

1. ÖZET ve ANAHTAR KELİMELEER:

Proje Başlığı:

HİPERGEOMETRİK GALOİS ETKİLERİ (Gal-Act)

Özet

Bu projede, Picard-Terada-Mostow-Deligne hipergeometrik fonksiyonlarının incelemesinden doğan bir aritmetik eğri sınıfı üzerindeki Galois etkisini araştırmak istiyoruz. Geometri, aritmetik ve cebirin çeşitli dallarının kesişiminde bulunan bu eğrilerin bir-kaç farklı kombinatorik tanımlamasını vermek mümkündür. Aynı zamanda bu eğriler bir modül uzayının noktalarıyla da temsil edilirler. Kimya’da fullerener adı altında tezahür eden bu eğrilere gruplar kuramında ağtopu (netball) adı verilir. Bu eğrileri kafes noktası gibi düşünebileceğimiz gibi bir çeşit Hurwitz probleminin çözümü olarak da ele alabiliriz. Bu eğriler $PSL(2, \mathbb{Z})$ modüler grubunun bir altgrup ailesine karşılık gelir ve kurdela çizgeleri ile betimlenirler. Muhtelif alanlarla bağlantılar sayesinde, genel aritmetik eğrinin aksine, bu eğriler denklemlerinin bulunabilmesi açısından ümit vericidir.

Gal-Act projesinin amacı bu eğriler üzerindeki Galois etkileri hakkındaki doğal soruları şekillendirmek ve çözüme kavuşturmak ve bu esnada yeni kanuni galois etkileri elde etmek, Grothendieck-Teichmüller grubunun hipergeometrik bir benzerini geliştirmek, Andre-Oort sanısını daha iyi anlamak ve moonshine olgusunu kavramak ve Allcock’un canavar grubu sanısını çözmek için bir yaklaşım geliştirmektir.

Hipergeometrik eğrilerin öncü bir incelemesi modüler grubun zengin yapısının bir kısmı üstündeki perdeyi kaldırmış ve modüler eğrinin örtü kategorisinde sonsuz örtü sistemlerinin nasıl inşa edilip incelenebileceğine dair elle tutulur bir yaklaşım sunmuştur. Sarmallar bu sonsuz örtü sistemlerinin geri limiti olarak tanımlanır. Sarmallar üzerindeki Galois etkisinin incelemesi ve sarmalların Teichmüller uzayları bu projede önerilen konulara bir alternatif sunmaktadır.

Üç yıllık bir proje olan Gal-Act’ın amaçlarını gerçekleştirmek için, postdoktora ve lisansüstü öğrencilerden ve araştırmacılardan (Prof. Dr. Susumu Tanabe, Dr. Celal Cem Sarıoğlu, Dr. Ayberk Zeytin, Dr. Gönenç Onay) oluşan bir ekiple çalışarak, evsahibi kurumdaki araştırmacıların işbirliğiyle bir araştırma grubu kurmayı, davetli uzmanlar tarafından verilen seminerler düzenlemeyi, bir araştırma konferansı düzenlemeyi ve lisansüstü seviyede dersler vermeyi tasarlıyoruz. Bu proje kapsamında talep edilen seyahat ve bilgisayar desteği öncelikli olarak araştırma grubunun genç üyelerine yöneliktir (lisansüstü öğrenciler ve postdoktoran).

Daha geniş bir açıdan, proje evsahibi kurumun yeni kurulan matematik bölümünü desteklemeyi ve önemli bir araştırma ve bilimsel buluşma merkezi olmasını sağlamayı hedeflemektedir.

Anahtar Kelimeler:

Modüler grup, Hipergeometri, Galois etkileri, kurdela çizgeler, sarmallar, moonshine, Hurwitz problemi, Grothendieck-Teichmüller kuramı

Project Title:

HYPERGEOMETRIC GALOIS ACTIONS (Gal-Act)

Abstract

In this project, we propose to study the Galois actions on a class of arithmetic curves originating from the study of Picard-Terada-Mostow-Deligne hypergeometric functions. These curves sit on the crossroads of several branches of geometry, arithmetic and algebra; they admit several types of combinatorial descriptions, and may be represented by some points of a moduli space. They are encountered under the name fullerenes in chemistry and under the name netballs in group theory. These curves can be interpreted as lattice points and simultaneously as solutions of a certain Hurwitz-type problem. They also parametrize a certain subsystem of subgroups of the modular group $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. These curves admit a nice combinatorial description in terms of ribbon graphs. Because of their connections to diverse fields, there is a well-founded hope that these curves will render themselves to explicit calculation, unlike the case of a general arithmetic curve.

The aim of Gal-Act is to shape and address the natural questions concerning the Galois action on these curves, with the aim of obtaining new canonical Galois representations, developing a hypergeometric analogue of the Grothendieck-Teichmüller group, improving our understanding of the Andre-Oort conjecture and getting a deeper insight into moonshine and Allcock's conjecture about the monster group.

A preliminary study of the hypergeometric curves unveiled a part of the rich structure of the modular group by yielding a concrete understanding of how to construct and study infinite systems of covers in the category of all covers of the modular curve. Solenoids are defined as inverse limits of these infinite systems. The study of Galois actions on the solenoids, as well as their Teichmüller spaces provides an alternative line of research to the proposed topic.

We plan to achieve the goals of the three-year long project Gal-Act by a team consisting of post-doc and graduate students, (Prof. Dr. Susumu Tanabe, Dr. Celal Cem Sarioğlu, Dr. Ayberk Zeytin, Dr. Gönenç Onay) by forming a research laboratory in the host institution, by regular seminars delivered by invited specialists, by organizing research conferences and by research training activities such as summer schools and specialized graduate courses.

The requested equipment and travel support in the context of this project are meant for the junior team members (graduate students and the post-doc team member)

From a broader perspective, the project aims at fulfilling in its field the unrealized potential of its host institution to become a major center of scientific activity.

Keywords:

Modular group, Hypergeometry, Galois actions, ribbon graphs, solenoids, moonshine, Hurwitz problems, Grothendieck-Teichmüller theory

2. AMAÇ: Önerilen projenin amacı ve erişilmek istenen sonuç açıkça yazılmalıdır.

Bu proje, kuramsal içeriklidir.

Bilimsel Amaç: Yöntem kısmında daha ayrıntılı ele alacağımız üzere, bu proje kapsamında şu problem öbekleri ortaya çıkmaktadır:

- Hipergeometrik eğrilerin açık cebirsel tasvirini elde etmek, tanımlayan rasyonel fonksiyonları bulmak, monodromi gruplarını saptamak, ve galois etkisini hesaplamak [bu hipergeometrik çizgelerin sistematik ve kavramsal bir incelemesini tetikleyebilir]
- Üst-boyutlu Schwartz gönderimi altındaki kafes noktalarının cebirselliğini/aşkınlığını incelemek ve bu noktaların mümkün merteye açık bir tasvirini elde etmek, bu noktalar üzerindeki galois etkisiyle ilk sorudaki etkiyi karşılaştırmak [Bu Andre-Oort sanısını daha iyi kavramamızı sağlayabilir]
- Norton'un ağtopları (gruplar kuramı), Thurston'un artı-eğrilikli üçgenlemeleri (geometri), hipergeometrik eğriler (cebirsel geometri), ve Allcock sanısı (karmaşık hiperbolik geometri) arasında köprü kurmak [Bu moonshine-bağılantılı oldukları anlayışımızı geliştirebilir]
- Grothendieck-Teichmüller grubunun bir hipergeometrik benzerini tasarlamak, bunun için de tüm Teichmüller kulesi yerine hipergeometrik eğri sisteminden yararlanmak [Bu GT grubunun eski halini mutlak galois grubundan ayırdetmekte kullanılabilir ve yeni kanuni galois temsillerine yol açabilir]

Bu problem öbekleri değişik zorlukta ve mahiyette sorular içermektedir, projenin ilk aşamalarında bilgisayarlı hesap ağırlıklı sorular ön plana çıkarken ileri aşamalarda daha kuramsal sorunlar öne çıkacaktır. Yeri geldikçe daha kesin ifade edilmiş sanılar aşağıda sunulmuştur.

Eğitsel Amaç: Proje ekibini oluşturan postdoktorantın ve lisansüstü öğrencilerin araştırmaya geçiş sürecini yönlendirmek. Konu hakkında, İstanbul genelindeki öğrencilerin katılabileceği doktora dersleri vermek, yaz okulları ve araştırma konferansları düzenlemek

Diğer: Gal-Act, evsahibi kurumun yeni kurulan matematik bölümünün araştırmacı niteliğini desteklemeyi ve önemli bir araştırma ve bilimsel buluşma merkezi olmasını sağlamayı hedeflemektedir.

3. KONU VE KAPSAM: Önerilen projenin konusu ve kapsamı net olarak tanımlanmalı; amaç ile ilişkisi açıklanmalıdır.

Burada konunun hızlıca üzerinden geçeceğiz ve çabucak kavramayı sağlamak amacıyla bazı isimleri zikretsek de literatüre gönderme yapmayacağız. Literatür bilgileri takip eden maddelerde sunulacaktır.

- **A.** Bu projede, matematikteki iki klasik nesne arasındaki etkileşimle ilgileniyoruz. Bunlardan birincisi olan oransal sayı cismi $\mathbb{Q}$ 'nın *mutlak galois grubu* $Gal(\mathbb{Q})$, ikincisi de *modüler grup* $PSL(2, \mathbb{Z})$ 'dur. Üst yarı sahanın modüler gruba etkisine bölümüne *modüler orbifold* adını verip $\mathcal{M}$ ile göstereceğiz. Modüler grup etkisinin sabit noktaları yüzünden bir manifold değil orbifold bir olan $\mathcal{M}$ 'nin altında yatan manifold $\mathbb{P}^1$ 'dir, 0 ve 1 noktalarında ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -izotropi gruplarına karşılık gelen) iki orbifold noktası vardır, sonsuzda ise bir delik bulunmaktadır. Modüler orbifoldun temel grubu $\pi_1(\mathcal{M}) \simeq PSL(2, \mathbb{Z})$ grubudur. Modüler eğrinin üç delikli küre tarafından altı-dereceli bir örtüsü vardır, bu ikinci manifoldun (tıkızlanmış) örtüleri aritmetiktir (yani $\mathbb{Q}$ 'nun sonlu bir genişlemesinde tanımlanırlar). Tüm aritmetik eğriler üç delikli kürenin bir örtüsü olark tanımlanır (Belyi). Bu aritmetiklik $Gal(\mathbb{Q})$ grubunun $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ uzayının tüm örtüleri üzerinde bir etkisine yol açar. Bu örtüler *desen* adı verilen kombinatorik nesnelerle de tanımlanabilirler. Dolayısıyla mutlak galois grubu desenler üzerinde etkir (Grothendieck). Belyi teoremine göre bu etki sadıktır.

- **B.** Mutlak galois grubunun etkisini $\mathcal{M}$ 'nin tüm örtüleri üzerinde incelemek daha doğaldır, çünkü üç delikli kürenin örtüleri de bu kümenin (aslında kategori) öğeleridir ($\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \rightarrow \mathcal{M}$ örtüsü ile bileşen alarak). Modüler eğrinin sonlu örtüleri de (özel bir çeşit) desenlerle tanımlanabilir. Aslında burada desenlerden söz etmenin uygun zemini Bass-Serre kuramıdır. Bu kuramda sonlu örtüler ihmal edilmiş olsa da, desenler bu kuram bağlamında bir-boyutlu bir “orbifold”un örtüleri olarak görülebilir. *Modüler aralık* adını vereceğimiz bu orbifoldun altında yer alan uzay $[0, 1]$ reel aralıktır, 0 ve 1 noktaları sırasıyla yerel grupları $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ olan orbifold noktalarıdır. Bu orbifoldu $\otimes \text{---} \circledast$ ile gösterelim. (Modüler orbifoldun deliğini genişleterek, sonuçta modüler orbifoldun modüler aralığa “çekildiğini” (deformation retract) hayal edebiliriz. Bu bize iki orbifold arasında bir homotopi denkleği ve temel gruplar arasında doğal bir izomorfizm verir.) $\otimes \text{---} \circledast$ modüler aralığının bazı n -dereceli örtüleri şöyle elde edilir: $\otimes \text{---} \circledast$ aralığının düzlemde n adet kopyasını al ve bunları bağlantılı bir çizge oluşturacak şekilde birleştir, öyle ki (i) farklı çeşit uçlar asla buluşmasın (ii) $\otimes$ -tipi köşelerin derecesi ya 1 ya 2 olsun, (iii) $\circledast$ -tipi köşelerin derecesi 1 ya da 3 olsun (iv) her üç dereceli köşe için bu köşede buluşan kenarların devirsel bir sıralaması verilsin (aralıkları düzlemde alırsak bu sıralama düzlemin istikametiyle otomatik olarak verilir). Bu çizgelerin sistematik bir incelemesini Kulkarni “devirsel üçlü çizgeler ve ağaç diyagramları” adı altında yapmıştır. Farey ağacı $\otimes \text{---} \circledast$ modüler aralığının evrensel örtüsüdür.

- **C.** 2-boyutlu modüler eğri $\mathcal{M}$ 'nin örtüleriyle (modülo izomorfizmler) ve 1-boyutlu $\otimes \text{---} \circledast$ modüler aralığının örtüleri arasında birebir karşınım (mütekabiliyet, karşılıklılık, correspondence) vardır. Modüler eğrinin (ya da modüler aralığın) tüm sonlu örtülerinin kategorisini

$$\mathbf{FCov} PSL(2, \mathbb{Z})$$

ile gösterelim. Esas olarak, $\mathbf{FCov} PSL(2, \mathbb{Z})$ bir kategoridir, dahası, bu kategori çok zengin kombinatorik yapı barındırır. $\mathbf{FCov} PSL(2, \mathbb{Z})$ aynı zamanda modüler grubun tüm altgruplarının eşlenik sınıflarının kategorisidir. Bu altgrupların her birinin sonlu adet $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}$ grubunun serbest çarpımı olduğu bilinmektedir. Tüm normal altgrupların oluşturduğu (kofinal) sistem $\mathbf{FCov}$ içinde doğal bir biçimde oturur, bu sistemin kolimiti modüler grubun pro-sonlu tamlaması olan $\widehat{PSL}(2, \mathbb{Z})$ grubunu verir. Bu pro-sonlu grup, modüler eğrinin cebirsel temel grubudur. Düzlem ikili ağaçlar $\mathbf{FCov}$ 'un doğal üyeleridir.

3. KONU VE KAPSAM (DEVAM):

• **D.** Mutlak galois grubu $\mathbf{FCov}$ üzerinde etkir. Ancak, bir desenin tanımladığı örtünün aritmetik yapısını bulmak çok zahmetlidir ve bu galois etkisinin incelenmesini zorlaştırır. Bazı münferit durumlarda bu etkiyi hesaplamak mümkün olsa da (Zapponi, Zvonkine, Couveignes, Shabat, vs) bu meseleyi tüm genelliğiyle ve sistematik olarak halletmek imkansız görünmektedir. Bu nedenle, münferit olmayan ancak sistematik olarak inceleyebileceğimiz örtü aileleri üzerine yoğunlaşmak istiyoruz. Kolayca halledilen abelyen örtülerden sonra önümüzde beliren ilk seçenek $\text{pro-}\ell$ (imsi), nilpotan (imsi), çözünür, vs örtü ailelerine bakmaktır. Şu ana dek en çok meyve veren yaklaşım bu olmuştur, bu yaklaşımı “doğrusal” ya da “motivik” olarak niteleyebiliriz (Wojtkowiak, Deligne, Goncharov, Hain, Matsumoto, Terasoma) İkinci seçenek ise $\mathbf{FCov}_g PSL(2, \mathbb{Z})$ üzerindeki, yani genus- g kısmındaki galois etkisine bakmaktır. BU konuda tek bilinen $g = 0, 1$ için etkinin sadık olduğudur (Schneps). Düzlem ağaçları üzerindeki galois etkisinin de sadık olduğu bilinmektedir (Lenstra, Schneps). Bu durumlarda, galois etkisi hakkında başka bir şey elde edilememiştir. Son olarak, denklik (congruans) modüler eğrileri tarafından baskılanan örtüler $\mathbf{FCov}$ kategorisinde kayda değer bir aile oluşturur.

Modüler grupla mutlak galois grubunun etkileşiminden işe yarar bilgi edinmek istiyorsak, $\mathbf{FCov}$ içinde özel ve iyi aileler aramamız gerekir. Özü itibariyle abelyen-olmayan örtü kulelerine özel bir ilgi duyuyoruz. Galois-olmayan örtü ailelerine de bakabiliriz.

Küre üçgenlemelerini kullanarak, modüler eğrinin 0-cinsli, galois-olmayan bazı ilginç örtü aileleri elde etmek için şöyle bir yol bulunmaktadır:

• **E.** Üçgenlenmiş ve yönlendirilmiş (oriented) bir yüzey alalım. Bu üçgenlemeye dual olan çizge $\otimes \text{---} \otimes$ ’un doğal bir örtüsüdür. Modüler eğrinin mütakabil örtüsü asıl üçgenlemenin barisentrik altbölümü ile elde edilir, ki bu örtü yüzeyde bir aritmetik yapı tanımlar (Shabat-Voevodsky). Yani, üçgenlemeler $\mathbf{FCov}$ kategorisinin elemanlarını tanımlamanın bir başka yolunu vermektedir. Bir üçgenlemede, en çok altı üçgenin bulunduğu köşeye *eğriliği eksi işaretli olmayan köşe* ve hiçbir köşesinin eğriliği artı işaretli olmayan üçgenlemelere de *eğriliği eksi işaretli olmayan üçgenleme* adı verelim. Eğriliği eksi işaretli olmayan üçgenlemeler önemli bir sınıf oluşturur. Euler formülünün sıradan bir uygulaması eğriliği eksi işaretli olmayan üçgenlemede eğriliği artı işaretli köşe sayısının sonlu sayıda olduğunu gösterir.

• **F.** Seksenlerde Thurston eğriliği eksi işaretli olmayan üçgenlemeleri inceledi ve bu üçgenlemelerin açık seçik ve elle tutulur bir sınıflamasını verdi. Dahası, bu üçgenlemelerin nasıl inşa edilebileceğini gösterdi. Bu üçgenlemeler Picard, Terada, Deligne ve Mostow’un (PTMD) üst boyutlu hipergeometrik fonksiyonlar hakkında çalışmalarıyla ilgilidir. Bu nedenle, eğriliği eksi işaretli olmayan üçgenlemelere *hipergeometrik* demek uygun görünmektedir. Her küre üçgenlemesine, modüler eğrinin 0-cinsli bir örtüsü, modüler aralığın bir örtüsü (yani bir desen) ve modüler grubun bir altgrubu tekabül eder; üçgenleme hipergeometrikse mütakabil nesnelere de *hipergeometrik* diyeceğiz.

Thurston hipergeometrik üçgenlemelerin (özde) sonlu sayıda sonsuz aileden ibaret olduğunu göstermiştir. Bu aileler sonlu sayıda $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{Q}_{>0}^k$ vektörleri tarafından parametrize edilirler. Uzunluğu 12 olan $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots)$ parametresine tekabül eden aile en büyük ailedir, ve diğer tüm aileler bu ailenin üyelerinin bozulması ile elde edilirler. Bir μ parametre vektörünün tanımladığı hipergeometrik örtü ailesini $HC(\mu)$ ile gösterirsek,

$$HC(\mu) \subseteq \mathbf{FSub}_0 PSL(2, \mathbb{Z})$$

olduğunu görürüz. Bu μ parametreleri PTMD kuramında da ortaya çıkar ve kohacmi sonlu bazı kesikli karmaşık hipoerbolik yansıma gruplarına karşılık gelir. Bu parametreleri anlamının bir başka yolunu ilerde sunacağız.

3. KONU VE KAPSAM (DEVAM):

• **G.** Hipergeometrik üçgenlemeler arasında en meşhuru ikosahedral üçgenlemedir (futbol topu olduğu için), ki yukarıda bahsi geçen en büyük ailenin bir üyesidir. İyi özellikleri olan birçok kombinatorik nesne hipergeometrik üçgenlemelerle ilişkilendirilebilir. Bunlar çeşitli alanlarda kendiliğinden ortaya çıkar ve bu nedenle zengin bir terminolojileri oluşmuştur. Üçgenlenmiş yüzeylere kimi zaman *deltahedra* adı verilir. Tüm köşelerinin derecesi 3 olan polihedralara *trivalent polihedra* denir. Organik kimyada, yüzleri beşgen veya altıgenlerden oluşan trivalent polihedralara *fulleren* denir (alternatif isimler: footballene, buckyball, buckminsterfullerene) Kimyada fullerenler karbon atomlarının oluşturduğu bazı karmaşık moleküllerle ilgili olarak (60'larda!) incelenmiştir. Kimya literatüründe ve pazarında fulleren katalogları bulunmaktadır (Godly, Taylor).

Her trivalent polihedrona ilişkin bir deltahedron (yani küre üçgenlemesi) vardır, merkezi altbölümle elde edilir; bu yolla fullerenlere tekabül eden deltahedronlarsa ikosahedral üçgenlemenin de ait olduğu en büyük *hipergeometrik* üçgenleme ailesinin üyeleridir. İkosahedronun kendisi C_{60} molekülüne karşılık gelir. Kimya bağlamında $HC(\mu)$ 'un aynı dalanma davranışı (pasaport) gösteren üyeleri *izomerler* şeklinde karşımıza çıkar. Fullerenlerin izomer sayımı da kimya literatüründe ele alınmıştır. Hipergeometrik bağlantı bu sorunu bir kafes noktalarının bir otomorfizm grubu altında yörüngelerinin sayımıyla ilişkilendirmektedir.

• **H.** Fullerenler daha da şaşırtıcı bir bağlamda ortaya çıkmaktadır. Yamalar, canavar grubu ile ilgili “0-cins” olgusunu incelemek üzere Norton tarafından oraya atılmıştır (Norton, Hsu). Yamaları fazladan bir miktar daha bilgi içeren bir çeşit desen gibi düşünebiliriz. Norton'un futbol topu veya ağtopu adını verdiği özel bir sınıf yama canavar grubu ve altgruplarının incelenmesinde ortaya çıkmaktadır. Aslında ağtopu yamalar tam anlamıyla fullerenlerdir, ve fullerenler de hipergeometriktir. 0-cins olgusu hipergeometrik üçgenlemeler bağlamında doğal bir şekilde yorumlanabilir. Moonshine, $\mathbb{M}$ canavar grubunun her bir ögesine modüler grubun bir altgrubunu iliştirir, yani bir $\mathbb{M} \rightarrow \mathbf{FCov}_0\mathcal{M}$ tasviri vardır. Bu altgruplar hipergeometrik midir? Hipergeometrik eğrilerin canavar grubuyla bağlantısına bir başka delil de sanı düzeyinde olan “Canavarca Teklif”dir (Daniel Allcock). Bu noktada fizik literatürüyle de bağlantılar bulunabilir.

• **I.** Kaydırma yüzeyleri (translation surface) ve Veech grupları hipergeometrik üçgenlemelere rastgeldiğimiz bir başka bağlamdır. Kare-kaplama yüzeyler (Pierre Lochak'ın origamileri), sonlu sayıda Öklid birim karesi alıp sağ kenarları sol kenarlarla, üst kenarları alt kenarlarla yapıştırarak elde edilir ve her bir origami tek delikli simitin bir örtüsünü verir (tek delikli simit modüler eğrinin enbüyük abelyen örtüsüdür ve derecesi altıdır. Üç delikli küre ise modüler eğrinin yine altı dereceli, abelyen olmayan bir galois örtüsüdür). Gelişigüzel origamiler araştırmaya elverişli değildir, incelemeye müsati daha özel origami ailelerine bakacak olursak, bunların hipergeometrik üçgenlemelerle bağlantılı olduğunu görürüz (daha kesin bir dille söylemek gerekirse hipergeometrik origamiler, her bir köşesinde ençok 4 kare buluşan origamiler olarak tanımlanır. Bu tanım yine bir eksi işaretli olmayan eğrilik koşulu getirmektedir).

• **J.** Hipergeometrik fonksiyonlar, kombinatorik ve grup kuramıyla bağlantılarının ışığında, hipergeometrik eğrilerin hesaplanabilir olduğu yönünde kuvvetli ve temelli bir ümit belirlemektedir. Genel desenlerin aksine, bu eğrilerin üzerindeki galois etkisini incelemek mümkün olabilir. Dahası, bu deltahedronlar “kafes noktaları” olduğundan (Thurston, Madde 7'de bu sonuç ayrıntısıyla verilecektir) her $\mathcal{T}$ hipergeometrik üçgenlemesi bir $p_{\mathcal{T}} \in \overline{\mathcal{M}}_{DM}$ noktasıyla temsil edilir, burada $\overline{\mathcal{M}}_{DM}$ 9-boyutlu kısmi tıkızlanmış Deligne-Mostow karmaşık hiperbolik modülü uzayını göstermektedir.

Buradan birkaç soru öbeği ortaya çıkmaktadır: (ilerki satırlarda “hipergeometrik eğri”, “hipergeometrik örtü”, “hipergeometrik üçgenleme” ve hatta “hipergeometrik desen” kelimelerini birbirinin yerine kullanacağız.)

3. KONU VE KAPSAM (DEVAM):

• **J1.** Hangi hipergeometrik eğriler modülerdir? (yani kongruans modüler eğrileri tarafından baskılanır)? Bir hipergeometrik eğri verildiğinde, onu baskılayan en küçük galois örtüsünü bul. Hipergeometrik örtülerin monodromi gruplarını teşhis et. Bu monodromi gruplarını nilpotan ve çözünür gruplarla kıyasla, ve bu monodromy gruplarının özde abelyen olup olmadıklarına bak.

İki hipergeometrik eğri verildiğinde, ikisini de baskılayan en küçük (galois) örtüyü bul (Nadela'nın "paralel çarpımı"). Bir hipergeometrik üçgenlemeye tekabül eden Belyi tasvirinin açıkça tanımla ve galois etkisini incele. Bu etki aynı μ parametrelili ve aynı sayıda üçgen içeren üçgenlemeler üzerinde (yani aynı küre üzerinde yer alan kafes noktaları üzerinde) geçişmeli midir? Bu etki kafes bozulmasıyla uyumlu mudur?

Hipergeometrik örtülerin tanım cisimlerini betimle. Aynı μ tipli ve d dereceli hipergeometrik örtülerin en küçük tanım cismini betimle, ve $d \rightarrow \infty$ iken $[F_\mu^d : \mathbb{Q}]$ için bir kestirim ver. Aynı μ tipli hipergeometrik örtülerin en küçük tanım cismini betimle. Tüm hipergeometrik eğrilerin en küçük tanım cismini teşhis et.

(İzomer sayma) Aynı μ tipli hipergeometrik üçgenlemelerin sayısı için uygun bir üreteç fonksiyon yaz.

Bu problemler hipergeometrik desenlerin sistematik bir incelemesine yol açabilir.

• **J2.** Bir $\mathcal{T}$ hipergeometrik üçgenlemesi verilsin. Sanı: $p_{\mathcal{T}} \in \overline{\mathcal{M}}_{DM}$ "hipergeometrik noktası" cebirseldir. Bu noktalar $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı mıdır? Bunun cevabının menfi olması muhtemeldir. Hipergeometrik nokta ile onun temsil ettiği hipergeometrik üçgenlemeler üzerindeki galois etkilerini kıyasla. Bu iki etki uyumlu mudur? Bazı hipergeometrik noktaların koordinatlarını açık seçik hesapla. Verilen $p_{\mathcal{T}}$ temsilcisine sahip $\mathcal{T}$ üçgenlemesi bulunabilir mi? Hipergeometrik noktaların tanım cisimlerini betimle. Hipergeometrik olmayan $p \in \mathcal{M}_{DM}$ cebirsel noktaları bul. Aynı $p_{\mathcal{T}}$ temsilcisine sahip $\mathcal{T}$ üçgenlemesinde bulunan en küçük üçgen adedi, $p_{\mathcal{T}}$ noktaları üzerinde bir "yükseklik" fonksiyonu tanımlar. Aynı tip ve yükseklikteki hipergeometrik noktaların en küçük tanım cismi K_μ^d 'yi bul ve (eğer K_μ^d 'ler sayı cismiye) $d \rightarrow \infty$ iken $[K_\mu^d : \mathbb{Q}]$ için bir kestirim bul. Aynı tipteki tüm hipergeometrik noktaların en küçük tanım cismini teşhis et. Tüm hipergeometrik noktaların en küçük tanım cismini teşhis et. Hipergeometrik noktaları say.. Bu problemleri çözmek André-Oort sanısını daha iyi anlamamıza yardımcı olabilir.

• **J3.** Norton'un ağtopları (gruplar kuramı), Thurston'un eksi işaretli olmayan üçgenlemeleri (geometri), hipergeometrik eğriler (cebirsel geometri), ve Allcock'un "canacavarca teklifi" (karmaşık hiperbolik geometri) arasındaki bağlantıları aydınlat. Bu moonshine ve irtibatlı olguları anlayışımızı geliştirebilir.

• **J4.** $\overline{\mathcal{M}}_{DM}$ modülü uzayının tıkızlaması tüm hipergeometrik üçgenlemeleri en büyük ailenin bozulmaları olarak tıkızlama tabakalarında barındırır. Bu yapıya "hipergeometrik ağ" adını verelim. Grothendieck-Teichmüller grubu GT 'nin, alışlageldik Teichmüller kulesi yerine hipergeometrik ağdan türetilmiş yeni bir benzerini inşa et. Bu yeni, kanuni galois temsilleri verebilir ve Grothendieck-Teichmüller grubunu mutlak galois grubundan ayırdetmenin bir yolunu sunabilir.

4. LİTERATÜR ÖZETİ: Proje konusu ile ilgili alanda ulusal ve uluslararası literatür taranarak, ham bir literatür listesi değil, kısa bir literatür analizi verilmelidir. Bu analiz, önerilen araştırma konusunun literatürdeki önemini ve doldurulması gereken boşluğu ortaya koymalıdır. Referanslar <http://www.tubitak.gov.tr/ardeb-kaynakca> sayfasındaki açıklamalara uygun olarak verilmelidir.

Gal-Act'ın literatüreki konumuna, yeri geldikçe 5 ve 7. Maddelerde işaret edilmiştir. Burada literatürün hızlıca üzerinden geçeceğiz.

Deligne desenler hakkında daha 1989'larda şu yorumu yapmıştır “Grothendieck ve öğrencileri kürenin sonlu örtüleri tasvir etmenin kombinatorik bir yolunu geliştirdiler.. Ancak bu galois etkisini anlamaya yardımcı olmadı. Galois etkisi hesaplanan ve çözülebilir olmayan sadece birkaç örtü bilinmektedir” [8]. Şansımız var ki, desenlere inancı sağlam olanlar (bilhassa Schneps ve Lochak) “Geometrik Galois Etkileri” isimli bir proje başlatarak konferanslar düzenlediler, bu konferanslarda sunulan makaleler [33] [34], [31]'de yayınlandı. Sonradan bu akım daha çok Grothendieck-Teichmüller kuramına yöneldi. (Projenin de adından anlaşılacağı gibi, “Hipergeometrik Galois Etkileri” bu projeyi aşma hedefi gütmektedir, burada ele alınan fikirlerin çoğunun izi yukarıdaki bildiri kitaplarına kadar sürülebilir).

Shabat ve Voevodsky 1990'larda üçgenlemeleri inceledi [37]. Zvonkin ve arkadaşlarının kahramanca çabaları neticesinde 1992 yılında bazı basit ağaçların Belyi gönderimlerini hesaplayabilen bir yazılım ortaya çıktı [6]. Bu birikimler “Graphs of Surfaces and Applications” [23] kitabına yol açtı. Zvonkine ve Magot [28] makalesi kimi hipergeometrik olan bir takım Archimedean polihedranın Belyi gönderimlerini hesaplaması itibarıyla Gal-Act'a çok yakındır. Çok yakınlarda, 2007 senesinde, Shabat'ın da içinde olduğu etkileyici bir hacmi olan ekibin araştırmaları neticesinde 4 kenarlı desenlerin bir kataloğu ortaya çıkmıştır [1].

Bu esnada, Norton, Conway ve Hsu desenlere paralel bir yamalar (quilts) kuramı ortaya atarak çeşitli gruplar kuramı meselelerine uygulamışlar dır (bilhassa moonshine), ayrıntılar için bkz. Hsu'nun ders notları [20]. Kulkarni 1990'da geniş modüler grup altgruplarının benzer bir incelemesine girişmiştir [22]. Deligne'in hükmünü doğrularcasına, bu hesaplamaları ekseriyetle münferittir ve sistematik olmaktan uzaktır. 30 sene süren bir araştırma macerası sonucunda ortaya çıkan resmin [15] ve [14]'de büyük bir heyecanla dile getirilen beklentilere hiç yaklaşamadığını görüyoruz. Ancak hipergeometrik örtü ailesi bu süre zarfında ihmale uğramış gibi görünüyor.

Ancak, sunduğumuz bu tarihçeden bağımsız olarak ve (farkında olmadan) literatürde bir kısım araştırmanın hipergeometrik eğrilere yönelmekte olduğunu söyleyebiliriz. Yakınlarda Jan Stienstra Problem Öbeği **J1**'deki soruları $\overline{\mathcal{M}}_{DM}$ modülü uzayı (kısmi) tıkızalamasının iki boyutlu bir tabakasında ele aldı. Lochak origamileri ve desenlerle bağlantılarını inceledi. M. Möller yine Problem Öbeği **J1**'deki bazı meseleleri taşıma yüzeyleri (translation surfaces) ve Veech eğrileri bağlamında ele aldı. W. Harvey modülü uzaylarındaki aritmetik noktaları incelemek için genel bir resim sundu. Ancak, bu çabalar ekseriyetle büyük Teichmüller kulesindeki durumu anlamaya yönelmiştir. Teichmüller geometrisinden değerli bilgiler elde etmek mümkün olsa da, aritmetiklik ve galois etkilerini incelerken asıl bakmamız gereken yer karmaşık hipergeometrik geometriymiş gibi görünüyor.

Kaynaklar

- [1] N.M. Adrainov, N. Ya Amburg, V. A. Dremov, et al, *Catalogue of dessins d'enfants with ≤ 4 edges*. arXiv:0710.2658v1 [math.AG], (2007).
- [2] D. Allcock, *New complex and quaternionic hyperbolic reflection groups*
- [3] D. Allcock, *A Monstrous Proposal*. arXiv:math/0606043v2 [math.GR], (2006).
- [4] M. Atiyah, P. Sutcliffe *Polyhedra In Physics, Chemistry And Geometry*. arXiv:math-ph/0303071v1, (2003).
- [5] G. Barthel, F. Hirzebruch, T. Höfer, *Geradenkonfigurationen und algebraische flächen*. Aspects of Mathematics, 1987.
- [6] J. B  tr  ma, A. Zvonkin, *Plane trees and Shabat polynomials*. Discrete Math. **153**, no. 1-3, 47–58 (1996).
- [7] W. Couwenberg, G. Heckman, E. Looijenga, *Geometric structures on the complement of a projective arrangement*. Publ. Math. IHES No. 101, 69–161 (2005).
- [8] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*. Galois groups over $\mathbf{Q}$ 79–297, MSRI Publ. **16**, Springer, 1989.
- [9] P. Deligne, A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*. Ann. Sci.   cole Norm. Sup. (4) **38**, no. 1, 1–56 (2005)
- [10] P. Deligne, G. Mostow, *Commensurabilities among lattices in $PU(1, n)$* . Annals of Mathematics Studies **132**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [11] H. Furusho, *Geometric and arithmetic subgroups of the Grothendieck-Teichmüller group*. Math. Res. Lett. **10**, no. 1, 97–108 (2003).
- [12] E. W. Godly, R. Taylor, *Nomenclature and Terminology of Fullerenes: A Preliminary Survey*. Fullerenes, Nanotubes and Carbon Structures, 5:7, 1667-1708
- [13] A. Grothendieck, *Rev  tements   tales et groupe fondamental*. Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [14] A. Grothendieck, *La longue marche in    travers la théorie de Galois*. 1981 manuscript, University of Montpellier preprint series 1996, edited by J. Malgoire.
- [15] A. Grothendieck, *Esquisse d'un program*. In Geometric Galois actions 1. L. Schneps et al. (Eds.) Cambridge University Press, LMS Lect. Note Ser. **242**, 5-48 (1997).
- [16] R. Hain, M. Matsumoto, *Weighted completion of Galois groups and Galois actions on fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$* . Comp. Math. **139**, 119–167 (2003).
- [17] W. J. Harvey *Teichmüller spaces, triangle groups and Grothendieck dessins*, (2006).
- [18] F. Herrlich and G. Schm  thh  sen, *A comb of origami curves in the moduli space M_3 with three dimensional closure* arXiv:math/0703205v1
- [19] R. P. Holzapfel, *Ball and surface arithmetics*. Aspects of Mathematics, (1998).
- [20] T. Hsu, *Quilts*. LNM **1731**, Springer-Verlag, Berlin, (2000).
- [21] M. Kisin, *What is a Galois representation?* Notices AMS **54** 6, 718–719 (2007).
- [22] R. S. Kulkarni, *An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group*. Amer. J. Math. **113**, no. 6, 1053–1133 (1991).

Kaynaklar

- [23] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and Applications*. Encyclopedia of Math. **141**, Springer, (2004).
- [24] P. Lévy, *Théorie de L'Addition des Variables Aléatoires*. Gauthier-Villars, (1954).
- [25] P. Lochak, *Fragments of nonlinear Grothendieck-Teichmüller theory*. Woods Hole math. 225–262, Ser. Knots Everything **34**, World Sci. Publ. NJ, (2004).
- [26] P. Lochak, *On arithmetic curves in the moduli spaces of curves*. J. Inst. Math. Jussieu **4**, no. 3, 443–508 (2005).
- [27] E. Looijenga, *Uniformization by Lauricella functions—an overview of the theory of Deligne-Mostow*. Progr. Math. **260**, Birkhäuser, Basel, 207–244, (2007).
- [28] N. Magot, A. Zvonkin, *Belyi actions for archimedean solids*. Formal power series and algebraic combinatorics. Discrete Math. **217** , no. 1-3, 249–271 (2000).
- [29] G. Mostow, *Braids, hypergeometric functions, and lattices*. Bull. AMS **16**, no. 2, 225–246 (1987).
- [30] I. I. Bouw, M. Möller, *Teichmüller curves, triangle groups, and Lyapunov exponents*, arXiv:math/0511738v2 [math.AG] (2006).
- [31] L. Schneps (Ed.), *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*. LMS Lecture Note Series **200**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [32] L. Schneps, *The Grothendieck-Teichmüller group: a survey*. In: Geometric Galois Theory I. LMS Lecture Notes **242**, Cambridge U. Press, 1997.
- [33] L. Schneps, P. Lochak (Eds.), *Geometric Galois actions 1*. LMS Lecture Note Series **242**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [34] L. Schneps, P. Lochak (Eds.), *Geometric Galois actions 2*. LMS Lecture Note Series **243**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [35] J. P. Serre, *Arbres, Amalgames, $SL(2, \mathbb{Z})$* . Astérisque, No. 46. SMF, Paris, (1977).
- [36] H. Shiga, Y. Suzuki, J. Wolfart, *Arithmetic properties of Schwartz maps*, Version August 2008 (from Y. Suzuki's web page)
- [37] G. B. Shabat, V. A. Voevodsky, *Drawing curves over number fields*. The Grothendieck Festschrift, Vol. III, 199–227, Progr. Math. **88**, Birkhäuser (1990).
- [38] W. Thurston, *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere*. Geom. Topol. Monogr. **1**, (1998).
- [39] M. Troyanov, *On the moduli space of singular Euclidean surfaces*. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **11** (2007).
- [40] W.A. Veech, *Flat Surfaces*. Amer. J. Math. **115**, no. 3, 589-689 (1993).
- [41] M. M. Wood, *Belyi-extending maps and the Galois action on dessins d'enfants*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42**, no. 3, 721–737 (2006).
- [42] M. Yoshida, *Fuchsian differential equations*. Aspects of Mathematics, (1987).
- [43] M. Yoshida, *Hypergeometric functions, my love*. Aspects of Mathematics, (1997).

5. ÖZGÜN DEĞER: Araştırmanın dayandığı hipotez/ler açıkça ortaya konulmalı ve özgün değeri belirtilmelidir. Önerilen yeni teknoloji, metot veya kuramın literatüre nasıl bir katkısı olduğu açıklanmalıdır.

HİPERGEOMETRİK GALOİS ETKİLERİ

A.Galois etkileri

B.Temel gruplar üzerinde galois etkileri

C.Haritalar, desenler, kurdela çizgeler, kalın çizgeler, vs

D.Kürenin dallanmış örtüleri ve Hurwitz problemleri

E.Thurston'un küre üçgenlemeleri hakkında çalışmaları

F.Hipergeometrik fonksiyonlar

G.Modüler grubun hipergeometrik tamlaması

H.Düz geometri

I.Sonuç

A. Galois Etkileri. Klasik galois kuramının nihai ürünü olan oransal sayı cismi $\mathbb{Q}$ 'nun mutlak galois grubu $Gal(\mathbb{Q})$ önümüzde incelenecek temel bir nesne olarak durmaktadır. Bu grup abelyen değildir, pro-sonludur ve oransalların tüm sonlu galois genişlemelerinin ters-limiti olarak tanımlanır. Bu grup hakkında çözüme kavuşmamış ana meselelerden biri olan “ters galois problemi”, her sonlu grubun $Gal(\mathbb{Q})$ 'nin bir görüntüsü olup olmadığını; yani her sonlu grubunu oransallar cisminin bir genişlemesinin galois grubu olup olmadığını sorar. Bu sorunun hala açık olması, $Gal(\mathbb{Q})$ grubunu tanımlayan ters-sistemi anlamaktan çok uzak olduğumuzu göstermektedir; bu sebeple mutlak galois grubunun (karmaşık eşlenik alma dışında) bir ögesini yazmaktan bile aciz durumdayız. Pro-sonlu olması itibarıyla $Gal(\mathbb{Q})$ tıkız, yerel bağlantısız bir Hausdorff uzayıdır ve kuvveti gerçel sayılar cismi ile aynıdır (kontinyum).

Karmaşık bir grubu anlamanın çok doğal bir yolu bu grubun iyi tanıdığımız nesne sınıfları üzerindeki etkisini inşa etmek ve bu etkiyi incelemektir. $Gal(\mathbb{Q})$ grubunun etkilerine basitçe galois etkisi adı verilir. Bu etki bir vektör uzayı üzerindeyse ve süreklilyse, o zaman galois temsili denir. Prosonlu bir grubun kesikli bir uzay üzerindeki veya 0-karakteristikli ve sonlu-boyutlu bir vektör uzay üzerindeki etkisi pro-sonlu grubun sadece sonlu bir görüntüsünü ilgilendirir sonsuzdaki asıl ve özde yapısını açığa kavuşturamaz. Galois temsili üretip incelemenin en kullanışlı ve kuvvetli yollarından biri cebirsel geometriden yararlanmaktır: Bir cebirsel varyeteye ilişkin p -adik etal kohomoloji grupları $\mathbb{Q}_p$ (p -adik oransallar cismi) üzerinde sonlu-boyutlu vektör uzaylarıdır ve bir galois temsili taşır. Bu temsilin görüntüsü sonsuz olabilse de, çekirdeği ekseriyetle “büyük” olduğundan bu temsile “küçüktür” diyebiliriz. Bu alanın ana meselerinden biri tüm temsiller içinde geometri kaynaklı temsilleri saptamaktır (Fontaine-Mazur sanısı [24]).

Etal kohomoloji grupları üzerindeki galois etkisine baktıktan sonraki doğal adım etal (serpik) temel gruplar (bölüm grupları) üzerindeki galois etkisini incelemektir. Bunlara “büyük” temsil denebilir çünkü bu temsiller sadık olabilir. Etal temel gruplar Grothendieck tarafından 60'ların sonunda tanımlanmıştır [14]; eğer k bir cisimse, $Spec(k)$ 'nin etal temel grubu $Gal(\bar{k}/k)$ grubudur. Yani etal temel grup kuramı, sıfıncı boyutta klasik galois kuramını verir. Literatürde adet olduğu üzere, biz etal temel gruba cebirsel temel grup da diyeceğiz.

$Gal(\mathbb{Q})$ 'nin sonsuz bir parçasını incelemenin basit bir yolu verilen bir f polinomunu itere etmek, yani $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ polinomlarını alıp $f_i^{-1}(0)$ noktalarının ürettiği T_f ağacına bakmaktır. Eğer f 'nin derecesi d ise bu bize bir tam d -li ağaç verir, bu ağacın otomorfizm grubu $Aut(T_f)$ pro-sonlu bir sonsuz gruptur ve doğal bir $Gal(\mathbb{Q})(\mathbb{Q}) \rightarrow Aut(T_f)$ sürekli temsili vardır. Elbette bu temsil asla sadık olamaz (sadece bir polinomdan elde edildiği için). Bu temsilin sistematik incelemesi şaşırtıcı derecede yakın zamanlarda ele alınmıştır. Ağaçsal (Arboreal) Galois temsili denen bu konuyla burada ilgilenmeyeceğiz, ancak bu konuda halen çalışılıyor olması, bizim elde incelemek istediğimiz temsillere farklı bir perspektiften bakma imkanı verdiği için önemlidir.

B. Cebirsel temel gruplar üzerinde galois etkisi. Oransallar cismi $\mathbb{Q}$ 'nın karmaşıklarda bir $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ kapamasını seçelim, X de $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı bir de pürüzsüz, geometrik indirgenemez varyete olsun. Bir $p \in X$ rasyonel noktası olsun (şemalar kuramındaki anlamıyla) ve $\overline{X} := X \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ şemasının p üzerinde bir $\overline{p}$ geometrik noktası seçilsin. Bu durumda etale homotopi kuramı, (X, p) ve $(\overline{X}, \overline{p})$ ikililerine birer cebirsel temel grup iliştirir. Bu cebirsel gruplar şöyle bir kat'ı (exact) dizide oturur:

$$1 \rightarrow \pi_1(\overline{X}, \overline{p}) \rightarrow \pi_1(X, p) \rightarrow Gal(\mathbb{Q}) \rightarrow 1 \quad (1)$$

Bu kat'ı dizi bir $\rho_{X,p} : Gal(\mathbb{Q}) \rightarrow Out(\pi_1(\overline{X}, \overline{p}))$ dışsal etkisi tanımlar. Burada çekirdekdeki grup $\pi_1(\overline{X}, \overline{p})$ ile $X(\mathbb{C})$ 'nin topolojik temel grubunun pro-sonlu tamlaması üzerinde kanuni bir izomorfizm vardır, yani $\pi_1(\overline{X}, \overline{p}) = \hat{\pi}_{1,top}(X(\mathbb{C}), p)$ sağlanır.

Basit olan en ilginç duruma bakalım: eğer $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1\} = Spec \mathbb{Q}[x, \frac{1}{x}]$ alırsak $\pi_1(\overline{X}, \overline{p})$ grubu prosonlu tamsayılar $\hat{\mathbb{Z}}$ ile izomorftur ve galois etkisi $\hat{\mathbb{Z}}^\times$ çarpısal grubunun etkisiyle verilir.

En basit abelyen olmayan durum için $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ alırsak $\pi_1(\overline{X}, \overline{p})$ grubu, $\hat{\mathbb{F}}_2$ ile göstereceğimiz iki üreteçli prosonlu serbest gruba izomorf çıkar. Bu durumda dışsal galois etkisini kaldırarak bir $Aut(\pi_1(\overline{X}, \overline{p})) \simeq Aut(\hat{\mathbb{F}}_2)$ temsili elde etmek mümkündür. Belyi teoreminde göre bu temsil sadıktır, ve bu temsilin görüntüsünü tanımlamak, Belyi, Drinfeld ve Ihara'nın başlattığı Grothendieck-Teichmüller (GT) kuramının ana meselesidir (bkz. [32] ve [25]). Bu görüntünün sağlaması gereken birçok şart ortaya konmuştur, ancak kuramın gelip dayandığı noktada bu şartların görüntüyü tanımlamak için yeterli olup olmadıklarını, ya da bağımsız olup olmadıklarını anlamak çok zor görünmektedir.

$Aut(\hat{\mathbb{F}}_2)$ grubunun tatmin edici bir tasvirini muhtemelen asla elde edemeyeceğiz – ama bilim tarihi bu türden bedbin yorumların nasıl da günü gelince aksinin çıktığının örnekleriyle doludur. Bu grup aynı zamanda tüm delik Riemann yüzeylerin sonlu otomorfizm gruplarının oluşturduğu sistemin geri-limitidir. Temel gruplar üzerindeki galois temsillerinin “çok büyük” olduğu söylenebilir. Bunun bir çaresi temel grupların daha küçük kesirleri üzerindeki etkiye bakmaktır, mesela pronilpotan veya pro- ℓ kesirler gibi. Kuramın Wojtkowiak ve Deligne tarafından ortaya atılan motivik yönü bu noktada başlar. Katlı zeta değerleri, polylogaritmler vs gibi konularla bağlantılarıyla çok zengin bir saha sunsa da, (bkz. [9] ve [16]) bu kuram hala “doğrusal”dır ve Grothendieck'in kurduğu anabelyen hayallerinden oldukça uzak düşmektedir. Kuramın doğrusal-olmayan yönünün bir mülahazası için bkz. Lochak'ın makalesi [25]. Bu projede sunulan hipergeometrik galois etkileri motivik kuramın (biraz) ötesine geçmenin bir yolunu verebilir.

Modüler grubunun tüm altgruplarının kümesini $\mathbf{FSub} PSL(2, \mathbb{Z})$ (ya da kısaca $\mathbf{FSub}$) ile gösterelim, modüler eğrinin sıfır-cinsli örtülerine tekabül eden altgrupların kümesi de $\mathbf{FSub}_0 PSL(2, \mathbb{Z})$ olsun. Nesneleri $\mathbf{FSub}$ kümesi ve morfizmleri içerilmeler olan doğal kategoriyi de $\mathbf{FSub}$ ile gösterelim. Dikkat! $\mathbf{FSub}_0$ bir altkategori değildir. $\mathbf{FSub}$ kategorisi, *hayret verici karmaşıklıkta* bir yapıdır ve çok zengin aritmetik ve kombinatorik bilgi barındırır. Mesela, üç delikli kürenin cebirsel temel grubunu, üzerindeki galois etkisiyle birlikte bu kategoriden çıkarmak mümkündür. Üst yarı sahanın modüler gruba bölümüne modüler eğri deyip $\mathcal{M}$ ile gösterelim. $\mathcal{M}$ 'nin (taban-noktalı) sonlu-örtü kategorisini $\mathbf{FCov}(\mathcal{M})$ ile gösterelim. O zaman $\mathbf{FCov}(\mathcal{M})$ kategorisi ile $\mathbf{FSub} PSL(2, \mathbb{Z})$ arasında bir ters-izomorfizm vardır. $\mathbf{FCov}(\mathcal{M})$ kategorisindeki örtüler aritmetik cebirsel eğriler olduğundan, mutlak galois grubu $\mathbf{FCov}(\mathcal{M})$ üzerinde etkir. $\mathbf{FCov}$ 'un öğelerinin *desen* denen çizgelerle temsil edilebilmesi Grothendieck'i büyülemiştir. Bu çizgeler arasında düzlemsel ağaçlar $\mathbf{FSub}$ 'un içinde doğal ve temel bir alt-sistem oluşturur.

C. Desenler, haritalar, kurdela çizgeler, kalın çizgeler, yamalar, ikiparçalı çembersel çizgeler, vs. Desen, ikiparçalı bağlantılı ve her köşede buluşan kenarları devirsel sıralı olan bir çizgedir. Çeşitli alanlarda kendiliğinden ortaya çıkar ve muhtelif isimler altında, Grothendieck'ten çok daha evvel, incelenmişlerdir. Üç delikli kürenin her sonlu örtüsüne bir desen karşılık gelir, bu desen $[0, 1]$ aralığının örtüye kaldırılması olarak tanımlanabilir, ikiparçalı yapı 0 ve 1'in örtüye kaldırılmasından ileri gelir, köşeler etrafındaki devirsel sıralama ise yerel monodromilere karşılık gelir. Bunun tersi de doğrudur, her desen üç-delikli kürenin bir örtüsünü tanımlar, ki bu örtüye karşılık gelen desen başlangıçtaki desenle aynıdır. Bu örtüler aritmetiktir, yani $\mathbb{Q}$ 'nun sonlu bir genişlemesi üzerinde tanımlanırlar. Belyi teoremi bunun tersinin de geçerli olduğunu, yani her aritmetik eğrinin üç-delikli kürenin bir örtüsü olduğunu söyler. Yani her aritmetik eğriyi tanımlayan bir desen vardır (bu bağlamda farklı desenlerin tanımladığı aritmetik eğriler aynı olabilir). Bu örtüler $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı olduğundan, bir galois etkisi taşırlar, bu da desenler üzerinde kanuni bir galois etkisi verir. Belyi teoremine göre bu etki sadıktır. (aslında desenleri tek boyutlu bir orbifoldun örtü kategorisi şeklinde tanımlamak mümkündür).

D. Kürenin dallı örtüleri. Kürenin yine küre tarafından dallı örtülerinin çok iyi bilinen bir sınıflaması vardır (Bunlar Öklid zamanından beri bilinen muntazam cisimlere karşılık gelir): Bu $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ örtülerinin işareti şu listeye aittir: (m, m) , $(2, 2, m)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$. Kürenin eliptik eğrilerle (yani simitlerle) örtülerine karşılık gelen işaretlerin de $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$ listesine ait olduğu da iyi bilinmektedir. Bir dallanma şeması verildiğinde, kürenin bu şemayı gerçekleyen bir örtüsünün olup olmadığı, varsa bu örtülerin sınıflaması ve sayımı önemli bir problemdir ve moduli uzayları gibi güncel konularla olan bağlantılar sayesinde halen gündemdedir. Elbette, bu problemin az önce ifade ettiğimiz şekilde ve genellikle çözülebilmesini beklemeyiz. Daha iyi bir problem elde etmek için bazı kısıtlamalara gitmek kaçınılmazdır. Örtülerim dallanma şeması üzerinde nasıl bir kısıtlamaya gidebiliriz? Şu problemi ele alalım: küreden küreye tüm $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ örtülerini sınıfla, öyle ki f 'nin $0 \in \mathbb{P}^1$ noktası üstünde dallanma indeksi hep iki olsun, $1 \in \mathbb{P}^1$ noktası üstünde dallanma indeksi hep üç olsun, sonsuzdaki nokta üzerinde ise dallanma indeksi i olan k_i adet nokta bulunsun $i = 1, 2, 3, \dots$. Görüldüğü gibi, bu problem modüler grubun belirli bir düzenlilik şartını sağlayan altgruplarının sınıflamasını istemektedir.

f örtüsünün derecesi d olsun. Riemann-Hurwitz formülünden şu eşitlik elde edilir:

$$2 = e(\mathbb{P}^1) = d \cdot e(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) + \frac{d}{2} + \frac{d}{3} + \sum_{i=1}^{\infty} k_i = -\frac{d}{6} + \sum_{i=1}^{\infty} k_i, \quad (2)$$

burada $e(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) = -1$ Euler karakteristiğini göstermektedir. $\sum_{i=1}^{\infty} i k_i = d$ eşitliği sağlandığından

$$\sum_{i=1}^{\infty} (6 - i) k_i = 12 \quad (3)$$

elde ederiz. Yukarıda bahsi geçen düzenlilik şartları, kürenin köşeleri 0, 1 ve ∞ 'da olan iki üçgenle standart üçgenlemesinin örtüye düzgün bir biçimde kaldırılabilirliğini söylemektedir. Ek olarak $i > 6$ için $k_i = 0$ varsayalım ve k_6 'nın kaç olduğunun formülde hiç etkisinin olmadığına dikkat edelim. Thurston'un terminolojisine göre bu ek şart yukarı kaldırılan üçgenlemenin *kombinatorik eğriliğinin eksi işaretli olmaması* anlamına gelmektedir. Norton-Conway-Hsu'nun kullandığı terminolojide ise bu şartı sağlayan yamalara *6-transpozisyon yama* adı verilmektedir (bkz. [20]). İkozahedral yama bir futbol topu olduğundan Norton bu yamalara *ağtop* ismini yakıştırmıştır. Örtü, yama, üçgenleme ya da altgrup olsun, biz hepsine *hipergeometrik* diyeceğiz.

(DEVAM) 5. ÖZGÜN DEĞER:

Bir n nesnesinin k kez tekrarından oluşan diziyi $[n]_k$ ile gösterelim.

(3) eşitliğinin $i > 6$ için $k_i = 0$ şartını sağlayan çözümlerini $\mu = ([1]_{k_1}, [2]_{k_2}, [3]_{k_3}, [4]_{k_4}, [5]_{k_5})$ vektörleri şeklinde sunabiliriz (k_6 'yı ihmal edersek bu liste sonludur). Şimdi $HC(\mu)$ ile bu çözümlere karşılık gelen dallı örtülerin sınıfını gösterelim (ve “ μ -tipli hipergeometrik eğriler sınıfı” diye okuyalım). Bu sınıf, $\mathbf{Fcov}(\mathcal{M})$ kategorisinde doğal olarak içeriir:

$$HC(\mu) \subseteq \mathbf{Fcov}(\mathcal{M})$$

(3)'in çözümlerinden biri ($[5]_{12}$) dizisidir. $k_6 = 0$ ise bu dallanmayı gerçekleyen bir örtü olduğu bilinmektedir: işareti $(2, 3, 5)$ olan ikosahedral örtü. Yani, $HC(\mu)$ sınıfı $\mu = ([5]_{12})$ için boş değildir. Asıl şaşırtıcı olan, (3)'in çözüm kümesinin Picard-Terada-Deligne-Mostow listesinde Eisenstein tamsayılarına tekabül eden yansıma gruplarıyla çakışmasıdır. Görünüşe göre, Deligne-Mostow tamlık şartlarını anlamamanın bir başka yolu daha bulunmaktadır, ki bu konuda karşılaşılan bazı mucizevi tesadüfleri açıklamamıza yardımcı olabilir. Burada bakış açısındaki ani farklılığa dikkat çekelim: Deligne-Mostow'un hareket eden 12 noktası katılışp modüler eğrinin bir örtüsünün sonsuzdaki noktaları haline geliyor, bir başka deyişle bir modüler eğrinin sonsuzdaki çimdikleri (cusp) oluyorlar.

Deligne-Mostow listesinde Gauss tamsayılarına tekabül eden girdileri de, şu sorunu ele alarak tekrar keşfetmek mümkün: Tüm $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ örtülerini sınıfla, öyle ki f 'in $0 \in \mathbb{P}^1$ üstündeki her noktada çatallanma endeksi 2, $1 \in \mathbb{P}^1$ üstündeki her noktada çatallanma endeksi (3 yerine) 4 olsun ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\infty \in \mathbb{P}^1$ üstünde çatallanma endeksi i olan $k_i \geq 0$ adet nokta bulunsun. Bu sorunun çözümü, $(2, 4, \infty)$ işaretli üçgen grubunun bazı altgruplarını sınıflamaya tekabül eder. Bu üçgen grubunun $PSL(2, \mathbb{Z})$ ile ölçüştüğünü hatırlatalım. Bu örtülerin ortaya çıkardığı geometrik yapı kare-kaplama sorusuyla alakalıdır (Lochak'ın origami-leri), Thurston'un 70'lerdeki çalışmalarından beri bu kaplamalar incelenmektedir.

Thurston seksenlerin sonunda (3)'in çözümlerine karşılık gelen $\mathbb{P}^1$ -üçgenlemelerinden $i > 6$ için $k_i = 0$ şartını taşıyanlarını tam bir sınıflamasını verip aynı zamanda bunların nasıl inşa edileceğini de açıkça göstermiştir. Her bir $HC(\mu)$ sınıfı bir kafesle alakalıdır, ve bu sınıfların herbiri sonsuzdur. Bu sınıflamadan söz konusu üçgenlemelerin gerçekten Deligne-Mostow'un çalışmalarıyla ilgili olduğu ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda üçgenlemeler üzerindeki “düzenlilik” şartının ($i > 6$ için $k_i = 0$) gevşetilebileceği ve bunun yansımalarca türetilen yeni karmaşık hiperbolik kafeslerin keşfine yol açabileceği ümidi belirmektedir.

D. Thurston'un küre üçgenlemeleri hakkında çalışması. Thurston'un 1987 tarihli önbasımında ifade edilen sonuçlardan biri şu teoremdir: (hiçbir köşesinde altıdan fazla üçgenin bulunmadığı üçgenlemeye *eğriliği eksi işaretli olmayan üçgenleme* denir

Teorem (Thurston, [38]) (*Polihedralar kafes noktasıdır*) *Karmaşık Lorentz uzayı $C^{(1,9)}$ öyle bir $\mathcal{L}$ kafesi ve bu kafesin bir Γ_{DM} otomorfizm grubu vardır ki, eğriliği eksi işaretli olmayan üçgenlemeler, $\mathcal{L}$ kafesinin artı işaretli kare-normlu üyelerinin oluşturduğu $\mathcal{L}_+$ konunun (cone) elemanlarıdır. Γ_{DM} 'nin karmaşık hiperbolik uzay $\mathbb{CH}^9$ (yani $\mathbb{C}^9 \subset \mathbb{CP}^9$ 'daki birim top) üzerindeki izdüşel etkisinin bölüm uzayı sonlu hacimlidir. Kafes noktasının kare-normu üçgenlemedeki üçgen adedini verir.*

Bu kafes sonradan Allcock [2] tarafından tam teşhis edilmiştir. Thurston bu üçgenlemelerin sınıfını $P([1]_{12}) \subset \mathcal{M}_{DM}$ ile gösterir, burada $\mathcal{M}_{DM}$ ile top-bölüm uzayı $\mathbb{CH}^9/\Gamma_{DM}$ gösterilmektedir. Aslında $\mathcal{M}_{DM}$ uzayı $\mathbb{P}^1$ 'de sırasız 12-li noktaların moduli uzayından başkası değildir, ancak burada bir karmaşık hiperbolik uzaydır ve bu yapıdan gelen bir kısmi tıkızlanması vardır (bu tıkızlama Deligne-Mumford tıkızlaması ile hiçbir zaman çakışmaz). (3) eşitliğini sağlayan ($i > 6$ için $k_i = 0$ kaydıyla) tüm diğer üçgenlemeler $P([1]_{12})$ 'deki üçgenlemelerin bozulmasıyla elde edilir ve tıkızlama esnasında eklenen tabakalar üzerinde yer alırlar.

(DEVAM) 5. ÖZGÜN DEĞER:

Thurston aynı zamanda bu tıktızlamaları inşa etmenin açık seçik bir yöntemini sunmuş ve $P([1]_{12})$ 'de $2n$ 'e kadar üçgenli üçgenlemelerin sayısını $O(n^{10})$ olarak kestirmiştir. *Problem:* $HC(\mu)$ 'de n 'e kadar üçgenli üçgenlemelerin sayısını $\Delta_n(\mu)$ ile gösterelim. $\Delta_n(\mu)$ sayıları için uygun bir T_μ üreteç fonksiyonu bul (bu sayılar sabit normlu kafes noktalarına tekabül ettiğinden, T_μ bir çeşit teta fonksiyonu olmalıdır).

Bir Riemann yüzeyinin her üçgenlemesi, baricentrik alt-bölüm neticesinde modüler eğrinin bir örtüsünü belirler. Üçgenlemenin dual çizgesi örtü gönderimine ilişik deseni verir; topolojik çizgelerin diliyle ifade edersek, bu deseni bir-boyutlu $\otimes \text{---} \otimes$ orbifoldunun (modüler aralık) bir örtüsü olarak da görebiliriz. (Not. "Orbifold" kelimesi orbit ve manifold kelimelerinden türetilmiştir ve bir manifold üzerindeki grup etkisinin yörünge uzayı anlamına gelmektedir. Ancak modüler aralığın hiçbir örtüsü bir manifold değildir, bir başka deyişle modüler aralık hiçbir manifold'un yörünge uzayı değildir. Bu özelliği onun standart yığıt (stack) kuramı tarafından görülmesine mani olmaktadır)

Thurston'un iddiası şu anlama gelmektedir:

$$HC([5]_{12}) = P([1]_{12}) = \mathcal{L}_+/\Gamma_{DM} \subseteq \mathbf{FSub} PSL_2(\mathbb{Z})$$

Doksanlı yıllarda Allcock Γ_{DM} 'nın $\mathcal{L}$ kafesinin otomorfizm grubu olarak doğrudan bir inşasını verdi ve bunu taklit ederek Leech kafesinden türettiği $\mathcal{L}^A$ kafesinin otomorfizm grubu olan ve 13-boyutlu karmaşık hiperbolik uzayda etkiyen bir kafes elde etti [2]. Bu inşanın Canavar grubu (Monster) ilişkisi hakkında bir sanısı bulunmaktadır [3]. Yukarıda ortaya çıkardığımız hipergeometrik üçgenlemeler ve canavarla ilintili yamalarla olan bağlantılar (bkz. [20], chapter 11), canavarın hipergeometrik dünyaya ait olabileceği sanısını uyandırmaktadır. Allcock'un $\mathcal{L}^A$ kafesinin üçgenleme gibi bir "kombinatorik" yorumu bulunabilir mi? Bulunsaydı burada Deligne-Mostow top-bölümleri ve hipergeometrik örtüler hakkında ortaya attığımız sorular Allcock'un kafesi için de ortaya atılabilirdi. Yani canavar grubu ile aritmetik arasında, doğrudan bir bağlantı bulmuş olurduk.

F.Hipergeometrik fonksiyonlar Hipergeometrik türevli denklemini ilk bulan Euler olmuştur, Gauss'un katkılarına binaen denklemin çözümlerine *Gauss hipergeometrik fonksiyonu* denmiştir. Appell iki-değişkenli hipergeometrik fonksiyonu ortaya atmış, Lauricella da bunu gelişigüzel adet değişkene genellemiştir. Riemann ve Schwartz'ın bir boyuttaki çalışmasını takiben Picard Appell hipergeometrik fonksiyonlarının monodromisinin sonluluğunu ve kesikliliğini incelemiştir. 1970'lerin başında Terada bunu Lauricella hipergeometrik fonksiyonlarına genelledi. Deligne ve Mostow'un Lauricella hipergeometrik fonksiyonları üzerine makaleleri 1980'lerde çıktı ve cebirsel geometri kullanarak kesiklilik meselesine titiz bir çözüm getirdi (daha temel bir yaklaşım için bkz.[27]) Thurston kesiklilik sonuçlarını geometrik usüllerle, hipergeometrik fonksiyonlardan hiç söz etmeden kanıtladı [38]. Miyaoka-Yau oransallığını sağladığı sayısal top-bölümü kriterini kullanan Hirzebruch [5], Holzapfel [19] ve takipçileri yansımalar tarafından türetilen başka iki boyutlu kesikli hiperbolik gruplar bulsalar da, bunların ekserisinin Picard-Terada-Deligne-Mostow (PTMD) listesindekilerle ölçüştüğü ortaya çıktı [10]. Bu yöntemleri Bruce Hunt üst boyutlara uygulamaya çalışmış ancak hesap zorlukları yüzünden netice alınamamıştır. Yakınlarda Heckman-Couwenberg-Looijenga bir başka genelleme bularak üst boyutlarda yeni hiperbolik yansıma grupları buldular [7]. Ancak bunların PTMD kafesleriyle ölçüşüp ölçüşmediği halen bilinmemektedir. Yoshida ve takipçileri hipergeometrik fonksiyonların modüler yorumunu vererek özelliklerini incelediler [43] ancak bu çalışmalar yeni kafesler vermemiştir.

(DEVAM) 5. ÖZGÜN DEĞER:

Çokdeğerli Schwarz gönderimlerinin aşkınlığı Cohen, Wohlfart, Shiga ve Suzuki tarafından incelenmiştir, üst boyutlarda elde ettikleri sonuçları kabaca “Eğer τ noktasındaki Schwarz değeri cebirselse, τ ’nın belirlediği bir Prym varyetesinin karmaşık çarpımı vardır”. Ters yönde, kafes noktalarının top-bölüm gönderimleri (Schwarz gönderimlerinin tersleri) altındaki görüntülerinin ne olduğunu merak etmek doğaldır. Bu değerleri tam olarak hesaplamak mümkün mü? Bu noktalar üzerinde enküçük kafes-normuyla (ya da tekabül eden örtülerin enküçük dereceleriyle ya da tekabül eden üçgenlemedeki üçgenleme sayısı ile) verilen doğal bir “yükseklik” tanımlıdır. Sanı: Kafes noktalarının görüntüsü yoğundur ve bu değerler cebirselidir. Dahası, bu noktalar üzerindeki galois etkisi 9-boyutlu “ata” top-hipergeometrik ağı yapıyla uyumludur.

G. Modüler grubun hipergeometrik tamlaması. Bir G sonlu-sunumlu grubunun prosolu tamlaması $\widehat{G}$ olsun. $\text{Fsub}(G)$ ’de, şu şartı sağlayan bir $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi verilsin:

(*) Her $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ için, $[G : H_\alpha] \leq i$ olacak şekilde en çok sonlu sayıda α bulunur.

$\mathcal{H}$ ailesine $\widehat{G}$ ’in bir $\widehat{G}_{\mathcal{H}}$ bölümünü şöyle iliştirebiliriz: $\overline{H}_\alpha := \bigcap_{g \in G} g H_\alpha g^{-1}$ altgrubu H_α ’nın normal kalbini göstermek üzere, $\overline{\mathcal{H}} := \{\overline{H}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olsun. O zaman $\overline{\mathcal{H}}$ ailesi de (*) özelliğini sağlar, ve

$$H(i) := \bigcap_{[G:H_\alpha] \leq i} H_\alpha$$

altgrupları da G ’de sonlu endeksli olur. Dolayısıyla $G \triangleright H(1) \triangleright H(2) \triangleright \dots$ zinciri G ’nin normal altgruplarından oluşur. Şimdi $\widehat{G}_{\mathcal{H}} := \lim_{\leftarrow} G/H(i)$ olsun. $\widehat{G}_{\mathcal{H}}$ grubunu “ G ’nin $\mathcal{H}$ sistemine göre tamlaması” diye adlandırabiliriz. Her $\mathcal{H}$ sistemi $\mathcal{H}$ ’deki grupların tüm ko-sonlu (ko-pro- ℓ , ko-çözünür ..) altgruplarını ekleyerek zenginleşebilir ve daha büyük “zenginleşmiş” tamlamalara yol açarlar.

Eğer $G = PSL_2(\mathbb{Z})$ ve $\mathcal{H} = HC(\mu)$ alırsak, yukarıda tasvir ettiğimiz süreç $\widehat{PSL}_2^\mu(\mathbb{Z})$ tamlamalarını verir, istersek bunları zenginleştirebiliriz. Bu biraz yapay bir inşa gibi görünse de hipergeometriden türeyip eliminizden hemen altında olan ve üzerinde galois temsilini (sadece etkisini değil) inceleyebileceğimiz ilk nesne olması itibarıyla önemlidir. Sorular: $\widehat{PSL}_2^\mu(\mathbb{Z})$ metamotivik midir?, yani: nilpotan (ımsı) tamlamalardan özde olarak farklı mıdır? Elde edilen galois temsilinin çekirdeği nedir? Bu çekirdeğin sabit bıraktığı cisim nedir? Hipergeometrik ağı tüm yapısını ele alarak Grothendieck-Teichmüller grubunun bir benzerini tanımlayabilir miyiz?

H. Düz Geometri (Yüzeylerde Öklid yapıları, eşkenar üçgenlemeler, kare-kaplama yüzeyler, origamiler, Veech eğrileri, taşıma yüzeylerü, çokgen kaplama yüzeyler, yamalar, vs ..) Lochak’ın *origamiler* diye adlandırdığı kare-kaplama yüzeylerin izi Thurston’un çalışmalarına dek sürülebilir, yüzeylerde parçalı düz yapılara genel bir giriş için Troyanov’un yeni çıkan makalesine bakılabilir [39]. Bu konunun, Gal-Act projesinde önerilen bazı fikirlere yakınsadığı yönünde bazı işaretler bulunmaktadır. Herrlich ve Smith-Hüsen’in M_3 modül uzayında origami eğrileri üzerine olan makalesi, Harvey’in desenler ve Teichmüller eğrileri üzerine derlemesi ve Möller’in Shimura ve Teichmüller eğrileri üzerine makaleleri ruhen bu projede önerilen bazı hususlara yakındır. Möller’in son çıkan makalesi [30] bariz olmayan hipergeometrik desenlerin Belyi gönderimlerinin hesabını içermesi itibarıyla dikkat çekicidir.

(DEVAM) 5. ÖZGÜN DEĞER:

I. Sonuç. Yukarda irdelendiği üzere, literatürde hipergeometrik eğrilerim incelenmesine yönelik bir eğilimin var olduğundan söz edilebilir. Proje başarılı olduğu takdirde, kombinatorik, grup kuramı, modüler eğriler, cebirsel geometri, fizik ve kimyada bağlantıları olan bu geniş konu için genel ve birleştirici bir katkı hazırlayabilir ve bu sahalarda yeni ve ilginç bağlar ortaya çıkarabilir. Tecrübe göstermektedir ki, bu çeşit bağların keşfi matematikte en çok meyve veren şeydir, çünkü çeşitli alanlarda araştırmayı teşvik ederken elde edilen sonuçları muhtelif yönlerde aktarmayı mümkün kılmakta, bu esnada söz konusu sahaları anlayışımızı ve kavrayışımızı da geliştirmektedir. Elbetteki, bir matematikçinin böyle bir projeden elde etmeyi ümid edeceği en büyük şey, sonunda yeni ve ilginç sorulara ve sanılara yol açmasıdır. •

Burada bir özür sunmak yerinde olabilir. “hipergeometrik eğri” terimi literatürde izdüşel doğrunun özel bir çeşit devirsel örtü *ailesini* kasten kullanılmaktadır. Burada ise aynı terimle çok özel bir çeşit desene (ya da üçgenlemeye, origamiye, yamaya, vs) karşılık gelen ve *kati* bazı aritmetik eğriler kastedilmektedir. Bu terminolji hipergeometrik dünyanın zenginliğini birleştirtirdiğinden, bu eğrileri “hipergeometrik eğri” diye adlandırma isteğine karşı koyalmadık. Öte yandan, “hipergeometrik ağ” tabirini de muğlak bırakıldığını itiraf etmek gerekir, ancak bu tabirin anlamının netleştirilmesi değerlendirilmekte olan projenin hedeflerinden biridir.

6. YÖNTEM:

Projenin ilk aşamaları, hipergeometrik üçgenlemelerin keşfi mahiyetinde olup daha çok hesaba yöneliktir. Dolayısıyla projenin ilk yarısında bilgisayarlı hesap önemli bir yer tutacaktır. Öte yandan, yukarıda vurguladığımız üzere, Gal-Act projesinin çeşitli disiplinlerle bağlantıları mevcuttur. Proje boyunca harcanacak çabanın kayda değer bir kısmının bu bağlantıları anlamaya yönelik olacağını öngörmekteyiz. Bunun yanı sıra, elde edilen neticelerin diğer disiplinlerde ne anlama geldiği, buralara nasıl transfer edilebileceği sorusu da gündeme gelecektir. Bu noktada çeşitli alanlardan uzmanlarla görüşmek ve işbirliği yapmak gerekecektir. Bunu da bir bilimsel toplantı düzenleyerek ve diğer bilimsel toplantılara katılarak sağlamayı hedefliyoruz. Proje kapsamında talep edilen gündelik/yol desteği ve bilgisayar desteğinin tümü ekibin proje yürütücüsü dışındaki üyelerine yöneliktir. Galatasaray Üniversitesi Araştırma Fonu, proje yürütücüsüne bu konularda yeterli desteği sağlamaktadır.

7. ARAŞTIRMA OLANAKLARI:

Kuramsal mahiyette olduğundan, Gal-Act projesi kayda değer bir malzeme ve altyapı yatırımı gerektirmemektedir. İhtiyaç duyulabilecek bilgisayar altyapısını Galatasaray Üniversitesi sunmaktadır, kuvvet gerektiren hesaplar için Feza Gürsey Enstitüsü ve ODTÜ gibi kuruluşların serbestçe sunduğu imkanlardan yararlanılacaktır. Galatasaray Üniversitesi Araştırma Fonu, proje yürütücüsüne gündelik/yol desteği ve bilgisayar desteği gibi konularda yeterli desteği sağlamaktadır.

Projede Kullanılacak Mevcut Makine – Teçhizat Listesi (*)	
Adı/Modeli	Projede Kullanım Amacı
HP Bilgisayar (1 adet)	genel
Masaüstü Bilgisayar (4 adet)	genel
Samsung Yazıcı (3 adet)	genel
HP yazıcı (1 adet)	genel

(*)Bu bölümde sadece, öneren kuruluştaki var olup projede kullanılacak olan makine-teçhizat belirtilmeli, proje bütçesinden talep edilenler yazılmamalıdır.

8. YAYGIN ETKİ/KATMA DEĞER:

Kuramsal içerikli olan bu projenin ekonomi ve toplumsal refaha yapacağı katkılar dolaylı ancak önemlidir. Temel bilimlerde yapılan kuramsal araştırma ve sorgulamaların, eğitim ve araştırma sistemini ``formda tutmak" gibi bir işlevi bulunmaktadır. Sürekli taze araştırmalarla ve problemlerle beslenmeyen akademik eğitim sistemi hızla çaptan düşecektir. Bu da mühendislik ve tıp gibi teknik sahalarda yapılan araştırmaların ve verilen eğitimin seviyesini kaçınılmaz olarak etkileyecektir. Gal-Act projesi kapsamında yetiştirilmesi tasarlanan doktora ve post-doktora öğrencilerinin ve düzenlenen etkinliklerin bu noktada doğrudan katkı sağlaması ümit edilmektedir.

Temel bilimlerle ilgili kuramsal çalışmaların lüzumunu anlatmaya çalışan meslektaşlarımızın genellikle uzun vadede bulunması ihtimali olan uygulamalardan söz ettiğine sık sık şahit olmaktadır. Gal-Act projesinde ele alınan "yüzey üçgenleme" sorunu da, halen bilgisayar bilimi, tıbbi görüntüleme gibi alanlarda aktif olarak ele alınmaktadır. Araştırma sonuçlarının bu alanlarda uygulama ihtimali bulunmaktadır. Ancak bu uygulamalar projenin hedefleri açısından ikincildir.

Gal-Act projesinin getireceği doğrudan ve birincil katkı, proje bitiminde ortaya atılan yeni problemler, sanılar ve yeni araştırma alanları olacaktır. Projenin -pür matematik içinde- disiplinlerarası bir konumda olması, kombinatorik, gruplar kuramı, modülerlik, düz geometri, hiperbolik geometri gibi alanların kesişiminde bulunması, proje sonuçlarının bu sahalarda uygulama bulması ihtimalini artırmaktadır.

9. ÇALIŞMA TAKVİMİ

İş-Zaman Çizelgesi (İş ayrıntıları alttaki tablodadır)																																						
	AYLAR																																					
İş	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
A	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
B	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
C	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
D	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
E	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
F												*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*														
G	*	*	*																																			
H	*												*											*													*	
İ																								*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
J													*	*	*	*	*	*												*	*	*	*	*	*	*		
K						I						II						III						IV					V								VI	
L																																					*	

İş Ayrıntıları	
A	Post-doktora bursiyeri
B	Tam zamanlı doktora bursiyeri:
C	Yarı zamanlı doktora bursiyeri
D	Yarı zamanlı yüksek lisans bursiyeri
E	Çalışma Seminerleri
F	Uluslararası toplantı düzenleme
G	Makine-Techizat alımı
H	Sarf malzemesi tedariki
İ	Proje için bir paylaşım sitesi kurulması ve proje sonuçlarının duyurulması
J	Konu hakkında yürütücü tarafından bir lisansüstü ders açılması
K	Gelişme raporları I, II, III IV, V, VI
L	Sonuç raporu

10. BAŞARI ÖLÇÜTLERİ ve B PLANI:

Projenin başarı ölçütü olarak Madde 3 (Konu ve Kapsam) J Bendinde ortaya atılan soruların çözümü kavuşturulması alınabilir. Burada esas mesele ``Bir hipergeometrik üçgenlemeye tekabül eden Belyi tasvirinin açıkça tanımla ve galois etkisini incele" sorusudur. Kalan maddeler bir taraftan bu soruya hazırlık, bir taraftan da bu soruya getirilen çözümleri tamamlayıcı mahiyettedir. Özel bir hipergeometrik aile için bu soru proje yürütücüsünün doktora eşdanışmanlığını yürüttüğü Ayberk Zeytin tarafından çözülmüştür. Yukarıda açıkladığımız üzere hipergeometrik eğriler aileler halinde gelmekte ve bir tür ``ağ" oluşturmaktadır. Zeytin'in çözümü bu ağın en küçük parçalarından biri için soruya açıklık getirmektedir. Çözüme kavuşturulan eğri sistemleri özelden genele gittikçe projenin başarısının artacağını bir başarı ölçütü olarak ortaya koyabiliriz. 3.J'de ortaya atılan soruların bir kısmı hesapsal, bir kısmı kombinatorik içeriklidir ve mekanik bir çözümleri vardır. Burada yapılması gereken hesap araçları kullanarak bu bölgeyi keşfe çıkmaktır. Mesela hipergeometrik eğrilerin monodromi gruplarının incelenmesi böyle bir sorudur. Elbette bu hesaplar neticesinde bu monodromi gruplarında bir nizam bulunması ihtimali vardır. 3.J'deki soruların bir kısmı da spekülâtif niteliklidir, canavar grubuyla ilgili soruları bu kapsamda görmekteyiz. Ancak, yaptığımız incelemelerin yeterince sağlam ve sofistike bir kavramsal katkı ortaya koyması durumunda, bu noktaları anlamak üzere yola koyulabiliriz. Yine aynı bentte ortaya atılan sorulardan hipergeometrik eğrilerin tanım cisimlerini ilgilendiren sorular incelemeyi tamamlayıcı mahiyettedir. Bazı noktalarda ise projenin öncesine dönerek Thurston'un sınıflandırdıklarının ötesinde yeni hipergeometrik aileleri sınıflandırmak gerekebilir. Bu doğrultuda bazı işaretler Madde 5'de verilmiştir.

Değerlendirme altında olan projede hipergeometrik eğrilerin incelenmesine dair tek bir akın değil geniş bir cephe tasvir edilmiştir. Dolayısıyla araştırmanın tıkandığı yerde dikkatimizi cephedeki diğer noktalara yoğunlaştırarak proje için ziyadesiyle yeterli çıktı üretebilir. Bu cephenin tümünden verimsiz olma ihtimali elbette bulunmaktadır. Bu durumda bir alternatif B Planı olarak modüler eğrinin başka örtü ailelerini inceleme yolu seçilebilir. Hipergeometrik eğriler modüler eğrinin öklid geometrisinden kaynaklanan örtülerine tekabül ederler. Modüler eğrinin bir başka örtü sınıfı olan ve modüler aralığın ağaç örtülerinden kaynaklanması itibarıyla safi kombinatorik diyebileceğimiz, ve hipergeometrik örtülerin tam aksi cihette bulunan önemli bir örtü sınıfı daha bulunmaktadır. Bu örtü sınıfı üzerinde de bir galois etkisi vardır ve bu etkinin sadık olduğu bilinmektedir (Lenstra). Bu kayda değer sonuç haricinde ağaçlar şimdiye dek "patolojik" bulunarak ihmal edilmiştir. Genel düzlem çizgilerine tekabül eden gönderimler rasyonelken ağaçlara tekabül eden gönderimler birer polinomdur. Bu polinom bazı ağaçlar için ağır hesap yöntemleri kullanarak hesaplanmış ancak çirkin sonuçlar vermiştir: sayfalar dolduran hiçbir düzen göstermeyen ve anlamsız görünen polinomlar. Oysa geometriden kaynaklanan örtüler FCov içinde altkategoriler oluşturmazken ağaçlar oluşturur (ancak bunların galois örtüleri olmadığına dikkat çekmemiz gerekir) ve birçok farklı biçimde prosunlu limite geçilebilir. Sonlu bir ağacın yine ağaç örtülerinden oluşan sistemin prosunlu limiti üzerindeki galois etkisini incelemek, farklı ağaçlar üzerinde uygulandığında bu inşanın verdiği etkiyi mukayese etmek önemli bir mesele olarak önümüzde durmaktadır. Modüler eğrinin bu derece basit tanımlanan ve polinomlara (yani polinom olan rasyonel gönderimlere) tekabül eden örtülerinin literatürde sanıldığı derecede hesap ve inceleme götürmez patolojik bir sınıf olma ihtimali kabul edilemez, gerekli kavramsal aletleri geliştirerek mutlaka bu örtüler de inceleme altına alınmalıdır. Gal-Act projesi esnasında muhtemel bir B planı çerçevesinde ihtiyaç duyulmasa bile proje-ertesine ele alınacak bir mesele olarak ağaç örtüler ortada durmaktadır.

11. PROJE YÜRÜTÜCÜSÜNÜN DİĞER PROJELERİ:**Proje Yürütücüsünün TÜBİTAK Destekli Projeleri**

Proje No	Projedeki Görevi	Proje Adı	Başlama/Bitiş Tarihi	Destek Miktarı (TL)
104T136	Yürütücü	Karmaşık Hiperbolik Geometri	2006-2010	100000 (yaklaşık)

Proje Yürütücüsünün Diğer Projeleri (DPT, BAP, FP6-7 vb.)

Proje No	Projedeki Görevi	Proje Adı	Başlama/Bitiş Tarihi	Destek Miktarı (TL)
	Yürütücü	Modüler grup, kurdellalar ve sarmallar	2010-2011	18000 (yaklaşık)

Proje Yürütücüsünün Son 5 Yılda Yapmış Olduğu Yayınlar

Yazar(lar)	Makale Başlığı	Dergi	Cilt/Sayı/Sayfa	Tarih
A. Muhammed Uludağ	Smooth finite abelian uniformizations of projective spaces and Calabi-Yau orbifolds	Manuscripta Mathematica,	124 No.1 31-44	2007
A. Muhammed Uludağ	Orbifolds and their uniformization	Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions	Progress in Mathematics , Vol. 260	2007
A. Muhammed Uludağ	Galois Coverings of the plane by K3 surfaces	Kyushu Journal of Mathematics	Vol. 59 , No. 2 393-419	2005

(*) Yazım alanları gerektiği kadar uzatılabilir.

12. PROJE EKİBİNİN ÖNERİLEN PROJE KONUSU İLE İLGİLİ DİĞER PROJELERİ:

Proje yürütücüsünün, Galatasaray Üniversitesi Araştırma Fonu tarafından desteklenen “Moduüler grup, kurdellalar ve sarmallar” isimli projesi Gal-Act projesine paralel ve destekler mahiyettedir. Bu proje haricinde konu üzerine, yürütücünün bilgisi dahilinde başka araştırma projesi bulunmamaktadır. Ancak projeden beklenen verim alındığı takdirde ekip üyeleri kendi projelerini geliştirerek katkı yapmaya teşvik edilecektir.

13. BÜTÇE ve GEREKÇESİ:**GENEL BÜTÇE TABLOSU (TL)**

Katkı Kaynağı	Makine Teçhizat (06.1 + 06.3)	Sarf Malzemesi (03.2)	Hizmet Alımı (03.5+3.6)	Seyahat (03.3)	Bursiyer (05.4)	Yardımcı Personel (01.3)	Proje Teşvik İkramiyesi (01.1)	Kurum Hissesi (07.1)	TOPLAM
TÜBİTAK'tan Talep Edilen Katkı	20000	6000	--	9000	144000	--			179000
Öneren Kuruluş Katkısı	5000	2000	--	18000	(***)	--	--	--	25000
Destekleyen Diğer Kuruluş Katkısı (**)	--	--	--	--	--	--	--	--	--
TOPLAM	25000	8000	--	27000	144000	--			204000

TÜBİTAK'TAN TALEP EDİLEN BÜTÇE TABLOSU

Alınması Önerilen Makine – Teçhizat			
Adı / Modeli	Alım Türü	Kullanım Gerekçesi	Bedeli (TL)
Apple MacPro Dizüstü Bilgisayar	☐ Yurt içi ☐ Yurt dışı	Post-Doktora Öğrencisi	3955
Apple MacPro Dizüstü Bilgisayar	☐ Yurt içi ☐ Yurt dışı	Doktora Öğrencisi	3955
Apple MacPro Dizüstü Bilgisayar	☐ Yurt içi ☐ Yurt dışı	Yüksek Lisans Öğrencisi	3955
Apple MacPro Dizüstü Bilgisayar	☐ Yurt içi ☐ Yurt dışı	Proje yürütücüsü	3955
Apple Masaüstü Bilgisayar	☐ Yurt içi ☐ Yurt dışı	Ortak kullanım	4405

Alınması Önerilen Sarf Malzemesi			
Adı	Alım Türü	Kullanım Gerekçesi	Bedeli (TL)
Kırtasiye(yazıcı kartuşu vs)	☐ Yurt içi ☐ Yurt dışı	Tüm proje ekibi için	6000

Hizmet Alımı	
Proje çerçevesinde hizmet alımı talep edilmemektedir.	

Yurt içi Saha Çalışması Seyahat Giderleri	
Proje çerçevesinde yurtiçi saha çalışması yapılmamaktadır.	

Saha Çalışması Dışındaki Faaliyetler İçin Yapılacak Olan Yurt içi / Yurt dışı Seyahat Giderleri (Bilimsel Toplantılara Katılma, Çalışma Ziyaretleri vb.Faaliyetler)(*)	
	Toplam (TL)
Yurt içi Seyahat	3000
Yurt dışı Seyahat	6000
TOPLAM	9000

Bursiyer (*)			
Niteliği (Y. Lisans/Doktora/Doktora Sonrası Araştırmacı)	Projede Yer Alma Süresi (ay)	Burs Miktarı (TL/ay)	Toplam (TL)
Post-doktora	36	1750	63000
Doktora	36	1500	54 000
Doktora	36	450	16200
Yüksek Lisans	36	300	10800
TOPLAM			144000

Bursiyerlerin projedeki görevleri: Post-doktora kapsamında gelmesi düşünülen ve halen proje yürütücüsünün eşdanişmanlığında konu üzerinde doktora yapmakta olan Ayberk Zeytin, doktora çalışmasının doğal devamı olan nitelikte sorularla ilgilenmenin yanı sıra, konuda tecrübe kazanmış olduğundan, ekibe yeni katılacak doktora ve yüksek lisans öğrencilerinin konuya hazırlanmasında da yardımcı olacaktır. Doktora öğrencilerinin birinin tam bursiyer, diğerinin bir başka üniversitede asistanlık yapmakta olan doktora öğrenci olması düşünülmektedir. Tam bursiyer statüsündeki doktora öğrencisine temel kuramsal sorunlardan biri verilecektir. Yine yarım bursiyer statüsünde olacak yüksek lisans öğrencisine hesap ağırlıklı bir konu önermeyi düşünmekteyiz. Bu bursiyer kadrolarının proje başlar başlamaz doldurulması pek kolay değildir, iyi bir seçim yapmak biraz zaman alacaktır. Bu sebeple bursiyerler kaleminde kesintiye gidilmemesi önem taşımaktadır. Yine Post-doktora öğrencisinin tüm proje süresi olan üç sene boyunca bu statüde kalmasını arzulamayız, en iyisi bu esnada kendisine uygun bir kalıcı statüde kadroya geçmesidir.Bu durumda onun yerine bir başka post-doktora öğrencisi istihdam edebilmeyi arzuluyoruz. Bu, aynı zamanda proje boyunca biriken bilimsel artı değerın kaybolup gitmemesi ve genç meslektaşlara aktarılması açısından önemlidir, çünkü projenin kalıcı bir etki bırakmasını sağlayacak olan bu bursiyerlerdir.

Yardımcı Personel	
Proje çerçevesinde yardımcı personel talep edilmemektedir	

13. GERİ BESLEME; DİLEKLER VE İSTEKLER Bu proje metninin matematiksel içerik olan kısımları latex dilinde hazırlanmıştır ve pdf formatına çevrilmiştir. Word belgesi olarak hazırlanan ve idari-mali içeriği olan kısım ise .doc formatında Openoffice programında hazırlanmış ve pdf formatına çevrilmiştir. Sonra tüm bu belgeler tek bir pdf dosyası içinde birleştirilmiştir. Matematiksel içerikli metin yazımında bilindiği gibi Word, Openoffice gibi programlar yetersiz kalmaktadır. Üstelik bu iki metin hazırlama programı arasındaki uyumsuzluklar, bir formattan diğerine geçildiğinde şekil bozukluklarına yol açmaktadır (özellikle büyük tablolar ve yatık sayfalar için). Katıldığım bir panelde şahit olduğum üzere Kurum'un proje yürütücülerinin kullanması için bir kolaylık olarak sunduğu word belgesi şablonları bu açıdan her zaman iyi netice vermemektedir. Öte yandan bilim dünyasında matematiksel metin içeriğinin çoğu bu projede olduğu gibi latex diliyle hazırlanmaktadır ve bunun word-openoffice programlarında yapılması nitelikli araştırmacıların çoğu için zor ve iyi netice vermemesi itibarıyla zevksiz bir iştir. Avrupa birliği çerçeve programlarında sunulan projeler için bu türden şablonlar sunulmamakta ve proje metinlerinin pdf formatında verilmesi beklenmektedir. Sunulan proje metinleri arasındaki uyumu sağlama adına şablon sağlanması iyi olabilir, ancak Kurum'un şablonlara sadık kalmak kaydıyla şablon kullanımı konusunda esneklik gösterebileceğini duyurmasının proje metinlerinin genel kalitesini ve okunabilirliğini artıracaklarını düşünmekteyim.

Proje metninin uzunluğu konusunda herhangi bir sınırlama getirilmediğinden, ve her maddenin istendiği kadar uzatılabileceği, ek sayfa kullanılabileceği ayrıca belirtildiğinden, proje değerlendiricilerinin daha rahat okuyacağını düşündüğüm ve ingilizce hazırlanmış bir proje metni de bu belgeye eklenmiştir.