# PGL(2,Z)'nin dış otomorfizmi ve **R**'ye dayattığı 'modüler' envolüsyon.

A. Muhammed Uludağ, Galatasaray Üniversitesi
(Hakan Ayral ile ortak çalışma)

October 6, 2016

Marmara Üniversitesi Matematik Günleri
6-8 Ekim 2016

# Foreword

İkili kuadratik formlara dair bir makalesinde Poincaré şöyle der

**“ ...belirsiz kuadratik formlar için değişmez bulmanın, bu kelimeye yüklediğimiz anlam dâhilinde, imkânı yoktur...”**

O günden beri birkaç teşebbüs yapılmıştır...

Bu incelememiz “değişmez” kelimesinin anlamını değiştirerek bu konuda ne yapılabileceğini görmek için yeni bir teşebbüstür.

# Foreword

İkili kuadratik formlara dair bir makalesinde Poincaré şöyle der

**" ...belirsiz kuadratik formlar için değişmez bulmanın, bu kelimeye yüklediğimiz anlam dâhilinde, imkânı yoktur..."**

O günden beri birkaç teşebbüs yapılmıştır...

Bu incelememiz "değişmez" kelimesinin anlamını değiştirerek bu konuda ne yapılabileceğini görmek için yeni bir teşebbüstür.

# Foreword

İkili kuadratik formlara dair bir makalesinde Poincaré şöyle der

**" ...belirsiz kuadratik formlar için değişmez bulmanın, bu kelimeye yüklediğimiz anlam dâhilinde, imkânı yoktur..."**

O günden beri birkaç teşebbüs yapılmıştır...

Bu incelememiz "değişmez" kelimesinin anlamını değiştirerek bu konuda ne yapılabileceğini görmek için yeni bir teşebbüstür.

# İçindekiler

# Birinci Kısım

# Jimm'in tanımı ve fonksiyonel denklemler

## Notation

Her $x \in \mathbf{R}$ sürekli kesir şeklinde yazılabilir:

$$[n_0, n_1, n_2, \dots] = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\dots}}}$$

($n_0 \in \mathbf{Z}$, $n_i \in \mathbf{Z}_{>0}$ for $i > 0$), şayet $x$ irrasyonelse bu sürekli kesir yegânedir.

## Notation

$1_k$ ile $k$ uzunluğundaki $1, 1, \dots, 1$ dizisini gösteriyoruz.

**Notation**

Her $x \in \mathbf{R}$ sürekli kesir şeklinde yazılabilir:

$$[n_0, n_1, n_2, \ldots] = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

($n_0 \in \mathbf{Z}$, $n_i \in \mathbf{Z}_{>0}$ for $i > 0$), şayet $x$ irrasyonelse bu sürekli kesir yegânedir.

**Notation**

$1_k$ ile $k$ uzunluğundaki $1, 1, \ldots, 1$ dizisini gösteriyoruz.

$\mathbf{R}$'den $\mathbf{R}$'ye 'tekil' bir fonksiyon ج (Jimm) tanımlayalım:

**Tanım**

$$\mathbf{J}([n_0, n_1, n_2, \ldots]) = \\ [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \ldots]$$

('Tekil fonksiyon'dan ne kastettiğimiz ileride açığa kavuşacak.)

## Tanım (Tekrar)

$$\mathbf{J}([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

## Examples

$$\mathbf{J}([3, 3, 3, \dots] = [1_{3-1}, 2, 1_{3-2}, 2, 1_{3-2}, 2 \dots] = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$\mathbf{J}([5, 5, 5, \dots] = [1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, \dots]$$

Göstereceğiz ki bu çok özel bir fonksiyondur, zira:

- $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ modüler grubunun dış otomorfizminden kaynaklanır,
- h.h. türevlenir olup türevi h.h. sıfırdır,
- bazı çok özel fonksiyonel denklemleri sağlar,
- kuadratik irrasyoneller kümesini korur,
- kuadratik eşlenik alma (Galois etkisi) ile yer değiştirir (komüt eder),
- Lebesgue ölçüsünün gizli bir simetrisini verir,
- 
- .... bir 'gerçel' modüler formdur.

## Tanım (tekrar)

$$\mathbf{J}([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

Bu tanım sadece $n_k \geq 2$ için çalışır. $n_k = 2$ durumunda da çalıştırmak için, şu kural kullanılır:

## Kural I

$$\dots, n, 1_0, m, \dots = \dots, n, m, \dots$$

## Örnekler

$$\mathbf{J}([2, 2, 2, \dots]) = [1, 2, 1_0, 2, 1_0, 2 \dots] = [1, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\mathbf{J}([2, 3, 2, 3 \dots]) = [1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, \dots]$$

## Tanım (tekrar)

$$\mathbf{J}([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

Bu tanım sadece $n_k \geq 2$ için çalışır. $n_k = 2$ durumunda da çalıştırmak için, şu kural kullanılır:

## Kural I

$$\dots, n, 1_0, m, \dots = \dots, n, m, \dots$$

## Örnekler

$$\mathbf{J}([2, 2, 2, \dots]) = [1, 2, 1_0, 2, 1_0, 2 \dots] = [1, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\mathbf{J}([2, 3, 2, 3 \dots]) = [1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, \dots]$$

## Tanım (tekrar)

$$\mathbf{J}([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

$n_k = 1$ durumunda çalıştırmak için ise, şu kural kullanılır:

## RULE II

$$\dots, n, 1_{-1}, m, \dots = \dots, n+m-1, \dots$$

## Örnekler

$$\mathbf{J}([1,1,2,1,2,1,2,\dots]) =$$

$$[1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_{3}, 1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_{3}, 1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_{3}, \dots] =$$

$$= [3, 3, 3, \dots]$$

daha önce görmüş müydük?

## Tanım (tekrar)

$$\mathbf{J}([n_0, n_1, n_2, \ldots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \ldots]$$

$n_k = 1$ durumunda çalıştırmak için ise, şu kural kullanılır:

## RULE II

$$\ldots, n, 1_{-1}, m, \cdots = \ldots, n+m-1, \ldots$$

## Örnekler

$$\mathbf{J}([1,1,2,1,2,1,2,\ldots]) =$$

$$[1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_{3}, 1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_{3}, 1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_{3}, \ldots] =$$

$$= [3, 3, 3, \ldots]$$

daha önce görmüş müydük?

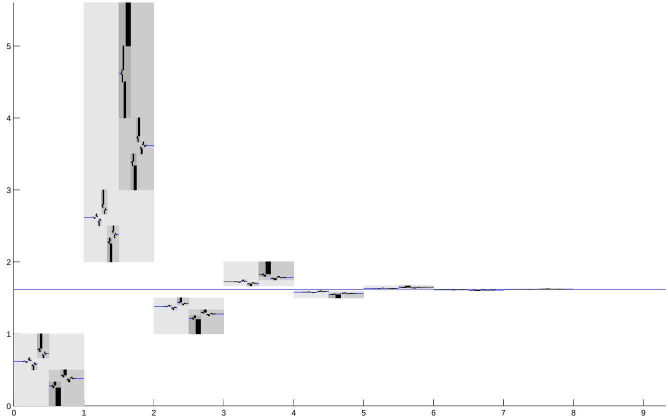
**Tanım (tekrar)**

$$\mathbf{J}([n_0, n_1, n_2, \ldots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \ldots]$$

Bu iki kuralla birlikte **J** $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ üzerinde iyi tanımlı olur ve bir "çevrimdir" (envolüsyon).

$$\mathbf{J}(\mathbf{J}(x)) = x$$

## **J**'in grafiğini şöyle çizilir (graf koyu kutucukların içinde yer alır)



# Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- **J** fonksiyonu $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- **Q** üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- **J** hemen her yerde türevlenirdir.
- türevi hemen heryerde sıfıra eşittir.
- **Q** üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

# Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- $\mathbf{J}$ fonksiyonu $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- $\mathbf{Q}$ üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- $\mathbf{J}$ hemen her yerde türevlenirdir.
- türevi hemen heryerde sıfıra eşittir.
- $\mathbf{Q}$ üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

# Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- $\mathbf{J}$ fonksiyonu $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- $\mathbf{Q}$ üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- $\mathbf{J}$ hemen her yerde türevlenirdir.
- türevi hemen heryerde sıfıra eşittir.
- $\mathbf{Q}$ üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

# Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- **J** fonksiyonu $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- **Q** üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- **J** hemen her yerde türevlenirdir.
- türevi hemen heryerde sıfıra eşittir.
- **Q** üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

# Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- $\mathbf{J}$ fonksiyonu $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- $\mathbf{Q}$ üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- $\mathbf{J}$ hemen her yerde türevlenirdir.
- türevi hemen heryerde sıfıra eşittir.
- $\mathbf{Q}$ üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

Şimdi şu örneği ele alalım:

## Örnek

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(1+[3,3,3\ldots]) = \mathbf{J}([4,3,3\ldots]) &= [1,1,1,2,1,2,1,\ldots] \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{[1,1,2,1,2,1,\ldots]}}_{=\mathbf{j}([3,3,3,\ldots])}\end{aligned}$$

Daha genel olarak şu denklem geçerlidir:

## Fonksiyonel Denklem (*)

$$\mathbf{J}(1+x) = 1 + \frac{1}{x}$$

(*) fonksiyonel denklemi aşağıdaki şu daha temel fonksiyonel denklemlerden türetilebilir:

$$\mathbf{J}(\mathbf{J}(x)) = x$$

$$\mathbf{J}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\mathbf{J}(x)}$$

$$\mathbf{J}(-x) = -\frac{1}{\mathbf{J}(x)}$$

$$\mathbf{J}(1-x) = 1 - \mathbf{J}(x)$$

Fonksiyonel denklemlerin bir de iki-değişkenli ifadesi mevcuttur.

$$\mathbf{J}(x) = y \iff \mathbf{J}(y) = x$$

$$xy = 1 \iff \mathbf{J}(x)\mathbf{J}(y) = 1$$

$$x + y = 0 \iff \mathbf{J}(x)\mathbf{J}(y) = -1$$

$$x + y = 1 \iff \mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(y) = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \iff \frac{1}{\mathbf{J}(x)} + \frac{1}{\mathbf{J}(y)} = 1$$

$\Longrightarrow$ **J**, harmonik sayı çiftlerini korur.

$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$'nin şu Möbius grubuna izomorf olduğunu hatırlayalım:

$$\left\{ \frac{px+q}{rx+s} \mid ps - qr = \pm 1, p, q, r, s \in \mathbf{Z} \right\}$$

**Fact**

Şu üç envolüsyon, $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ grubunu üretir:

$$Ux := \frac{1}{x}, \quad Vx := -x, \quad Kx := 1 - x$$

($+$ bazı bağıntılar)

Fonksiyonel denklemler şu şekilde yazılır

$$\mathbf{J}U = U\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}K = K\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}V = UV\mathbf{J}$$

$\Longrightarrow$ ki bu da **J**'in $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$'nin **Dyer dış otomorfizmi** olduğunu gösterir .

En genel fonksiyonel denklem şu şekilde yazılır:

$$\mathbf{J}(Mx) = \mathbf{J}(M)\mathbf{J}(x), \quad M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

(burada $\mathbf{J}(M)$, $M$'nin Dyer otomorfizmi altındaki görüntüsünü göstermektedir.).

Bu denkleme göre $\mathbf{J}$ "bir çeşit" **kovaryant** fonksiyondur.

**Note:** Şayet

$$f\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{pf(z)+1}{rf(z)+s} \quad \forall \frac{pz+q}{rz+s} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

ise, $f$'ye katı kovaryant (veya equivaryant) denir. Bu türden üst yarı sahada analitik fonksiyonlar, modüler formlar kullanarak elde edilebilir.

## Olgu I

**J** nihayetinde devirli sürekli kesirleri yine nihayetind devirli sürekli kesirlere götürür.

$$\Longrightarrow$$

**J kuadratik irrasyonelleri** yine **kuadratik irrasyonellere** götürür.
**yani J** "gerçel-çarpım kümesini" muhafaza eder.

(iz, norm, işaret gibi değerlere saygı duymaz)

## Örnekler

$$\mathbf{J}(\sqrt{2}) = \mathbf{J}([1, 2, 2, \ldots]) = 1 + \sqrt{2}$$

Ama genelde bu kadar basit değildir:

$$\mathbf{J}(\sqrt{11}) = \frac{15+\sqrt{901}}{26}, \quad \mathbf{J}(-\sqrt{11}) = \frac{15-\sqrt{901}}{26}$$

## Olgu I

**J** nihayetinde devirli sürekli kesirleri yine nihayetind devirli sürekli kesirlere götürür.

$$\Longrightarrow$$

**J kuadratik irrasyonelleri** yine **kuadratik irrasyonellere** götürür.
**yani J** "gerçel-çarpım kümesini" muhafaza eder.

(iz, norm, işaret gibi değerlere saygı duymaz)

## Örnekler

$$\mathbf{J}(\sqrt{2}) = \mathbf{J}([1,2,2,\dots]) = 1+\sqrt{2}$$

Ama genelde bu kadar basit değildir:

$$\mathbf{J}(\sqrt{11}) = \frac{15+\sqrt{901}}{26}, \quad \mathbf{J}(-\sqrt{11}) = \frac{15-\sqrt{901}}{26}$$

## Olgu I

**J** nihayetinde devirli sürekli kesirleri yine nihayetind devirli sürekli kesirlere götürür.

$$\Longrightarrow$$

**J kuadratik irrasyonelleri** yine **kuadratik irrasyonellere** götürür.
**yani J** "gerçel-çarpım kümesini" muhafaza eder.

(iz, norm, işaret gibi değerlere saygı duymaz)

## Örnekler

$$\mathbf{J}(\sqrt{2}) = \mathbf{J}([1,2,2,\ldots]) = 1+\sqrt{2}$$

Ama genelde bu kadar basit değildir:

$$\mathbf{J}(\sqrt{11}) = \frac{15+\sqrt{901}}{26}, \quad \mathbf{J}(-\sqrt{11}) = \frac{15-\sqrt{901}}{26}$$

## Olgu II

**J** sürekli kesirlerin sonlarına saygı duyar (yani $x$, $y$'nin sürekli kesirleri nihayetinde kesişiyorsa, $\mathbf{J}(x)$ ve $\mathbf{J}(y)$ için de aynısı doğrudur).

$$\Longleftrightarrow$$

**J,** $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$**-etkisine saygı duayr** (yani $x$ and $y$ aynı $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$-yörüngesindeyse, $\mathbf{J}(x)$ ve $\mathbf{J}(y)$ de aynı yörüngededir.)

## Daha kesin bir dille ifade etmek gerekirse

$$\mathbf{J}(Mx) = \mathbf{J}(M)\mathbf{J}(x) \quad M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}), x \in \mathbf{R}$$

ve dolayısıyla

$$x = My \implies \mathbf{J}(x) = \mathbf{J}(M)\mathbf{J}(y), \quad \mathbf{J}(M) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

## Olgu II

**J** sürekli kesirlerin sonlarına saygı duyar (yani $x$, $y$'nin sürekli kesirleri nihayetinde kesişiyorsa, $\mathbf{J}(x)$ ve $\mathbf{J}(y)$ için de aynısı doğrudur).

$$\Longleftrightarrow$$

**J, $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$-etkisine saygı duayr** (yani $x$ and $y$ aynı $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$-yörüngesindeyse, $\mathbf{J}(x)$ ve $\mathbf{J}(y)$ de aynı yörüngededir.)

## Daha kesin bir dille ifade etmek gerekirse

$$\mathbf{J}(Mx) = \mathbf{J}(M)\mathbf{J}(x) \quad M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}), x \in \mathbf{R}$$

ve dolayısıyla

$$x = My \implies \mathbf{J}(x) = \mathbf{J}(M)\mathbf{J}(y), \quad \mathbf{J}(M) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

Olgu I&II birlikte şunu gösterir

**Olgu III**

**J**, **R**'deki "bozuk rank-2 kafeslerin modül uzayının" bir envolüsyonunu dayatır, bu esnada "gerçel-çarpım" mahallini (locus) korur.

$$\mathbf{J} \circlearrowright \mathbf{R}/\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

Yani, Olgular bize diyor ki

**J** aslında bir modüler fonksiyondur.

Dahası da var:

## Olgu IV

**J, kuadratik irrasyoneller üzerindeki Galois etkisiyle değişmelidir,** yani

$$\mathbf{J}(a+\sqrt{b}) = A+\sqrt{B}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{J}(a-\sqrt{b}) = A-\sqrt{B}$$

Şimdi iki-değişkenli fonksiyonel denklemlere dönelim:

$$xy = 1 \iff \mathbf{J}(x)\mathbf{J}(y) = 1$$

$$x + y = 0 \iff \mathbf{J}(x)\mathbf{J}(y) = -1$$

$$x + y = 1 \iff \mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(y) = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \iff \frac{1}{\mathbf{J}(x)} + \frac{1}{\mathbf{J}(y)} = 1$$

ve $x = a + \sqrt{b}$ bir kuadratik irrasyonel olmak üzere, $y = \bar{x}$ yazalım:

$$\boxed{\begin{aligned} x\bar{x} = 1 &\iff \mathbf{J}(x)\mathbf{J}(\bar{x}) = 1 \\ x + \bar{x} = 0 &\iff \mathbf{J}(x)\mathbf{J}(\bar{x}) = -1 \\ x + \bar{x} = 1 &\iff \mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(\bar{x}) = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{\bar{x}} = 1 &\iff \frac{1}{\mathbf{J}(x)} + \frac{1}{\mathbf{J}(\bar{x})} = 1 \end{aligned}}$$

**Sayılar Kuramından Hatırlatma**

Şayet $x = a + \sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbf{Q},\ b > 0)$ ise

$x$'in **normu** $N(x) := x\bar{x} \iff N(a + \sqrt{b}) = a^2 - b$

$x$'in **izi** $T(x) := x + \bar{x} \iff T(a + \sqrt{b}) = 2a$

**Örnek**

$$N(1 + \sqrt{2}) = -1, \quad T(1 + \sqrt{2}) = 2$$

Şunu elde ederiz:

**Mütekabiliyet I**

$$x\bar{x} = 1 \iff \mathbf{J}(x)\mathbf{J}(\bar{x}) = 1; \text{ i.e. } N(x) = 1 \iff N(\mathbf{J}(x)) = 1$$

$$\Longrightarrow$$

**J**, kuadratik sayı cisimlerindeki **norm+1 ünitlerin** bir envolüsyonuna kısıtlanır.

$$\mathbf{J} \circlearrowright \{a + \sqrt{a^2 - 1} \,|\, 1 < a \in \mathbf{Q}\}$$

ve şunu elde ederiz:

## Correspondence II

$$x + \bar{x} = 0 \iff \mathbf{J}(x)\mathbf{J}(\bar{x}) = -1; \text{ i.e. } T(x) = 0 \iff N(\mathbf{J}(x)) = -1.$$

$\implies$ **J**, **positive rasyonellerin kareköklerinin kümesiyle** kuadratik sayı cisimlerindeki **norm-1 ünitlerin kümesi** arasında bir eşleme kurar.

$$\mathbf{J} : \{\sqrt{q} \mid q \in \mathbf{Q}\} \to \{a + \sqrt{a^2+1} \mid a \in \mathbf{Q}\}$$

Bu mütekabiliyetler bariz olmaktan çok uzaktır:

## Mütekabiliyet II-Örnek

$$\sqrt{\frac{39}{17}} = [1, \overline{1, 1, 16, 1, 1, 2}] \implies$$

$$\mathbf{J}\left(\sqrt{\frac{39}{17}}\right) = [4, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4}] = A \implies$$

$$N(A) = N\left(\frac{7663 + \sqrt{70845893}}{3482}\right) = -1.$$

## Mütekabiliyet II-Başka örnekler

$$
\begin{array}{ccl}
\sqrt{N} & \to & \mathbf{J}(\sqrt{N}) \\
\sqrt{3} & \to & \frac{1}{2}(\sqrt{13}+3) \\
\sqrt{5} & \to & \frac{1}{3}(\sqrt{10}+1) \\
\sqrt{6} & \to & \frac{1}{14}(\sqrt{221}+5) \\
\sqrt{7} & \to & \frac{1}{6}(\sqrt{37}+1) \\
\sqrt{8} & \to & \frac{1}{4}(\sqrt{17}+1) \\
\sqrt{10} & \to & \frac{1}{7}(\sqrt{65}+4) \\
\sqrt{11} & \to & \frac{1}{26}(\sqrt{901}+15) \\
\sqrt{12} & \to & \frac{1}{34}(\sqrt{1517}+19) \\
\sqrt{13} & \to & \frac{1}{3}(\sqrt{13}+2) \\
\sqrt{14} & \to & \frac{1}{5}(\sqrt{34}+3) \\
\sqrt{15} & \to & \frac{1}{18}(\sqrt{445}+11) \\
\sqrt{17} & \to & \frac{1}{19}(\sqrt{442}+9)
\end{array}
$$

We get...

## Mütekabiliyet III

$$x + y = 1 \iff \mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(\bar{x}) = 1; \text{ i.e. } T(x) = 1 \iff T(\mathbf{J}(x)) = 1$$

$$\mathbf{J} \circlearrowright \{\frac{1}{2} + \sqrt{a} \,|\, 0 < a \in \mathbf{Q}\}$$

Şunu elde ederiz:

**Mütekabiliyet IV**

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\bar{x}}=1 \iff \frac{1}{\mathbf{J}(x)}+\frac{1}{\mathbf{J}(\bar{x})}=1; \text{ i.e. } T(\frac{1}{x})=1 \iff T(\frac{1}{\mathbf{J}(x)})=1$$

$$T(x)=N(x) \iff T(\mathbf{J}x)=N(\mathbf{J}x)$$

Bir başka deyişle,

$$\mathbf{J} \circlearrowright \{a+\sqrt{a^2-2a} \,|\, 1<a\in\mathbf{Q}\}$$

... ve bu türden başka mütekabiliyetler de mevcuttur.

Daha yüksek mertebeden cebirsel sayılar hakkında ne söylenebilir?

**Tahmin**

Şayet $x$ cebirsel ve mertebesi $> 2$ ise, $\mathbf{J}(x)$ aşkındır. [a]

[a] Testing the transcendence conjecture of Jimm and its continued fraction statistics (joint with H. Ayral, to appear)

Daha yüksek mertebeden cebirsel sayılar hakkında ne söylenebilir?

**Tahmin**

Şayet $x$ cebirsel ve mertebesi $> 2$ ise, $\mathbf{J}(x)$ aşkındır. [a]

[a] Testing the transcendence conjecture of Jimm and its continued fraction statistics (joint with H. Ayral, to appear)

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\sqrt[3]{2}) &= \mathbf{J}([1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, \ldots]) \\ &= [2, 1, 3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1_6, 3, 1_{12}, 3, 1_8, 2, 3, 1, 1, 2, \ldots] \\ &= 2.78473155866272\,3\ldots\end{aligned}$$

$$\mathbf{J}(\pi) = \mathbf{J}([3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \ldots]) = [1_2, 2, 1_5, 2, 1_{13}, 3, 1_{290}, 5, 3, \ldots]$$
$$= 1.7237707925480276079699326494931025145558144289232\ldots$$

$$\mathbf{J}(e) = \mathbf{J}([2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]) = [1, 3, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, \ldots, \overline{4, 1_{2n}}]$$
$$= 1.3105752928466255215822495496939143349712038085627\ldots$$

(Bu sayıları PSLQ-algoritmasını muhtelif sabit kümeleri üzerinde çalıştırarak tanımayı denedik ama başarısız olduk.)

# KISIM II

# Dinamik

# Dinamik

## Olgu

**J**, Gauss tasvirini "Fibonacci tasvirine" eşlenikler:

$$T_{Gauss} : [0, n_1, n_2, n_3, \ldots] \in [0,1] \longrightarrow [0, n_2, n_3, n_4, \ldots] \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow$$

$$T_{Fibonacci} = \mathbf{J}\, T_{Gauss} \mathbf{J} : [0, 1_k, n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots] \to [0, n_{k+1} - 1, n_{k+2}, \ldots]$$

## Örnek

$$T_{Fibonacci}([0,1,1,1,5,13,7,\ldots]) = [0,4,13,7,\ldots],$$

$$T_{Fibonacci}([0,4,13,7,\ldots]) = [0,3,13,7,\ldots], \ldots$$

# Dinamik

## Olgu

**J**, Gauss tasvirini "Fibonacci tasvirine" eşlenikler:

$$T_{Gauss} : [0, n_1, n_2, n_3, \dots] \in [0,1] \longrightarrow [0, n_2, n_3, n_4, \dots] \in [0,1]$$

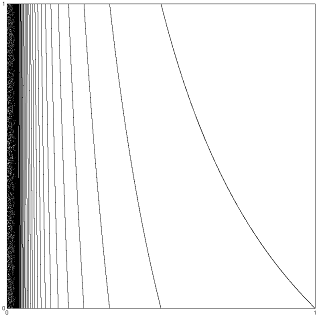
$$\Longrightarrow$$

$$T_{Fibonacci} = \mathbf{J} T_{Gauss} \mathbf{J} : [0, 1_k, n_{k+1}, n_{k+2}, \dots] \to [0, n_{k+1} - 1, n_{k+2}, \dots]$$

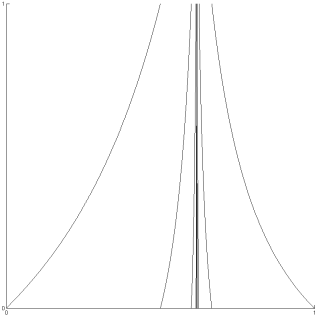
## Örnek

$$T_{Fibonacci}([0, 1, 1, 1, 5, 13, 7, \dots]) = [0, 4, 13, 7, \dots],$$

$$T_{Fibonacci}([0, 4, 13, 7, \dots]) = [0, 3, 13, 7, \dots], \dots$$




$\longrightarrow$




**Gauss tasviri** $\longrightarrow$ **Fibonacci tasviri**

Bu iki tasvirin dinemiği sıkı sıkıya bağlantılıdır (Isola v.d.).
Fibonacci tasvirinin transfer operatörü

$$(\mathscr{L}_s^{Fib}\psi)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(F_{k+1}y + F_k)^{2s}} \psi\left(\frac{F_k y + F_{k-1}}{F_{k+1}y + F_k}\right) \tag{1}$$

Gauss tasvirinin transfer operatörü

$$(\mathscr{L}_s^{Gauss}\psi)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + x)^{2s}} \psi\left(\frac{1}{k + x}\right) \tag{2}$$

Bu iki tasvirin dinemiği sıkı sıkıya bağlantılıdır (Isola v.d.).
Fibonacci tasvirinin transfer operatörü

$$(\mathscr{L}_s^{Fib}\psi)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(F_{k+1}y + F_k)^{2s}} \psi\left(\frac{F_k y + F_{k-1}}{F_{k+1}y + F_k}\right) \tag{1}$$

Gauss tasvirinin transfer operatörü

$$(\mathscr{L}_s^{Gauss}\psi)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{2s}} \psi\left(\frac{1}{k+x}\right) \tag{2}$$

**Sabit ölçüler**

$$T_{Fibonacci} \leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} \text{ (infinite)}, \qquad T_{Gauss} \leftrightarrow \frac{1}{x+1}$$

**Zeta functions** (transfer operatorünün Lebesgue ölçüsündeki değeri)

$$T_{Fibonacci} \leftrightarrow (\mathscr{L}_s^{Fib}\psi)(\mathbf{1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^s} \qquad (\text{“Fibonacci zeta”})$$

$$T_{Gauss} \leftrightarrow (\mathscr{L}_s^{Gauss}\psi)(\mathbf{1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\text{“Riemann zeta”})$$

Fibonacci transfer operatörünün öz fonksiyonları üç terimli fonksiyonel denklemi sağlar:

$$\psi(y) = \frac{1}{y^{2s}}\psi\left(\frac{y+1}{y}\right) + \frac{1}{\lambda}\frac{1}{(y+1)^{2s}}\psi\left(\frac{y}{y+1}\right) \tag{3}$$

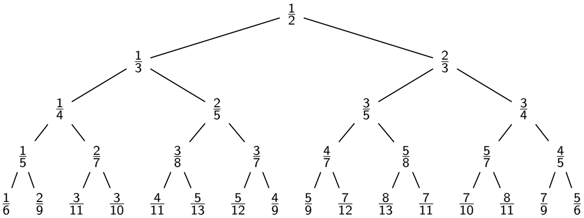
(Lewis ve Zagier'nin incelediği üç terimli fonksiyonel denkleme eşdeğerdir.)

# KISIM III

# Ağaç otomorfizmleri ve Lebesgue ölçüsü

# Bir ağaç otomorfizmi olarak **J**.

**Farey ağacı**

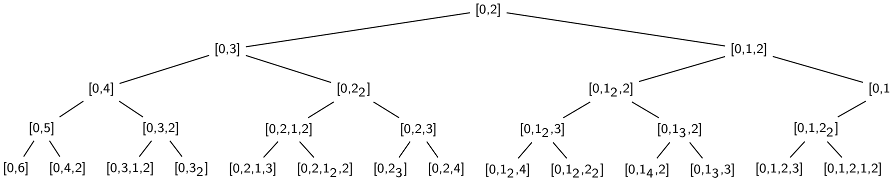



Farey toplamı kuralıyla üretilir:

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$$

# Bir ağaç otomorfizmi olarak J

**Sürekli kesirler ve Farey ağacı**



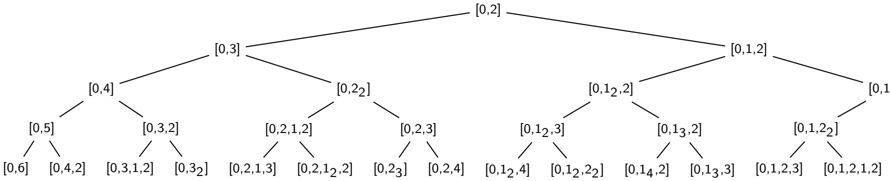

Ağacın sınırı $\partial\mathcal{F}$, kökten çıkan tüm sonsuz patikaların kümesidir.

**Olgu**

Her yolu sürekli kesirine götüren $\partial\mathcal{F} \to [0,1]$ tasviri $[0,1]$ aralığındaki irrasyonelleri parametrize eder (ve rasyoneller üzerinde 2'ye 1'dir.).

# Bir ağaç otomorfizmi olarak J

### Sürekli kesirler ve Farey ağacı




Ağacın sınırı $\partial\mathcal{F}$, kökten çıkan tüm sonsuz patikaların kümesidir.

**Olgu**

Her yolu sürekli kesirine götüren $\partial\mathcal{F} \to [0,1]$ tasviri $[0,1]$ aralığındaki irrasyonelleri parametrize eder (ve rasyoneller üzerinde 2'ye 1'dir.).

# Bir ağaç otomorfizmi olarak **J**

Ağacın otomorfizm grubu $\mathbf{Aut}(\mathcal{F})$, sınır $\partial\mathcal{F}$ üzerinde doğal yoldan etkir:
$\implies$ $\mathbf{Aut}(\mathcal{F})$ sürekli kesirler üzerinde, yukarıdaki parametrizasyon aracılığıyla ektir. (her otomorfizm için sayılabilir bir kümeyi ihmal ederk)

# Bir ağaç otomorfizmi olarak **J**

## **Aut**$(\mathcal{F})$ grubunun sürtme tasviri.

$\Longrightarrow$ **J** her köşeyi sürten otomorfizmdir.

# Bir ağaç otomorfizmi olarak **J**

## **Aut**$(\mathcal{F})$ grubunun sürtme tasviri.

$\Longrightarrow$ **J** her köşeyi sürten otomorfizmdir.

## Aut($\mathcal{F}$) grubunun burma tasviri.

# Aut($\mathcal{F}$) grubunun burma tasviri.

$\Longrightarrow$ **J** bir köşeyi burup bir köşe atlayan otomorfizmdir.

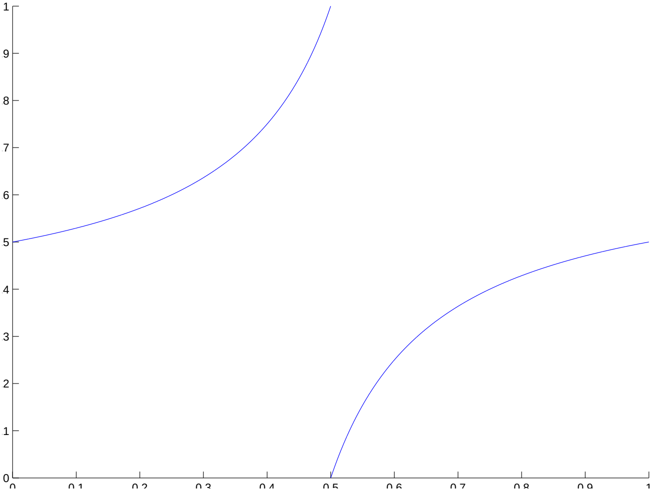
## Aut($\mathcal{F}$) grubunun burma tasviri.

# Aut($\mathcal{F}$) grubunun burma tasviri.

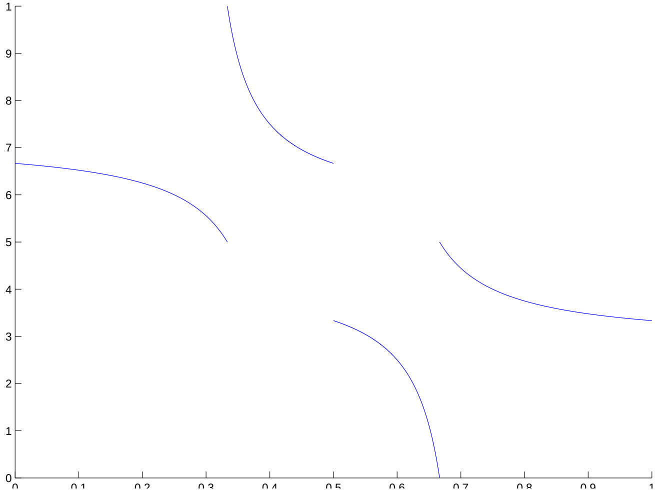
$\Longrightarrow$ **J** bir köşeyi burup bir köşe atlayan otomorfizmdir.

Sürtme (veya burma) otomorfizmlerinin sınır etkilerine bakarsak, **J**'in parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerinin bir limiti olarak görebiliriz....

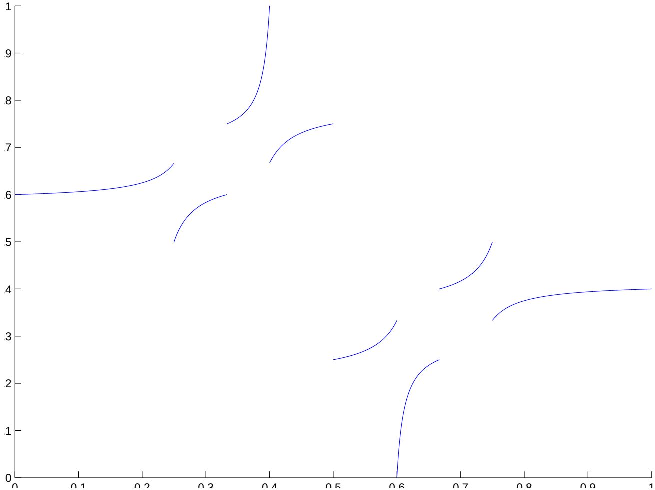
# Parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerin limiti olarak Jimm



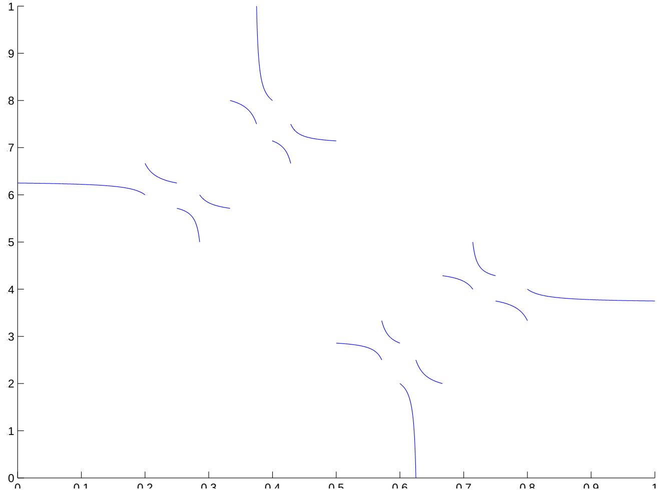
# Parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerin limiti olarak Jimm



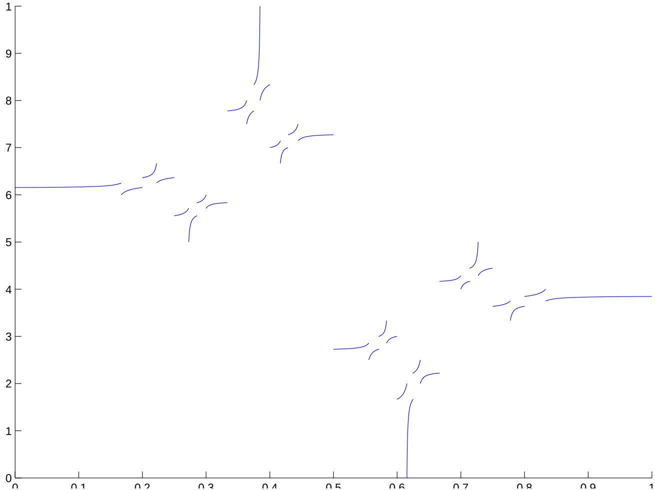
# Parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerin limiti olarak Jimm



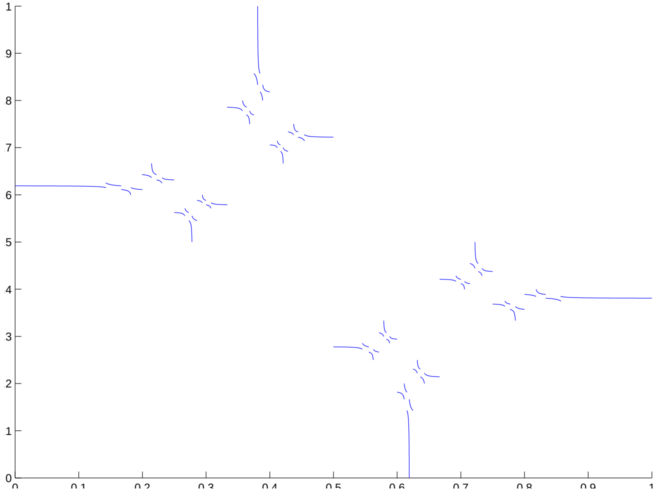
# Parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerin limiti olarak Jimm



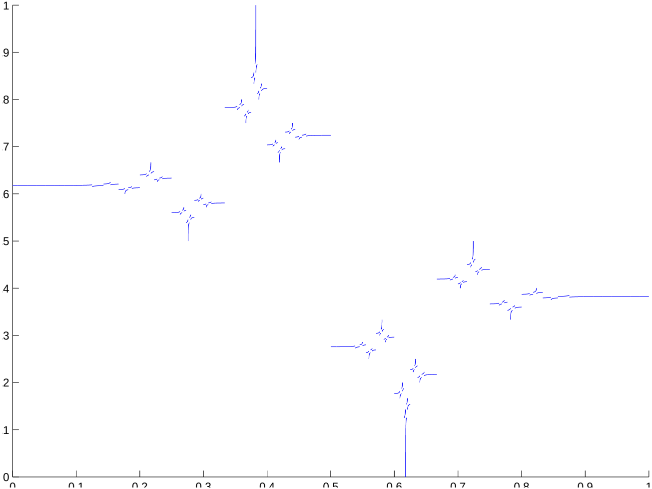
# Parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerin limiti olarak Jimm



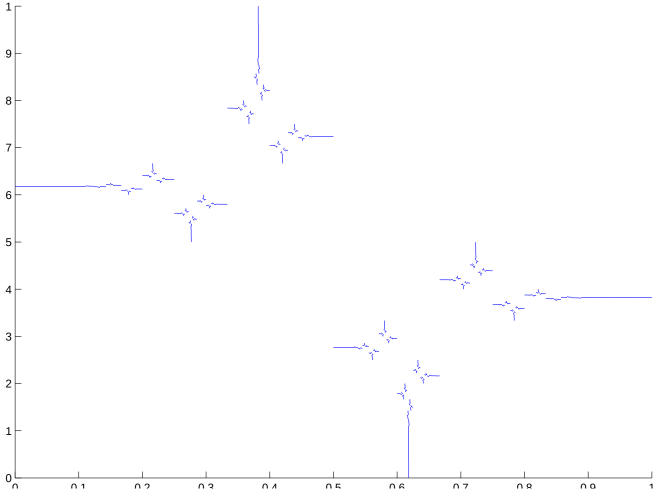
# Parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerin limiti olarak Jimm



# Parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerin limiti olarak Jimm

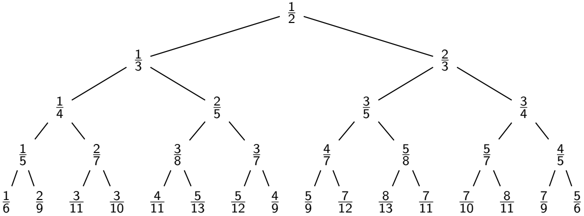


# Parçalı-$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ tasvirlerin limiti olarak Jimm



# Lebesgue ölçüsünün bir simetrisi olarak jimm.

Farey ağacına geri dönelim..

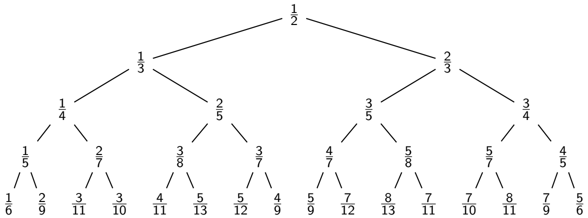



Bir yürüyüşçü, kök köşeden yürüyüşe başlar. Her $x$ köşesi için, o köşeye atasından varma ihtimali verilmiştir.

Bu, sürekli kesirler üzerine, yani $[0,1]$ üzerinde bir ölçü dayatır.

# Lebesgue ölçüsünün bir simetrisi olarak jimm.

Farey ağacına geri dönelim..




Bir yürüyüşçü, kök köşeden yürüyüşe başlar. Her $x$ köşesi için, o köşeye atasından varma ihtimali verilmiştir.

Bu, sürekli kesirler üzerine, yani $[0, 1]$ üzerinde bir ölçü dayatır.

# Lebesgue ölçüsünün bir simetrisi olarak jimm.

Şayet $\pi(x) \equiv 1/2$ dersek, $[0,1]$'e dayatılan ölçü Minkowski-Denjoy soru işareti fonksiyonudur.

**Soru**

Lebesgue ölçüsünü hangi 'varış' ihtimal fonksiyonu $\pi_{Leb}(x)$ dayatır?




"Lebesgue ağacı" $\mathcal{L}$.

# Lebesgue ölçüsünün bir simetrisi olarak jimm.

Şayet $\pi(x) \equiv 1/2$ dersek, $[0,1]$'e dayatılan ölçü Minkowski-Denjoy soru işareti fonksiyonudur.

**Soru**

Lebesgue ölçüsünü hangi 'varış' ihtimal fonksiyonu $\pi_{Leb}(x)$ dayatır?



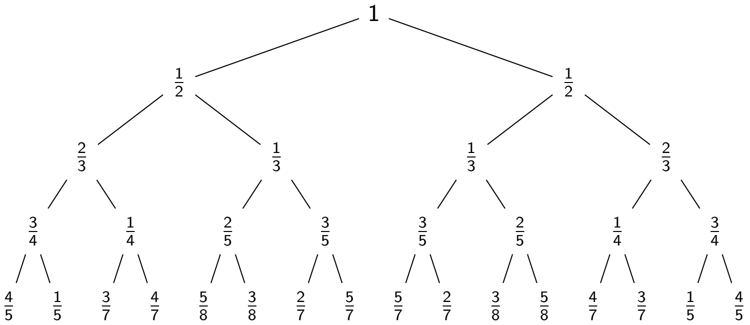

"Lebesgue ağacı" $\mathcal{L}$.

# Lebesgue ölçüsünün bir simetrisi olarak jimm.

Şayet $\pi(x) \equiv 1/2$ dersek, $[0,1]$'e dayatılan ölçü Minkowski-Denjoy soru işareti fonksiyonudur.

**Soru**

Lebesgue ölçüsünü hangi 'varış' ihtimal fonksiyonu $\pi_{Leb}(x)$ dayatır?




"Lebesgue ağacı" $\mathcal{L}$.

**Olgu**

$n_k > 1$ olsun. O halde

$$\pi_{Leb}([0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k]) = 1 - [0, n_k - 1, n_{k-1}, \ldots, n_2, n_1]$$

varış ihtimalleri, $[0, 1]$'e Lebesgue ölçüsünü dayatır.

**Lebesgue ölçüsünün latif bir simetrisi:**

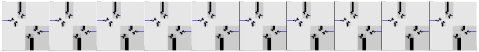
$$\pi_{Leb}\mathbf{J}(x) = \mathbf{J}\pi_{Leb}(x)$$

(Sağda **J** ağaç üzerinde etkirken solda arsyoneller üzerine etkimektedir.)

# References


- Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques binéaires définies ou indéfinies. M. H. Poincaré.
- *Jimm, a Fundamental Involution.* (with H. Ayral) arXiv:1501.03787
- *On the involution of the real line induced by Dyer's outer automorphism of PGL(2,Z).* (with H. Ayral) arXiv:1605.03717
- *A subtle symmetry of Lebesgue's measure.* (with H. Ayral) arXiv:1605.07330
- *Testing the transcendence conjecture of Jimm and its continued fraction statistics.* (with H. Ayral, to appear)
- *An involution of reals, discontinuous on rationals and whose derivative vanish almost everywhere.* (with H. Ayral, to appear)

# THANKS...



# EKSTRA MALZEME

## **J** acts on..

- Binary quadratic forms (tears apart class groups)
- Beatty partitions of **N**.

$$r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \rightsquigarrow \mathcal{B}_r = \lfloor r \rfloor, \lfloor 2r \rfloor, \lfloor 3r \rfloor, \dots = (\lfloor nr \rfloor)_{n \geq 1}$$

  If $r > 1$ and $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ then $\mathcal{B}_r \cup \mathcal{B}_s = \mathbf{N}$. Hence **J** induce a duality of Beatty partitions of **N**.
- Trivalent ribbon graphs $\simeq$ dessins $\simeq$ decorated TM spaces. $\implies$ **J** induces a duality of punctured Riemann surfaces.
- Dynamical continued fraction maps..
- .....

# EKSTRA MALZEME

## **J** acts on..

- Binary quadratic forms (tears apart class groups)
- Beatty partitions of **N**.

$$r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \rightsquigarrow \mathcal{B}_r = \lfloor r \rfloor, \lfloor 2r \rfloor, \lfloor 3r \rfloor, \ldots = (\lfloor nr \rfloor)_{n \geq 1}$$

  If $r > 1$ and $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ then $\mathcal{B}_r \cup \mathcal{B}_s = \mathbf{N}$. Hence **J** induce a duality of Beatty partitions of **N**.
- Trivalent ribbon graphs $\simeq$ dessins $\simeq$ decorated TM spaces. $\implies$ **J** induces a duality of punctured Riemann surfaces.
- Dynamical continued fraction maps..
- .....

# EKSTRA MALZEME

## $\mathbf{J}$ acts on..

- Binary quadratic forms (tears apart class groups)
- Beatty partitions of $\mathbf{N}$.

$$r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \rightsquigarrow \mathcal{B}_r = \lfloor r \rfloor, \lfloor 2r \rfloor, \lfloor 3r \rfloor, \dots = (\lfloor nr \rfloor)_{n \geq 1}$$

  If $r > 1$ and $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ then $\mathcal{B}_r \cup \mathcal{B}_s = \mathbf{N}$. Hence $\mathbf{J}$ induce a duality of Beatty partitions of $\mathbf{N}$.

- Trivalent ribbon graphs $\simeq$ dessins $\simeq$ decorated TM spaces. $\implies$ $\mathbf{J}$ induces a duality of punctured Riemann surfaces.
- Dynamical continued fraction maps..
- .....

# EKSTRA MALZEME

## $\mathbf{J}$ acts on..

- Binary quadratic forms (tears apart class groups)
- Beatty partitions of $\mathbf{N}$.

$$r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \rightsquigarrow \mathcal{B}_r = \lfloor r \rfloor, \lfloor 2r \rfloor, \lfloor 3r \rfloor, \ldots = (\lfloor nr \rfloor)_{n \geq 1}$$

  If $r > 1$ and $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ then $\mathcal{B}_r \cup \mathcal{B}_s = \mathbf{N}$. Hence $\mathbf{J}$ induce a duality of Beatty partitions of $\mathbf{N}$.
- Trivalent ribbon graphs $\simeq$ dessins $\simeq$ decorated TM spaces. $\implies$ $\mathbf{J}$ induces a duality of punctured Riemann surfaces.
- Dynamical continued fraction maps..
- .....

# EKSTRA MALZEME

## **J** acts on..

- Binary quadratic forms (tears apart class groups)
- Beatty partitions of **N**.

$$r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \rightsquigarrow \mathcal{B}_r = \lfloor r \rfloor, \lfloor 2r \rfloor, \lfloor 3r \rfloor, \ldots = (\lfloor nr \rfloor)_{n \geq 1}$$

  If $r > 1$ and $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ then $\mathcal{B}_r \cup \mathcal{B}_s = \mathbf{N}$. Hence **J** induce a duality of Beatty partitions of **N**.
- Trivalent ribbon graphs $\simeq$ dessins $\simeq$ decorated TM spaces. $\implies$ **J** induces a duality of punctured Riemann surfaces.
- Dynamical continued fraction maps..
- .....

# Maple Codes

(also available on request)

```
jimm := proc (Z) local X, Y, u, k, i; X := Z; if not type(X[nops(X)], integer) then X := Z[1 .. nops(X)-1] end if; Y := [0]; for k to nops(X) do if X[k] = 1 then Y := [op(Y[1 .. nops(Y)-1]), Y[nops(Y)]+1]; next end if; Y := [op(Y[1 .. nops(Y)-1]), Y[nops(Y)]+1]; for i to X[k]-1 do Y := [op(Y), 1] end do; next end do; return Y end proc
```

```
rotate := proc (L) local i, j, K, M; for i to nops(L) while L[i] = 1 do end do; K := []; for j to i do K := [op(K), 1] end do; M := [L[i]-1, op(L[i+1 .. nops(L)]), op(K)]; return M, K end proc
```

```
jsurd := proc (s) local x, y, z, a, b, K, L, M, i, j; if evalf(s) ¡ 1 then b := 1/s; a := 1 else b := s end if; x := cfrac(b, quotients, periodic); K := rotate(x[2]); L := [[op(x[1]), op(K[2])], K[1]]; y := [jimm(L[1]), jimm(L[2])]; z := cfrac(y); if a = 1 then return 1/z else return z end if end proc
```

**Example.**

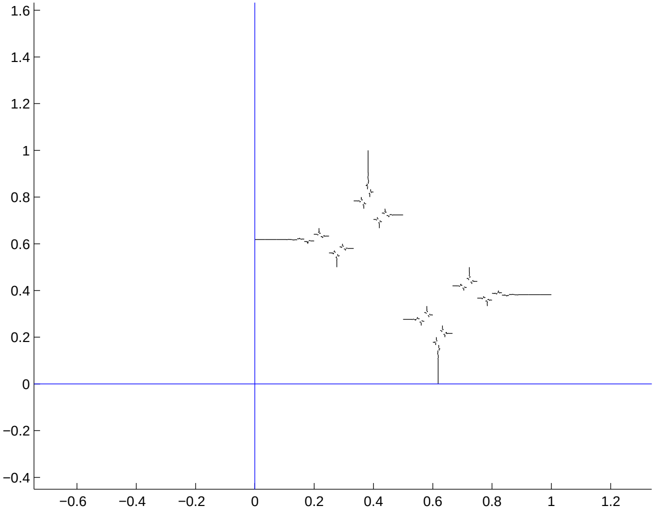
$$\mathbf{J}([0;\overline{1_{n-1},a}]) = [0;n,\overline{1_{a-2},n+1}] \implies$$

$$\mathbf{J}\left(\frac{a}{2}\left[\sqrt{1+4\frac{aF_{n-1}+F_{n-2}}{a^2F_n}}-1\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n+\frac{n+1}{2}\left(\sqrt{1+4\frac{(n+1)F_{a-2}+F_{a-3}}{(n+1)^2F_{a-1}}}-1\right)}$$

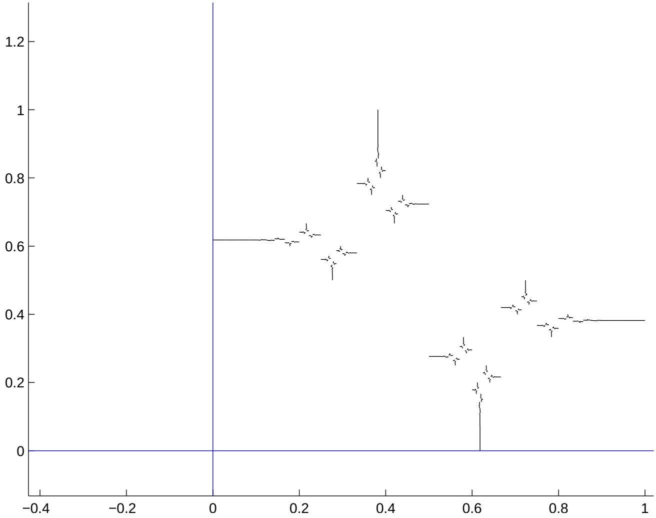
(notice the exchange $(a, F_n) \leftrightarrow (F_a, n)$)

# Extra Slides - Zoom

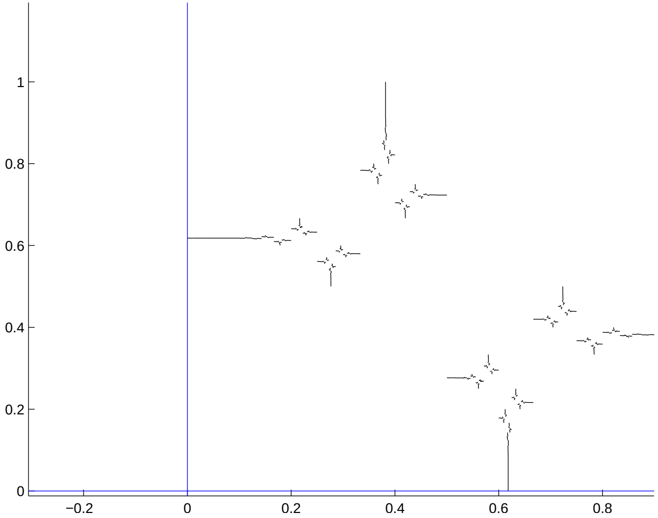


# Extra Slides - Zoom

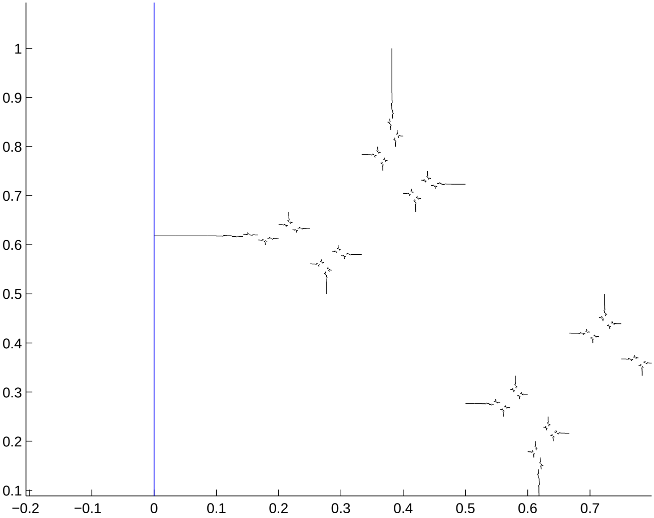
# Extra Slides - Zoom



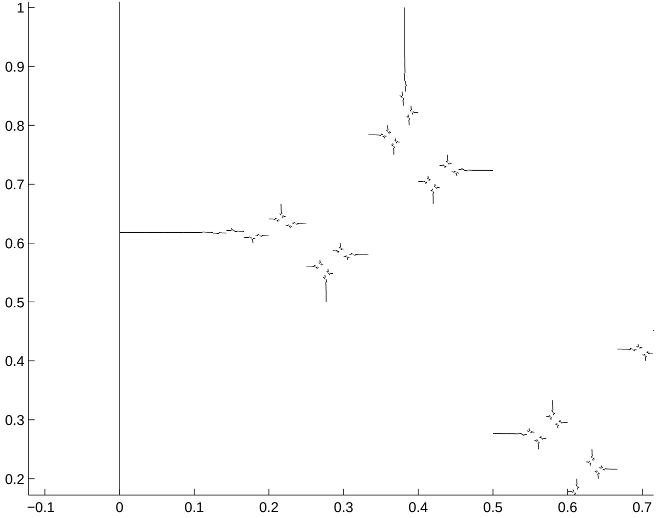
# Extra Slides - Zoom



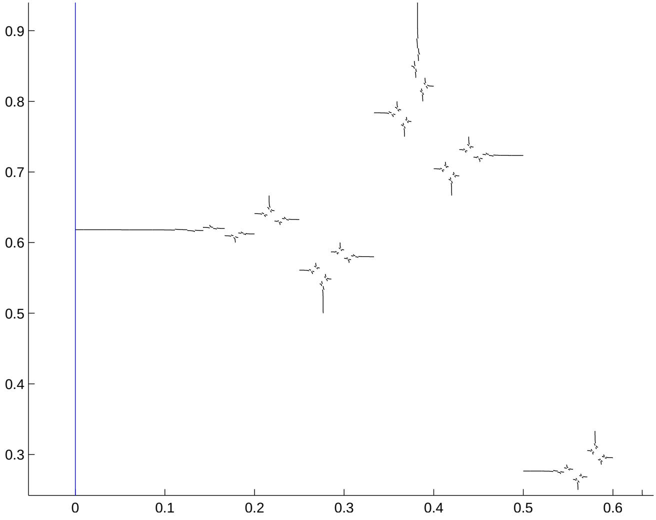
# Extra Slides - Zoom



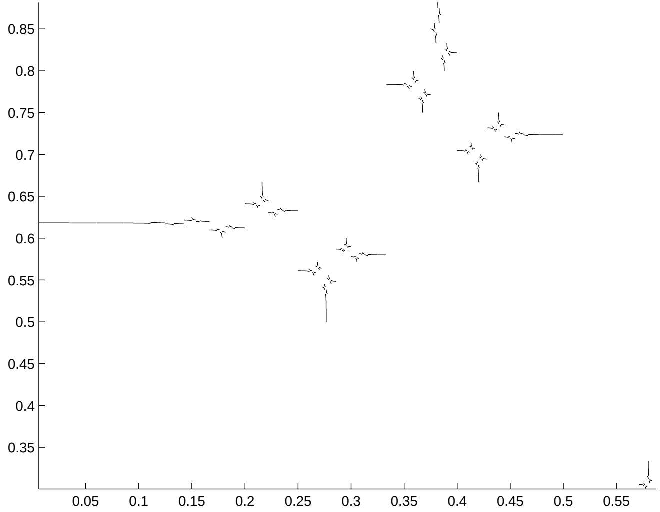
# Extra Slides - Zoom



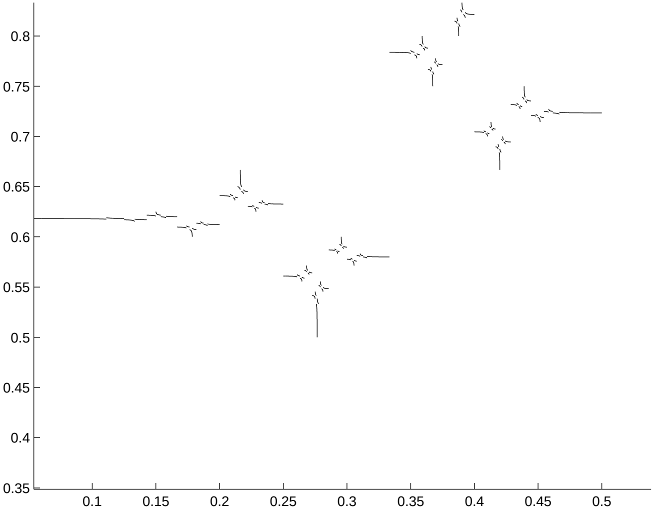
# Extra Slides - Zoom



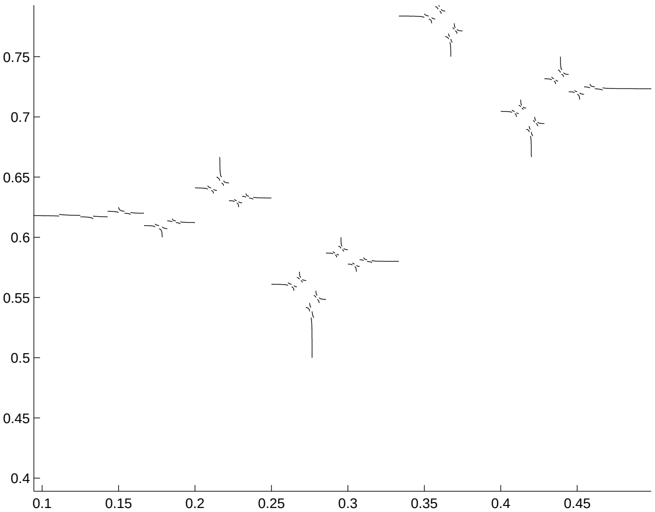
# Extra Slides - Zoom



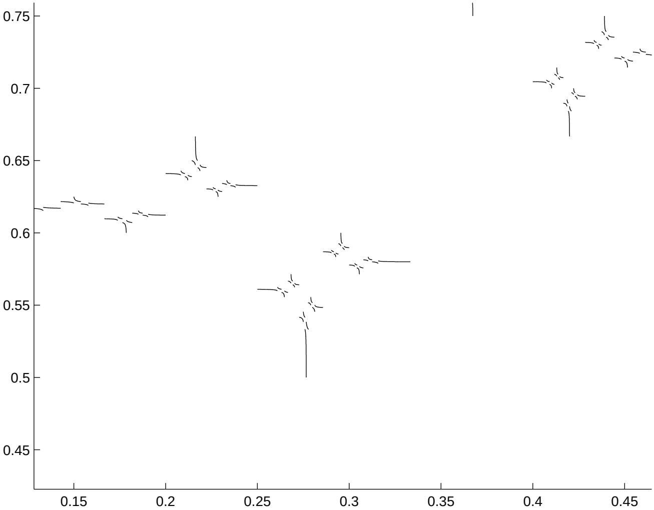
# Extra Slides - Zoom



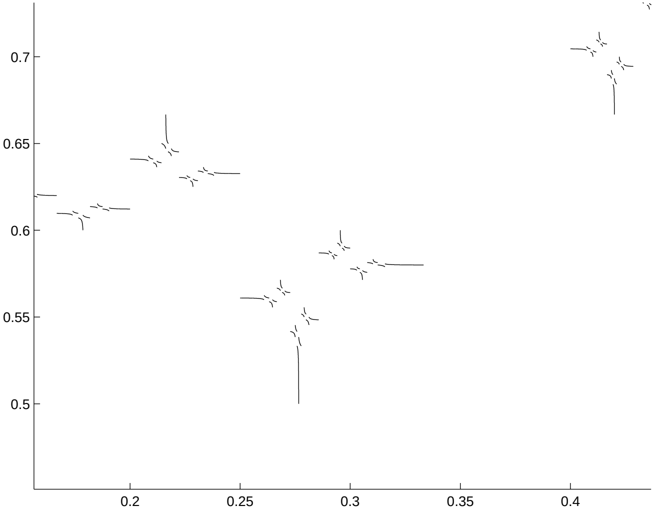
# Extra Slides - Zoom



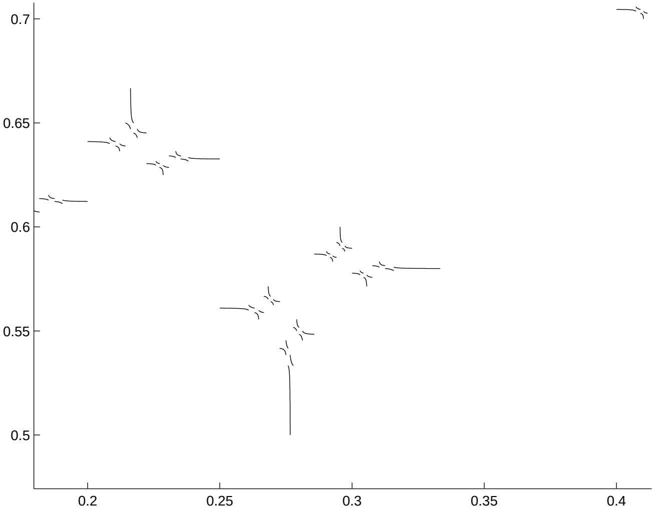
# Extra Slides - Zoom



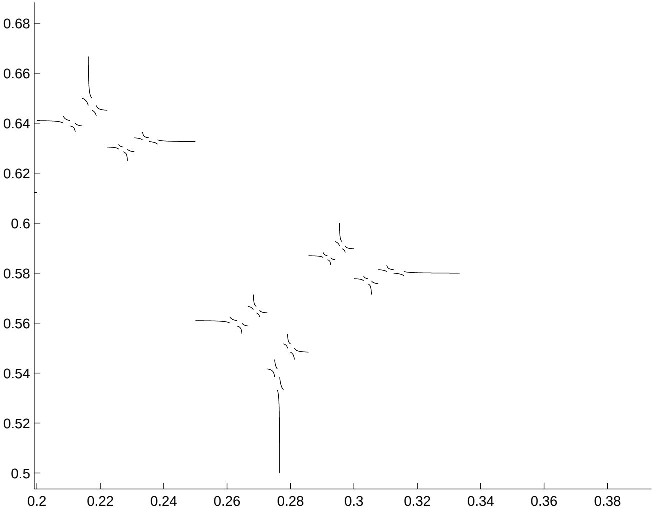
# Extra Slides - Zoom



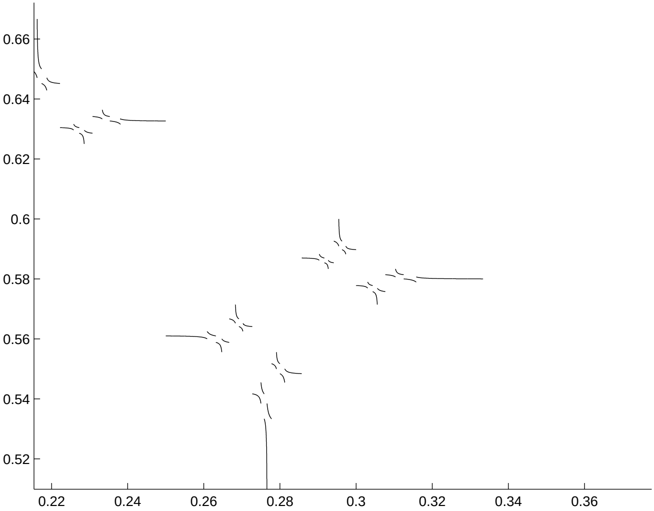
# Extra Slides - Zoom



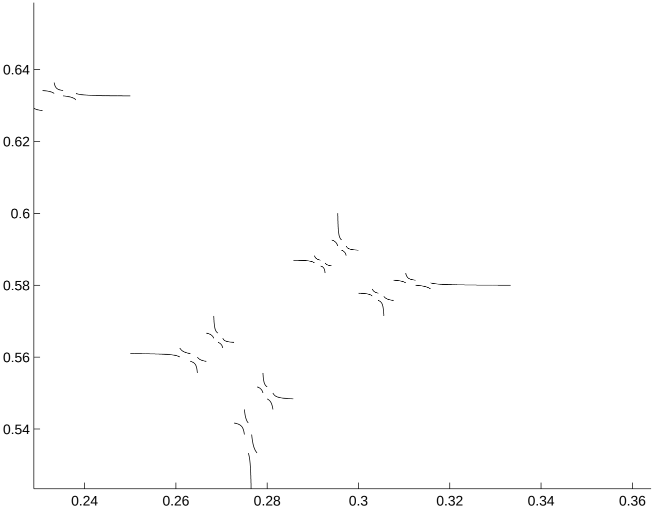
# Extra Slides - Zoom



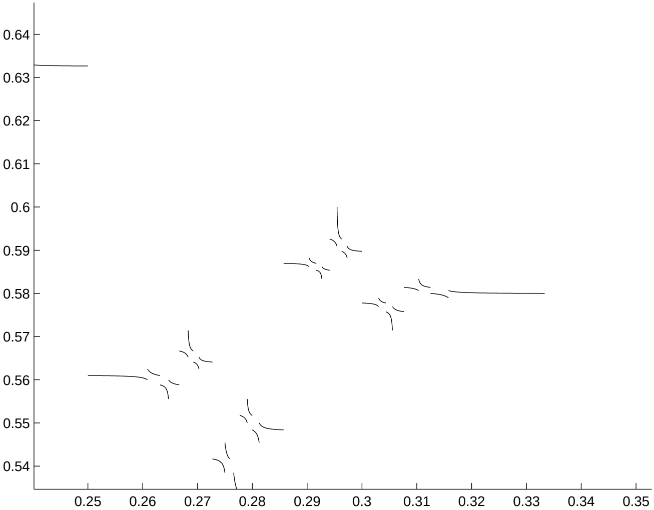
# Extra Slides - Zoom



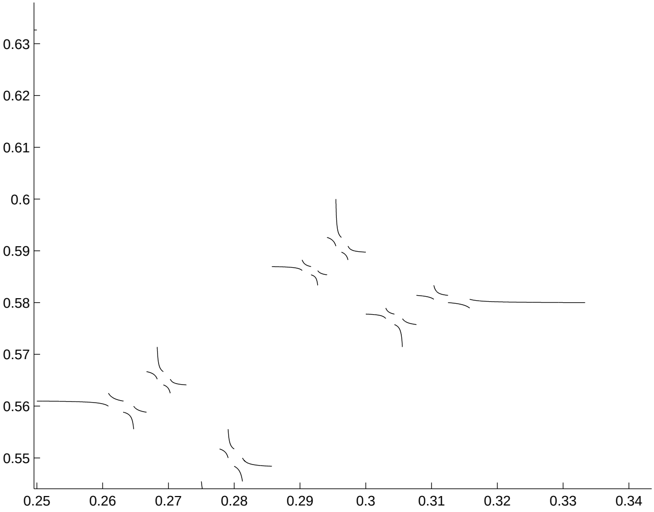
# Extra Slides - Zoom



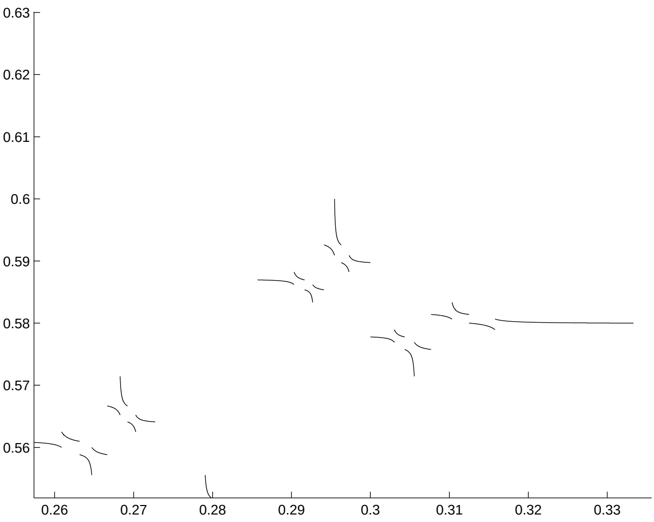
# Extra Slides - Zoom



# Extra Slides - Zoom



# Extra Slides - Zoom



# Extra Slides - Zoom