a subclass T for which $|f'(z)|\,(1-|z|^2) \leq 1$. He showed that $a_2 = 0$, $|a_3| \leq 1/3$. In the present paper we reobtain Landau's results by using the definition of a Bloch function of the third kind introduced by R.M. Robinson [2] and Marty's variation [3], while $a_3 = 0$ follows from geometric considerations and an interior variation due to Schiffer [4,5]. $a_3 = 0$ has been conjectured earlier by the author. It simplifies and yields at the same time a correct proof of the lower bound. In the opinion of this writer it is hopeless to obtain the bound under consideration without first proving that $a_3 = 0$. In addition to this, the important symmetry condition F = 0 (Theorem 4) is also derived. Namely, we conclude with the remarkable characterization that there is a schlicht disc of radius a, lying in the map of a Bloch function of the third kind, centered at the origin, and such that its size is determined by a unique triplet of boundary points which lie at the vertices of an equilateral triangle inscribed in the circle.

Definition. Let r_f denote the least upper bound of the radii of all open discs contained in the map of $w = f(z)$ that is schlicht for $|z| < 1$ and has $f'(0) = 1$. Then

$$a = \min_{f\in S} r_f$$

is the Landau constant.

Definition. If the map of $w = f(z)$ contains no schlicht open disc of radius greater than a, then f is called a Bloch function of the third kind.

In the following we shall use the abbreviation B.F. for a Bloch function of the third kind.

[1] C. Uluçay, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un. d'Ankara, Série A, Tome 21 A, 1972.

Theorem 1. Let $w = f(z)$ be a B.F. Then $a_2=0$, $|a_3| \leq 1/3$.

Proof. Following Marty [3], set

$$f((z+\varepsilon)/(1+\bar{\varepsilon}z)) - f(\varepsilon) = f'(\varepsilon)\,(1-|\varepsilon|^2)\,z + \dots .$$

Here the variation used is the translation $w^* = w - f(\varepsilon)$, and the corresponding mapping function is

$$f^*(z) = f'(\varepsilon)\,(1-|\varepsilon|^2)\,z + \dots .$$

We have

$$f'(\varepsilon)\,(1-|\varepsilon|^2) = 1 + 2a_2\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Since in the translation the least upper bound is preserved and that arg ε is arbitrary, it follows that $a_2 = 0$.

Next, calculating higher terms, *i.e.*,

$$f'(\varepsilon)(1-|\varepsilon|^2) = 1 + 3a_3\varepsilon^2 - |\varepsilon|^2 + 0(\varepsilon^3),$$

it follows from the same argument that $|a_3| \leq 1/3$.

Lemma 1. Let w_1, w_2, w_3, be three distinct points on the complex w-plane. Let A_w be the area of the disc C whose circumference c contains these three points. Then A_w is given by the formula

$$A_w = \frac{\pi\cdot|w_2-w_3|^2}{2-2\mathrm{Re}\,\dfrac{w_1-w_3}{\overline{w_1-w_3}}\cdot\dfrac{\overline{w_1-w_2}}{w_1-w_2}} .$$

Proof. Let r_w be the radius of the disc C. Then by elementary geometry

$$r_w = \frac{|w_2-w_3|}{2\,\sin\theta} .$$

Here

$$\theta = \sphericalangle\,(w_1\,w_2,\ w_1\,w_3),\quad 0 < \theta < \pi.$$

Hence

$$A_w = \frac{\pi\,|w_2-w_3|^2}{4\,\sin^2\theta} . \tag{1}$$

Now, put

$$W = \frac{w_1-w_3}{w_1-w_2} .$$

Then

$$\frac{w_1-w_3}{\overline{w_1-w_3}}\cdot\frac{\overline{w_1-w_2}}{w_1-w_2} = W/\overline{W} .$$

But

$$\theta = \arg W,$$

and so

$$W/\overline{W} = e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

Hence,

$$\cos 2\theta = \mathrm{Re}\,(W/\overline{W}) = \mathrm{Re}\,\frac{w_1-w_3}{\overline{w_1-w_3}}\,\frac{\overline{w_1-w_2}}{w_1-w_2}.$$

Carrying the value of $\cos 2\theta$ in formula (1) we obtain the desired result.

Lemma 2. Consider the transformation

$$w^* = w + \varepsilon/w \tag{2}$$

where ε is real and sufficiently small, Let w_i^* be the image of w_i, $i=1,2,3$. Let C_w^* be the disc whose circumference c_w^* contains the points w_i^*, $i=1, 2, 3$, and A_w^* its area. Then

$$A_w^* = A_w\,(1+2\varepsilon \mathrm{Im} F) + 0(\varepsilon^2)$$

where

$$F = \frac{\cot\theta}{w_1w_3} - \frac{\cot\theta}{w_1w_2} - \frac{i}{w_2w_3}.$$

Proof. The area A_w^* of the disc C_w^* whose circumference c_w^* contains the points w_i^*, $i = 1, 2, 3$ is given by the formula of Lemma 1, *i.e.*,

$$A_w^* = \frac{\pi\,|w_2^*-w_3^*|^2}{2-2\mathrm{Re}\,\dfrac{w_1^*-w_3^*}{\overline{w_1^*-w_3^*}}\,\dfrac{\overline{w_1^*-w_2^*}}{w_1^*-w_2^*}}. \tag{3}$$

Setting (2) into (3), we obtain

$$A_w^* = A_w - 2\pi\varepsilon\left(\mathrm{Im}\left(\frac{1}{w_1w_3} - \frac{1}{w_1w_2}\right)\mathrm{Re}\, i(W/\overline{W})\right.$$

$$\left. + (1-\mathrm{Re}\,W/\overline{W})\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{w_2w_3}\right)\frac{|w_2-w_3|^2}{(1-\mathrm{Re}W/\overline{W})^2} + 0(\varepsilon^2),$$

from which the formula follows.

In connection with (2) we recall the following variational formula due to Schiffer [4]. Ler R be the map of $f\varepsilon S$. Denote by Γ the boundary of R. Let w_0 be a fixed point in R and consider the transformation

$$w^* = w + \frac{\varepsilon}{w-w_0} \tag{4}$$

where ε is a complex number. If $|\varepsilon|$ is sufficiently small, then $w^*(w)$ is univalent on Γ and maps it into Γ^* that is the boundary of a new simply connected region [4,5]. The function $f^*(z)$ which maps the unit disc $|z| < 1$, conformally onto R^* is given by

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\left\{\frac{zf'(z)}{z_0f'(z_0)^2(z_0-z)} + \frac{1}{f(z)-f(z_0)} + \frac{f'(z)}{f(z_0)}\right\}$$

$$+ \bar{\varepsilon}\left\{\frac{z^2f'(z)}{\bar{z}_0\overline{f'(z_0)}^2(1-\bar{z}_0z)} - \frac{z^2f'(z)}{\overline{f(z_0)}}\right\} + o(\varepsilon),\ |z_0| < 1.$$

The leading coefficient a_1^* in the expansion of f^* about the origin is obtained by calculating

$$\lim_{z\to 0}\frac{f^*(z)}{z}.$$

Namely,

$$a_1^* = 1 + \varepsilon\left\{\frac{1}{z_0^2\,f'(z_0)^2} - \frac{1-2a_2f(z_0)}{f(z_0)^2}\right\} + o(\varepsilon). \tag{5}$$

Putting in (5), $a_2 = 0$ and letting $z_0 \to 0$, we find

$$a_1^* = 1 - 4a_3\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{6}$$

From here on we shall assume $\varepsilon > 0$, and unless stated otherwise f will denote a B.F.

Further, we introduce through the one-parameter family of B.F., *i.e.*, $e^{i\varphi}f(e^{-i\varphi}z)$, a real parameter φ, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, corresponding to the rotations φ of the complex w-plane. Then R^*, f^*, a_1^* should read respectively $R^*(\varphi)$, $f^*(z, \varphi)$, $a_1^*(\varphi)$ with

$$a_1^*(\varphi) = 1 - 4a_3\varepsilon e^{-2i\varphi} + o(\varepsilon),$$

where $o(\varepsilon)$ is uniform with respect to φ. For each φ

$$r_f^*(\varphi),\ r_F^*(\varphi) = \frac{r_f^*(\varphi)}{|a_1^*(\varphi)|},$$

will denote the *l.u.b.* of the radii of all schlicht discs contained in $R^*(\varphi)$ and in the map of

$$F^*(z, \varphi) = f^*(z, \varphi)/a_1^*(\varphi)$$

respectively.

Lemma 3. If f is a B.F., then $r_f^*(\varphi) - a$ has a constant sign for all φ, as $\varepsilon \to 0$.

Proof. We observe that for fixed φ, ε determines uniquely R^* and the map of F^*, and thereby r_f^* and r_F^* respectively. Hence for fixed φ there is a one to one continuous correspondence between r_F^* and r_f^* and for $\varepsilon = 0$

$$r_f^* = r_F^* = a.$$

Further, for convenience we set

$$s_f^* = r_f^* - a,\ s_F^* = r_F^* - a,$$

and let

$$t^*(\varphi) = s_F^*(\varphi) - s_f^*(\varphi).$$

Since $s_F^* \geq 0$ for all φ, then for sufficiently small values of r_F^*, the representative curve $\Gamma\varphi$ of the pairs (s_F^*, s_f^*), resulting from the one to one continuous correspondence, for each fixed φ, between r_F^* and r_f^*, lies in the right half-plane $s_F^* \geq 0$. Now, $t^*(\varphi)$, for $\varepsilon \geq 0$, vanishes only on the half-line defined by $s_f^* = s_F^*$ in which case $\Gamma\varphi$ may reduce to a point, namely, the origin. Hence, outside of this line, for $\varepsilon > 0$; $t^*(\varphi) < 0$ with $\Gamma\varphi$ lying in the angle determined by the half-lines $s_f^* \geq 0$, $s_f^* = s_F^*$, and $t^*(\varphi) > 0$ with $\Gamma\varphi$ lying in the suplementary angle defined by the half-lines $s_f^* = s_F^*$, $s_f^* \leq 0$. Next, if there exists a curve $\Gamma\varphi$ lying in an angle arbitrarily small with vertex at the origin and containing the s_F^* – axis, then $f^*(z, \varphi)$ being compact and therefore $\Gamma\varphi$ continuous, it follows that for $\varepsilon > 0$, there exists $\Gamma\varphi$ lying on the s_F^* – axis. This is impossible, since for this $\Gamma\varphi$, $s_f^* = 0$, while in view of $t^*(\varphi) > 0$, $s_F^* > 0$. Same contradiction is reached for a curve $\Gamma\varphi$ lying on the s_f^* – axis. Hence, in view of the continuity of $\Gamma\varphi$ with respect to φ, it follows that the curves $\Gamma\varphi$ for all φ, either lie in a subangle of the angle defined by the $s_f^* > 0$-axis and s_F^* – axis, or in a subangle of the angle defined by the $s_f^* < 0$-axis and s_F^* – axis.

Lemma 4. Let $f \varepsilon S$. Suppose that a is the *l.u.b.* of all schlicht discs contained in the map of f. Then f assumes the interior of at least one schlicht circle of radius a lying at finite distance.

Proof. Suppose that in the map R of f, there are no schlicht discs of radius a lying at finite distance. There are two possible cases. (*i*) R is the whole plane such that every point of the plane is either an interior poin or a boundary point of R. Then there is at least one *end* point e of a boundary continuum γ. By suppressing a subcontinuum containing e, one may increase the inner radius of R without increasing the value of a. (*ii*) In the alternative case, there is a boundary arc γ, such that it is possible to replace a part of γ by an arc lying outside of R so as to increase the inner radius of R without increasing the value of a. These contradictions establish the lemma.

Carollary. If f is a B. F., then the map of f contains at least one schlicht disc of radius a lying at finite distance.

Lemma 5. Let f be a B.F. For each fixed φ, $F^*(z, \varphi)$ assumes univalently the interior of at least one circle C_F^* of radius r_F^*, lying at finite distance.

Proof. Assuming the contrary, $F^*(z, \varphi)$ for φ fixed, assumes univalently the interior of a circle C_∞^* of radius r_F^* lying at infinite distance. This implies the existence of a circle C_∞ of radius a lying at infinite distance in R and such that $C_\infty^* \to C_\infty$ as $\varepsilon \to 0$. But sinc (2) preserves the size of a circle lying at infinity, it follows that $r_f^* = a$. Then by the one to one continuous correspondence, for a fixed φ, between r_F^* and r_f^* we have $r_F^* = a$, and the conclusion is reached in view of Lemman 4.

Lemma 6. Let f be a B.F., and R* the map of f^*. Let C_f^* denote a schlicht disc of radius r_f^* lying in R* at finite distance. Then formula of Lemma 2 holds, up to an error term of higher order.

Proof. Suppose that on the circumference c_f^* of C_f^* lie three boundary points (omitted values) w_i^*, $i = 1, 2, 3$. Since, as $\varepsilon \to 0$, the circumference c_f^* tends to the circumference c of C with radius a, then $w^*_i \to w_i$ lying on c. Let c^* be the image of c under (2). c_f^* intersects c^* at the neighboring points $\tilde{w}_i^*$ of w_i^* (it is possible that some or all of the points $\tilde{w}_i^*$ coincide with w_i^*). Consequently, the images $\tilde{w}_i$ of $\tilde{w}_i^*$ under (2) being on c, the formula of Lemma 2 is applicable to the disc C_f^* whose circumference c_f^* contains the points $\tilde{w}_i^*$, and whose area is A_f^*. On the other hand, since as $\varepsilon \to 0$, the points $\tilde{w}_i \to w_i$, we may write

$$\tilde{w}_i = w_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

where $\varepsilon_i \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. Hence formula of Lemma 2 holds, up to an error term of higher order. Namely,

$$A_f^* = \pi a^2 (1 + 2\varepsilon \operatorname{Im} F) + o(\varepsilon). \tag{7}$$

It is possible that the size of C_f^* may be fixed by only two boundary points w_1^*, w_3^*, such will be the case, e.g., of C_f^* rolling along and between two parallel arcs which are parts of the boundary of R*, then the foregoing argument is still applicable, and formula (7) is valid, except that w_2 ($\neq w_1, w_3$) is any fixed point on c.

Lemma 7. Introducing the parameter φ, we may write for a fixed F,

$$r_f^*(\varphi) = a\,(1 + \varepsilon \operatorname{Im} e^{-2i\varphi} F) + o(\varepsilon) \tag{8}$$

and

$$r_F^*(\varphi) = a\,(1 + \varepsilon \operatorname{Im} e^{-2i\varphi} (F + 4ia_3)) + o(\varepsilon). \tag{9}$$

Proof. Indeed, assuming, say, $r_f^*(\varphi) \geq a$ (lemma 3) we know (lemma 5) that to each φ it can be associated in $R^*(\varphi)$ a disc $C_f^*(\varphi)$ with radius $r_f^*(\varphi)$ given by the formula

$$r_f^*(\varphi) = a\,(1 + \varepsilon \operatorname{Im} e^{-2i\varphi} F\varphi) + o(\varepsilon),$$

where $F\varphi$ is the symmetric function associated with the disc $C\varphi$ in R, with radius a, and such that $C_f^*(\varphi) \to C\varphi$ as $\varepsilon \to 0$. For the purpose of identifying $C\varphi$ with $F\varphi$, it is important to think of $F\varphi$ as a form rather than as a number. Accordingly, for the identification purpose it is then preferable to write $F\varphi$ in the equivalent symmetric form

$$F\varphi = -i \frac{\sum_{j=1}^{j=3} w_j \tan\theta_j}{w_1 w_2 w_3 \sum_{j=1}^{j=3} \tan\theta_j}.$$

Next, we note that for each φ the disc $C\varphi$, and thereby $C_f^*(\varphi)$, is uniquely determined within the totality of the discs of radius a in R, as soon as Im $e^{-2i\varphi} F\varphi$ is minimum, with $|$ Re $e^{-2i\varphi} F\varphi$ $|$ minimum, and, say, Re $e^{-2i\varphi} F\varphi > 0$, whenever there are two $F\varphi$'s with the above specifications. Hence, under these specifications for $F\varphi$, we conclude that there is a one to one correspondence between $C_f^*(\varphi)$ and $C\varphi$ as $\varepsilon \to 0$, and that $C_f^*(\varphi)$, now uniquely defined by $r_f^*(\varphi)$ is continuous in φ, so is $C\varphi$. In conclusion, as φ varies from 0 to 2π, $C\varphi$ (or $F\varphi$) either remains fixed (or constant), or else, rolls continuously along two non intersecting parallel boundary continua lying at finite distance. The simple closed curve described by the center of $C\varphi$ and lying in the interior of R, contains one of the two continua which may consist of a single point. This contradicts however, the simply connectivity of R. So $F\varphi$ must be constant.

Theorem 2. If f is a B.F., then $F = 0$.

Proof. From relation (8) we can write

$$s_f^* = a\ \varepsilon \text{ Im } e^{-2i\varphi} F + o(\varepsilon).$$

Since by Lemma 3, $s_f^*(\varphi)$ has a constant sign for all φ, it is clear that

(10) $$F = 0.$$

Theorem 3. If f is a B.F., then $a_3 = 0$.

Proof. From relation (9) we can write

$$s_F^*(\varphi) = a\ \varepsilon \text{ Im } e^{-2i\varphi} (F + 4ia_3) + o(\varepsilon).$$

Since $s_F^*(\varphi) \geq 0$ for all φ, it follows that

$$F + 4ia_3 = 0.$$

In view of Theorem 2, we have

$$a_3 = 0.$$

One verifies at once that (10) holds for w_1, w_2, w_3 lying at the vertices of an equilateral triangle, centre at the origin. In fact we can state the following remarkable theorem.

Theorem 4. $F = 0$ holds if and only if w_1, w_2, w_3 lie at the vertices of an equilateral triangle, centre at the origin.

Proof. First we remark that $F = 0$ is not affected when the w-plane undergoes an homothetic transformation or a rotation or both. Now, $F = 0$ can be written as

(11) $$\tan\theta = \frac{i}{w_1}(w_3 - w_2).$$

We recall that θ is the angle at the vertex w_1. Applying the foregoing transformations so that w_1 goes over into i, then w_2, w_3 will go respectively over, say ω_2, ω_3. Accordingly (11) takes the form

$$\tan\theta = \omega_3 - \omega_2.$$

This last equation implies that the vector $\omega_2\omega_3$ must be parallel to the real axis. Similarily, should we have defined θ to be the angle at the other vertices, we would end up with the same conclusion. But the only triangle whose sides are successively parallel to the real axis when the w plane undergoes the foregoing transformations so as to take respectively the vertices into i, is evidently the equilateral triangle with centre at the origin.

As an immediate consequence of Theorem 3 we have.

Theorem 5. $a > .629$.

Proof. Suppose that $f(z)$ is a B.F. and omits the value c. The function

$$F(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots$$

where $b_2 = 1/c$, $b_3 = 1/c^2$, is analytic and schlicht for $|z| < 1$. Goluzin's inequality

$$|b_3 - \alpha b_2^2| \leq 2e^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} + 1,$$

for all $0 < \alpha < 1$, takes the form

$$\frac{1-\alpha}{|c|^2} \leq 2e^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} + 1.$$

For the particular value $\alpha = .45$, we obtain

$$|c| > .629.$$

If c is nearest to the origin then $a \geq |c|$. Hence $a > .629$.

Remark. It should be noticed that $a_3=0$ and the lower bound thereof would follow at once from a known property of a B.F., [6], i.e., R is the whole plane such that every point of the plane is either an interior or a bounndary point of R. Indeed, since (2) preserves the size of a schlicht disc of radius a lying at infinity in R, the corresponding radius of the disc at infinity in the map of $F^*(z,\varphi)$ is $a/|a_1^*(\varphi)|$. But $r_F^*(\varphi) \geq a$, and à fortiori $|a_1^*(\varphi)| \leq 1$, or Re $e^{-2i\varphi} a_3 \geq 0$, i.e., $a_3 = 0$. This follows also from (9) where $F=0$ *as* $w \to \infty$.

Literature

[1] E. Landau, Über die Blochsche Konstante... MZ. vol. 30. (1929)

[2] R. M. Robinson, Bloch Functions, Duke Math. J. vol. 2. (1936)

[3] F. Marty, Sur le module des coéfficients de Mac Laurin d'une fonction univalente, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 198, (1934)

[4] M. Schiffer, Appendix-Dirichlet's Principle, Conformal mapping, and Minimal surfaces, Interscience Publishers, N.Y. (1950)

[5] C. Uluçay, Note on Schiffer's Variation Formula, Archiv der Math. Fasc. 4, Vol. VII, (1956)

[6] C. Uluçay, sur les fonctions de Bloch da la 3-*eme* espece. Communications de la Fac. des Sciences de l'Un. d'Ankara, série A, Tome VI, Fasc. 1, 1954.

Ek II

Proof of Bieberbach's Conjecture.[1]

Survey. In this paper we prove the famous Bieberbach's conjecture, i.e., for the class S of analytic and schlicht functions

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots, \qquad |z| < 1,$$

the inequality

$$|a_n| \leq n$$

is always true, with equality for any n, $n \geq 2$, if and only if $f(z)$ is a Koebe function

$$\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2} = z + 2e^{i\theta}z^2 + 3e^{2i\theta}z^3 + \ldots, \ \theta \text{ real.}$$

Up to now, the conjecture has only been proved for $n = 2,3,4$ (see: [2], [3], [4], [5]).

As usual let V_{n-1} be the set of points

$$\tilde{a} = (a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$$

belonging to functions

$$f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n + \ldots$$

of class S. Let $\dot{\sigma}_n = \sup |a_n|$; evidently $\dot{\sigma}_n \geq n$, and it will suffice to consider only the class $\dot{S}_n$ of so-called extremal functions

$$\sigma(z) = z + \sigma_2z^2 + \ldots + \dot{\sigma}_nz^n + \ldots$$

in S with respect to the n-th coefficient. In the sequel the dot will always refer to such a coefficient for which $\sigma(z)$ is extremal.

The main idea, from which the Bieberbach's conjecture (Theorem II) is easily derived, is formulated in Theorem I. This idea, i.e., any extremal function $\sigma(z)$ with respect to the n-th coefficient implies that the point $(\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1})$ should be a boundary point of V_{n-1}, is quite intuitive. For, let us associate to each point $\tilde{a} \in V_{n-1}$ the number $t_n = t_n(\tilde{a})$ uniquely defined

[1] C. Uluçay, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un. d'Ankara, Série A, Tome 22A, 1973.

by the 2-dimensional cross-section π of V_n obtained by holding $a_2, \ldots, a_{n-1}$ fixed and letting a_n vary, and such that

$$t = (a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, \tau_n)$$

is a boundary point of V_n, lying on π, in which

$$t_n = \mathrm{Re}\tau_n = \max \mathrm{Re}\ a_n.$$

It is then natural to expect that $\max t_n$ must occur at some point $\tilde{p}$ on the boundary of V_{n-1}. It should be noticed that the above idea suggests at the same time the method of proof which may be called the method of 2-dimensional cross-section. This, in turn involves a certain important inequality due to Teichmüller ([1], p. 105). Let

$$a = (a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$

be a boundary point of V_n. It is known that a or what is the same thing $w = f(z)$ satisfies a differential equation of the form

$$\left(\frac{z}{w}\ \frac{dw}{dz}\right)^2 P(w) = Q(z),$$

where

$$P(w) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_\nu}{w^\nu}, \quad Q(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{B_\nu}{z^\nu}.$$

If $A_{n-1} \neq 0$, then

$$\mathrm{Re}\ \{(b_n - a_n)\ A_{n-1}\} \leq 0,$$

where $b = (a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, b_n)$ is any point of V_n in π. The equality holds if and only if $a_n = b_n$, i.e., $a = b$. From this inequality it follows that π as well as the set of interior points of V_n belonging to π is convex. We shall call the set of interior points of V_n belonging to π the interior of π. Due to its importance, the above inequality will be called by us the *Teichmüller's Principle*.

Introduction. To make the paper self-contained, we recall once more some known facts about the n-th coefficient region V_n in $(2n-2)$ - dimensional real Euclidean space whose points $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ correspond to functions of class S. For details, the reader is referred to [1], Chapter 1. The topological structure of V_n is almost evident. First of all, V_n is bounded and closed since $|a_n| < en$ and S is compact. Moreover the function $f(z) = z$ being in S and bounded it readily follows that the origin is an interior point of V_n. Finally, it can be shown that V_n is connected and topologically equivalent to the closed $(2n-2)$-dimensional full sphere. For example, the coefficient-region V_2 of points (a_2) is simply the disc $|a_2| \leq 2$. For, any function $f(z) \varepsilon S$ such that $|a_2| < 2$, a_2 is an interior point of V_2, and to each boundary point $a_2 = 2e^{i\theta}$ corresponds a unique function in S, i. e., $f(z) = \dfrac{z}{(1-e^{i\theta} z)^2}$. It is convenient to introduce at this moment the following terminology. We say that the point $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ belongs to a function

$$f(z) = z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

of class S and that $f(z)$ belongs to the point $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ if

$$a_\nu = b_\nu, \qquad \nu = 2, 3, \ldots, n.$$

If $a = (a_2, a_3, \ldots, a_n)$ belongs to $f(z)$ and is an interior point of V_n then there is an $\varepsilon > 0$ such that all points $c = (c_2, c_3, \ldots, c_n)$ satisfying the inequality

$$\| a - c \| = \left(\sum_{\nu=2}^{n} |c_\nu - a_\nu|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

are interior points of V_n, and so there is at least one function of class S which belongs to $(c_2, c_3, \ldots, c_n)$. In particular, the point $(\rho a_2, \rho^2 a_3, \ldots, \rho^{n-1} a_n)$ is an interior point of V_n for some $\rho > 1$. It follows readily that there is a bounded function of class S which belongs to $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Conversely, if $f(z)$ is a bounded function of class S and belongs to $(a_2, \ldots, a_n)$ then the latter is an interior point of V_n. The boundary and interior points of V_n can be characterized as follows: If $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ is a boundary point of V_n, then there is only one function of class S belonging to it, whereas if it is an interior point of V_n then there is more than one function of class S belonging to it.

Lemma I. (i) Let $p = (\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_n)$. Then p satisfies a differential equation ϑ_n of the form

$$\left(\frac{z}{w}\ \frac{dw}{dz}\right)^2 P(w) = Q(z), \ |z| < 1, \ w = \sigma(z),$$

where

$$P(w) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_\nu}{w^\nu}, \quad Q(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{B_\nu}{z^\nu},$$

$$B_{-\nu} = \overline{B}_\nu, \ Q(e^{i\theta}) \geq 0 \ \text{ and } \ A_{n-1} = B_{n-1} = 1.$$

Here $Q(z)$ has on $|z| = 1$, at least one zero, which must be of even order.

(ii) Let p_0 be a boundary point of V_n, near p. Then p_0 satisfies a differential equation ϑ_n^0 of the same type

$$\left(\frac{z}{w}\ \frac{dw}{dz}\right)^2 P_0\ (w) = Q_0(z), \ |z| < 1$$

where

$$P_0(w) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_\nu^0}{w^\nu}, \ Q_0(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{B_\nu^0}{z^\nu},$$

$$B^0_{-\nu} = \overline{B}^0_\nu , \qquad Q_0\ (e^{i\theta}) \geq 0$$

and $A^0_{n-1} \to 1$ as $p_0 \to p$ through boundary points.

Proof. To show the first part of the lemma, we use the Schaeffer-Spencer variational formula [1]. We see that p satisfies the differential equation ϑ_n of the form

$$\frac{z^2\sigma'(z)^2}{\sigma(z)^3} S_n \left(\frac{1}{\sigma(z)}\right) = (n-1)\ \dot{\sigma}_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\nu\sigma_\nu}{z^{n-\nu}} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\bar{\sigma}_\nu\ z^{n-\nu}$$

where S_n is defined by

$$\frac{\sigma(z)^2}{1 - \dfrac{\sigma(z)}{\sigma(z_0)}} = \sum_{n=2}^{\infty} S_n \left(\frac{1}{\sigma(z_0)}\right) z^n .$$

ϑ_n is of the required type. We see immediately that $B_{n-1} = 1$, while an easy calculation shows that $A_{n-1} = 1$. Thus $A_{n-1} = B_{n-1}$ as it should be.

As to the second part of the lemma, let p_0 be a boundary point of V_n. We know from the general theory of the coefficients of schlicht functions ([1], pp. 36–43), that p_0 satisfies a differential equation ϑ^0_n of the form described in the lemma, i.e.,

$$\left(\frac{z}{w}\ \frac{dw}{dz}\right)^2 P_0(w) = Q_0(z), \quad |z| < 1$$

where

$$P_0(w) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_\nu{}^0}{w^\nu} .$$

The boundary $B^0{}_w$ in the w-plane corresponding to $|z| = 1$ in the mapping $\sigma_0(z)$ belonging to p_0 consists of loci defined by

$$\mathrm{Re} \int (P_0(w))^{\frac{1}{2}} \frac{dw}{w} = \text{constant}.$$

If A^0 designates the $(n-1)$-tuple $(A^0_1, A^0_2, \ldots, A^0_{n-1})$ then $B^0{}_w = B^0{}_w\ (A^0)$ is a function of A^0 as p_0 varies on the boundary of V_n . Let

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$$

be the vector associated with ϑ_n. In view of the extremal property of p, $B_w = B_w\ (A)$ is a single analytic arc extending to infinity, without critical points and of mapping radius unity. It is known then that $B_w\ (A)$ is a continuous function of A (cf. pp. 44-87, Lemma XXII). Finally, it follows from a known argument (loc. cit. pp. 40-41 and p. 111-112) that there is a one to one continuous correspondence between the boundary points of V_n in the neighborhood of p and a set of vectors containing A. Hence if p_0 is sufficiently near p it follows from the foregoing continuity argument that p_0 satisfies a differential equation ϑ^0_n in which A^0 is arbitrarily close to A, i.e.,

$$\| A^0 - A \| = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} |\ A_\nu{}^0 - A_\nu\ |^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ as } p_0 \to p.$$

In particular $A^0_{n-1} \to A_{n-1}$ as $p_0 \to p$ through boundary points.

Theorem I. Let $\sigma(z) \in \dot{S}_n$. Then $(\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1})$ is a boundary point of V_{n-1}.

Proof. Consider the 2-dimensional cross-section of V_n obtained by holding $\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ fixed and varying the last coordinate in

$$p = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_n).$$

Suppose on the contrary that $(\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1})$ in an interior point of V_{n-1}. Then the following properties hold [6]:

Property I. Let $p = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_n)$. Suppose that $b = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, b_n)$ is an interior point of V_n. Then each point of the segment bp, save p, is an interior point of V_n.

Indeed, let π denote the 2-dimensional cross-section of V_n obtained by holding $\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ fixed. Owing to the fact that π is convex, the segment bp lies in π. Suppose that $r \neq p$ is the first boundary point of V_n on the line segment bp. Since the interior of π is also convex it follows that every point on rp is a boundary point of V_n. Let p_0 be any boundary point of V_n lying on rp and sufficiently near p. Applying Teichmüller's Principle to p_0, we have

(1) $\quad \mathrm{Re}\ \{(\dot{\sigma}_n - \tau^0_n)\ A^0_{n-1}\} < 0, \quad \dot{\sigma}_n \neq \tau^0_n,$

where $\tau_n{}^0$ is the last coordinate in $p_0 = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, \tau^0_n)$. By Lemma I, (ii), $A^0_{n-1} \to 1$ as $p_0 \to p$. Recalling that τ^0_n lies on the segment $b_n\ \dot{\sigma}_n$ which is fixed and non perpendicular to the real axis, since b_n lies in the interior of the disc G, centre at the origin and radius $\dot{\sigma}_n$, it is readily seen that for p_0 sufficiently near p, this inequality is impossible. One can also see this by calculation. In fact, (1) can be written as

(2) $\quad \dot{\sigma}_n - u^0_n < - v^0_n \tan\ \theta$

where $\tau^0_n = u^0_n + iv^0_n$, $\arg A^0_{n-1} = \theta$ with $\theta \to 0$ as $p_0 \to p$. Setting $|\tau^0_n - \dot{\sigma}_n| = \varepsilon$ and assuming b_n not real, then $\dot{\sigma}_n - u^0_n$ and v^0_n are of precise order ε. Hence (2) is impossible even if $\theta < 0$, for the right hand side of (2) is of higher order than ε. This contradiction implies $r = p$.

Property II. Let $p = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_n)$. Suppose that $b = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, b_n)$ is an interior point of V_n. Let $\tilde{p} = (\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \tilde{\sigma}_n)$ be a boundary point of V_n sufficiently near p. Then each point of $b\tilde{p}$, save $\tilde{p}$ is an interior point of V_n.

Indeed, let $\tilde{r}$, $\tilde{p}_0$ and $\tilde{\tau}^0_n$ be as before, Applying Teichmüller's Principle to $\tilde{p}_0$, we obtain

(3) $\quad \mathrm{Re}\ \{(\tilde{\sigma}_n - \tilde{\tau}_0^n)\ \tilde{A}^0_{n-1}\} < 0, \qquad \tilde{\sigma}_n \neq \tilde{\tau}^0_n.$

As in property I, the result is geometrically evident. For, by assumption

$$\mathrm{Re}\ \tilde{\tau}^0_n < \mathrm{Re}\ \tilde{\sigma}_n,$$

and the line segment $\tilde{\tau}^0_n\ \tilde{\sigma}_n$ lying on $b_n \tilde{\sigma}_n$ is never perpendicular to the real axis as $\tilde{\sigma}_n \to \sigma_n$. The latter property and thereby the sense of the inequality in $\mathrm{Re}\ \tilde{\tau}^0_n - \mathrm{Re}\ \tilde{\sigma}_n < 0$ will be preserved after application of the infinitesimal rotation $\mathrm{Arg}\ \tilde{A}^0_{n-1} = \theta$ to $\tilde{\tau}^0_n$ and $\tilde{\sigma}_n$ respectively. Namely,

(4) $\quad \mathrm{Re}\ \tilde{\tau}^0_n\ e^{i\theta} - \mathrm{Re}\ \tilde{\sigma}_n\ e^{i\theta} = \mathrm{Re}\ \{(\tilde{\tau}^0_n - \tilde{\sigma}_n)\}\ e^{i\theta} < 0.$

However (4) contradicts (3) and the assertion follows.

We also conclude that if $\tilde{p}$ is sufficiently near p, then $\tilde{p}$, is the only boundary point on $b\ \tilde{p}$.

Let us consider the 2-dimensional cross-section π. It is clear that as the point

$$a = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, a_n). \quad |a_n| \leq \dot{\sigma}_n$$

describes π, the last coordinate a_n will descibe in the complex plane a set of points Π lying in the disc G centre at the origin and radius $\dot{\sigma}_n$, and which is convex. We shall say that a_n is the projection of a and Π is the projection of π. a_n (a) is said to be an interior or a boundary point of Π (π) if a is an interior or a boundary point of V_n respectively. We recall that the interior of Π as well as the interior of π is convex. In view of property I and property II the set γ of boundary points of π containing p and sufficiently near p, is a continuous arc containing p. Let Γ be the projection of γ in Π. Γ passes through $\dot{\sigma}_n$, and a_n which is the projection of $a \varepsilon \gamma$, describes Γ. It follows that every point on the line segment $b_n a_n$, save a_n is an interior point of Π, and that Γ is a continuous arc.

Let us show that Γ can have no point in common with the circumference of G, save $\dot{\sigma}_n$, as a_n approaches $\dot{\sigma}_n$. If $a_n = \dot{\sigma}_n\ e^{i\varphi}$ is such a point, then the point

$$p_\varphi = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_n\ e^{i\varphi})$$

would lie on the boundary of π. Using the notation of Lemma I, it is easily seen that B_0 has the representation

$$B_0 = -\min_{|z|=1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{B_\nu}{z^\nu} + \overline{B}_\nu z^\nu \right) \right\},$$

where $B_0 = (n-1)\ \dot{\sigma}_n$, $B_\nu = (n-\nu)\ \sigma_{n-\nu}$. Through rotation $-\varphi/(n-1)$, the point p_φ takes the form

$$p_{-\varphi/(n-1)} = (\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma_{n-1}^*, \dot{\sigma}_n),$$

and

(5) $$B_0 = -\min_{|z|=1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{B_\nu^*}{z^\nu} + \overline{B}_\nu^* z^\nu \right) \right\},$$

where

$$B_\nu^* = (n-\nu)\ \sigma^*_{n-\nu}, \sigma^*_{n-\nu} = \sigma_{n-\nu}\ e^{-i\frac{(n-\nu-1)}{n-1}\varphi},$$

which is impossible. Indeed, we recall that

$$Q(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{B_\nu}{z^\nu},$$

and that $Q(z) \geq 0$ on $|z| = 1$ with at least one zero there, which must be of even order. Similarly for each φ we have

$$Q^*(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{B^*_\nu}{z_\nu},$$

with the same properties on $|z| = 1$. Namely $Q^*(z) \geq 0$ on $|z|=1$ with at least one zero there, which must be of even order. We write

$$Q^*(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{(n-\nu)\ \sigma_{n-\nu} e^{-i\left(1-\frac{\nu}{n-1}\right)\varphi}}{z^\nu} + B_0^*, \ B_0^* = B_0$$

and consider the expression

$$\tilde{Q}^*(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{(n-\nu)\ \sigma_{n-\nu}}{\zeta^{1-\frac{\nu}{n-1}} z^\nu} + B_0^*, \ \zeta = |\zeta|\ e^{i\varphi}$$

which concides with $Q^*(z)$ on $|\zeta| = 1$. If $|z_0| = 1$ is a zero of order m of $Q(z)$, then in view of a fundamental theorem, in a sufficiently small neighborhood of z_0, $\tilde{Q}^*(z)$ has m distinct roots which are analytic functions of ζ and tending to z_0 as $\zeta \to 1$ $(\varphi \to 0)$. It follows that for $|\zeta| = 1$ and φ sufficiently small, $Q^*(z)$ has on $|z| = 1$, zeros of order at most 1, thus contradicting the property of $Q^*(z)$ having on $|z| = 1$ at least one zero of even order.

Next, we consider neighboring cross-sections π^* as follows. By hypothesis $(\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1})$ being an interior point of V_{n-1} there exists a function

$$f(z) = z + b_2 z^2 + \ldots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n + \ldots$$

of class S such that

$$\sigma_\nu = b_\nu, \qquad \nu = 2, \ldots, n-1,$$

and which is bounded. Hence the point

(6) $\quad b = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, b_n)$

is an interior point of V_n and lies in π. It follows that $|b_n| < \dot{\sigma}_n$. Let us consider the neighboring function

$$f^*(z) = e^{-i\varepsilon} f(e^{i\varepsilon} z) = z + \sigma_2^* z^2 + \ldots + \sigma^*_{n-1} z^{n-1} + b^*_n z^n + \ldots$$

which is also of class S for ε real, and belongs to the interior point

$$(\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}, b_n^*),$$

where

$$\sigma^*_\nu = \sigma_\nu e^{i(\nu-1)\varepsilon}, \qquad \nu=2,\ldots, n-1; \qquad b_n^* = b_n e^{i(n-1)\varepsilon} .$$

If ε is sufficiently small, then the point

$$b^* = (\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}, b_n)$$

will be also an interior point of V_n .

Property III. Let $p = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_n)$. Suppose that $b = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, b_n)$ is an interior point of V_n. Let $p^* = (\sigma^*_2, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}, \tilde{\sigma}_n)$ be any boundary point of V_n sufficiently near p, Then each point of b^*p^*, save p^*, is an interior point of V_n.

Indeed, b being an interior point of V_n, if p^* is sufficiently near p and therefore ε sufficiently small, then $b^* = (\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}, b_n)$ is an interior point of V_n. The conclusion follows by applying the argument as in property II to the segment b^*p^* lying in the 2-dimensional cross-section π^*, obtained by holding $\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}$ fixed. Namely, assuming $\mathrm{Re}\, \tilde{\tau}^0_n < \mathrm{Re}\, \tilde{\sigma}_n$, where $\tilde{\tau}^0_n$ is the last coordinate in $p^* = (\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}, \tilde{\tau}^0_n)$ on $b_n \tilde{\sigma}_n$, near p^*, we see, repeating word for word the argument at the end of the proof of property II that each point of $b^* p^*$, save p^*, is an interior point of V_n.

We also conclude that if p^* is sufficiently near p, then p^* is the only boundary point on b^*p^*.

It should be noticed however that property III is an immediate consequence of property II. In fact, let in general $a_n \varepsilon \Pi$. To a_n will correspond in π, the point

$$a = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, a_n).$$

If ε is real, the point

$$a^* = (\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}, a_n^*)$$

where

$$\sigma_\nu^* = \sigma_\nu e^{i(n-1)\varepsilon}, \qquad \nu = 2, \ldots, n-1; \quad a_n^* = a_n e^{i(n-1)\varepsilon},$$

will lie in π^*, while a_n^* which is the projection of a^*, will lie in the projection Π^* of π^*. In fact Π^* is obtained from Π through a rotation equal to $(n-1)\varepsilon$. Thus in the neighborhood of $\sigma_n^* = \dot{\sigma}_n e^{i(n-1)\varepsilon}$ the boundary of Π^* is a continuous arc Γ^* containing σ_n^* and which is obtained from Γ through a rotation equal to $(n-1)\varepsilon$. Similarly, the boundary of π^* in the neighborhood of

$$p^* = (\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}, \sigma^*_n)$$

is a continuous arc γ^* of which Γ^* is the projection. Taking ε sufficiently small so that

$$b^* = (\sigma_2^*, \sigma_3^*, \ldots, \sigma^*_{n-1}, b_n)$$

is an interior point of V_n, one obtains property III.

Property IV. In the neighborhood of $\dot{\sigma}_n$, Γ lies on both sides of the real axis, i.e., it contains points $a_n \varepsilon \Gamma$ with $\mathrm{Im}\, a_n < 0$ as well as points $a_n \varepsilon \Gamma$ with $\mathrm{Im}\, a_n > 0$.

Indeed, otherwise Γ will contain two arcs Γ_1, Γ_2 ending at the point $\dot{\sigma}_n$ and lying say in the upper half plane. Let Δ be a line parallel to the real axis sufficiently near to it, and which intersects Γ_1 and Γ_2 at the points a^1_n, a^2_n respectively with say,

(7) $\quad \mathrm{Re}\, a^1_n < \mathrm{Re}\, a^2_n, \ \mathrm{Im}\, a^1_n = \mathrm{Im}\, a^2_n.$

Applying Teichmüller's Principle to the boundary point

$$a_1 = (\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}, a^1_n)$$

we have

(8) $\quad \mathrm{Re}\, \{(a^2_n - a^1_n) A^1_{n-1}\} < 0, \qquad a^2_n \neq a^1_n.$

In view of Lemma I, as Δ tends to the real axis, $A^1_{n-1} \to 1$. Thus it follows readily that for Δ sufficiently near to the real axis the inequality (7) is preserved and (8) is impossible. In fact, to see this, it will suffice to write (8) under the form

(9) $\quad \mathrm{Re}\, a^2_n - \mathrm{Re}\, a^1_n < (\mathrm{Im}\, a^2_n - \mathrm{Im}\, a^1_n) \tan \arg A^1_{n-1}$.

We shall denote by Γ_1, the continuous arc with $\mathrm{Im}\, a_n \leq 0$, where $\mathrm{Im}\, a_n = 0$ if and only if $a_n = \dot{\sigma}_n$.

Let us consider again the convex region II. We recall that Γ_1 lies, except for $\dot{\sigma}_n$, entirely in G. It will be convenient to introduce the following notations. Let $\zeta = e^{i(n-1)\varepsilon}$, where ε is assumed to be positive and sufficiently small. Denote by $\tau = \bar{\zeta}\, \dot{\sigma}_n$ the point on the arc of circumference g of G and by τ_n, the point on Γ_1 such that

$$\mathrm{Im}\, \tau_n = \mathrm{Im}\, \tau = -\dot{\sigma}_n \sin (n-1)\, \varepsilon = -\dot{\sigma}_n\, (n-1)\, \varepsilon + 0(\varepsilon^3), \ 0(\varepsilon^3) > 0.$$

Let $a^0_n \varepsilon \Gamma_1$ such that $\mathrm{Re}\, a^0_n = \mathrm{Re}\, \tau$. Let δ be any direction issuing from τ and lying within the right angle determined by the vertex τ on g and by the

segments $\tau\tau_n$ and $\tau\, a^0{}_n$ parall el to the axes of coordinates. Let a_n be the intersection of δ with Γ_1. If α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, is the angle defined by δ and $\tau\tau_n$, then as α varies in the open interval $(0, \frac{\pi}{2})$, the point $a_n \varepsilon \Gamma_1$ sweeps the open subarc $\Gamma_1{}^\varepsilon$ of Γ_1 extending from τ_n to $a^0{}_n$. Note that α is independent of ε. On rotating Γ_1 through ζ, we obtain the arc $\Gamma_1{}^* = \zeta\,(\Gamma_1)$ and the direction $\delta^* = \zeta\,(\delta)$ issiung from $\dot{\sigma}_n$ will lie on the upper half-plane for α fixed and $\varepsilon > 0$ sufficiently small. δ^* intersects $\Gamma_1{}^*$ at the point $a_n{}^* = \zeta\, a_n$. We then have the following important consequence.

Property V. Let

$$a^* = (\sigma_2{}^*, \ldots, \sigma^*{}_{n-1}, a_n{}^*),\ a_n{}^* = a_n{}^*(\varepsilon, \alpha),\ \sigma^*{}_\nu = \sigma_\nu\, e^{i(\nu-1)\varepsilon}$$

$\nu = 2, \ldots, n-1$, $a_n{}^* = \zeta\, a_n$ with $\varepsilon > 0$ sufficiently small, a^* satisfying a differential equation $\vartheta_n{}^*$ of the from (loc. cit. p. 36)

$$\left(\frac{z}{w}\,\frac{dw}{dz}\right)^2 \mathrm{P}^*(w) = \mathrm{Q}^*(z)$$

where

$$\mathrm{P}^*(w) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\mathrm{A}_\nu{}^*}{w^\nu}$$

$$\mathrm{Q}^*(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{\mathrm{B}_\nu{}^*}{z^\nu},\ \mathrm{B}^*{}_{-\nu} = \bar{\mathrm{B}}_\nu{}^*$$

and

(A) $$\mathrm{A}_\nu{}^* = \sum_{k=\nu+1}^{n} \sigma_k{}^{*(\nu+1)}\, \mathrm{F}_k{}^*$$

$$\mathrm{B}_\nu{}^* = \sum_{k=1}^{n-\nu} k\sigma_k{}^*\, \mathrm{F}^*{}_{k+\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, n-1$$

(B) $$\mathrm{B}_0{}^* = \sum_{k=2}^{n} (k-1)\, \sigma_k{}^*\, \mathrm{F}_k{}^*.$$

Then for fixed α, $\mathrm{Q}^*(z)$ which is analytic in z is continuous with respect to ε $(\varepsilon \geq 0)$ and z, and $\mathrm{Q}^*(z) \to \mathrm{Q}(z)$ uniformly as $\varepsilon \to 0$. Here $\mathrm{Q}(z)$ is the right hand side of the differential equation ϑ_n corresponding to p, $(\varepsilon = 0)$.

Proof. Π being convex, it follows that the arc Γ, in a neighborhood $\mathrm{N}(\dot{\sigma}_n)$ of $\dot{\sigma}_n$, is convex, and it is well known that in $\mathrm{N}(\dot{\sigma}_n)$, Γ is differentiable, save a countable number of points[1]. Hence, if α_0, α_1 are two fixed numbers such that $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$, it follows that for $\varepsilon > 0$ suffi-

1) G. Valiron, Théorie des Fonctions, Masson et Cie editeurs, 1948, pp. 79-80.

ciently small, and $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, so that the points $(\varepsilon, \alpha)\ \varepsilon\ \Gamma_1$ lie in $\mathrm{N}\,(\dot{\sigma}_n)$, the first partial dervatives of $\beta_n\,(\varepsilon, \alpha)$ and $\lambda_n\,(\varepsilon, \alpha)$ exist at points where Γ_1 is differentiable. Here

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n,\ \alpha_n = \dot{\sigma}_n - \lambda_n\ ;\ a_n{}^* = \alpha_n{}^* + i\beta_n{}^*,\ \alpha_n{}^* = \dot{\sigma}_n - \lambda_n{}^*$$

where

$$\beta_n,\ \lambda_n \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

On using the relations

(10) $$a_n = \bar{\zeta}\, a_n{}^* = \bar{\zeta}\,(\dot{\sigma}_n - \lambda_n{}^* + i\beta_n{}^*)$$

and

(11) $$\beta_n{}^* = \lambda_n{}^* \tan\,(\alpha - (n-1)\varepsilon)$$

we find for $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ and $\varepsilon \geq 0$.

(12) $$\begin{aligned} \lambda_n{}^* &= (\beta_n + \dot{\sigma}_n \sin\,(n-1)\varepsilon)\cos\,(\alpha-(n-1)\varepsilon)/\sin\,\alpha \\ \beta_n{}^* &= (\beta_n + \dot{\sigma}_n \sin\,(n-1)\varepsilon)\sin\,(\alpha-(n-1)\varepsilon)/\sin\,\alpha. \end{aligned}$$

For $\varepsilon > 0$ sufficiently small, formulas (12) define in the upper half-plane a curvilinear triangular region T with one vertex at $\dot{\sigma}_n$ and whose closure denoted by $\bar{T}$, lies, expect for $\dot{\sigma}_n$, entirely in the upper half-plane. It follows that on $\bar{T}$, $\lambda_n{}^*\,(\varepsilon, \alpha)$ and $\beta_n{}^*\,(\varepsilon, \alpha)$ have first partial derivatives with respect to ε and α, save a countable number of points. Namely, formulas (12) define, by means of a system of two-dimensional cross-sections $\{\pi^*\}$, on the boundary of V_n, near p, a curvilinear triangular set of points

$$a^* = (\sigma_2{}^*, \ldots, \sigma^*{}_{n-1},\ a_n{}^*(\varepsilon, \alpha)),$$

with one vertex at p, which we may denote by $R = R\,(p)$, and whose closure we indicate by $\bar{R}$, and such that $\bar{R}$ is differentiable expect at a countable number of points. But in $\bar{R}$ we may write (loc. cit. p. 110).

(13) $$\mathrm{A}_\nu{}^* = \sum_{k=\nu+1}^{n} \sigma_k{}^{*(\nu+1)}\, \mathrm{F}_k{}^*,\ \nu = 1, 2, \ldots, n-1,\ \sigma_n{}^* = a_n{}^*.$$

The system (13) being linear in the $\mathrm{F}_\nu{}^*$ with non-vanishing determinant (loc. cit p. 110) it can be solved for the $\mathrm{F}_\nu{}^*$ in terms of $A^* = (\mathrm{A}_1{}^*, \mathrm{A}_2{}^*, \ldots, \mathrm{A}^*{}_{n-1})$ and a^*. But, as in the proof of lemma I, the vector A^* is continuous at each point of $\bar{R}$, i. e., on $\bar{R}$. Hence $\mathrm{F}_\nu{}^*$ is continuous on $\bar{R}$; and at those points where $\bar{R}$ is differentiable, we have (loc. cit. p. 111)

$$\mathrm{Re}\ \{\mathrm{F}_2{}^*\delta\sigma_2{}^* + \ldots + \mathrm{F}^*{}_{n-1}\,\delta\sigma^*{}_{n-1} + \mathrm{F}_n{}^*\,\delta a_n{}^*\} = 0.$$

Namely, the vector

$$\bar{F}^* = (\bar{\mathrm{F}}_2{}^*, \ldots, \bar{\mathrm{F}}^*{}_{n-1}, \bar{\mathrm{F}}_n{}^*)$$

is normal to V_n at the points $a^* \varepsilon\ \bar{R}$. Since $\bar{F}^*$ is continuous on $\bar{R}$, it follows that

(i) $\bar{R}$ is continuously differentiable at all points $a^* \varepsilon \bar{R}$ and

(ii) the vector $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ being the value of $\bar{F}^*$ at the point p, then

$$(14) \qquad \bar{F}^* = (\bar{F}_2^*, \ldots, \bar{F}^*_{n-1}, \bar{F}^*_n) \to (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

as $\varepsilon \to 0$, uniformly with respect to α, $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$.

Hence, $Q^*(z)$ is continuous on $\bar{R}$, and for each fixed $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $Q^*(z) \to Q(z)$ uniformly as $\varepsilon \to 0$.

In view of the relation $a_n = \bar{\zeta}\, a_n^*$, where a_n^* has by (i) continuous first partial derivatives, a_n itself has continuous first partial derivatives with respect to ε, α. Hence repeating the same argument for Γ_2, namely, when $a_n \varepsilon \Gamma_2$ is the intersection of δ with Γ_2, one concludes that Γ is continuously differentiable in $N(\dot{\sigma}_n)$.

Finally, using s, the arc length of Γ_1 from $\dot{\sigma}_n$ to a_n, as the parameter to fix the position of $a = (\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, a_n)$, $a_n = a_n(s)$, by fixing the position af a_n on Γ_1, we see that along γ_1,

$$Q(z,s) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{B_\nu(s)}{z^\nu}, \quad \bar{B}_\nu(s) = B_{-\nu}(s),$$

where $Q(z,s)$ is continuous in both variables, and $Q(z,s) \to Q(z)$ as $s \to 0$. First, we note that on Γ_1, the polynomial

$$z^{n-1}\, Q(z,s) = \bar{B}_{n-1}(s)\, z^{2n-1} + \ldots + B_0(s)\, z^{n-1} + \ldots + B_{n-1}(s),$$
$$B_{n-1}(s) \neq 0, \; B_0(s) > 0,$$

has the same zeros on $|z| = 1$ as $Q(s, z)$. Next, the expression on the right hand side, when considered as a polynomial R in z and the real variables x_ν, y_ν defined by

$$B_\nu = x_\nu + iy_\nu, \; \bar{B}_\nu = x_\nu - iy_\nu, \; \nu = 1, \ldots, n-1, \; B_0 = x_0 > 0$$

is linear with respect to these $2n-1$ independent real variables and therefore irreducible within the *formal* polynomials ordered according to decreasing powers of z, with polynomials in the $2n-1$ variables x_ν, y_ν, as coefficients. Hence R and its partial derivative R_z with respect to z are relatively prime. Consequently[1], the discriminent

$$D = D\,(x_0, x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1})$$

is not identically zero in the $2n-1$ real Euclidean space E^{2n-1}.

Next, eliminating the F_k's amongst the relations (B) as applied to a, we obtain the equation

(1) M. Bôcher, Introduction to Higher Algebra. The Macmillan Compang N.Y., 1907, pp. 212–213.

$$(B^*) \qquad B_0 = \sigma_2 B_1 + (2\sigma_3 - 2\sigma_2^2) B_2 + (3\sigma_4 - 7\sigma_2\sigma_3 + 4\sigma_2^3) B_3 + \ldots$$
$$+ \{(n-1)\, a_n + \varphi_{n-1}(\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})\} B_{n-1},$$

where φ_{n-1} is a polynomial in $\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$.

If $\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ are fixed, so is φ_{n-1} and it follows from (B*) and (B) that there is a one to one continuous correspondence between the points $a_n(s)$ and the points

$$B(s) = (B_0(s), B_1(s), \ldots, B_{n-1}(s)) \; \varepsilon \; E^{2n-1}.$$

In fact the equality $B(s) = B(s')$ implies upon substraction

$$(n-1)\,(a_n(s) - a_n(s'))\, B_{n-1} = 0.$$

Then, since $n > 1$, $B_{n-1} \neq 0$, it follows that $a_n(s) = a_n(s')$.

Consequetly, as $a_n(s)$ describes Γ_1, $B(s)$ describes in a one to one continuous way an arc $\varkappa_1$ in E^{2n-1}.

Now, at each point of $\varkappa_1$, B_0, B_ν satisfy a linear relation of the form

$$(B^{**}) \qquad B_0 + \min_{|z|=1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{B_\nu}{z^\nu} + \bar{B}_\nu z^\nu \right) \right\} = 0,$$

or,

$$x_0 + 2\min_{0<\theta\leq 2\pi} \sum_{\nu=1}^{n-1} (x_\nu \cos\nu\theta + y_\nu \sin\nu\theta) = 0,$$

where the minimum occurs at a multiple zero, say $z = z_0$, $z_0 = z_0(s)$, $|z_0| = 1$, of $Q(z,s) = 0$, with $z_0(s)$ continuous in s[1]. More generally, since each $a^* \varepsilon \bar{R}$ determines uniquely F^*, we see from (B) that the vector B^* is uniquely determined by a^* and that the correspondence $a^* \to B^*$ is continuous on $\bar{R}$. Next, the components of a^* can be calculated from (B) step by step in terms of the components of B^* and F^* with the conclusion that on $\bar{R}$, $\sigma_\nu^* = \sigma_\nu^{*\prime}$ implies $B^*_{n-\nu} = B^{*\prime}_{n-\nu}$. Hence the inverse mapping $B^* \to a^*$ so defined is one to one. We conclude that $a^* \to B^*$ *is one to one continuous on* $\bar{R}$. Hence closed sets are mapped onto closed sets. Consequently, the inverse mapping $B^* \to a^*$ is also continuous. It follows that *the vector* B^* *describes in* E^{2n-1} *a region* $\bar{N}$ *that is the topological image of* $\bar{R}$. At each point of $\bar{N}$, B^* satisfies a linear relation of the form (B**) where the minimum occurs at a multiple zero of $Q^*(z)$, on $|z| = 1$.

But, $D = 0$ being necessary and sufficient for $Q^*(z) = 0$ to have a multiple root on $|z| = 1$, it follows that D vanishes on $\bar{N}$. Geometrically, if z is considered as a parameter then $D=0$ is simply the envelope of the hyperplanes $R = 0$. However, $D=0$ is real, irreducible and homo-

(1) By the fundamental theorem on the continuity of the roots, $\varkappa_1$ cannot be an analytic arc.

geneous of degree $4n-6$, i.e., an algebraic hypersurface. Now, $\bar{N}$ is that portion of $D=0$ at each point of which (B**) is the taangent hyperplane. Since $\bar{N}$ is algebraic, there exists on it an arc σ with one end point at $B(0)$ along which B* can be expressed analytically with respect to some parameter and $Q^*(z) \to Q(z)$. But this contradicts the fact that $Q^*(z)$should have multiple zeros olong σ, near $B(0)$. Thus no such $\bar{N}$ and thereby $\varkappa_1$ can exist unless reduced to the point $B(0)$. Hence Γ_1 raduces to the point $\dot{\sigma}_n$ and theorem I is proved.

We illustrate this by an example corresponding to the classical case $n = 2$. In thise case $|\sigma_2| = 2$. We may assume $\sigma_2=2$. Then, $D = 0$, $R = 0$, $R_z = 0$ all coincide whenever B_1 is real and $z = -1$. In fact we have $B_0 = 2B_1$. Then comparing with (B*) we obtain complete identity, since $\sigma_2 = 2$. Also, $B_1=1$, $B_0=2$ as expected.

Corollary. If $n = 3$, theorem I implies that σ_2 must be a boundary point of V_2, i.e. $|\sigma_2| = 2$. Hence the extremal function corresponding to the third coefficient is the Koebe function. Accordingly, $|a_3| \leq 3$.

Theorem II. Let $p = (\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_n)$, $\dot{\sigma}_n > 0$. Then p belongs to the Koebe function with $\dot{\sigma}_n = n$.

Proof. Since by Theorem I, the point $(\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})$ is a boundary point of the coefficient region V_{n-1}, it satisfies a differential equation of the form

$$(15) \qquad \left(\frac{z}{w}\frac{dw}{dz}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{A_\nu'}{w^\nu} = \sum_{\nu=-(n-2)}^{n-2} \frac{B_\nu'}{z^\nu}, \quad w = \sigma(z).$$

As in the proof of Lemma I the boundary of $\sigma(z)$ is continuous at $A' = (A_1', A_2', \ldots, A'_{n-2})$ which implies $A'_{n-2} = B'_{n-2} \neq 0$ (loc. cit. pp. 81–87). On the other hand $\sigma(z)$ satisfies the differential equation ϑ_n, i.e.,

$$(16) \qquad \left(\frac{z}{w}\frac{dw}{dz}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_\nu}{w^\nu} = \sum_{\nu=-n-1)}^{n-1} \frac{B_\nu}{z^\nu}, \; A_{n-1} = B_{n-1} = 1.$$

Eliminating $\left(\frac{z}{w}\frac{dw}{dz}\right)$ between the two differential equations, we obtain

$$(17) \qquad w\,\frac{A'_1 w^{n-3} + \ldots + A'_{n-2}}{A_1 w^{n-2} + \ldots + A_{n-1}} = z\,\frac{\bar{B}'_{n-2}\, z^{2n-4} + \ldots + B'_{n-2}}{\bar{B}_{n-1}\, z^{2n-2} + \ldots + B_{n-1}}.$$

Thus w is an algebraic function of z and to each value of z there corresponds at most $n-2$ values of w. From either of the given differential equations it follows that $w \to 0$ as $z \to 0$. Equation (17) can be written as

$$(18) \qquad w\,\{\lambda_0 + \lambda_1 w + \ldots\} = z\,\{\mu_0 + \mu_1 z + \ldots\}, \; \lambda_0 = \mu_0 \neq 0.$$

Thus in a neighborhood of the origin each branch of $w = w(z)$ is analytic and has an expansion

$$(19) \qquad w = z + \beta_2 z^2 + \ldots.$$

Hence all branches of $w(z)$ coincide in a neighborhood of the origin thus implying that all branches of $w(z)$ coincide for all z, and $w(z)$ is single-valued and therefore rational.

Accordingly

$$w = z\,\frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

where $P_1(z)$ and $P_2(z)$ are polynomials without common factors and $P_1(0) = P_2(0) = 1$. Following Schaeffer-Spencer (loc. cit. pp 156–158), we see that $P_1(z)$ is a constant and $P_2(z)$ is a polynomial of precise degree 2. Thus

$$w = \frac{z}{1 + \lambda z + \mu z^2}, \quad |\mu| = 1.$$

Since the product of zeros of $1 + \lambda z + \mu z^2$ is of modulus 1 and no zero can lie in $|z| < 1$ it follows that both zeros lie on $|z| = 1$ and consequently,

$$(20) \qquad w = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)(1 - e^{i\beta} z)}.$$

Finally $w = \sigma(z)$ being extremal, (20) reduces to Koebe function with $\dot{\sigma}_n = n$.

Exactly as in case $n = 2$, we verify, for any n, that $R = 0$, $R_z = 0$, and $D = 0$ thereof, coincide whenever B_ν is real and $z = -1$. Namely,

$$B_0 - 2B_1 + 2B_2 - \ldots \pm 2B_{n-1} = 0.$$

Comparing this with (B*) we obtain complete identity, since by Theorem II,

$$\sigma_2 = 2, \; \sigma_3 = 3, \; \ldots, \; \dot{\sigma}_n = n.$$

Also, $B_0 = n(n-1)$, $B_\nu = (n-\nu)^2$.

We collect all these as

Corollary. A boundary point q of V_n, $n \geq 2$, is extremal and belongs to the Koebe function $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, if and only if the vector $B = (B_0, B_1, \ldots, B_{n-1})$ associated with q satisfies (B**) with $B_0 > 0$, B_ν, $\nu = 1, \ldots, n-1$, real and with minimum occuring at $z = -1$.

Literature

1. A.C. Schaeffer and D.C. Spencer, Coefficient regions for Schlicht Functions, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 35 (1950).
2. L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheits kreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss, Berlin 1916, 940-955.
3. K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I, Math. Annalen 89 (1923) 103–121.
4. M. Schiffer and P.R. Garabedian, A proof of Bieberbach Conjecture for the fourth coefficient, J. Rat. 1955.
5. Z. Charzynski and M. Schiffer, A new Proof of the Bieberbach Conjecture for the fourth Coefficient, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 5, Number 3, 1960, pp. 187–193.
6. C. Uluçay, International Congress af Mathematicians, Stockholm 1962.

EK III

Characterizations Of Riemann Surfaces[1)]

In a recent paper [1] we have shown on using Florack's theorem as hypothesis that two plane domains or Riemann surfaces are conformally equivalent if and only if the rings of continuous complex functions over these domains or Riemann surfaces are algebraically isomorphic.

The purpose of this paper is to show that under the same assumptions, same conclusions hold if Riemann surfaces are replaced by 1–dimensional manifolds. This point of view yileds at the same time a natural (theorem I) characterization of Riemann surfaces.

1. **Introduction.** In a recent paper [1] we discussed the algebraic characterization of the conformal equivalence of plane domains as well as of open Riemann surfaces. At the end we made a conclusive remark stating that the method employed yields an algebraic characterization of the Riemann surface under consideration.

The purpose of this paper[1] is to bring to light what may be contained in this remark.

To make the paper self contained we recall some of the basic facts contained in the mentioned paper. We restate [2]

Theorem A. Suppose M is a vector space of continuous complex functions on the closed unit disc $\bar{U}$, with the following properties:

(a) $1 \in M$.

(b) If $f \in M$, then also $jf \in M$.

(c) If $f \in M$, then $\|f\|_U = : \|f\|_{\partial U}$.

Then every $f \in M$ is analytic in U.

Here 1 is the function which assigns the number 1 to each $z \in U$, j is the identity function $j(z) = z$, ∂U is the boundary of U, the right and left side of the equality in (c) stand for supremum.

An alternative proof of this theorem would consist in showing that each f can be expanded in power series about $z = 0$.

[1)] Communicated upon invitation at a symposium held at Silivri in honour of Professor R. Nevanlinna, 24 sept. 1976.

C. Uluçay, Journal, Fac. Sc. K.T.Ü. vol. I. Fasc. 1., 1977.

The following are immediate consequences of theorem A.

Theorem 1. Suppose M is a vector space of continuous complex functions on the open unit disc U, with the properties:

(a) $1 \in M$.

(b) If $f \in M$, then also $jf \in M$.

(c) If $f \in M$, then on every concentric closed disc $\bar{W}$ lying in U, $\|f\|_W = \|f\|_{\partial W}$. Then every $f \in M$ is analytic in U.

Theorem 2. Suppose M is a vector space of continuous complex functions on a region D, with the following properties:

(a) $1 \in M$.

(b) If $f \in M$, then also $jf \in M$.

(c) If $f \in M$, then on every closed disc $\bar{W}$ lying in D, $\|f\|_W = \|f\|_{\partial W}$. Then every $f \in M$ is analytic in D.

Proof. Let $\bar{E}$ be any closed bounded subregion in D. Then $\bar{E}$ can be covered by a finite number of discs W. By theorem A every $f \in M$ is analytic in W. Thus every $f \in M$ is analytic in $\bar{E}$.

We wish to generalize theorem 2 on replacing D with a connected Hausdorff space that is locally euclidean. This is immediate in view of the following definitions.

2. Characterizations of Riemann surfaces. Let R be a connected Hausdorff space equipped with a family of open sets $\{N_{p_0}\}$, one for each point $p_0 \in R$, and a corresponding family of functions $\{\psi_{p_0}(p)\}$, where $z = \psi_{p_0}(p)$ is a homeomorphic mapping of N_{p_0} onto a disc in C: $U_{\rho_0} = \{z, |z - z_0| < \rho_0\}$, with $\psi_{p_0}(p_0) = z_0$. Here $z = \psi_{p_0}(p)$ is called the local parameter for p_0, and the corresponding open set N_{p_0} the parametric neighborhood. We shall identify a point p on R with the corresponding value of the local parameter. Thus U_{ρ_0} is identified with N_{p_0}, i.e., U_{ρ_0} can refer either to a disc in C, or to its inverse image on R. It is obvious that these identifications subsume that two local parametters, z, z' representing the same point p are identified through the homeo morphism

$$z' = \psi_{p'_0} \circ \psi^{-1}_{p_0}(z) \text{ or its inverse } z = \psi_{p_0} \circ \psi^{-1}_{p'_0}(z').$$

Definition 1. R with the above specifications is called a 1-dimensional manifold. The pairs (N_{p_0}, ψ_{p_0}) are called charts for R and a collection $\{(N_{p_0}, \psi_{r_0})\}$ af charts which cover R is called an atlas.

Definition 2. By the identity function on R we mean a function that is equal to $j(z) = z$ on each N_{p_0}. This function will be denoted by $J(p)$. Thus $J: R \to R$ when restricted to N_{p_0} is the identity injection $j(p) = p$ of N_{p_0} into

R. Because U_{ρ_0} is identified with N_{p_0}, there is absolutely no difference between defining $J(p)$ as being equal on each N_{p_0} to $j(z) = z$ or $j(p) = p$.

From here on R is a 1-dimensional manifold with the above specifications.

Theorem I. Suppose M is a vector space of continuous complex functions on R, with the following properties:

(a) $1 \in M$.

(b) If $F \in M$, then also $JF \in M$.

(c) If $F \in M$, then for every closed $\bar{N}_{p_0}$ $\|F\|_{N_{p_0}} = \|F\|_{\partial N_{p_0}}$. Then every $F \in M$ is analytic in R, and makes R into a Riemann surface.

Proof. If M is restricted to N_{p_0}, then M becomes a vector space of continuous complex functions f on N_{p_0} and satisfying the conditions of theorem A. Hence every $F \in M$ is analytic on N_{p_0} and therefore on R.

We recall that the addition $F + G$, and the product JF, for all $F, G \in M$ are defined pointwise. Also $-F = (-1)\,F$. On U_{ρ_0} we have the identities:

$$f = f(z) = F(\psi^{-1}_{p_0}(z)),$$
$$cf = (cF)\,(\psi^{-1}_{p_0}(z)) = cF(\psi^{-1}_{p_0}(z)),\ c \in C$$
$$f + g = (F + G)\,(\psi^{-1}_{p_0}(z)) = F\,(\psi^{-1}_{p_0}(z)) + G\,(\psi^{-1}_{p_0}(z)).$$
$$jf = (JF)\,(\psi^{-1}_{p_0}(z)) = J(\psi^{-1}_{p_0}(z))\,F\,(\psi^{-1}_{p_0}(z)).$$

Theorem I can be proved without making use of theorem A, but showing that each F can be expanded in N_{p_0} as a power series in $j(p) - j(p_0)$, and hence in $z - z_0$, while an alternative statement of theorem I (and foregoing theorems) would consist of replacing M by the ring $C(R)$ of continuous complex functions containing the constants together with the property (c).

As a consequence of the conclusion of theorem I, we have the theorem of Florack which we shall use as an assumption in our next theorem, i.e.,

(d) To every $p \in R$, there exists a function F in $C(R)$ (or M) which has only *a simple zero* at p, and such that if p is a zero point of $G \in C(R)$, then $G = HF$, $H \in C(R)$.

Theorem II. Let $C(R)$ be the ring of continuous complex functions on R with the properties (c), (d) whenever $F \in C(R)$. Let R, R' *be* two *1-dimensional manifolds* with the above properties. Let Φ be a *ring isomorphism of* $C(R)$ onto $C(R')$ such that $\Phi(c) = c$ *for* every complex constant c. Then there exists a one to one *conformal* mapping $\varphi \in C(R)$ of R onto R' such that

$$F'(p') = F \circ \varphi^{-1}(p')$$

for all $p' \in R'$ and all $F \in C(R)$ with $F' = \Phi(F)$, $F' \in C(R)'$, and every $F(F')$ is analytic on $R(R')$. Hence R, R' are Riemann surfaces.

Proof. It depends on the fact that every $p \in R$ yields a *maximal principal ideal of* $C(R)$. Indeed, let F be the function with property (d). Consider the *principal ideal* $(F) = \{GF, G \in C(R)\}$. Since $F(p) = 0$, (F) does not contain 1, i.e., $(F) \neq C(R)$. To show that (F) is *m.p.i* we must show that $(F) \subset (G) \neq C(R)$ implies $(F) = (G)$. In the latter case G must vanish on R, otherwise $(G) = C(R)$ contrary to the hypothesis. Now, since $F = GH$ for some $H \in C(R)$, then $G(p) = 0$, because F has no other zero. Then $G \in (F)$. Hence $(G) = (F)$. Let I_p be the set of all functions belonging to $C(R)$ and vanishing at $p \in R$. I_p is also an ideal of $C(R)$. Clearly $(F) = I_p$. It follows that if q is arbitrary on R, and $a \in R$ and arbitrary fixed point, then $(F(q) - F(a)) = I_a$. Hence if $a \neq b$ on R, then $I_a \neq I_b$. It follows that as p runs through R, to every *maximal ideal* I_q of $C(R)$ there corresponds under Φ a *maximal ideal* $I_{p'}$ *of* $C(R')$, $p' \in R'$, and conversely. Putting $p' = \varphi(p)$, the latter yields a one to one mapping of R onto R', such that $F'(p') = F \circ \varphi^{-1}(p')$.

Now, to show that $p' = \varphi(p)$ is conformal, or what is the samething that R, R' are *conformally equivalent*, it is sufficient to show that $\varphi(p)$ coincides on R with a function $F_0(p)$ belonging to $C(R)$ such that on every N_{p_0} its value $F_0(p)$ at each $p \in N_{p_0}$ is a local parameter of the corresponding point $\varphi(p) = p' \in R'$ identified with $F_0(p)$, i.e., $F_0(p) = p'$

Assume J is the identity function on R'. Then $F_0 = \Phi^{-1}(J) \in C(R)$ is the function on R that corrsponds to J under Φ. Hence for any $a \in R, F_0(p) - F_0(a) \in I_a$. In particular, we may chose a parametric neighborhood N_{p_0} containing a, with $p \in N_{p_0}$ and assume that $F_0(p) - F_0(a) \in I_a$ holds in N_{p_0}, here $p_0 = p_0(a)$. Now, $\Phi(F_0(p) - F_0(a)) \in I_a'$, or $z - F_0(a) \in I_{a'} = I_{\varphi(a)}$. Hence $a' = F_0(a) = \varphi(a)$. But $F_0(a) \in C(R), \forall a \in R$, and so $\varphi \in C(R)$. However, $C(R)$ is at the same time a *vector space* satisfying the conditions of theorem I. Accordingly, φ is analytic on R, and therefore *conformal* since it is one to one. Moreover, every $F \in C(R)$ is *analytic* on R. Hence R is a *Riemann surface.*

REFERENCES

[1] C. ULUÇAY, Converse of the Maximum Modulus Theorem and Rings of Continuous Complex Functions, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un.d'Ankara, Serie A_1, Tome 24 1975.

[2] W. RUDIN, Real and Complex Analysis, second edition, McGraw–Hill, 1974, p. 280.

Literatür

1. R.D.M. Accola, The bilineer relation on open Riemann Surfaces Trans. Amer. Math. Soc. 96, 1960, 143–161.
2. L.V. Ahlfors, Open Riemann Surfaces and Extremal Problems on Compact Subregions, Comment. Math. Helv. 24, 1050, 100-134.
3. L. V. Ahlfors, Complex Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, Inc, New York, 1953.
4. L. V. Ahlfors, "The complex analytic structure of the space of closed Riemann Surfaces" in analytic functions, Princeton University Press, 1960.
5. L. V. Ahlfors, Some Remarks on Teichmüller's space of Riemann Surfaces, Ann. of Math 74, 1961, 171-191.
6. L. V. Ahlfors, Kleinian Groups, Scripta Mathematica, 27, No. 2, 1963, 97–103.
7. L. V. Ahlfors, Finitely generated Kleinian groups, Am. J. Math. 86, No. 2, 1964, 413–429.
8. L. V. Ahlfors, Fundamental Polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 55, 1966, 251–254.
9. L. V. Ahlfors ve L. Bers, Riemann's mapping theorem for variable metrics Ann of Math. 72, 1960, 385–404.
10. L. V. Ahlfors ve Leo Sario, Riemann Surfaces, Princeton University Press, Princeton, 1960.
11. H. Behnke ve F. Sommer, Theorie der analytischen Functionen einer komplexen veranderlichen, Springer-Verlag, Berlin 1955.
12. L. Bers, Spaces of Riemann Surfaces, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1958, Cambridge 1960.
13. L. Bieberbach, Über die koeffizienten derjenigen Potenzreihen..., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss, Berlin 1916, 940-955.
14. D.C.J. Burgess. Analytical Topology, D. Van Nostrand Company LTD. 1966.
15. C. Caratheodory, Theory of Functions, Chelsea Publishing Company, New York, 2 Cilt, 1960.
16. H. Cartan, Theorie elementaire des Fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris. 1961.

17. R. Courant, Dirichlet Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces, Interscience, New-York, 1950.
18. Z. Charzynski ve M. Schiffer, A new proof of Bieberbach Conjecture for the fourth coefficient, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 5, 1960, 187-193.
19. C. Chevalley, Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one variable. Am. Math Soc. 1951.
20. L. R. Ford, Automorphic Functions Chelsea Publishing Company, New-York. 1951.
21. R. Fricke ve F. Klein, Theorie der Automorphen Funktionen, Teubner, Leipzig, Cilt I (1897), Cilt II (1912)
22. D. W. Hall ve G.L. Spencer II. Elementary Topology, John Wiley, New York. 1955.
23. P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger Kurven, I. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1907, 177-190.
24. P. Koebe, Uber die Uniformisierung beliebiger Kurven, II Nachr, Akad. Wiss. Göttingen, 1907, 633–669.
25. P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger Kurven, J. fur reine u. angew. Math 3, 138, 1910, 192-353.
26. E. Landau, Über die Blochsche Konstante... MZ. 30, 1929.
27. J. Lehner, Discontinuous groups and Automorphic functions, Am. Math. Soc. 1964.
28. J. Lehner, A short Course in Automorphic Functions, Holt, Rinehart and Winston Inc. New York, 1966.
29. Linda Keen, Canonical polygons for finitely generated Fuchsian groups. Acta Math. 115, 1966, 1-16.
30. K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann. 89, 1923, 103-121.
31. F. Marty, Sur le module des coefficients de Mac Laurin d'une fonction univalente, C.R. Acad. Sci. Paris, 198, 1934. 1569-1571.
32. Marshall Hall. Jr., The Theory of Groups. The Macmillan Company, New York, 1959.
33. R. Nevanlinna, Uniformisierung, Springer-Verlag, Berlin 1953.
34. R. Nevanlinna, Eindeutige Analytische Funktionen, Springer-Verlag. Berlin, 1953.
35. A. Pfluger, Theorie der Riemannschen Flachen, Springer Verlag, Berlin 1957.
36. H. Poincaré, Sur l'uniformisation des Fonctions analytiques, Acta Math. 31, 1907, 1-64.
37. H. Poincaré, Oeuvres, cilt II, Gauthier-Villars, Paris, 1916.

38. H. E. Rauch, On the trancendental moduli of algebraic Riemann surfaces, Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A., 41, 1955. 42-49
39. B. Riemann, Oeuvres Mathematiques, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
40. R. M. Robinson, Bloch Functions, Duke Math, J. 2, 1936.
41. E. Schenkmann, Group Theory, D. Van Nostrand Company, Inc. 1965.
42. M. Schiffer ve P. R. Garabedian, A proof of Bieberbach Conjecture for fourth coefficient, J. Rat. 1955.
43. M. Schiffer ve D. C. Spencer, Functional of Finite Riemann Surfaces, Princeton University Press, 1954.
44. A. C. Schaeffer ve D.C. Spencer, Coefficient Regions for Schlicht Functions, Am. Math. Soc. 1950.
45. G. F. Simmons, Topology and Modern Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1963.
46. G. Springer, Introduction to Riemann Surfaces, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1957.
47. U. Srebro. Groups of lineer fractional transformations, Duke Math. J. 34, 1967, 49-52.
48. S. Stoïlow, Leçons sur les Principes topologiques de la Théorie des Fonctions analytiques, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
49. C. Uluçay, Konform Tasvir, Ankara Üniversitesi Fen Fak. yayınları Um. 70-Mat. 21, 1955, 1-279.
50. C. Uluçay, On the values of the Bloch-Landau Constants, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 102, 54, No. 9, 1948.
51. C. Uluçay, On the Bloch-Landau Constants, Communications de la Fac. des Sc. de l'Un. d'Ankara, 7, 1955, 233-252.
52. C. Uluçay, Sur les Fonctions de Bloch de la troisième espèce, Communications dela Fac. des. Sc. de l'Un, d'Ankara, 6, 1954.
53. C. Uluçay, Fonksyonlar Teorisi, Ankara Üniversitesi Fen Fak. yayınları Um. 77-Mat. 23, 1956, 1-307.
54. C. Uluçay, Sur les Fonctions de Bloch de la premiere et de la seconde espece, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un, d'Ankara, 6, 1954.
55. C. Uluçay, Note on Schiffer's Variation Formula, Archiv der Math. 7, 1956, 291-294.
56. C. Uluçay, The exact values of the Bloch Landau Conslants. *B*, *L*, J. für reine u. angew. Math 199, 1958, 188-191.
57. C. Uluçay, On Inequalities in the Theory of Schlicht Functions, J. für reine u. angew. Math. 202, 1959, 6-8.
58. C. Ulucay, On The coefficients of Schlicht Functions, J. für reine u. angew. Math 202, 1959 1-5.
59. C. Uluçay, On Bieberbach's Conjecture, Mathematisches Forschung Institut Oberwolfach, 24-29, Marz 1963.

60. C. Uluçay, Cihetli Kompakt bir Yüzeyin Euler karakteristiği, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi ilmi Raporlar Serisi No. 73. 1969, 11. 1-13.

61. C. Uluçay, Topolojiye Giriş ve Grup Temsilleri İ. T. Üniversitesi Makine Fak. yayınları 1972.

62. C. Uluçay, A General Formulation of an Extremalization Problem and its Application to Analytic Functions with Positive Real Part, Communications da la Fac. des Sciences de l'Un, d'Ankara, Serie A. Tome 13, 1971.

63. C.Uluçay, On The Constant a, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un d'Ankara, Série A, Tome 21A. 77-87, 1971.

64. C.Uluçay, Proof of Bieberbach's Conjecture, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un. d'Ankara. Série A, Tome 22A, 1-20, 1973.

65. C.Uluçay, On an Extremalization Method in the Theory of Analytic Functions, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un. d'Ankara, Série 13A, 85-93. 1974.

66. C.Uluçay, Converse of the Maximum Modulus Theorem and Ring of Continuous Complex Functions, Com. de la Fac. des Sc. de l'Un. d'Ankara. Tome 24, 1-8, 1975.

67. C.Uluçay, Characterizations of Riemann Surfaces. Journal of The Fac. Sc. of The K.T.Ü. Vol I. Fasc. 1, 1-6, 1977.

68. H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Flachen, 2. baskı, Teubner, Leipzig, 1923.

69. H. Weyl, Method of Orthogonal Projections in Potential Theory, Duke Math. J. 7, 1940, 411-444.

70. A. C. Zaanen, Linear Analysis, North-Holland Publishing co. 1953.

İNDEKS

-A-

Abel, 574
Açı (iki çemberin), 98
Açık aralık, 33
  cümle, 34
  Riemann Yüzeyi, 468
Ait, 1
Alan teoremi, 272
Alexandroff, 374
Altbölme, 403
Altcisim, 14
Altcümle, 2
Altgrup, 295
Altlimit, 32
Altsınır, 16
Analitik, 120, 152, 265, 462
  fonksiyonlar serisi, 134
  dal, 258
  nokta, 258
  tasvir, 440
  temdit, 257, 591, 592
  uzay, 595
Antianalitik, 487
Antiholomorf, 585
Aperiod grubu, 317
Aralık (Açık, kapalı), 33, 69
Archimed hassası (kanunu), 15
Argüment, 90
  değişimi teoremi, 160
Asal sayıların dağılımı, 218
Asal sayılar teoremi, 232
Asimtotik değer, 209
  açılım, 393
Ayırmıyor, 408
Ayrık, 111
  singüler nokta, 147, 149
Ayrılabilir, 33
Ayrım (Jordan teoremi), 114

-B-

Banach cebiri, 610
Basitleştirme, 412
Basit irtibatlı, 133, 152.
  jordan eğrisi, 78
  sübstitüsyonlar, 93
Başlangıç noktası, 33
Belirsiz integral, 50
Bernoulli, 210
Betti, 309, 415
Bilineer, 434, 512.
Biholomorfik, 583
  tasvir, 653
Birim eleman, 14
Birimin bölünmesi, 451
Bolzano, 34, 70, 111
Borel, 35, 111
Boş cümle, 27
Boyut, 84, 85
Bölenler, 516
Böler, 433
Bölge, 112
  (Jordan), 392
  (UFD) (birtek şekilde ayrılış), 618
Bölme, 7
Bölüm grup, 296
  cismi, 618
Bremermann, 598
Büküm (bükülme), 309, 419
Büzülebilir uzay, 698

-C-

Cantor, 16, 34, 127
Cauchy, 32, 59, 121, 127, 129, 142, 157, 199, 568, 569, 570, 577
C-Cebiri, 610
Cebirin esas teoremi, 161
Cebirsel Topoloji, 402
Cech-Kohomolojisi, 655
Chern sınıfı, 664
Christoffel, 274
Cihetli, 387
Cihetlilik, 387
Cins, 179, 188
Cisim, 13
  (alt), 14

Civar, 33
(iç), 169
Civarların civarlara dönüşü, 162
Cousin problemi, 658
I problemi, dağılımı, 658
II problemi, 660
(multiplikatif) 659
Verileri, 658
Cümle, 1, 26
(açık), 3, 111
(alt), 2
(ayrık), 112
(boş) 27
(kapalı), 31, 111
(kenar), 85
(limit), 446
Cümle (normal), 560
(sıfır), 628
(sınırlı), 70
(sonlu), 27
(sonsuz), 27

-Ç-

Çarpım cümle, 1
(dış), 455
(kanonik), 179
(kartezyen), 372
(topolojik), 372
Çarpma, 5, 8, 11, 17, 19, 86
Çekici nokta, 565
Çember aileleri, 99
Çevre, 126
(basit), 126
integrali, 198, 215
Çifte oran, 94, 99
Çiftlerin homotopi kategorisi, 688
Çıkarma, 7
Çokdeğerli analitik fonksiyon, 256, 257
Çok indis, 572, 575
Çokkatlı, 387

-D-

Dağılım, 347, 362
Dahil etme tasviri, 640
Dal, 256, 258, 262
(analitik), 258
Dallanmalı örtme yüzeyleri, 400
Deformasyon, 691
(sürekli), 671
Değer bölgesi, 1, 118
Dekompozisyon (Ayrılış), 582
De la Vallee Poussin, 230
Demet, 625
(analitik), 635
analitik demet teorisi, 642
analitik demet morfizmi, 640
bölüm demetleri, 639
C-cebirleri demeti, 635
epimorfizmi, 640
(ideal), 638
morfizmi, 633
modüllerin ön demeti, 636
öndemet, 629
sabit, 637
tutarlı (insicamlı), 643
Denjoy, 129
De Rahm (d-Kohomolojisi), 585
Desimal, 25
Destek, 468
Determinant, 168
Devir, 289, 417
grupları, 302, 303
Diadik kesir, 83
Difeomorfik, 588
Diferansiyel, 40, 66, 69, 120,
451, 462, 463,
486, 489, 493,
497 499, 511
(1. dereceden), 454
(2. mertebeden), 455
(harmonik ve analitik), 462
(kapalı), 457
(konjüge), 123, 457, 568
(Schottky), 480, 503, 505
(tam), 455, 459
(üniform), 128
(total), 588
form, 569, 587
katsayısı, 120
operatörü, 568
Dik dörtgen, 70
Dik ortay, 561, 562
Dirac, 360, 365
Direkt analitik temdit, 257
Direkt konform, 266
Direkt (indüktif) limit, 630
Direkt (indüktif) modül sistemi, 630
Direkt toplam, 309
Diskre tasvir, 654
Dizi, 16, 31, 44, 62

(rasyonel sayı), 16
(esas), 17
(tıpatıp), 642
Diş çarpım, 455
nokta, 116
ölçü, 330
Doğru, 115
parçası, 115
Doğurucu çekirdek, 491
Dolbeault, 666
Dönme, 93
Düzgün, 390
Düzgünleştirme, 471
Düzlem, 70
(genişletilmiş), 92, 150

-E-

Eğri, 83, 571
(basit jordan), 78
(kapalı), 675
(sıfır), 675
Eğrisel irtibatlı topolojik uzay, 384
Eğrisel (lokal) irtibatlı topolojik uzay, 384
Eğrisel irtibatlı uzaylar, 384
Ekivalentlik (eşdeğerlik) bağıntısı, 2, 114, 258
Eksponansiyel fonksiyon, 260
Elemanter fonksiyon, 259
Eliptik, 100, 537
Enversiyon 93
Erdös, P, 255
Esas bölge, 558, 562, 662
değer, 90
dizi, 17
grup, 262, 387, 395, 615, 679
kısım, 149, 180
nokta, 603
singüler nokta, 149
Eşdeğerlik, 564
Eşitlik, 11
Eşitsizlik, 88, 126, 142, 344
Euclid-Hartogs şekli, 592, 593
Euler, 195, 221, 260, 431

-F-

Fischer, 145
Florack, 655
Fonksiyon, 1
(analitik), 120, 152, 258
(çok değişkenli), 69
dizi, 62
(eksponansiyel), 260
(Gamma), 194, 207, 209, 212, 215
(kompleks), 118
(konjüge), 268
(monoton), 40
(periodik), 183, 261
(schlicht), 272, 273
seri, 68
(sürekli), 36
(tam), 174, 188
(trigonometrik), 260
Fonksiyon eleman, 256
Fonksiyonel, 357, 476
Fonksiyonel bağıntısının devamlılığı, 258
Fonksiyonel denklem, 207, 220
Form
(bilineer), 434
(holomorfik), 590
(kanonik), 412
(kapalı), 587
(kapalı holomorfik), 587
Form
(keyfi-defa diferansiyellenebilir), 568
(1-form), 587
(pür r-boyutlu), 589
(sıfır), 586
(tam), 587
(tam holomorfik), 587
Fuchs, 450, 546
Funktor, (kovaryent), 667, 668, 669, 689
(unutkan), 669

-G-

Gayri Euclidyen geometri, 542
(konveks cümle), 562
(poligon), 562
Galois teorisi, 694
Gamma fonksiyonu, 194, 207
Gauss, 619
Genel analitik fonksiyon, 257
Generatör, 308
Genişletilmiş düzlem, 92, 150
Geometrik gösterim, 91
Geriye dönüş, 691
tasviri, 671
Global sonlu, 643
Goursat, 129
Green formülü, 460
Grup, 293, 308, 314

(bölüm), 296
(homoloji), 399
(komütatif), 308
(reel sürcksiz), 548
(serbest), 310, 694

-H-

Hadamard, 164, 166, 190, 227, 230
Halka, 145, 329
(Hensel), 621
(Henselyen), 622
(lokal), 618
(kompleks halka uzayı), 648, 649
(Noether), 623
(Noetheryen), 623
(yakınsaklık), 147
Hankel, 215
Hardy, 138
Harmonik, 123
(diferansiyel), 462, 464, 499, 500
Harmonik ölçüler, 500
Hartogs, 573
Fevkalade hadisesi, 591
(Genel), 593
Has, 2
Hausdorff, 33, 367
Heaviside, 360
Heine, 35, 111
Hilbert, 319, 463
Hilton, P. T., 685
Hiperbolik, 100, 537
Hirzebruck, 666
Holomorf, 120
Holomorfi bölgeleri, 591, 592
Holomorfik kabuk, 606, 608
Holomorfik konveks, 655
Holomorfik tasvir, 581, 582
Homeomorfizm, 381
Homoloji grubu, 399, 411, 415, 418, 420, 428
Homoloji tabanı, 420, 432
(kanonik), 435
Homomorfizm, 300
Homotesi, 93
Homotop, 258, 262, 263, 425
Homotopi, 672
Homotopik eşdeğer, 623, 688
Homotopinin geometrik mânası, 686
Homotopi grupları, 683
Homotopi inversi, 688
Homotopik invarient, 675
(sıfır), 680
tasviri, 678
teorisi, 667
temdit hassası, 692
tipi, 688
Hölder eşitsizliği, 344
Hurwitz, 162

-İ-

İç civar, 169
İç kenar, 563
İç nokta, 111, 116
İç transformasyon, 164, 165
İdeal, 618
(aslî), 618
(aslî ideal bölgesi, PID), 618
İdeal eleman, 347
fonksiyon, 348
nokta, 92
sınır, 435
İmajiner kısım, 91
İmplisit fonksiyon teoremi, 582
İmza, 548
İndeks, 302, 385
İndirekt konform, 269
İndüktif limit, 630
İntegral, 45, 75, 126, 152, 155, 340, 355
(belirsiz), 50
(çevre), 198, 215
(katlı), 73
(kompleks), 123
(Lebesgue-Stieltjes), 341,
(Riemann), 45
İrasyonel sayı, 24
İrtibatlı, 111, 154, 376
(basit), 133
(eğrisel), 384
İtici nokta, 565
İzdüşüm, 258
İzomorf, 12
İzomorfizm, 8, 298

-I-

Iraksak, 31

-J-

Jensen, 187, 188

-K-

Kaldırılabilir singüler nokta, 148, 445
Kanonik, 412, 435

çarpım, 179
gösterim, 228
Kanonik sistem, 565
(normalleştirilmiş), 567
tasvir, 605
Kapalı, 13, 31, 34, 70, 257
aralık, 33
Jordan eğrisi, 78, 114
kompleks düzlem, 93
Karakteristik, 431
sınıf, 662
Kategori, 667
Kenar, 85, 388, 466
Kesit, 627
Kısmî kesir, 179
Kısmî toplam, 59
Klein, 546
Kodevir, 587
grubu, 587, 656
Kofunktor (kontravaryent), 669, 689
Kohomolojisi (δ-), 664
Kohomoloji dizisi, 664
Kohomoloji grubu, 657, 661
(devir grubu), 587
Kohomoloji sınıfı, 661
Kohomoloji teorisi, 665,
Kointac edilen topoloji, 691
Kolifleme, 692
Koleksiyon, 16, 144
Kompakt, 70, 372, 407
(Alexandroff), 374
destek, 468
Kompleks, 402
atlas, 651
düzlem, 110
değişken, 118
fonksiyon, 118
manifold, 635, 648, 651
sayı, 86
Kompleman, 114
Komütatif, 308
Komütatör, 304, 399
altgrubu, 304
grup, 399
Konform, 115, 266, 537
eşdeğer, 564
(indirekt), 269
izdüşüm, 564
Konjüge kompleks sayılar, 91
Konjüge diferasiyel, 123, 457
Kontinium, 112, 164
problemi, 28
Kontinü, 30, 112
Konveks kabuk, 655
Koordinat, 91
sistemi, 651
transformasyonu, 651
Kosınır, 587
operatörü, 656
Kozincir, 656
Kritik hat, 228
nokta, 287
Kutup nokta, 148
Kuvvet, 27
serisi, 135, 141, 571
serileri halkaları, 617

-L-

Laplace, 123
operatörü, 458
Laurent serisi, 145, 488
Legendre, 197
Lebesgue-Stieltjes integrali, 341
Leibnitz, 75, 76
Levi problemi, 598
Lif, 600
Limit, 31, 446
(alt), 32
(üst), 31
Limit nokta, 99
Liouville, 134
Lindelöf, 168
Lineer fonksiyonel, 357, 476
sübstitüsyon, 92
transformasyon, 270
Logaritmik fonksiyon, 261
Lokal eğrisel irtibatlı, 384
irtibatlı, 377
kompakt, 70
sonlu, 643
topolojik, 165
Loksodromik, 101

-M-

Mahrek, 446, 561
Majorant seri, 574
Maksimal, 258
Maksimum prensibi, 165, 573, 653
Matematik indüksiyon, 3
Matris, 93
Merkez, 303

Meromorf, 178, 627, 660
Mertebe, 145, 148, 188, 189
(grubun), 294, 302
Metrik, 33, 368
Mevcut, 56
M-kriteri, 69, 137, 156
Minkowski eşitsizliği, 344
Mikuzinski, 347
Mittag-Leffler, 180
Modül, 88
Modül (R-), 623
Modül (Z-), 623
Monodromi, 164, 264, 393
Monoton, 40, 77, 82
Morera, 134
Mutlak değer, 10, 88
yakınsak, 55, 60, 173
Mümtaz örtü, 661
sınır, 574

-N-

Negatif eleman, 14
sayı, 9
Nokta, 70, 92
Nokta (ideal), 92
Norguet, 598
Normal, 306
altgrup, 296
cümle, 560, 561
form, 412
poligon, 562, 563
normalleştirilmiş (çözüm), 565
Normlu C-vektör uzayı, 612
Norm (t ye nazaran), 611
Nümerik değer, 10
Nüve, 625

-O-

Oka, 598
Oka-Serre teoremi, 664
Operasyon, 1
Operatör, 416, 456, 457, 458
(düzgünleştirme), 471
(δ-operatörü), 656
Ortalama değer teoremi, 43
Ortogonal, 322, 465, 470, 475
Otomorfizm, 298
O, o sembolü, 171, 189

-Ö-

Ölçü, 330, 331
(Lebesgue), 337
(Stieltjes), 339
Ölçülebilir,
cümle, 331
eğriler, 78, 79
fonksiyon, 340
Örtme, 35
Örtme yüzeyi, 258, 391, 443
(dallanmalı), 400
(normal), 398
(tam), 400
(üniversel), 397, 537
Örtü, 402
transformasyonları, 397, 445, 539
uzayı, 600
Örtüyor, 70
Özdeşlik teoremi, 580, 652

-P-

Parabolik, 101
Parakompakt, 629
Paralel kayma, 93
Peano, 2, 83
Period, 183, 261, 497, 511
(devir boyunca), 476
grubu, 317
Perron, 240
Phragmen, 169
Poincaré, 190
lemması, 588, 589
Poisson, 184, 188
Polidisk, 574
Polisilindir, 574
Poliyarıçap, 577
Poligon, 265, 277, 280
(normal), 562
Polihidron, 402
Pozitif tam sayılar, 2
Psödokonveks bölge, 597
Pürüzsüz, 391

-R-

Rasyonel fonksiyon, 151, 259
sayı, 11, 12, 16, 17
Rank, 309, 316
Reel analitik çokkatlı, 567
Reel kısım, 91
Reel yüzey, 595
Regüler, 613
Regüler nokta, 143

Regülye, 120
Reinhardt bölgesi, 575
(deliksiz), 576
(has), 576
(tam), 576
Rezidü, 157
tecremi, 157
Riemann, 148, 516, 518, 537
bilineer bağıntısı, 512
bölgesi, (noktalı Riemann) 598, 599
denklemi, 121, 269
eşitsizliği, 524
hipotezi, (tahmini), 228, 255
integrali, 45
konform tasvir teoremi, 537
Yüzeyi, 269, 439
ζ(s) fonksiyonu, 139, 218
(açık), 468
(HD, AD), 479
(kenarlı), 441, 466
Riesz, 345
Rijit hareket, 561
Rouché, 161
Roch, 516, 518
Rotasyon invarient, 576
Rölatif topoloji, 371, 573

-S-

Sap, 626
Sayı, 1, 2, 7, 11, 16
Sayılabilir, 27
Schlicht, 272, 273, 605
Schottky, 480, 505
Schwartz, 357
Schwarz, 166, 274
akis prensibi, 269, 277
eşitsizliği, 88, 344, 452
türevi, 278
Selberg, A., 255
Serbest grup, 303, 310
Serbest kenar, 563
Seri, 58, 68, 134, 141
(kuvvet), 571
(formel kuvvet), 571, 572
Serre, 647
Simetri, 96
Simpleks, 402, 460
cihetlendirilmesi, 404
Singüler nokta, 143, 147, 148, 149
Sıfır, 9
dizi, 18
Sınır, 112, 416
noktası, 111
Sınırlı, 16, 32, 37, 70
Sıra kavramı, 6, 9, 15, 21
Sonlu cümle, 27
desimal, 26
grup, 294
tevlit, 309, 643
Sonsuz, cümle, 27
çarpım, 172, 174
desimal, 26
grup, 294
integral, 54, 155, 156, 199
noktası, 92, 150
Steenrod, N. E., 685
Stein manifoldu, 655
Stieltjes integrali, 341
ölçüsü, 339
Stirling, 204, 213
Stoilow, 83, 163
Stoks formülü, 569
Strüktür teoremi, 311, 314
Sübstitüsyon, 92
(basit), 99
Sürekli, 36, 39, 69, 70, 72, 118, 119, 380, 381, 382
diferansiyellenebilir, 124, 454
Süreksiz, 36
grup, 531, 548
Sylow, 318

-T-

Taban, 373, 435
nokta, 679
Tabii sayılar, 2, 27
projeksiyon, 573
Tam, 459
analitik fonksiyon, 257
bölen, 662
diferansiyel, 455
fonksiyon, 172, 174, 188
kabuk, 593
örtme yüzeyleri, 400
sayılar, 7
Tamlık bölgesi, 617
Tahditsiz, 393
Tarih bölgesi, 1, 118
Taylor açılımı, 143
Teichmüller noktaları, 565
uzayı, 564
Tekabül, 26

Tek değerli (tarifli), 118, 127
analitik fonksiyon, 256
dal, 256
Temdit, 256
problemi, 689
Ters eleman (invers), 14
Todd cinsi, 666
Toplam, 3, 7, 11, 17, 86
Toplam cümle, 114
teoremi, 260
Topoloji, 366, 402
Topolojik çift, 685
ekivalent, 163
eleman, 164
hassa, 31, 163, 164
invarient, 31, 83
transformasyon, 31, 163, 266
uzay, 366, 668
(noktalı topolojik), 668
Transfini sayı, 27, 44
Trigonometrik fonksiyon, 260
Tüketme, 405
Türev, 40, 75, 120, 131

–U–

Uluçay, 115, 273, 280, 537, 696, 705, 721
Uzay, 319, 366
(C^n), 570
(mutlak), 573
Uzunluk, 33, 79, 81

–Ü–

Üç daire teoremi, 166
Üçgenleme, 402
Üçlü koordinat, 115
Üniform diferansiyel, 128
Üniform sürekli, 39, 72, 119
yakınsak, 57, 62, 66, 68, 74, 76, 136, 152, 174, 572
Üniformizasyon, 531, 537
Üniversel, 630
Üniversel örtme yüzeyi, 397, 537
Üst limit, 31
Üst sınır, 16
(en küçük), 23

–V–

Varlık teoremleri, 486, 500
Varyasyon, 67, 160

–W–

Weierstrass, 34, 38, 70, 111, 137, 141, 149, 152, 176, 351, 526
formülü, 614
hazırlık teoremi, 616
polinomu, 617
Weyl, 470, 474
Witney toplamı, 634

–Y–

Yakınsak, 31, 55, 57, 60, 61, 62, 66, 68, 69, 72, 74, 112, 113, 135, 136, 137, 152, 172, 174
Yakınsaklık bölgesi, 134, 135, 575
dairesi, 135, 136
halkası, 147
kriteri, 55, 57, 69, 137
Yığılma noktası, 34, 70, 111
Yüzey, 387, 391, 398, 400, 439, 443, 446, 468, 479

–Z–

Z-matrisi, 515
Zincir, 257, 416, 493

YANLIŞ - DOĞRU CETVELİ

SAYFA	SATIR	YANLIŞ	DOĞRU
10	26	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$
11	22	$A_i \cup A_j$	$A_i \cap A_j$
31	6	karamı	kavramı
70	22	R ye ait bir	R ye ait sonlu bir
75	9	${}_a\int^n$	${}_a\int^b$
173	9	$P_n = \rho_n^{\ i\Phi_n}$	$P_n = \rho_n e^{i\Phi_n}$
190	14	4.2.7.1	5.2.7.1
230	12	$n \neq p^m\ m > 0$	$n = p^m\ m > 0$
300	9	homomorfizm(1)	homomorfizm
308	1, 2, 5	X	x
330	14	$A_i \subset A_j$	$A_i \cap A_j$
381	15	f(A)	$\overline{f(A)}$
472	8	$(M_\rho f)\ dx\ dy$	$(M_\rho f) g dx\ dy$
473	14	$)^{1/2} \leq$	$)^{1/2}) \leq ($
512	27	bağıntığı	bağıntısı
522	25	$-(m+1))!$	$-(m+1)!$
545	33	og_2T_2	$g_2 o T_2$
587	31	f_{il}	i_l
612	20	B	H_n
613	3,7,12,18,20	B	B_t
614	21–22	B	B_t
624	2–3	M^q	R^q
627	2	tensil	teşkil
627	3	M_z	f_z/g_z