

1. PROJE ÖZETİ

Proje Başlığı : [REDACTED]

Proje Özeti

Bu proje pür matematik alanında olup amacı, [REDACTED]

Gauss sürekli kesir tasviri, en temel kesikli dinamik tasvirlerden biridir. Bu tasvirin sabit ölçüsünü tahmin eden Gauss, sürekli kesirlerin istatistiği hakkındaki meşhur Gauss problemini de ortaya atmıştır. P [REDACTED] hiperbolik Laplace operatörünün özfonksiyonları olan Maass dalga formları arasında bir mütakabiliyet kurmuştur. Lebesgue ölçüsünün Mayer transfer operatörü altındaki görüntüsü, Hurwitz zeta fonksiyonudur.

Proje yürütücüsü Muhammed Uludağ'ın (Galatasaray Üniversitesi) güncel bir çalışmasında, [REDACTED]

[REDACTED] proje danışmanı [REDACTED]

[REDACTED] Proje ekibinin üçüncü üyesi

[REDACTED] konusunda projeye destek verecektir.

[REDACTED] Bu projenin konuya getirdiği yaklaşım, sözkonusu [REDACTED] incelemektir. Başlangıç aşamasında bilgisayarla nümerik deneyler gerektiren bu araştırmanın ileri aşamalarında fonksiyonel analiz ve karmaşık analiz tekniklerine de ihtiyaç duyulacaktır. [REDACTED] yapılacak, [REDACTED] bulunacak, [REDACTED] incelenecek, [REDACTED] yazılacak ve [REDACTED] aranacaktır. [REDACTED] incelenecektir. Bu tasvirler için [REDACTED] e incelenecektir.

[REDACTED] incelenmesi, projenin alternatif sorusunu teşkil edtmektedir.

Birçok yönüyle ergodik Sayılar Kuramı'nın içinde yer alan bu projenin, aritmetik, cebirsel kombinatorik ve aşkınlık konularının yanı sıra bilgisayar bilimleri ve termodinamik de bağlantıları vardır. Bu geleneğin kurumumuzda yerleşmesi için lisansüstü ders açmayı ve öğrenci yetiştirmeyi tasarlamaktayız. Aynı çerçevede bir bilimsel toplantı da düzenlenecektir. Daha geniş kitlelere ulaşarak yaygın etkiyi artırmak maksadıyla, konunun popüler yönlerinin tanıtıldığı bir tablet bilgisayar uygulaması geliştireceğiz. Proje bursiyerlerinin kesikli dinamik sistemlerin temel kavramları hakkında Türkçe vikipedi makaleleri ve popüler matematik makaleleri hazırlamalarını sağlayacağız.

Anahtar Kelimeler: Modüler eğri, sürekli kesirler, sürekli kesirlerin metrik kuramı, Ergodik sayılar kuramı, Gauss sürekli kesir tasviri, Farey tasviri, [REDACTED], sabit ölçüler, Mayer transfer operatörleri, Lewis fonksiyonel denklemi, Maass dalga formları, Selberg zeta fonksiyonu, Gauss-Kuzmin istatistiği, modüler eğri, jeodezik sayma, termodinamik spin modelleri, kesikli dinamik sistemler.

Project Title : [REDACTED]

Project Summary

This pure mathematics project aims to [REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

The Gauss continued fraction map is one of the simplest dynamical maps. Gauss guessed the invariant measure of this map and conjectured the famous statistics about the continued fraction entries. The final solution of this problem, as given by Babenko, is expressed in terms of the eigenfunctions of the Gauss-Kuzmin-Wirsing operator. Generalizing this operator, Mayer introduced the transfer operator acting on a certain space of analytic functions and thereby expressed the Selberg zeta function as a Fredholm determinant. Eigenfunctions of the transfer operator satisfies the Lewis functional equation. Lewis and Zagier established a correspondence between certain solutions of this equation and the eigenfunctions of the Laplace operator on the hyperbolic modular curve, i.e. the Maass wave forms. The image of the constant map under this operator is the Hurwitz zeta function.

[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

2. AMAÇ VE HEDEFLER



Âdet olduğu üzere, sürekli kesirleri şu şekilde gösterelim:

$$[n_0, n_1, n_2, \dots] = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots}}, \quad (n_0 \in \mathbb{Z} \text{ ve } i = 1, 2, \dots \text{ için } n_i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ olmak üzere})$$

Pespeşe k adet 1'den oluşan $1, 1, \dots, 1$ katarını 1_k ile gösterelim ve $0 \leq k < \infty$ için $n_{k+1} > 1$ varsayalım. Nihayet, $\mathbb{T}_G$ ile birim aralıktaki x sayısını $1/x$ 'in kesirli kısmına götüren Gauss tasvirini (Şekil 2, s.5) gösterelim.

► **CONTRAC** projesinin amacı, [redacted] incelemektir:

[redacted]

► Proje hedefleri, [redacted] şöyle sıralanmaktadır:

1. [redacted] tespiti
2. [redacted] yazılması, s [redacted], diğer [redacted] irtibatının anlaşılması
 - a. [redacted] aranması
 - b. [redacted] özfonksiyonlarıyla ilişkisinin anlaşılması
 - c. Bu denkleme [redacted] çözümler aranması
3. [redacted] uzayı bulunması,
4. [redacted] determinantının hesaplanması
5. [redacted] hesaplanması
6. [redacted] istatistiğinin incelenmesi
7. [redacted] denklemlerinin yazılması
8. [redacted] fonksiyonlarıyla ilgisinin anlaşılması.

[redacted]

çalışmalarına dayanarak PY tarafından geliştirilen bu içerik projenin orijinal altyapısını ve test sahasını teşkil etmektedir. Yeri geldikçe proje metninde bu malumata temas edeceğiz.

► **Alternatif Amaç.** [redacted]

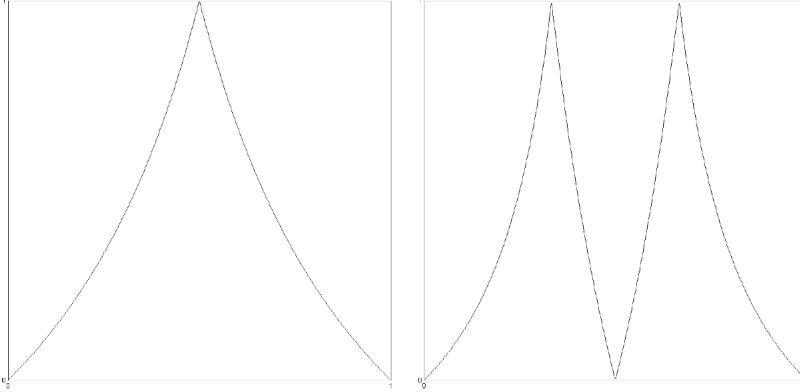
[redacted] Bu fikirler yukarıda sunulan amaca bir alternatif sunduğu gibi, proje ertesi yeni bir projeyi besleme potansiyeline de sahiptir.

[redacted]

Gauss tasvirinin eşleniklerinin ve ivmelenmelerinin dinamiği, aritmetik ve geometriyle ilişkisi nedir? Bu araştırma sorusunun anlaşılması için, Selberg zeta fonksiyonu, modüler eğrinin geometrisi (jeodezikleri) ve dinamik sistemler hakkında gerekli ön bilgiler aşağıdaki başlıklar altında sunulacaktır.

Yeri geldikçe araştırma sorularını vereceğiz ve literatüre işaret edeceğiz. Son altbaşlıkta ise literatürdeki nirengi noktalarının ayrıca üzerinden geçeceğiz.

- | | |
|---|--|
| I. Farey tasviri $\mathbb{T}_F$ ve Gauss tasviri $\mathbb{T}_G$ | V. Transfer operatörleri ve fonksiyonel denklemler |
| II. [REDACTED] | VI. Zeta fonksiyonları |
| III. [REDACTED] | VII. Konunun PY'nin araştırmalarındaki yeri |
| IV. Sabit ölçüler. Minkowski ve Denjoy ölçüleri. | VIII. Literatür taraması |



Şekil 1.

Farey tasviri $\mathbb{T}_F$ ve ikinci tekrarı $\mathbb{T}_F \circ \mathbb{T}_F$.

I. FAREY TASVİRİ ve GAUSS TASVİRİ. Birim aralığın şu öz-tasvirine *Farey tasviri* denir (bkz. Isola [20, 7]):

$$\mathbb{T}_F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{1-x}{x}, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Şekilden görüldüğü üzere bu tasvirin iki dalı vardır. İlk dal olan $x/(1-x)$ dönüşümü, $T^{-1} = x - 1$ ötelemesine eşleniktir, daha kesin bir ifadeyle $U := 1/x$ olmak üzere

$$UT^{-1}U(x) = \frac{x}{1-x} \implies UT^{-n}U(x) = \frac{x}{1-nx}$$

sağlanır. Bu dala Farey tasvirinin *kesintili (intermittent) dalı* adı verilir. Dallardan ikincisi olan $(1-x)/x$, ise $\tilde{T}^{-1} := 1/(x-1)$ dönüşümüne eşleniktir, yani

$$U\tilde{T}^{-1}U(x) = \frac{x}{1-x} \implies U\tilde{T}^{-n}U(x) = \frac{F_{-n-1}x + F_{-n}}{F_{-n}x + F_{-n+1}}$$

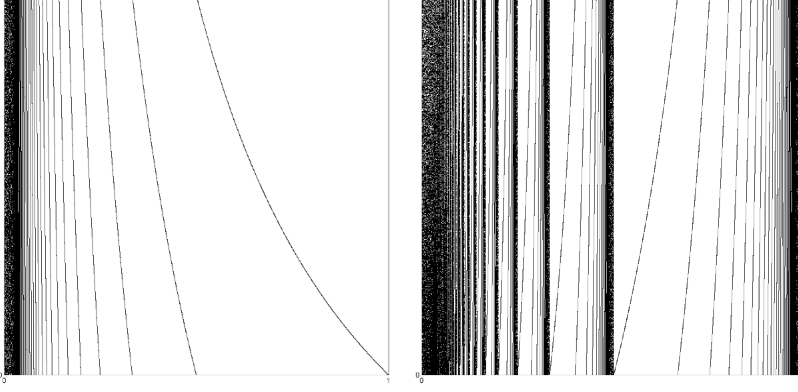
sağlanır. Bu dala Farey tasvirinin *kesintisiz (laminar) dalı* adı verilir. Burada F_n , ile $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ bağıntısının tanımladığı n inci Fibonacci sayısını gösterdik. Farey kesirlerinin n i

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] Birim aralıktan $x \neq 0$ sayısını, $1/x$ 'in kesirli kısmına götüren tasvire *Gauss tasviri* denir. Gauss tasviri, Farey tasvirinden, *dayatma (induction)* denen bir süreçle elde edilir [20]. Şayet $1/(n+1) \leq x \leq 1/n$ ise ve $\mathbb{T}_{F,i}(x)$ ile Farey tasvirinin birinci ve ikinci dalını gösterirsek ($i = 1, 2$), şu eşitlik sağlanır.

$$\mathbb{T}_G(x) = \mathbb{T}_F(x)^n = \mathbb{T}_{F,1}(x) \circ \mathbb{T}_{F,2}^{n-1}(x) = \frac{1}{x} - n \quad (2)$$



Şekil 2.

Gauss tasviri $\mathbb{T}_G$ ve ilk tekrarı $\mathbb{T}_G \circ \mathbb{T}_G$.

Gauss tasvirinin sonsuz adet dalı vardır:

$$\mathbb{T}_{G,i}(x) = \frac{1}{x+i}, \quad 1/(i+1) \leq x \leq 1/i, \quad (i \geq 1). \quad (3)$$

Şayet $x = [0, n_0, n_1, n_2, n_3, \dots]$ bir sürekli kesir gibi görülürse, $\mathbb{T}_G(x)$ 'nin basitçe bir kaydırma tasviri olduğu anlaşılır: $\mathbb{T}_G([0, n_0, n_1, n_2, n_3, \dots]) = [0, n_1, n_2, n_3, \dots]$. Dahası, $n_0 = \tau(x)$ ve $i = 1, 2, \dots$ için $n_i = \tau(\mathbb{T}_G^{i-1}(x))$ sağlanır.

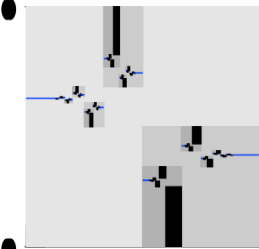
► **Gauss tasvirinin sabit noktaları ve devirli yörüngeleri.** Kaydırma tasviri tanımında, $\mathbb{T}_G$ 'nin devirli yörüngeleri açıkça görülmektedir. Bunlar devirli sürekli kesirlerdir ve $[0, 1]$ aralığındaki kuadratik irrasyonelleri temsil ederler. Sabit noktalarsa sabit sürekli kesirler, yani $[0, n, n, \dots]$ sürekli kesirleridir. Aşağıdaki netice, Gauss tasvirinin devirli yörüngeleriyle modüler eğrinin geometrisi arasında bir köprü kurmaktadır.

Lemma (Artin, Hedlund, Series [26]) $\mathbb{T}_G$ 'nin çift devir uzunluktaki ilkel devirli yörüngeleriyle modüler eğri $\mathcal{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ üzerindeki kapalı jeodezikler arasında birebir mütakabiliyet vardır.

Selberg zeta fonksiyonu $Z(s)$, bu jeodezikler üzerinden bir çarpımla tanımlandığından, Gauss tasvirinin ilişkisi bu bağlamda ortaya çıkar: (aşağıdaki çarpım $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 'deki γ ilkel hiperbolik eşlenik sınıfları üzerinden alınır)

$$Z(s) = \prod_{\gamma} \prod_{m=0}^{\infty} (1 - N(\gamma)^{-s-m}), \quad N(\gamma) = \frac{1}{4} \left(\text{Tr}(\gamma) + \sqrt{\text{Tr}(\gamma)^2 - 4} \right)^2$$

[REDACTED]



[REDACTED]

[REDACTED]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

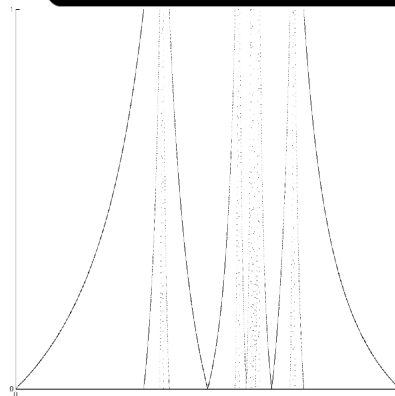
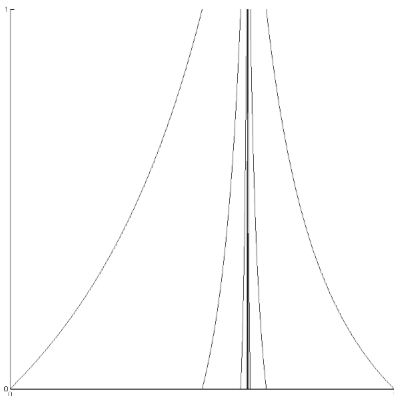
[Redacted]

B_{k+1} aralıklarının uçlarının limiti [Redacted]’dır, yani

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_k}{F_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_{k+1}}{F_{k+2}} = \frac{1}{\Phi} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

[Redacted]

[Redacted]



[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

$(nx)^2$

bulunur. Bu da küçük x ler için 1'e keyfi mertebede yaklaşır ki bu, tasvirin yine dinamik sistemler tabiriyle "nihayetinde genişleyen" bir tasvir de olmadığını söyler. [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

IV. SABİT ÖLÇÜLER. MINKOWSKI VE DENJOY ÖLÇÜLERİ. Birim aralıktaki, birikimli dağılım fonksiyonu (c.d.f.) F_0 olan $X := X_0$ bir rassal değişken olsun. X_i rassal değişkenlerini şöyle tanımlayalım: $X_i := T_{\mathcal{C}}^i(X) \implies X_{i+1} = T_{\mathcal{C}}(X_i)$. O halde X_i 'lerin c.d.f.'leri F_i 'ler arasında şu irtibat vardır:

$$F_{i+1}(y) = \text{Prob}\{X_{i+1} \leq y\} = \text{Prob}\{T_{\mathcal{C}}(X_i) \leq y\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_i\left(\frac{1}{n}\right) - F_i\left(\frac{1}{y+n}\right) \right] \quad (4)$$

Şayet F_i yeterince pürüzsüz alınırsa, X_i 'nin yoğunluğu p_i mevcuttur ve (4) eşitliğinin türevi alınabilir:

$$p_{i+1}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(y+n)^2} p_i\left(\frac{1}{y+n}\right) =: (\mathcal{L}_G^1 p_i)(y).$$

Yoğunluklar arasındaki irtibatı veren bu $\mathcal{L}_G^1$ operatörüne *Gauss-Kuzmin-Wirsing operatörü* veya kısaca *GKW-operatorü* denir. Bu operatörün sabit fonksiyonu, şu sonsuz-terimli fonksiyonel denklemi sağlamalıdır:

$$p(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(y+n)^2} p\left(\frac{1}{y+n}\right) \quad (5)$$

Burada y yerine $y+1$ koyunca hemen şu üç-terimli fonksiyonel denklemi verir:

$$p(y) = p(y+1) + \frac{1}{(y+1)^2} p\left(\frac{1}{y+1}\right) \quad (6)$$

ki, Gauss ölçüsü adı verilen $p(y) := 1/((1+y) \log 2)$ yoğunluğunu çözüm kabul eder. Bu yoğunluğun GKW-operatörünün bir sabit fonksiyonu olduğu iyi bilinir ve kolayca gösterilir. Babenko'nun [26, 6] GKW operatörü ve özdeğerleri hakkındaki çalışmaları sayesinde Gauss problemi çözüme kavuşmuştur. Ayrıntılar için, özdeğerlerin asimtotiğini açığa kavuşturan Alkauskas'ın 2014 tarihli makalesine başvurulabilir [3]. Farey tasvirinin sabit ölçüsü de benzer şekilde bulunur: $1/y$. Lakin bu ölçü Lebesgue ölçüsüne göre mutlak sürekli olsa da birim aralık üzerinde sonlu bir ölçü değildir, yani $\notin L_1([0, 1])$.

$$\left(\frac{F_k y + F_{k-1}}{F_{k+1} y + F_k} \right)^{2^k p_i}$$

$$p(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{F_k y + F_{k-1}}{F_{k+1} y + F_k} \right)^{2^k p_i} \quad (8)$$

Bu eşitliğin sağ kanadı, GKW operatörünün benzerini, $\mathcal{G}$ adır. B $\mathcal{G}$ ağıladığı bir üç-terimli fonksiyonel denklemi şöyle yazabildik:

$$\mathcal{G}(f)(y) = y^2 \left[p \left(\frac{f(y) + f(1/y)}{2} \right) \right] \Rightarrow p \left(\frac{f(y) + f(1/y)}{2} \right)$$

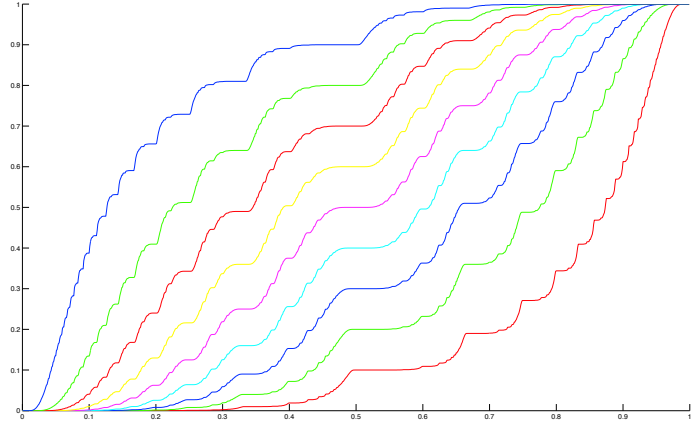
Bu nokta $\mathcal{G}$, biraz da talih yaver gidince bu denklemin bir çözümünün

$$\mathcal{G}(f)(y) = y^2 \left[p \left(\frac{f(y) + f(1/y)}{2} \right) \right]$$

şöyledir: $(0 < p < 1; q = 1 - p)$

$$\mathbf{F}_p(x) = \mu_p([-\infty, x]) = \begin{cases} 1 - p^{n_0}(1 - q^{n_1}(1 - p^{n_2}(1 - \dots))) / 2, & x = [n_0, n_1, \dots] \geq 0 \\ q^{n_0}(1 - p^{n_1}(1 - q^{n_2}(1 - \dots))) / 2, & x = -[n_0, n_1, \dots] \leq 0. \end{cases}$$

Lebesgue ölçüsü λ	Minkowski ? ölçüsü μ
$\mathbf{R}$ 'de sonsuz	$\mathbf{R}$ 'de sonlu
Mutlak sürekli	Sâfi tekil
$\mathbf{R}$ -sabitlik: $\lambda(x + E) = \lambda(E)$	$Aut_I(\mathcal{F})$ -sabitlik: $\mu(\alpha E) = \mu(E)$
Genleşme ($r > 0$): $\lambda(rE) = r\lambda(E)$	Taşınma ($n \in \mathbf{N}$): $\mu(n + E) = 2^{-n}\mu(E)$
GKW operatörü altında	
$\mathcal{L}_G^s \lambda = \zeta_{Hur}(x, s)$	Sabit
Dual GKW operatörü altında	
$\mathcal{L}_G^s \mu = \zeta_G(x, s)$	Sabit
İvmelenmiş transfer operatörü altında	
Melez ζ	Tahminen sabit.



Şekil 5. (Solda) Lebesgue ve Minkowski ölçüleri mukayese tablosu (sağda) Denjoy kanunu $\mathbf{F}_p$ 'nin grafiği ($p = 0.1..0.9$). Minkowski ölçüsü en ortadadır.

V. TRANSFER OPERATÖRLERİ VE FONKSİYONEL DENKLEMLER. Bir Λ kümesi üzerinde bir $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ağırlık fonksiyonu verilsin. Bir $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ tasviri için, $\mathcal{D} := (\Lambda, F, g)$ üçlüsüne bir *ağırlıklı dinamik sistem* adı verilir (bkz. [39], [43]). $\mathcal{D}$ 'nin *Ruelle transfer operatörü* $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları üzerinde etkir ve $(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{F(y)=x} g(y)f(y)$ toplamıyla tanımlanır.

► **Farey tasvirinin transfer operatörü.** Buradaki dinamik sistem $\mathcal{D}_F := ([0, 1], \mathbb{T}_F, g)$ üçlüsüdür, ağırlık fonksiyonu $\mathbb{T}_F$ 'nin türevinin sinci kuvvetidir. $\mathcal{D}_F$ 'in transfer operatörü ve bu operatörün özfonksiyon denklemi şöyle yazılır:

$$\mathcal{L}_s^F \phi(x) = \frac{1}{(x+1)^{2s}} \left[\phi\left(\frac{x}{x+1}\right) + \phi\left(\frac{1}{x+1}\right) \right], \quad \lambda \phi_F(x) = \frac{1}{(x+1)^{2s}} \left[\phi_F\left(\frac{x}{x+1}\right) + \phi_F\left(\frac{1}{x+1}\right) \right] \quad (9)$$

İsola'nın yaptığı gibi [20], x yerine $1/x$ koyarsak buna denk bir denklem elde ederiz:

$$\lambda \frac{1}{x^{2s}} \phi_F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(x+1)^{2s}} \left[\phi_F\left(\frac{1}{x+1}\right) + \phi_F\left(\frac{x}{x+1}\right) \right] \quad (10)$$

Şimdi bu iki denklemi kıyaslayarak $\phi_F(x) = x^{-2s} \phi_F(1/x)$ denklemi elde edilir. Bunu (9)'nin her iki tarafına uygularsak $\lambda \phi_F(x) = \phi_F(1+x) + x^{-2s} \phi_F(1+1/x)$ buluruz. İleri kaydırılmış $\phi_F^+(x) := \phi_F(x+1)$ fonksiyonu cinsindense

$$\lambda \phi_F^+(x-1) = \phi_F^+(x) + \frac{1}{x^{2s}} \phi_F^+\left(\frac{1}{x}\right) \quad (11)$$

bulunur ki bu sonuncusu $\lambda = 1$ için Lewis fonksiyonel denkleminde eşdeğerdir (bkz. Denklem 16):

$$\lambda \phi_F^+(x) = \phi_F^+(x+1) + \frac{1}{(x+1)^{2s}} \phi_F^+\left(\frac{1}{x+1}\right) \quad (12)$$

► **Gauss tasvirinin transfer operatörü.** Burada söz konusu dinamik sistem $\mathcal{D}_G := ([0, 1], \mathbb{T}_G, g)$ dir, ağırlık $\mathbb{T}_G$ 'nin sinci kuvveti olarak tanımlanır. Bu durumda operatöre *Mayer transfer operatörü* denir:

$$\mathcal{L}_s^G \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{2s}} \phi\left(\frac{1}{x+n}\right) \quad (13)$$

İnşası itibariyle $\mathcal{L}_s^G$ operatörü birim aralıktaki sonlu değişimli fonksiyonlar uzayı $BV[0, 1]$ üzerinde etkir ve $s = 1$ için GKW operatörüne özelleşir. Mayer bu operatörü $\{|z-1| \leq 3/2\}$ diski üzerinde analitik fonksiyonlar uzayına etkitmiştir, bkz. [36, 37, 38]. $1 - \mathcal{L}_s^G$ operatörünün Fredholm determinantının mevcut ve genişletilmiş modüler grubun Selberg zeta fonksiyonuna eşit olduğunu ispatlamıştır. Bu operatörün özfonksiyon denklemi sonsuz terimlidir:

$$\lambda \phi_G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{2s}} \phi_G\left(\frac{1}{x+n}\right). \quad (14)$$

Şayet ϕ_G bunun λ özdeğerli bir özfonksiyonuysa,

$$\lambda \phi_G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{2s}} \phi_G\left(\frac{1}{x+n}\right) \implies \lambda \phi_G(x+1) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{2s}} \phi_G\left(\frac{1}{x+n}\right) = \lambda \phi_G(x) - \frac{1}{(x+1)^{2s}} \phi_G\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Yani ϕ_G , şu üç terimli *Lewis fonksiyonel denklemini* sağlar (bkz. [34]):

ϕ

(16)

Lewis-Zagier [34], Laplace-Beltrami operatörü $-\Delta_{LB}$ için şu neticeyi ispatlamıştır:

Teorem (Lewis-Zagier) Gerçek kısmı $\Re s = 1/2$ olan $s \in \mathbb{C}$ değerleri için, $-\Delta_{LB}\eta = s(1-s)\eta$ şeklindeki $SL(2, \mathbb{Z})$ için Maass cusp formlarıyla, aynı s değerli Lewis fonksiyonel denkleminin $x \rightarrow 0$ için $\psi_G(x) = o(1/x)$ ve $x \rightarrow \infty$ için $\psi_G(x) = o(1)$ asimtotik davranışını sergileyen gerçel-analitik çözümleri arasında birebir mütakabiliyet vardır.

Aslında $\lambda = \pm 1$ için, Denklem 16 şu denklem çiftine eşdeğerdir (bkz. [34])

$$\left. \begin{aligned} \phi_G^-(x) &= \phi_G^-(1+x) + (1+x)^{-2s} \phi_G^-(x/(1+x)) \\ \lambda \phi_G^-(x) &= x^{-2s} \phi_G^-(1/x) \end{aligned} \right\}$$

İlk denklemin özdeğer parametresi λ 'yı içermediğine dikkat çekelim.

Teorem (Lewis-Zagier [33], [34]) ϕ_G^- fonksiyonunun (18) denkleminin üst yarı sahada holomorfik bir çözümü olması için gerek ve yeter şart, $f(x) = \phi_G^-(x) + x^{-2s} \phi_G^-(-1/x)$ fonksiyonunun aynı sahada periyodik ve holomorfik olmasıdır.

Lewis ve Zagier [33], fonksiyonel denklemin şu eşdeğer biçimini de göstermiştir ($\lambda = 1$ için):

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(F_n z + F_{n+1})^{2s}} \psi\left(\frac{F_{n-2}z + F_{n-1}}{F_n z + F_{n+1}}\right) \quad (19)$$

Ancak bu eşdeğer biçimin başka bir dinamik sistemden kaynaklandığını makalelerinde belirtmemişlerdir. Bu kaynaklanmayı ve iki dinamik sistemin transfer operatörlerinin özfonksiyonları arasındaki irtibatı aşağıda kuracağız. dahilinde ele alınacak olan dinamik tasvirlerle tekabül eden Lewis-Zagier ve Mayer teoremlerinin ne olduğu sorusu, proje boyunca cevabı aranacak önemli sorulardan biridir.

(20)

$\Re$ [redacted]
 [redacted]
 [redacted]
 [redacted]

$$\psi(x) = \frac{1}{x^{2s}} \psi\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(x+1)^{2s}} \psi\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad (22)$$

[redacted]
 [redacted]
 [redacted]

$$\xi(z-1) - \frac{1}{z^{2s}} \xi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\lambda} \xi(z) \quad (24)$$

[redacted]
 [redacted]
 [redacted]

[redacted]
 [redacted]
 [redacted]
 [redacted] z [38].

VI. ZETA FONKSİYONLARI. Dinamik sistemlere zeta fonksiyonu ilişitirmenin muhtelif yolları vardır [43]. Bizim niyetimiz, ilk aşamada, dinamik sistemlerde âdet olan zeta'lerden ziyade, Lebesgue ölçüsünün (yani sabit 1 fonksiyonunun) transfer operatörü altındaki görüntüsüne ve bunun 0 noktasındaki değerine bakmaktır. Gauss tasviri için bunların ilki Hurwitz zeta, ikincisi de Riemann zeta'yı verir:

$$(\mathcal{L}_s^G \mathbf{1})(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s} = \zeta_{Hur}(s, x), \quad (\mathcal{L}_s^G \mathbf{1})(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta_{Hur}(s, 0) = \zeta_{Rie}(s).$$

Farey operatörü içinse şu bilinmektedir:

Teorem. (Isola [21]) $\mathcal{L}_s^F$ transfer operatörünün n kez Lebesgue ölçüsüne uygularsak, 0 noktasında şunu verir:

$$(\mathcal{L}_s^F)^n \mathbf{1}(0) = 2 \sum_{\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n \setminus \{\frac{0}{1}\}} b^{-2s} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{L}_s^F)^n \mathbf{1}(0) = 2 \frac{\zeta_{Rie}(2s-1)}{\zeta_{Rie}(2s)} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k^{2s}}$$

[redacted]
 [redacted]
 [redacted]
 [redacted]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k^{2s}}$$

B [REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

$$[REDACTED] \cdot [REDACTED] = 1$$

[REDACTED]
[REDACTED]

$$[REDACTED] \cdot \frac{1}{(F_k)^s} = [REDACTED]$$

Diğer tam (ve daha genel olarak rasyonel) değerlerde, Lucas zeta'nın da genellemeleri elde edilecektir.

[REDACTED]
[REDACTED]

$$\frac{d}{dx} [REDACTED]$$

Seriye açmak için Φ noktası da ilginçtir. Bu noktadaki türevleri hesaplırsak, şu Taylor açılımı bulunur:

$$\zeta [REDACTED]$$

VII. KONUNUN PROJE YÜRÜTÜCÜSÜNÜN ARAŞTIRMALARINDAKİ YERİ. Bu proje, [REDACTED]
[REDACTED] PY Uludağ'ın [REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED] çalışmaya sevk etmiştir. **CONTRAC** projesinin altyapısını teşkil eden [REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED] Bu projeyi besleyen temel sezgi budur ve [REDACTED] grubu
bağlamında bu istikamette katedilecek büyük bir mesafe bulunmaktadır.

VIII. LİTERATÜR TARAMASI. Yukarıda yeri geldikçe literatüre gönderme yaparak konu ve kapsamı belirlemeye çalıştık. Burada kaynak eserlere işaret etmek ve araştırma projesini tarihî perspektifi içine yerleştirmeyi amaçlıyoruz.

Silsile 1. Sürekli kesirlerin ve modüler grubun temeli, Öklid algoritmasına, yani antikiteye dek uzanır. Modüler grup, aslında Öklid algoritmasının bir gruba kodlanmış halidir. 1800'lerin başında Gauss, Laplace'a yazdığı bir mektupta muntazam sürekli kesir açılımlarının taabi olduğu kanunu tahminen vermiştir: Hemen her gerçel sayının sürekli kesir açılımında, $k > 0$ tamsayısının sıklığı $\log(1 + 1/(k(k+2)))/\log 2$ ile verilir. Yani gelişigüzel bir gerçel sayının açılımında %41 oranda 1, %17 oranda 2 .. beklenir. Bu tahminin, hata payını da kestiren ispatı Kuzmin tarafından verilmiş, bu ispat ve hata payı P. Lévy tarafından geliştirilmiştir. [REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED]

[Redacted text block]

► [Redacted text] Operatör izi ve determinanti hesaplamak, operatör hakkında özfonksiyon bulmadan kaçınarak bilgi aramanın bir yoludur. [Redacted text]

[Redacted text block]

[Redacted text] r.) GKW operatörü ve diğer transfer operatörleri için bunun nasıl yapıldığını KONU ve KAPSAM başlığı altında gösterdik. [Redacted text]

[Redacted text block]

$$L_s \psi := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{2s}} \psi\left(\frac{1}{x+n}\right) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(F_{m+1}x + F_m)^{2s}} \psi\left(\frac{F_mx + F_{m-1}}{F_{m+1}x + F_m}\right)$$

Bu denklemi de öncekiler gibi kaydırıp/öteleyip çıkan denklemleri basitleştirebildik. Belki de bu, incelemeyi tasarladığımız diğer dinamik tasvirlerle de uygulanabilecek bir yöntemdir. Sonuçta şu denklemi elde ettik.

[Redacted text block]

► Sonlu-terimli fonksiyonel denklem çözümü arama: [Redacted text]. [Redacted text]

[Redacted text block]

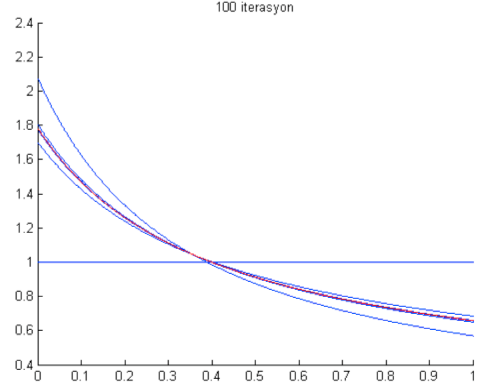
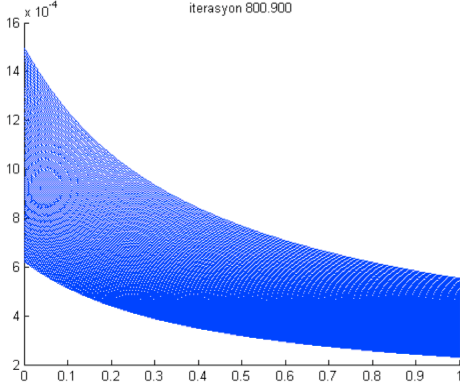
$f(x) = x$	[Redacted]	$\lambda = -3$	$f(x) = x^3 - x$	$s = -2$	$\lambda = 1$
$f(x) = x^2$	[Redacted]	[Redacted]	[Redacted]	[Redacted]	[Redacted]
[Redacted]	[Redacted]	[Redacted]	[Redacted]	[Redacted]	[Redacted]

[Redacted text block]

$$\psi_s^-(z) := \zeta_{Rie}(2s)(1 + z^{2s}) + \sum_{m,n \geq 1} \frac{1}{(mz + n)^{2s}}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\Re(s) > 0$ için yakınsar ve Lewis fonksiyonel denklemini sağlar, ancak $\psi_s(z) := \psi_s^-(1 + z)$ fonksiyonu Mayer transfer operatörünün sabit fonksiyonu değildir [38]. Onun yerine $(\mathcal{L}_s \psi_s)(z) = \psi_s(z) - \zeta_{Rie}(2s)$ sağlanır, yani sadece ζ_{Rie} 'in sıfırlarında bir sabit fonksiyon verir (şık bir netice olsa da takriben çeyrek asırdan beri buradan sıfırların tabiatına dair bir şey yakalayan kimse çıkmamıştır).

► **Sabit ölçü bulmak için nümerik yöntem.**



Şekil 7. Lebesgue ölçüsünün $\mathbb{R}$ tekrarları (solda). Burada bir nümerik sürüklenme gözlemliyoruz ve tekrarlar sıfır ölçüsüne (Dirac ölçüsüne değil) yakınsıyormuş gibi görünüyor, oysa ki tekrarların integrali hep 1 kalmalı. (sağda) Burada her adımda tekrarları normalize ettik, integral hep 1 kalacak şekilde. Şimdi hızlı bir yakınsama gözlemliyoruz (mor eğri). Lebesgue ölçüsünden farklı bir ölçüyle başlasak da aynı eğriye varıyoruz, yani bu durumda nümerik açıdan kararlı bir süreçle karşı karşıyayız. Lakin bu eğrinin denklemini henüz tahmin edemedik.

Buna benzer nümerik yöntemler GKW sabitinin hesaplanması gibi sorularda başarıyla uygulanmıştır [17, 18, 12].

► **Nümerik yöntemin kuramsal uyarlaması.**

$$s=1 \quad \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

► **Sâfi tekil sabit ölçü bulma yöntemi.**

► **İstatistik.** İncelediğimiz s

6.1.2. BAŞARI ÖLÇÜTLERİ VE RİSK YÖNETİMİ:

BAŞARI ÖLÇÜTLERİ TABLOSU

İP No	İş Paketi Hedefi	Başarı Ölçütü (% , sayı , ifade vb.)	Projenin Başarısındaki Önemi (%)
İP1	[REDACTED]	[REDACTED]	5
[REDACTED]	[REDACTED]	[REDACTED]	20
İP3	[REDACTED] bilgisayar deneyleri yapılması ve deneylerin bilgisayar uygulamasına dönüştürülmesi	Uygulamanın internetten yayımlanması	10
İP4	[REDACTED]	[REDACTED]	15
İP5	[REDACTED]	[REDACTED]	20
İP6	[REDACTED]	[REDACTED]	5**
İP7	Bulunan sonuçların dünya matematik camiası ile paylaşılması ve tanıtılması	[REDACTED] bir çalıştay/yaz okulu düzenlemek. İki uluslararası yayın çıkarmak	10
İP8	Proje ekibinin arasında bilgi paylaşımı ortamının sağlanması, bursiyerlerin eğitimi ve iletişim	[REDACTED] tü seviyede ders açılması. [REDACTED] lisans [REDACTED] lisansüstü tezi yazılmış olması. Bursiyerlerin doktora/yüksek lisansa geçişleri. Proje grubuyla toplam [REDACTED] seminer konuşması yapılması. Bunların [REDACTED] dış uzmanlar tarafından verilmesi. Pr [REDACTED] aratılması.	10
İP9	Daha geniş akademik camiaya ve topluma katkı	Bursiyerler tarafından konuyla ilgili [REDACTED] popüler matematik makalesi, [REDACTED] vikipedi maddesi ve iki lise ziyareti.	5

Açıklamalar (*) İP1 proje hazırlık aşamasında kısmen gerçekleşmiş olduğundan yüzdesi düşük tutulmuştur.

()** İP6 alternatif amaçla (B planı) ilgilidir. Muhtevasının önemine kıyasla katkı yüzdesinin düşük olmasının sebebi budur. İP1, İP2 ve İP5'den istenen verim alınamaması durumunda İP6'ya ağırlık verileceğinden katkı yüzdesi artacaktır. B planına ihtiyaç duyulmasa da, düşük yoğunlukla proje boyunca üzerinde çalışmaya devam edeceğiz.

RİSK YÖNETİMİ TABLOSU

İP No	En Önemli Risk(ler)	B Planı
İP1,2,5	[REDACTED]	Nümerik deneylere yönelmek. İP6'ya ağırlık vermek.
İP3	Uygulamayı geliştirecek nitelikte doktora sonrası bursiyeri bulunamaması	Nümerik deney sonuçlarının ham veri olarak internetten duyurulması.
İP7	Toplantı bütçesinin yetersiz kalması	Kurum hissesini kullanmak. Dış kaynaklara yönelmek.
İP8	Lisansüstü soruların çözümsüz kalması	Nümerik deneye yönelmek.

6.3. PROJE EKİBİ

MEVCUT ARAŞTIRMA OLANAKLARI TABLOSU

Mevcut Altyapı/Ekipman Türü, Modeli	Mevcut Olduğu Kurum/Kuruluş	Projede Kullanım Amacı
Masaüstü Bilgisayar (2 adet)	Galatasaray Üniversitesi	Genel
Dizüstü Bilgisayar (2 adet)	Galatasaray Üniversitesi	Genel
HP Yazıcı (2 adet)	Galatasaray Üniversitesi	Genel
iPad (2 adet)	Galatasaray Üniversitesi	Genel

7. YAYGIN ETKİ

7.1. PROJEDEN BEKLENEN YAYGIN ETKİ

PROJEDEN BEKLENEN YAYGIN ETKİ TABLOSU

Yaygın Etki Türleri	Projede öngörülen/Beklenen çıktı, Sonuç ve Etkiler
Bilimsel/Akademik	►● endeksli makale
Ekonomik/Ticari/Sosyal	►● uluslararası çalıştay organizasyonu ►● popüler matematik makalesi ►proje konusuyla ilgili ● Türkçe vikipedi maddesi ►● konferans bildirisi
Araştırmacı Yetiştirilmesi ve Yeni Proje(ler) Oluşturma	►● lisansüstü öğrenci yetiştirme ►● doktora sonrası araştırmacıyla işbirliği hedeflenmektedir. ►Başarıyla so [REDACTED] r. ►Proje bursiyerlerine proje yazma eğitimi verilecek, proje yürütülmesine iştirakleri sağlanacaktır.

NOT. [REDACTED]

7.2. PROJE ÇIKTILARININ PAYLAŞIMI VE YAYILIMI

PROJE ÇIKTILARININ PAYLAŞIMI VE YAYILIMI TABLOSU

Faaliyet Türü	Paydaş/Potansiyel Kullanıcılar	Faaliyetin Zamanı ve Süresi
Çalışma seminerleri	Tüm proje grubu	Proje boyunca toplam en az ● kez
Toplantı/Çalıştay	Toplantı katılımcıları	2016 yazı
Bilgisayar uygulaması	Tablet bilgisayar kullanıcıları	Proje bitişinden itibaren
Proje blogu	Proje grubu	Proje boyunca

Düzenlenecek toplantı hakkında özet bilgi ► **Toplantı adı:** Arithmetic and Geometry around Dynamical Systems: (2016 yazı, Galatasaray Üniversitesi, yaklaşık bir hafta) ► **Bilim Kurulu:** [REDACTED] ► **Düzenleme Kurulu:** A. [REDACTED] DS1, DS2 ► **Davetli Konuşmacılar:** G. Alkauskas, C. Bonnano, B. Vallee, C. Kraaikamp, O. Karpenkov, A. Venkov, S. Katok, F. Boca, V. Sergiescu, J. Fiala, P. Kleban. (toplantı planlarında değişiklik yapma ihtimalini saklı tutuyoruz).

Bu metin hakkında. Bu proje teklifi Latex formatında, [REDACTED] Matlab'da üretilmiş, istatistik hesaplarının bir kısmı Python dilinde yapılmış, sembolik hesap gerektiren sabit polinom arama konusundaysa Maple yazılımı kullanılmıştır. Teknik konularda yardımına ek olarak tüm görselleri hazırlayan [REDACTED] müteşekkirim-PY.